Instuderingsfrågor SF1693

2022

Du är välkommen att använda detta dokument till att plugga inför tentamen i SF1693 (aka PDE-kursen). Om du vill får du lägga till saker i svaren och har någon råkat skriva fel får du ändra. Se bara till att skriva vad du ändrat och varför så att någon kan kontollera. Det finns inte svar på alla frågor och alla svar är inte heller särskild utförliga. Vi uppmuntrar dig därför att hjälpa till att förbättra svaren! :)

(Btw. det är i princip Edith Frisk Gärtner som skrivit hela dokumentet så skicka lite kärlek till henne $< 3 < 3$)

Innehåll

1 Härled värmeledningsekvationen.

Låt $u(x, y, z, t)$ vara temperaturen och $H(t)$ vara mängden värme i ett område Ω. Då är

$$H(t) = \iiint_\Omega c\rho u \; dxdydz,$$

där c är den specifika värmekapaciteten för materialet och ρ är dess densitet. Anta att vi har ett värmeflöde ut ur ett godtyckligt område $V \subset \Omega$ och en värmekälla $f(\mathbf{x}, t)$. Eftersom det råder värmebalans så vet vi att

$$\frac{d}{dt}\int_V c\rho u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial V} q \cdot ndS = \int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Fouriers lag ger oss att $q = -k\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t)$, där k är konduktiviteten. Vidare får vi med hjälp av Gauss sats att

$$\int_{\partial V} q \cdot ndS = \int_V div(q) d\mathbf{x}.$$

Sammantaget får vi alltså

$$\int_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - div(k\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t)) - f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Eftersom V är ett godtyckligt område i Ω och eftersom uttrycket är kontinuerligt så vet vi att integranden måste vara lika med 0. Detta ger oss

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - div(k\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t)) = f(\mathbf{x}).$$

Utan källterm f så leder detta till uttrycket

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\Delta u(\mathbf{x}, t),$$

där $\alpha = \frac{k}{c\rho}$.

2 *Formulera en explicit finit differensmetod för en värmeledningsekvation och bevisa ett relaterat stabilitetsvillkor.

Givet problemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

vill vi formulera en explicit finit differensmetod. Detta gör vi genom att approximera derivatorna med differenskvoter. Vi använder oss av framåtdifferens i t-led med steglängden Δt och centraldifferens i x-led med steglängden Δx. Approximationen av $u(j\Delta x, n\Delta t)$ benämns u_j^n. Detta ger:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

Vi låter $s = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ och får då

$$u_j^{n+1} = s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1-2s)u_j^n.$$

För att undersöka stabilitetsvillkoret för metoden gör vi ansatsen $u_j^n = X_j T_n$. Om vi sätter in ansatsen i vår finita differensekvation får vi att

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 1 - 2s + s\frac{X_{j+1} + X_{j-1}}{X_j} = \xi$$

där ξ är någon konstan oberoende av x och t. Sålunda vet vi att

$$T_n = \xi^n T_0 \quad \text{och} \quad 1 - 2s + s\frac{X_{j+1} + X_{j-1}}{X_j} = \xi.$$

Lösningen till kontinuerliga formen av ODEn ovan är en linjärkombination av sinus- och cosinusfunktioner, så vi gör ansatsen

$$X_j = A\cos(j\theta) + B\sin(j\theta).$$

Randvillkoret $X_0 = 0$ implicerar att $A = 0$ så vi kan anta att $B = 1$. Det andra randvillkoret $X_J = 0$ där $J = \frac{\pi}{\Delta x}$ ger att $J\theta = k\pi \implies \theta = k\Delta x$. Alltså får vi

$$X_j = \sin(jk\Delta x).$$

Om vi sätter in detta i vår finita differensekvation får vi att

$$\xi = \xi(k) = 1 - 2s(1 - \cos(k\Delta x)).$$

För att schemat ska vara stabilt måste $|\xi(k)| \leq 1$ vilket ger stabilitetsvillkoret

$$s \leq \frac{1}{2}.$$

Alternativ för stabiliteten:

Låt $u_M = \max_m |u_m^n|$. Då blir för varje $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\max_m |u_m^{n+1}| &= |u_M^{n+1}| \\ &= |s(u_{M+1}^n + u_{M-1}^n) + (1-2s)u_M^n| \\ &\leq s(|u_{M+1}^n| + |u_{M-1}^n|) + |1-2s||u_M^n| \\ &\leq (2s + |1-2s|)\max_m |u_m^n| \\ &\leq (2s+|1-2s|)^{n+1} \max_m |u_m^0|, \quad \text{per induktion.}\end{aligned}$$

Stabilitestkriterium fås genom att lösa $2s + |1-2s| \leq 1$, vilket ger $s \leq \frac{1}{2}$.

3 Formulera och härled d'Alembers lösningsformel

Vi vill lösa vågekvationen

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Vi kan lätt faktorisera ekvationen:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0,$$

vilket ger den allmänna lösningen

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).$$

Om vi sätter in våra begynnelsevillkor får vi att

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \phi(x),$$

och eftersom $u_t(x,t) = cf'(x+ct) - cg'(x-ct)$ så får vi

$$u_t(x,0) = cf'(x) - cg'(x) = \psi(x).$$

Vi får ett system med två ekvationer från vilket vi kan lösa ut f och g:

$$\begin{cases} \phi' &= f' + g' \\ \frac{1}{c}\psi &= f' - g', \end{cases}$$

alltså

$$\begin{cases} f' &= \frac{1}{2}\left(\phi' + \frac{\psi}{c}\right) \\ g' &= \frac{1}{2}\left(\phi' - \frac{\psi}{c}\right). \end{cases}$$

Integration ger:

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2c}\int_0^s \psi(t)dt + A \\ g(s) &= \frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2c}\int_0^s \psi(t)dt + B. \end{aligned}$$

Eftersom $f + g = \phi$ så vet vi att $A + B = 0$. Vi gör nu variabelbytet $s = x + ct$ i formeln för f och $s = x - ct$ i formeln för g och får sammantaget att

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds,$$

vilket är d'Alemberts lösningsformel.

4 * Formulera och härled en maximumprincip för värmeledningsekvationen och använd detta för att visa entydighet av lösningar.

Sats Om $u(x,t)$ satisfierar diffusionsekvationen i en rektangel R sådan att $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ så antar u maximum och minimum värden antingen initialt (då $t = 0$) eller på de laterala sidorna (då $x = 0$ eller $x = l$). (Detta är maximumprincipen i svag form).

Bevis Låt M vara det maximala värdet av $u(x,t)$ på sidorna $t = 0$, $x = 0$ och $x = l$. Vi vill visa att $u(x,t) \leq M$ på R. Låt $\epsilon > 0$ och $v(x,t) = u(x,t) + \epsilon x^2$. Från definitionen av v så vet vi att $v(x,t) \leq M + \epsilon l^2$ då $t = 0$, $x = 0$ och $x = l$. Eftersom u är en lösning till diffusionsekvationen så vet vi att

$$v_t - kv_{xx} = u_t - k(u + \epsilon x^2)_{xx} = u_t - ku_{xx} - 2k\epsilon = -2k\epsilon < 0$$

Antag att $v(x,t)$ antar maximum i en inre punkt (x_0, t_0), det vill säga en punkt sådan att $0 < x_0 < l$, $0 < t_0 < T$. Vi vet att i maximumpunkten så är $v_t = 0$ och $v_{xx} \leq 0$. Men detta motsäger att $v_t - kv_{xx} < 0$. Alltså kan v inte ha något inre maximum.

Antag nu att $v(x,t)$ antar maximum då $t_0 = T$ och $0 < x < l$. Då är $v_x(x_0, t_0) = 0$ och $v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$. Vidare så vet vi att för $\delta > 0$ så är $v(x_0, t_0) \geq v(x_0, t_0 - \delta)$, alltså får vi att

$$v_t(x_0, t_0) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{v(x_0, t_0) - v(x_0, t_0 - \delta)}{\delta} \geq 0,$$

så återigen får vi en motsägelse. Men $v(x,t)$ måste ha ett maximum någonstans i R, så vi kan dra slutsatsen att $v(x,t) \leq M + \epsilon l^2$ i R. Vi vet nu att $u(x,t) \leq M + \epsilon(l^2 - x^2)$. Eftersom detta stämmer för alla $\epsilon > 0$ så vet vi att $u(x,t) \leq M$ i R. □

Maximumprincipen kan användas för att visa entydighet av lösningar till Dirichletproblemet av diffusionsekvationen. Låt $u_1(x,t)$ och $u_2(x,t)$ lösa Dirichletproblemet av diffusionsekvationen och sätt $w = u_1 - u_2$. Vi vet då att $w_t - w_{xx} = 0$, $w(0,t) = w(l,t) = w(x,0) = 0$. Vi vet från maximumprincipen att w antar maximum då $x = 0$, $x = l$ eller $t = 0$. Alltså vet vi att $w(x,t) \leq 0$. Men vi vet också att w antar minimum då $x = 0$, $x = l$ eller $t = 0$. Alltså är $w(x,t) \geq 0$. Från detta kan vi dra slutsatsen att $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

5 * Visa att energin bevaras för vågekvationen och använd detta för att visa entydighet av lösningar.

För en oändligt lång sträng

Antag att vi har en oändligt lång sträng med konstanter ρ och T. Då uppfyller strängen vågekvationen:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Vi antar att $\phi(x)$ och $\psi(x)$ försvinner utanför området $|x| \leq R$ och $u(x,t)$ (och sålunda även $u_t(x,t)$) försvinner då $|x| > R + ct$.

Strängen har energin $E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t^2 + T u_x^2 dx$. Vi vill visa att $\frac{dE}{dt} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t u_{tt} + T u_{xt} u_x dx \\ &= \{\text{partiell integration}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t u_{tt} dx - \int_{-\infty}^{\infty} T u_t u_{xx} dx + \Big[T u_t u_x \Big]_{-\infty}^{\infty}. \end{aligned}$$

Den sista termen försvinner eftersom den evalueras i $x = \pm\infty$ så sammantaget får vi att

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(\rho u_{tt} - T u_{xx}) dx = 0,$$

det vill säga energin bevaras.

Vi vill nu visa att vågekvationen med givna begynnelsevillkor har en entydig lösning. Anta att

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \\ v(x,0) = \phi(x) \\ v_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

och låt $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$. Då gäller att

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \\ w(x,0) = 0 & . \\ w_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Eftersom energin bevaras vet vi att

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w_t^2(x,0) + c^2 w_x^2(x,0)dx = 0,$$

eftersom vi vet att $w(x,0) = 0$ och sålunda är även $w_x(x,0) = 0$. Alltså vet vi att $w_t(x,t) = 0 \ \forall x, t$ och $w_x(x,t) = 0 \ \forall x, t$. Vi får nu att

$$w(x,t) = w(x,0) + \int_0^t w_s(x,s)ds = 0,$$

alltså är $u(x,t) = v(x,t)$, så vår lösning är entydig.

I ett område D med homogena Dirichletvillkor

Givet vågekvationen med homogena Dirichletvillkor

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{x},t) - \Delta u(\mathbf{x},t) = 0, & \mathbf{x} \in D \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x},t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial D \\ u(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D \\ u_t(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D. \end{cases}$$

ges energin av

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + (\nabla u)^2 d\mathbf{x}.$$

Derivering med avseende på tiden ger

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \int_D \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\nabla u d\mathbf{x} \\ &= \{\text{Greens första identitet}\} \\ &= \int_D \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\mathbf{x} + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial t}\hat{n} \circ \nabla u dS - \int_D \frac{\partial u}{\partial t}\Delta u d\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$= \int_D \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta u\right)d\mathbf{x} + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial t}\hat{n} \circ \nabla u dS = 0,$$

eftersom vi vet att $u(\mathbf{x}, t) = 0$ då $\mathbf{x} \in \partial D$ och således även $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0$ då $\mathbf{x} \in \partial D$.

6 * Härled en representationsformel för värmeledning med källterm i $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Låt

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = h(x,t), x \in \mathbb{R}, t \in [0,T] \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Sätt $U(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{i\omega x}dx$, då får vi

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\omega,t) + \omega^2 U(\omega,t) = H(\omega,t), \tag{1}$$

där $h(x,t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,t)e^{-i\omega x}dx$.

Vi löser (1) med hjälp av integrerande faktor:

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{\omega^2 t}U(\omega,t)) = H(\omega,t)e^{\omega^2 t}$$
$$e^{\omega^2 \tau}U(\omega,\tau) - U(\omega,0) = \int_0^\tau H(\omega,t)e^{\omega^2 t}dt$$
$$\implies U(\omega,\tau) = e^{-\omega^2 \tau}U(\omega,0) + \int_0^\tau H(\omega,t)e^{-\omega^2(\tau - t)}dt.$$

Inverstransform ger nu

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\frac{e^{-y^2/(4\tau)}}{\sqrt{4\pi\tau}}dy + \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(x-y,t)\frac{e^{-y^2/(4(\tau-t))}}{\sqrt{4\pi(\tau-t)}}dydt.$$

7 * Formulera och bevisa en ekvivalens mellan partiella differentialekvationers variationsform och minimeringsform.

$\ll \implies \gg$ Antag att u löser variationsproblemet. Tag $\varepsilon \in \mathbb{R}$ och $w \in V$. Då får vi:

$$
\begin{aligned}
F(u+\varepsilon w) &= \frac{1}{2}A(u+\varepsilon w, u+\varepsilon w) - L(u+\varepsilon w) \\
&= \frac{1}{2}A(u,u) - L(u) + \varepsilon A(u,w) - \varepsilon L(w) + \frac{\varepsilon^2}{2}A(w,w) \\
&= F(u) + \frac{\varepsilon^2}{2}A(w,w) \\
&\geq F(u)
\end{aligned}
$$

Så $F(u)$ är det minsta möjliga F.

$\ll \Longleftarrow \gg$ Låt $g(\epsilon) = F(u+\epsilon w)$ för $\epsilon \in \mathbb{R}$, $w \in V$. Vi har att

$$
g(\epsilon) = F(u+\epsilon w) = \frac{1}{2}A(u+\epsilon w) - L(u+\epsilon w)
$$
$$
= \frac{1}{2}\Big(A(u,u) + 2\epsilon A(u,w) + \epsilon^2 A(w,w)\Big) - L(u) - \epsilon L(w).
$$

$g(\epsilon)$ är ett polynom av ordning 2. Vi vet att $g(0) \leq g(\epsilon)\ \forall\epsilon$, det vill säga g har ett minimum i $\epsilon = 0$, det vill säga $g'(0) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&g'(\epsilon) = A(u,w) + 2\epsilon A(w,w) - L(w) \\
&g'(0) = A(u,w) - L(w) \\
&g'(0) = 0 \implies A(u,w) = L(w).
\end{aligned}
$$

□

8 * Formulera och bevisa en sats om finita elementmetodens optimala approximation av lösningen $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ till $u''(x) = f(x)$ i $x \in (0,1)$ med randvillkoren $u(0) = u(1) = 0$ i energinorm

Det vi vill visa är att för det $u_h \in V_h$ som löser variationsproblemet $A(u_h, v) = L(v) \forall v \in V_h$ gäller det att:

$$
||u - u_h||_A \leq \min_{v \in V_h} ||u - v||_A
$$

Där energinormen $||u - u_h||_A$ definieras som: $||u - u_h||_A = \sqrt{A(u - u_h, u - u_h)}$.

Bevis:

Låt $u_h \in V_h$ vara den funktion som löser variationsproblemet: $A(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h$ och $u \in V$ vara den funktion som löser: $A(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$. Då får vi att:

$$
A(u - u_h, v_h) = A(u, v_h) - A(u_h, v_h) = L(v_h) - L(v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h
$$

$A(u, v_h) = L(v_h)$ gäller eftersom $V_h \subset V$. Därför får vi för varje $v_h \in V_h$ att:

$$A(u - u_h, u - u_h) = A(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) = A(u - u_h, u - v_h) + A(u - u_h, v_h - u_h)$$
$$= A(u - u_h, u - v_h)$$

Cauchy-Schwartzs olikhet ger:

$$\|u - u_h\|_A^2 = A\left(u - u_h, u - u_h\right) = A\left(u - u_h, u - v_h\right) \leq \|u - u_h\|_A \|u - v_h\|_A$$
$$\implies ||u - u_h||_A \leq ||u - v_h||_A$$

9 * Formulera och bevisa en uppskattning av interpolationsfel med kontinuerliga och styckvis linjära funktioner på intervallet $[0, 1]$.

Sats

Interpolationsfelet i styckvis linjär interpolation med n punkter på intervallet $[0, 1]$ uppskattas av:

$$E_n \leq \max_{0 \leq \xi \leq 1} \frac{|f''(\xi)|}{8} h^2, \quad \text{där } h = \frac{1}{n}.$$

Bevis:

Först definierar vi interpolationsfelet som $E_n = \max_{\xi \in [0,1]} |f(x) - p(x)|$, då p interpolar f i någon jämn uppdelning x_i av $[0, 1]$. Vi undersöker ett intervall (x_i, x_{i+1}). När man utför styckvis linjär interpolation använder man oftast Newtons ansats. Med hjälp av Rolles sats kan man visa [1] att interpolationsfelet i en punkt på intervallet kommer att bli:

$$|f(x) - p(x)| = |\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})|, \quad \text{för något } \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

Vi vet att: $x_i = i \cdot h$ och $x_{i+1} = (i+1) \cdot h$. Ett x på intervallet kan skrivas som $x = x_i + \alpha \cdot h = ih + \alpha h$ där $\alpha \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} |(x_i - x)(x_{i+1} - x)| &= |(ih - ih + \alpha h)((i + 1)h - ih - \alpha h)| \\ &= |\alpha h(h - \alpha h)| \\ &= h^2 |\alpha(1 - \alpha)| \end{aligned}$$

Vi vill nu hitta maximum av $|\alpha(1 - \alpha)|$ på intervallet $[0, 1]$. Vi deriverar:

$$g(\alpha) = \alpha(1 - \alpha)$$

$$g'(\alpha) = 1 - 2\alpha \geq 0 \iff \alpha \leq \frac{1}{2},$$

dvs vi har en maximum för $\alpha = \frac{1}{2}$. Insättning ger

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Så:

$$|(x_i - x)(x_{i+1} - x)| \leq \frac{h^2}{4}$$

Vilket innebär att

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{|f''(\xi)|}{2!} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{|f''(\xi)|}{8} h^2$$

Nu vet vi vad vi får för fel på ett visst intervall (x_i, x_{i+1}). Om vi nu vill veta en felgräns på hela intervallet $[0, 1]$ tar vi det $\xi \in [0, 1]$ s.a. $f''(\xi)$ är så stor som möjligt och då vet vi hur stort det största felet blir. Och vi får slutligen:

$$E_n \leq \max_{0 \leq \xi \leq 1} \frac{|f''(\xi)|}{8} h^2$$

10 Bevisa en feluppskattning av finita elementmetoden för $-u''(x) = f(x)$ i $x \in (0, 1)$ med randvillkoren $u(0) = u(1) = 0$

Låt u_h vara den approximation av $u(x)$ som fås genom finita elementmetoden. Vi vill veta storleken av felet $e = u - u_h$. Låt $||\cdot||_E$ beteckna energinormen. Vi har då att

$$\begin{aligned}
||e||_E^2 &= (e, e)_E \\
&= (u - u_h, u - u_h)_E \\
&= (u - u_h, u - u_h)_E + (u - u_h, v - v)_E \\
&= (u - u_h, u - v)_E + (u - u_h, v - u_h)_E \\
&= (u - u_h, u - v)_E \leq ||e||_E ||u - v||_E,
\end{aligned}$$

det vill säga vi har att $||e||_E \leq ||u - v||_E \ \forall v \in V_h$. Eftersom den linjära interpolanten $\pi u \in V_h$ kan vi använda oss av interpolationsfelet $||u - \pi u||_E \leq Ch||u'||_E$. Slutligen får vi alltså att

$$||e||_E \leq Ch||u'||_E.$$

11 Formulera och bevisa punktvis konvergens av Fourierserier.

Vi säger att en serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergerar till $f(x)$ punktvis på intervallet (a, b) om serien konvergerar till $f(x)$ för varje $x \in (a, b)$. m.a.o:

$$|f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)| \longrightarrow 0 \quad n \longrightarrow \infty \quad \forall x \in (a, b)$$

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig, att dess derivata är kontinuerlig samt att den är periodisk med period 2π. Vi har att Fourierserien definieras av:

$$S_N(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

med koefficienterna

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ny \frac{dy}{\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ B_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ny \frac{dy}{\pi} \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

Om vi sätter in formlerna för A_n och B_n får vi:

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{dy}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ny \frac{dy}{\pi} \cos nx + \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ny \frac{dy}{\pi} \sin nx \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos ny \cos nx + \sin ny \sin nx \right) f(y) \frac{dy}{2\pi} \end{aligned}$$

Det som finns innan parentesen är $\cos(x - y)$ så vi får:

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \cos n(x - y) \right) f(y) \frac{dy}{2\pi}$$

Vi gör ett variabelbyte: $\theta = y - x$ ($\cos(-\theta) = \cos(\theta)$) och får:

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \cos n\theta \right) f(x + \theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

Och är man klurig (och gör som boken på sida 137) kommer man fram till att:

$$1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \cos n\theta = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$

Här började jag ge upp på den här uppgiften. Men jag tänkte att jag kan ge den ett sista kläm. Den här sista biten får mig att vilja spy dock...

Så vi får:

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin[(N + \frac{1}{2})\theta]}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right) f(x + \theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

Och nu måste vi förstås kolla att $S_N(x) - f(x) \to 0$ då $N \to \infty$ för annars har vi ju ingen kovergens.. duh. Så då får vi:

$$S_N(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin[(N + \frac{1}{2})\theta]}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right) [f(x + \theta) - f(x)] \frac{d\theta}{2\pi}$$

Och sen är vi kluriga igen och inser att $\phi_N = \sin[(N+\frac{1}{2})\theta]$ är en ortogonalbas på intervallet $(-\pi, \pi)$.

Så om vi säger att

$$g(\theta) = \frac{f(x+\theta) - f(x)}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

Får vi att:

$$S_N(x) - f(x) = (g, \phi_N) \longleftarrow \text{det där är integral-inre-produkten :)}$$

Och nu slänger jag en till superduperinsikt på dig: BESSELS OLIKHET!!! (som du inte hade en aning om existerade förrän nu... men grattis < 3). AH så Bessels olikhet ser ut såhär:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{|(g, \phi_N)|^2}{||\phi_N||^2} \leq ||g||^2$$

Om vi pallar räkna lite får vi att $||\phi_N||^2 = \pi$ så om $||g||^2 < \infty$ måste summan konvergera och alltså $|(g, \phi_N)|^2 \to 0$ då $N \to \infty$ och det var ju det vi ville visa! Så efter det är vi klara! PUST! (om du är med än så länge så styrkekramar till dig).

$$||g||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[f(x+\theta) - f(x)]^2}{\sin^2\frac{1}{2}\theta} \mathrm{d}\theta$$

Men det här ser ju integrerbart ut... Enda problemet vi kan få är då $\theta = 0$ för då är ju sinustermen 0 (*läskigt*). Så vi kollar det gränsvärdet:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \to 0} \frac{f(x+\theta) - f(x)}{\sin\frac{1}{2}\theta} &= \lim_{\theta \to 0} \frac{f(x+\theta) - f(x)}{\theta} \cdot \frac{\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \\
&= \{\text{L'Hospitals regel}\} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{f(x+\theta) - f(x)}{\theta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \cos\frac{1}{2}\theta} \\
&= 2f'(x)
\end{aligned}$$

So OK i nollan! Vi får alltså att $||g||^2 < \infty$. Och därmed är detta mardrömsbevis slut. (Jag skulle dock gissa att det finns värre bevis gömda någonstans i det här dokumentet) Spoileralert: Det finns det.

12 *. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

Sats Låt V vara ett Hilbertrum med normen $||\cdot||_V$ och skalärprodukten $(\cdot,\cdot)_V$. Antag vidare att A är en billinjär form och L en linjär form som uppfyller:

1. A är symmetrisk, det vill säga $A(v,w) = A(w,v)\ \forall v, w \in V$;
2. A är V-elliptisk, det vill säga $\exists \alpha > 0$ sådant att $A(v,v) \geq \alpha ||v||_V^2\ \forall v \in V$;
3. A är kontinuerlig, det vill säga $\exists C \in \mathbb{R}$ sådant att $|A(v,w)| \leq C||v||_V||w||_V$; och
4. L är kontinuerlig, det vill säga $\exists \Lambda \in \mathbb{R}$ sådant att $|L(v)| \leq \Lambda ||v||_V\ \forall v \in V$.

Då finns det en unik funktion $u \in V$ sådan att $A(u,v) = L(v)\ \forall v \in V$ och stabilitetsuppskattningen $||u||_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$ håller.

Bevis Vi vill hitta $u \in V$ sådan att

$$F(u) \leq F(v)\ \forall v \in V, \tag{Min}$$

eftersom detta enligt uppgift 7 är ekvivalent med variationsproblemet. Energinormen $||v||^2 = A(v,v)$ är ekvivalent med V-normen, eftersom enligt 2. och 3.:

$$\alpha||v||_V^2 \leq A(v,v) = ||v||^2 \leq C||v||_V^2.$$

Vi sätter

$$\beta = \inf_{v \in V} F(v).$$

Då är $\beta \in \mathbb{R}$, eftersom

$$F(v) = \frac{1}{2}||v||^2 - L(v) \geq \frac{1}{2}||v||^2 - \Lambda||v|| \geq -\frac{\Lambda^2}{2}.$$

Vi vill hitta en lösning till (Min). Infimum egenskapen gör att vi kan skapa en följd $(v_i) \in V$ (välj tex $\epsilon_i = \frac{1}{i},\ i \in \mathbb{N}$) sådan att

$$F(v_i) \to \beta = \inf_{v \in V} F(v).$$

Vi vill nu se att v_i faktiskt konvergerar mot ett gränsvärde:

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{v_i - v_j}{2}\right|\right|^2 &= \{\text{parallellogramlagen}\} \\
&= \frac{1}{2}||v_i||^2 + \frac{1}{2}||v_j||^2 - \left|\left|\frac{v_i + v_j}{2}\right|\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}||v_i||^2 - L(v_i) + \frac{1}{2}||v_j||^2 - L(v_j) - \left(\left|\left|\frac{v_i + v_j}{2}\right|\right|^2 - 2L\left(\frac{v_i + v_j}{2}\right)\right) \\
&= F(v_i) + F(v_j) - 2F\left(\frac{v_i + v_j}{2}\right) \leq F(v_i) + F(v_j) - 2\beta \to 0.
\end{aligned}$$

Alltså är $\{v_i\}$ en Cauchyföljd i V och eftersom V är ett Hilbertrum (och således komplett) så har vi att $v_i \to u \in V$.

Vidare så har vi att

$$\begin{aligned}
|F(v_i) - F(u)| &= |\frac{1}{2}(||v_i||^2 - ||u||^2) - L(v_i - u)| \\
&= |\frac{1}{2}A(v_i - u, v_i - u) - L(v_i - u)| \\
&\leq \{\text{triangelolikhet och kontinuitet}\} \\
&\leq \left(\frac{C}{2}||v_i + u||_V + \Lambda\right)||v_i - u||_V \to 0,
\end{aligned}$$

det vill säga $F(u) = \beta$. Alltså existerar det en funktion $u \in V$ sådan att $F(u) \leq F(v)\ \forall v \in V$. För att verifiera stabilitetsestimationen sätter vi $v = u$ i variationsformen av problemet och använder 2. och 3. för att få

$$\alpha||u||_V^2 \leq A(u, u) = L(u) \leq \Lambda||u||_V,$$

alltså är

$$||u||_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}.$$

Slutligen vill vi kontrollera entydigheten för u. Låt u_1 och u_2 lösa (Min). Då löser u_1 och u_2 det ekvivalenta variationsproblemet $A(u, v) = L(v)\ \forall v \in V$, det vill säga vi har att

$$A(u_1 - u_2, v) = 0, \forall v \in V. \tag{2}$$

Vi använder nu V-ellipticitet för A. Notera att $u_1 - u_2 \in V$, så

$$\alpha||u_1 - u_2||_V^2 \leq A(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Då har vi att

$$\begin{aligned}
&0 \leq \alpha||u_1 - u_2||_V^2 \leq 0 \\
\Longrightarrow\ &0 \leq ||u_1 - u_2||_V^2 \leq 0 \\
\Longrightarrow\ &||u_1 - u_2||_V = 0,
\end{aligned}$$

det vill säga $u_1 = u_2$ och alltså är vår lösning entydig.

13 *. Formulera Lax-ekvivalenssats och visa ett exempel på att stabilitet och konsistens medför konvergens för en numerisk metod som approximerar en partiell differentialekvation.

Sats För ett linjärt rättställt problem är kombinationen av stabilitet och konsistens ekvivalent med konvergens.

Exempel Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= u_0. \end{cases} \tag{3}$$

Fouriertransformering i x-led ger

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t), \omega \in \mathbb{R},$$

där $\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$ har lösningen

$$\hat{u}(\omega, t) = e^{-t\omega^2} \hat{u}(\omega, 0),$$

så $\hat{H} = e^{-\Delta t \omega^2}$ är den exakta lösningsoperatorn relaterad till

$$\hat{u}(\omega, t + \Delta t) = \hat{H} \hat{u}(\omega, t).$$

Betrakta den explicita Eulermetoden relaterad för (2):

$$u_{n,j} \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$$
$$\frac{u_{n+1,j} - u_{n,j}}{\Delta t} = \frac{u_{n,j+1} - 2u_{n,j} + u_{n,j+1}}{\Delta x^2}.$$

Med $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$:

$$u_{n+1,j} = u_{n,j}(1 - 2\lambda) + \lambda(u_{n,j+1} + u_{n,j-1}).$$

Vi utvidgar nu lösningen till alla $x \in \mathbb{R}$ genom att sätta

$$U(n + 1, x) = U(n, x)(1 - 2\lambda) + \lambda(U(n, x + \Delta x) + U(n, x - \Delta x)).$$

Fouriertransformering ger nu

$$\begin{aligned} \hat{U}(n + 1, \omega) &= \hat{U}(n, \omega)(1 - 2\lambda) + \lambda(e^{i\omega\Delta x} + e^{-i\omega\Delta x})\hat{U}(n, \omega) \\ &= (1 - 2\lambda + 2\lambda \cos(\Delta x \omega))\hat{U}(n, \omega) \\ &= \hat{G}\hat{U}(n, \omega) \\ &= \hat{G}^n \hat{U}(0, \omega). \end{aligned}$$

Vi kontrollerar nu stabilitet för metoden, det vill säga vi vill kontrollera om $||\hat{G}||_{L^\infty} \leq e^{kn\Delta t}$. Vi betraktar von Neumanns stabilitetsvillkor: $||\hat{G}||_{L^\infty} \leq 1$.

$$||\hat{G}||_{L^\infty} = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{G}(\omega)| = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |(1 - 2\lambda + 2\lambda \cos(\Delta x \omega))| \leq 1,$$

det vill säga vi kräver att $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Vi kontrollerar nu konsistens, det vill säga vi vill kontrollera att $||(\hat{G} - \hat{H})v|| \leq C\Delta t^{p+1}$, där p är konvergensordningen. Om u_1 är den approximativa lösningen efter ett tidssteg har vi enligt parsevals likhet:

$$2\pi ||u_n||_{L^2}^2 = ||\hat{U}_n||_{L^2}^2$$

Så vi får:

$$\begin{aligned}||u(x,1)-u(x,\Delta t)||_{L^2} &= \{\text{Parsevals likhet}\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||(\hat{G}-\hat{H})\hat{U}_0||_{L^2}\\ &= |(\hat{G}-\hat{H})\hat{U}_0|\\ &= |(1-2\lambda+2\lambda\cos(\Delta x\omega)-e^{-\Delta t\omega^2})\hat{U}_0|\end{aligned}$$

Definiera $y := \Delta t\cdot\omega^2 \leq 1$. Då får vi:

$$|1-2\lambda+2\lambda\cos\sqrt{\frac{y}{\lambda}}-e^{-y}| = \{\text{taylor}\} = (1-2\lambda+2\lambda(1-\frac{y}{2\lambda}+O(y^2))-(1-y+O(y^2))))$$

Där vi har att:

$$O(y^2)=O(\Delta t^2\omega^4)=O(\Delta t^2)\omega^4$$

Så tillslut får vi att normen av skillnaden blir:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}||(\hat{G}-\hat{H})\hat{U}_0||_{L^2}\approx O(\Delta t^2)\omega^4|\hat{U}_0|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\leq C\Delta t^2 \text{ OK Konsistent!}$$

Nu är det snart dags för konvergens men kolla ba först lite på det här coola:

$$\begin{aligned}||u(n,x)||_{L_2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||\hat{u}(n,\omega)||_{L^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||\hat{G}\hat{u}(n-1,\omega)||_{L_2}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||\hat{G}||_{L_\infty}||\hat{u}(n,\omega)||_{L^2}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||\hat{G}||^n_{L^\infty}||\hat{u}(0,\omega)||_{L^2},\end{aligned}$$

Och det här är stabilt, eftersom $||\hat{G}||^n_{L_\infty}\leq 1$. Tjohooo!

Nu kan vi tillslut undersöka konvergens! Vi har att

$$\begin{aligned}||u(n,x)-u(n\Delta t,x)||_{L^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||(\hat{G}^n-\hat{H}^n)\hat{u}_0||_{L^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||(\hat{G}^{n-1}+\hat{G}^{n-2}\hat{H}+...+\hat{G}\hat{H}^{n-2}+\hat{H}^{n-1})(\hat{G}-\hat{H})\hat{u}_0||_{L^2}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||\hat{G}^{n-1}+...+\hat{H}^{n-1}||_{L^\infty}||(\hat{G}-\hat{H})\hat{u}_0||_{L^2}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}nC\Delta t^2=\{\Delta t=\frac{T}{n}\}=kT\Delta t=O(\Delta t),\end{aligned}$$

alltså konvergerar metoden. Det vill säga i detta fall medför stabilitet och konsistens konvergens.

14 *. Formulera och bevisa en maximumprincip för harmoniska funktioner.

Sats Låt D vara en öppen, begränsad och sammanhängande mängd och låt $u(x,y)$ vara en harmonisk funktion som är kontinuerlig på $\bar{D}=D\cup\partial D$. Då antas maximum- och minimumvärden av u på ∂D och ingenstans inuti (såvida inte $u\equiv$ konstant).

Bevisidé Låt $\mathbf{x_0} \in D$ vara en inre maxpunkt. I en maxpunkt så gäller att $u_{xx}(\mathbf{x_0}) \le 0$ och $u_{yy}(\mathbf{x_0}) \le 0$, alltså är $u_{xx} + u_{yy} \le 0$.

Låt $\epsilon > 0$ och sätt $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \epsilon|\mathbf{x}|^2$. Då är

$$\Delta v(\mathbf{x}) = \Delta u(\mathbf{x}) + 4\epsilon = 0 + 4\epsilon > 0.$$

Låt $\mathbf{y_0}$ vara en inre maxpunkt till v. Då är

$$v_{xx}(\mathbf{y_0}) + v_{yy}(\mathbf{y_0}) \le 0,$$

så det existerar inte någon sådan $\mathbf{y_0}$. Eftersom v är kontinuerlig i $\bar{D}$ måste v anta maximum någonstans i $\bar{D}$, alltså är enda möjligheten att v antar maximum i $\mathbf{y}_* \in \partial D$. Vidare har vi att

$$u(\mathbf{x}) \le v(\mathbf{x}) \le v(\mathbf{y}_*) \le u(\mathbf{y}_*) + \epsilon|\mathbf{y}_*|^2 \le u(\mathbf{y}_*) + \epsilon l^2,$$

där l är största avståndet från origo till randen av D. Eftersom detta gäller för alla $\epsilon > 0$, så har vi att $u(\mathbf{x}) \le \max_{\partial D} u$ för alla $\mathbf{x} \in D$.

15 *. Formulera och härled Poissons representationsformel för harmoniska funktioner i en cirkel.

Betrakta ekvationen

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{för } x^2 + y^2 < a^2 \\ u = h(\theta), & \text{för } x^2 + y^2 = a^2. \end{cases} \tag{4}$$

Vi gör ansatsen $u(r, \theta) = R(r)T(\theta)$ och får

$$\begin{aligned} 0 = \Delta u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) R(r)T(\theta) \\ &= R''(r)T(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)T(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)T''(\theta) \\ \implies 0 &= \frac{r^2(R''(r) + \frac{1}{r}R'(r))}{R(r)} + \frac{T''(\theta)}{T(\theta)}. \end{aligned}$$

Vi sätter $\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\lambda$, där $\lambda > 0$ är någon konstant. Vi får nu den ordinära differentialekvationen

$$T''(\theta) = -\lambda T(\theta).$$

där $T(\theta + 2\pi) = T(\theta)$ för alla θ. (3) har lösningen

$$T(\theta) = Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta} + Be^{-i\sqrt{\lambda}\theta}, \lambda \neq 0$$

Om $\lambda = 0$ får vi istället lösningen $T(\theta) = A$.

Om $\lambda < 0$ så är $T(\theta) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$, vilket inte är en periodisk funktion, så vi kan dra slutsatsen att $\lambda \geq 0$.

Om $\lambda > 0$ så ger de periodiska randvillkoren att $\sqrt{\lambda} = n, n = 1, 2, ...$, alltså är $T(\theta) = A_n e^{in\theta} + B_n e^{-in\theta}$, $n = 0, 1, 2, ...$

Den andra ekvationen som vi vill lösa kan nu skrivas

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0.$$

Detta är Eulers ekvation och kan lösas med ansatsen $R(r) = r^\alpha$. Detta ger

$$\begin{gathered}(\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2)r^\alpha = 0 \\ \implies \alpha^2 - n^2 = 0 \implies \alpha = \pm n.\end{gathered}$$

I specialfallet då $n = 0$ får vi att

$$R'' + \frac{1}{r}R' = \frac{1}{r}(rR')' = 0 \implies R' = \frac{C}{r} \implies R = C\ln r + D.$$

För $n \neq 0$ får vi istället

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n}.$$

Randvillkoret säger oss att $R(0)$ ska vara ändlig; detta leder oss till att avvisa lösningarna $R(r) = Dr^{-n}$ och $R(r) = C\ln r$. Vi får sammantaget att

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n cos(n\theta) + B_n sin(n\theta)),$$

och vi kräver att $u(a, \theta) = h(\theta)$.

Detta är hela Fourierserien för $h(\theta)$ så vi får Fourierkoefficienterna

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi)\cos(n\phi)d\phi \\ B_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi)\sin(n\phi)d\phi.\end{aligned}$$

På komplex form får vi att

$$u(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta},$$

där $c_n = \frac{1}{2\pi a^{|n|}} \int_0^{2\pi} h(\phi) e^{-in\phi} d\phi$.

Detta ger

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \frac{1}{2\pi a^{|n|}} \int_0^{2\pi} h(\phi) e^{in(\theta-\phi)} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in(\theta-\phi)} d\phi. \end{aligned}$$

Vi räknar ut summan separat:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in(\theta-\phi)} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n} e^{in(\theta-\phi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n} e^{-in(\theta-\phi)} \\ &= 1 + \frac{\frac{r}{a} e^{i(\theta-\phi)}}{1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta-\phi)}} + \frac{\frac{r}{a} e^{-i(\theta-\phi)}}{1 - \frac{r}{a} e^{-i(\theta-\phi)}} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta-\phi)}, \end{aligned}$$

där den sista likheten följer från plussning av kvot och vanliga beräkningar med komplex exponential.

Detta ger oss Poissons formel i cirkeln:

$$u(r,\theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi)}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta-\phi)} d\phi.$$

Vi vill nu skriva om Poissons formel på ett mer geometriskt sätt. Låt $\mathbf{x} = (x,y)$ och låt $\mathbf{x}'$ vara en punkt på randen. Cosinussatsen ger oss att $a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2$. Vi får nu

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{2\pi a} \int_{|\mathbf{x}'|=a} \frac{u(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} dS(\mathbf{x}').$$

(eftersom u uppfyller (4), vilket ger $u = h$ på randen, och $dS(\mathbf{x}') = a d\phi$)

16 Formulera och härled medelvärdesegenskapen för harmoniska funktioner.

Sats Låt u vara en harmonisk funktion i en disk D som är kontinuerlig i $\bar{D}$. Då är värdet av u i centrum av D lika med medelvärdet av u på dess omkrets.

Bevis Sätt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ i Poissons formel. Vi får då

$$u(\mathbf{0}) = \frac{a^2}{2\pi a} \int_{|\mathbf{x}|=a} \frac{u(\mathbf{x}')}{a^2} dS(\mathbf{x}'),$$

vilket är medelvärdet av u på omkretsen $|\mathbf{x}| = a$.

17 Visa att δ-funktionen är en distribution och att $e^{-x^2/(4t)}/\sqrt{4\pi t}$ konvergerar svagt (dvs i distributionsmening) mot δ-funktionen när $t \to 0+$.

Låt $S = \{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \max_{x \in \mathbb{R}} \left(1 + |x|^k\right) |\phi^{(n)}| \leq c_{n,k} \, \forall n, k \in \mathbb{N}\}$. Då definierar $(\delta, \phi) = \phi(0)$ för alla $\phi \in S$ den så kallade δ-funktionen, där

$$(f, \phi) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Vi ser att

$$\begin{aligned}
(\delta, c_1\phi_1 + c_2\phi_2) &= (c_1\phi_1 + c_2\phi)(0) \\
&= c_1\phi_1(0) + c_2\phi_2(0) \\
&= c_1(\delta, \phi_1) + c_2(\delta, \phi_2)
\end{aligned}$$

för alla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ och $\phi_1, \phi_2 \in S$, så avbildningen är linjär.

Antag nu att $\phi_n \to \phi$ då $n \to \infty$. Då är för alla $n \in \mathbb{N}$

$$(\delta, \phi_n) = \phi_n(0) \to \phi(0) = (\delta, \phi)$$

då $n \to \infty$, så avbildningen är kontinuerlig. Således definierar avbildningen en distribution, så δ-funktionen är mycket riktigt en distribution.

Notera nu att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \, \mathrm{d}x = 1$$

för alla $0 < t \in \mathbb{R}$, och betrakta en godtycklig funktion $\phi \in S$. Då är

$$\begin{aligned}
|\left(\frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}, \phi\right) - \phi(0)| &= |\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \phi(x) \, \mathrm{d}x - \phi(0)| \\
&= |\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \phi(x) \, \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \, \mathrm{d}x \cdot \phi(0)| \\
&= |\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \phi(x) \, \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \phi(0) \, \mathrm{d}x| \\
&= |\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\phi(x) - \phi(0)\right) \mathrm{d}x| \\
&\leq |\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \cdot a|x| \, \mathrm{d}x|.
\end{aligned}$$

för något $a \in \mathbb{R}$, eftersom $\phi \in S$. Låt nu $y = \frac{x}{\sqrt{2t}} \implies \mathrm{d}x = \sqrt{2t}\mathrm{d}y$. Då är ovanstående likamed

$$b\sqrt{t}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot y \, \mathrm{d}y$$

för något $b \in \mathbb{R}$. Men detta är likamed $c\sqrt{t}$ för något $c \in \mathbb{R}$. Sammanfattningsvis är då

$$|\left(\frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}, \phi\right) - \phi(0)| = c\sqrt{t} \to 0$$

då $t \to 0+$. Alltså ser vi per definition av δ-funktionen och svag konvergens att $\frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ konvergerar svagt mot δ-funktionen då $t \to 0+$, vilket skulle visas.

Referenser

[1] T. Sauer. "Numerical Analysis". I: Pearson, 2017. Kap. 3.2.2. ISBN: 9780321783677.