

Forelesning 2

January 28, 2022

1 Schrödinger ligningen

Vi starter med å skrive opp Schrödingers berømte bevegelsesligning for en enkelt partikkel i et potensial $V(x)$ som

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

hvor m er partikkelenmasse og $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. $\Psi(x, t)$ er partikkelen bølgefunksjon, som vi skal se bestemmer hvordan ikke-relativistiske (altså med fart $v \ll c$) partikler beveger seg. Schrödinger ligningen (S.L.) gjelder ikke i e.g. elementærpartikkel-fysikk og kan ikke egentlig beskrive fotoner, men den er fortsatt veldig nyttig og kan beskrive et utall av fenomener som atom-, molekyl-, kjærne of faststoff-fysikk.

Bølgefunksjonen er en sannsynlighetsamplitude og den bestemmer sannsynligheten for å finne partiklen ved x ved tid t . Dette er en ligning som ikke kan utledes fra klassisk mekanikk.

1.1 Schrödinger's ligning for en fri partikkel

Vi skal nå fokusere på en fri partikkel, altså en partikkel som ikke har noe potensial, dvs $V(x) = 0$. Vi har da

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (2)$$

Dette er en bølgeligning på samme måte som den klassiske bølgeligningene som kommer fra e.g. Maxwell's ligninger, men Schrödinger ligningen er kompleks. Vi ser at løsninger av S.L. må være på formen

$$\Psi(x, t) = C e^{i(kx - \omega t)} \quad (3)$$

Altså elementære løsninger av S.L. for en fri partikkel er planbølger. Siden S.L. er kompleks er ikke de enkle harmoniske sinus og cosinus funksjonene løsninger (prøv å sette inn for e.g. $\cos(kx - \omega t)$), og vi trenger de komplekse eksponentielle funksjonene. Ved innsettelse av planbølgen i S.L. finner vi

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar \omega \quad (4)$$

Vi bruker nå de Broglie's uttrykk for bevegelsesmengden $p = \frac{\hbar}{\lambda} = \hbar k$ og at $E = \hbar \omega$. Som vi her antar gjelder for alle partikler, ikke bare fotoner. Vi finner da at

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (5)$$

1.2 Fysisk tolkning av bølgefunksjonen

Siden $\Psi(x, t)$ er en kompleks funksjon kan det ikke være noe vi kan måle direkte. Vi kaller det også sannsynlighetsampliduen til partikkelen, siden den bestemmer sannsynligheten for å måle partikkelen ved posisjon x ved tid t . Born regelen (etter den tyske fysikeren Max Born) sier at

$$|\Psi(x, t)|^2 dx = \text{sannsynligheten for å måle en partikkel mellom } x \text{ og } dx \text{ ved tid } t \quad (6)$$

Vi har altså at $|\Psi(x, t)|^2$ er partikkelen sannsynlighetstetthet. Dvs. at hvis vi kjenner $\Psi(x, t)$ for et elektron som beveger seg i en dimensjon kan bruke den til å e.g. finne sannsynligheten for å sannsynligheten for finne det mellom x_1 og x_2 som

$$\int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x, t)|^2 dx \quad (7)$$

For at vi skal kunne tolke $|\Psi(x, t)|^2$ som en sannsynlighetstetthet må vi kreve at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (8)$$

Vi trenger at bølgefunksjonen er **normaliserbar**, slik at vi kan tolke den probabilistisk. Fysikalsk kommer det av at partikkelen må nødvendigvis finnes et eller annet sted, og hvis vi integrerer over hele domenet (fra $-\infty$ til ∞) så må sannsynligheten være 1 for at vi finner partikkelen.

Vi kan alltid normalisere bølgefunkasjonen med mindre sannsynlighetstetthet divergerer for $|x| \rightarrow \infty$, hvis dette ikke er tilfellet kaller vi bølgefunksjonene **kvadrat integrerbar**. Dette krever vi at alle fysikalske bølegfunksjoner må være.

1.3 Bevaring av sannsynlighet

Vi skal nå se på om en bølgefunksjon som vi normaliserer ved et tidspunkt t blir normalisert, altså om sannsynlighetstettheten er bevart i tid.

For å se på hvordan sannsynlighetstettheten endrer seg i tid beregner vi den tidsderiverte

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = \frac{\partial \Psi \Psi^*}{\partial t} = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \quad (9)$$

Vi har at vi kan skrive om S.L. slik at den gir oss

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi \right) \quad (10)$$

Vi antar at $V(x)$ er reelt og kompleks konjugerer denne ligningen

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + V(x) \Psi^* \right) \quad (11)$$

Vi bruker disse to ligningene og finner

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = i \frac{\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \right) \quad (12)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[i \frac{\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \right) \right] \quad (13)$$

Vi definerer nå **sannsynligetsstrømmen** som

$$j_x(x, t) = i \frac{\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \quad (14)$$

Dette gir

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} + \frac{\partial j_x(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

Som er **kontinuitetsligningen** for sannsynlighetstettheten. Dette er ekvivalent til kontinuitetsligningen fra elektrodynamikk som sier at ladningen må være bevart. Bevaring av ladning følger fra Maxwell's ligninger på samme måte som bevaring av sannsynlighet fra Schrödinger's ligning.

Videre har vi nå at

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial j_x(x, t)}{\partial x} dx = \left[-j_x(x, t) \right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (16)$$

hvor vi har brukt at $\Psi \rightarrow 0$ når $|x| \rightarrow \infty$, som vi vet behøves for at bølgefunksjonen skal være normalisert.

Hvis vi ser på hvordan sannsynligheten for en partikkelen innenfor et interval $[a, b]$ endrer seg har vi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = \left[-j_x(x, t) \right]_a^b = -j_x(b, t) + j_x(a, t) \quad (17)$$

Vi ser i Fig. 1 et eksempel på hvordan sannsynlighetsstrømmen bestemmer endringen i sannsynlighetstetthet, og vi har fra kontinuitetsligningen at hvis sannsynlighetstettheten minker et sted, så dukker det ikke opp på et helt annet sted, men det flyter kontinuerlig mot et annet nærliggende område.

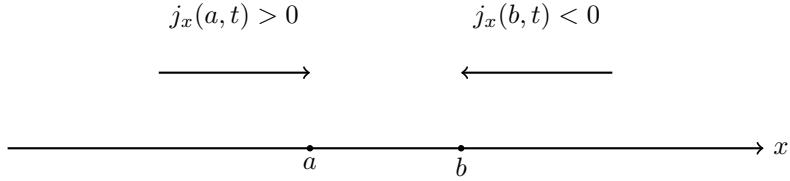


Figure 1: *sannsynlighetsstrømmen inn og ut av et område $[a, b]$ bestemmer hvordan sannsynlighetstettheten endrer seg på intervallet. Hvis e.g. $j_x(b, t)$ er negativ flyter sannsynlighetstrømmen inn i intervallet og det blir mer sannsynlig at partikkelen finnes der. Tilsvarende hvis $j_x(a, t)$ er positiv, da flyter sannsynlighetstrømmen inn i $[a, b]$.*

1.4 Forventningsverdier og uskarphet

Forventningsverdien til en måling av en partikkelen med bølgefunksjon $\Psi(x, t)$ er

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x, t)|^2 dx \quad (18)$$

hvor vi igjen antar at $|\Psi(x, t)|^2$ er normalisert. Forventningsverdien er ikke nødvendigvis den verdien vi burde forvente å måle, og kan i noen tilfeller til og med være en verdi som ikke er mulig å måle, men derimot gjennomsnittet av det man mäter hvis man gjenntar eksperimentet mange ganger. Videre har vi også at

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x, t)|^2 dx \quad (19)$$

Vi kan nå også se på standard avviket i posisjon til målingene, som vi har gitt som

$$(\Delta x)^2 = \langle x - \langle x \rangle \rangle \quad (20)$$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (21)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x, t)|^2 dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x, t)|^2 dx \right]^2 \quad (22)$$

I kvantefysikk kaller vi Δx uskarpheten i partikkelen's posisjon, som viser til en fundamental usikkerhet i bestemmelse av partikkelen's posisjon siden partikkelen er beskrevet av bølgefunksjonen og den har ingen definitive posisjon.

Tilsvarende har vi for uskarpheten i bevegelsesmengde i x-retning

$$(\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 \quad (23)$$

$$(24)$$

Vi skal snart se hvordan vi beregner $\langle p_x \rangle$ fra bølgefunksjon i praksis.

1.5 Ehrenfest's teorem

Schrödinger's ligning er kvantemekanikken's bevegelsesligning, og kan brukes til å finne hvordan forventningsverdier utvikler seg i tid. Men vi vil at kvantefysikk spådommer er konsistent med klassisk fysikk i de riktige grensene (dette kalles noen ganger korrespondanseprinsippet). Vi vet at i klassisk fysikk har vi

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p_x(t)}{m} \quad (25)$$

Det betyr at vi burde ha

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p_x \rangle}{m} \quad (26)$$

Vi skriver ut dette vha. definisjonen på forventningsverdi som

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx \quad (27)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d\Psi\Psi^*}{dt} dx \quad (28)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}) \right) dx \quad (29)$$

hvor vi har brukt Lign. [12]; S.L. multiplisert med den kompleks konjugerte av bølgefunksjonen. Vi kan løse dette ved hjelp av delvis integrasjon

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}) dx + \left[x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}) \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \quad (30)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}) dx \quad (31)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial x}) dx \quad (32)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\hbar}{m} \Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx \quad (33)$$

$$= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx \quad (34)$$

Vi kan sammenligne dette med Lign. [26] og vi ser at vi da har

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx \quad (35)$$

Hvor vi nå også har en måte å finne forventningsverdien til bevegelsesmengden.

Vi har også i klassisk fysikk at

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} = -V'(x) \quad (36)$$

Hvilket betyr at vi også skulle forvente etter korrespondanseprinsippet å ha i kvantefysikken

$$\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = - \langle \frac{dV}{dx} \rangle \quad (37)$$

Dette og Lign. [26] kaller vi **Ehrenfest's teorem**. Selv om det strengt tatt bare er to spesielle tilfeller av et mer generelt teorem.

1.6 Heisenberg's uskärphetsrelasjon

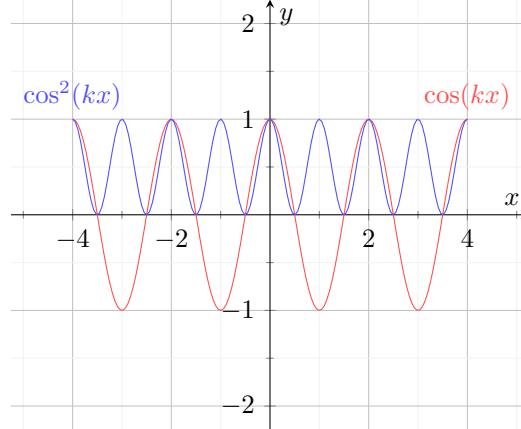
Hvis vi ser for oss en bølge med en enkelt bølgelengde så kan vi lett måle bølgens bølgelengde men ikke hvor bølgen er; bølgen er over alt. På den andre siden kan vi se for oss en partikkel; den er helt nøyaktig lokalisert i rommet, men vi kan ikke bestemme bølgelengden til partikkelen. Siden vi vet at bevegelsesmengden til partikkelen er gitt ved $p = \frac{\hbar}{\lambda}$ har vi da at bevegelsesmengden ikke kan bestemmes entydig.

Vi har sett at planbølger på formen

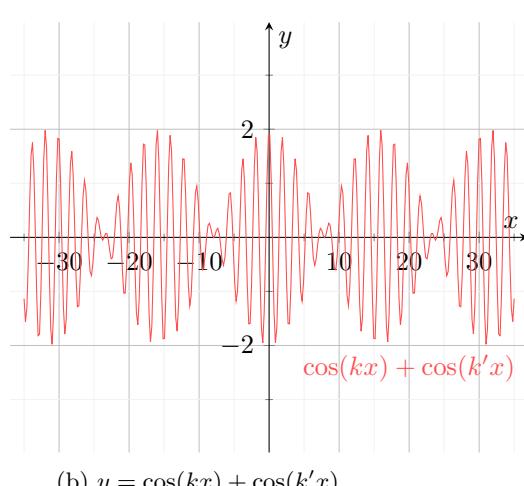
$$\Psi(x, t) = C e^{i(kx - \omega t)} \quad (38)$$

er løsninger til S.L., men vi ser fort at dette er problematisk siden vi har sagt at bare kvadrat integrerbare bølgefunksjoner er fysikalske. Vi ser at planbølger ikke er kvadrat integrerbare og ikke kan normaliseres siden de ikke går mot 0 når $|x| \rightarrow \infty$ som vi ser i Fig. 2a. I tillegg kan vi ikke bestemme posisjonen til en planbølge siden den er overalt i rommet, og vi ønsker å kunne betrakte lokaliserte partikler.

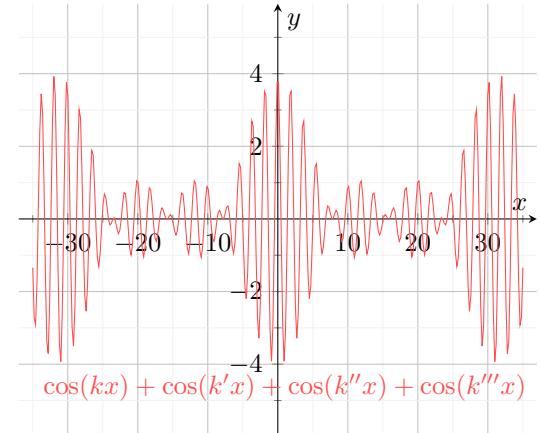
Men vi vet at S.L. er lineær og hvis vi har to løsninger av S.L. så er lineær kombinasjon av de også en løsning. Vi kan overlagre bølger og skape noe som er mer lokalisert i rommet, som vi ser antydninger til i Fig. 3. Vi har at for 4 overlagrede bølger kan vi skape en ganske lokalisert puls, men som gjentas i det uendelige. Hvis vi overlagrer uendelig mange bølge kan vi skape en puls som gjentas uendelig sjeldent, dvs som



(a) $y = \cos(kx)$ og $y' = \cos^2(kx)$



(b) $y = \cos(kx) + \cos(k'x)$



(c) $y = \cos(kx) + \cos(k'x) + \cos(k''x) + \cos(k'''x)$

Figure 2: Ovelagring av cosinus bølger.

er lokalisert rundt ett området i rommet. Siden vi trenger uendelig mange overlagrede bølger blir summen

vår til et integral, og vi har

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (39)$$

hvor vi inkluderer alle mulige bølgelengder ved at vi integrerer over k . Dette er nå noe som kan være lokalisert, gitt at $A(k)$ er det.

1.6.1 Gaussisk Bølgepakke

Vi skal nå se på en Gaussisk bølgepakke, hvor vi lar $A(k)$ ha formen til en Gauss-kurve, vi har da

$$A(k) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi}\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-(k-k_0)^2 \frac{\sigma^2}{2}} \quad (40)$$

hvor σ er bredden til Gauss-kurven og k_0 bølgetallet som kurven er sentrert rundt. Vi har nå følgende bølgefunksjon

$$\Psi(x, t) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi}\pi^{\frac{1}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2 \frac{\sigma^2}{2}} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (41)$$

Dette tilfredstiller åpenbart S.L. siden vi vet at den er lineær og vi har en sum linearkombinasjon av løsninger til S.L. (et integral, men som vi kan se på som en kontinuerlig sum). Vi skal nå finne et eksplisitt

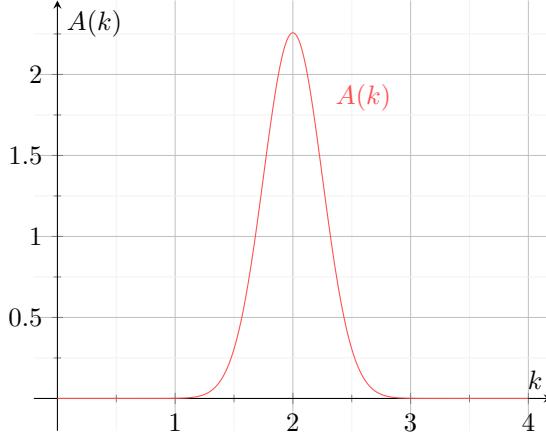


Figure 3: Gauss-kurve

uttrykk for denne bølgefunksjon. Vi starter med å se på den tidsuavhengige delen av bølgefunksjonen dvs. vi betrakter

$$\psi(x) = \Psi(x, 0) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi}\pi^{\frac{1}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2 \frac{\sigma^2}{2}} e^{ikx} dk \quad (42)$$

Vi kan beregne $\psi(x)$ ved å regne integralet. For å gjøre det skriver vi om eksponenten slik at vi får et uttrykk som er lettere å jobbe med. Vi får da

$$-(k - k_0)^2 \frac{\sigma^2}{2} + ikx = -\frac{\sigma^2}{2} \left[k^2 - 2kk_0 + k_0^2 \right] + \frac{\sigma^2}{2} ikx \frac{2}{\sigma^2} \quad (43)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2} \left[k^2 - 2kk_0 - ikx \frac{2}{\sigma^2} \right] - k_0^2 \frac{\sigma^2}{2} \quad (44)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2} \left[k^2 - 2k(k_0 - \frac{ix}{\sigma^2}) + (k_0 + \frac{ix}{\sigma^2})^2 \right] + \frac{\sigma^2}{2} (k_0 + \frac{ix}{\sigma^2})^2 - k_0^2 \frac{\sigma^2}{2} \quad (45)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2} \left[k - (k_0 + \frac{ix}{\sigma^2}) \right]^2 + \frac{\sigma^2}{2} (k_0 + \frac{ix}{\sigma^2})^2 - k_0^2 \frac{\sigma^2}{2} \quad (46)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2} \left[k - k_0 - \frac{ix}{\sigma^2} \right]^2 + \frac{\sigma^2}{2} (k_0^2 + 2k_0 \frac{ix}{\sigma^2} + (\frac{ix}{\sigma^2})^2) - k_0^2 \frac{\sigma^2}{2} \quad (47)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2} \left[k - k_0 - \frac{ix}{\sigma^2} \right]^2 + \frac{\sigma^2}{2} (2k_0 \frac{ix}{\sigma^2} + (\frac{ix}{\sigma^2})^2) \quad (48)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2} \left[k - k_0 - \frac{ix}{\sigma^2} \right]^2 + ik_0 x - \frac{x^2}{2\sigma^2} \quad (49)$$

Vi kan nå skrive uttrykket for bølgefunktjonen som

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi}\pi^{\frac{1}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(k-k_0-\frac{ix}{\sigma^2})^2} e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dk \quad (50)$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi}\pi^{\frac{1}{4}}} e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(k-k_0-\frac{ix}{\sigma^2})^2} dk \quad (51)$$

Vi kan nå beregne integralet og finne bølgefunktjonen. Vi trenger et kjent integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-i\lambda)^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (52)$$

og vi utfører et variabelskifte og setter

$$y = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}(k - k_0) \quad (53)$$

$$\frac{dy}{dk} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \quad (54)$$

$$dk = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} dy \quad (55)$$

Dette gir

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi}\pi^{\frac{1}{4}}} e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-\frac{ix}{\sqrt{2}\sigma})^2} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} dy \quad (56)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{\frac{1}{4}}} e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (57)$$

Vi har altså vist at både $A(k)$ og $|\psi(x)|^2$ er Gauss-kurver, hvilket kommer av at Gauss-funksjonen er invariant under Fourier-transformasjon. Generelt har vi at hvis noe er skarpt lokalisert i k så er det mindre lokalisert i x . Man kan vise utifra Fourier-teori at

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2} \quad (58)$$

Når vi bruker at $p = \hbar k$, gir dette oss **Heisenberg's uskarphetsrelasjon**

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{\hbar}{2} \quad (59)$$

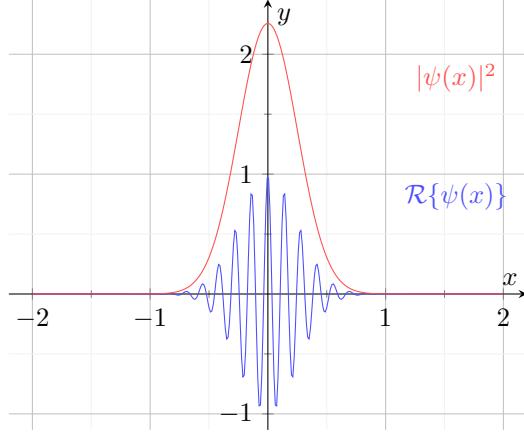


Figure 4: Bølgefunksjonen til Gaussisk bølgepakke

1.6.2 Tidsavhengig Gaussisk bølgefunksjon

Vi skal nå finne den tidsavhengige bølgefunksjon

$$\Psi(x, t) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi^{\frac{3}{2}}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2 \frac{\sigma^2}{2}} e^{i(kx - \omega t)} dx \quad (60)$$

hvor vi da må løse det litt vriene integralet. Vi skal gjøre dette ved å først vise at vi kan skrive det om til

$$\Psi(x, t) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi^{\frac{3}{2}}}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2 (\frac{\sigma^2}{2} + \frac{i\hbar}{2m})} e^{i(k-k_0)(x - \frac{k_0 \hbar t}{m})} dx \quad (61)$$

Vi bruker at $\omega = \hbar k^2 / 2m$ og kan vise at eksponentene i de to uttrykkene er ekvivalente

$$i(k_0 - \omega_0) - (k - k_0)^2 \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{i\hbar}{2m} \right) + i(k - k_0)(x - \frac{k_0 t}{m}) \quad (62)$$

$$= i(k_0 x - \omega_0 t) - k^2 \frac{i\hbar}{2m} + 2k k_0 \frac{i\hbar}{2m} - k_0^2 \frac{i\hbar}{2m} - (k - k_0)^2 \frac{\sigma^2}{2} + i(k - k_0)x - \frac{ik k_0 \hbar t}{m} + \frac{ik_0^2 \hbar t}{m} \quad (63)$$

$$= i(k_0 x - \omega_0 t) - i\omega t + 2k k_0 \frac{i\hbar}{2m} - i\omega_0 t - (k - k_0)^2 \frac{\sigma^2}{2} + i(k - k_0)x - \frac{ik k_0 \hbar t}{m} + 2i\omega_0 t \quad (64)$$

$$= -(k - k_0)^2 \frac{\sigma^2}{2} + i(kx - \omega t) \quad (65)$$

Som er det vi ville vise. Videre gjøre vi de følgende variabel-substitusjonene

$$y = k - k_0 \quad (66)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2} + \frac{i\hbar}{2m}}} \quad (67)$$

$$b = x - \frac{k_0 \hbar t}{m} \quad (68)$$

som gir oss

$$\psi(x, t) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi^{\frac{3}{2}}}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{y}{a})^2} e^{iyb} dy \quad (69)$$

Vi kan nå utnytte det følgende kjente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-i\Lambda)^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (70)$$

Vi kan da bruke dette resultatet og introdusere en ny variabel $y = ax$ og definere en ny konstant $b = \frac{2\Lambda}{a}$. Dette gir da

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-i\Lambda)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+\Lambda^2+2xi\Lambda} dx \quad (71)$$

$$= e^{\Lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2xi\Lambda} dx \quad (72)$$

$$= e^{\frac{ab}{2}} a^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{y}{a})^2+iby} dy \quad (73)$$

$$= \sqrt{\pi} \quad (74)$$

Vi inverterer dette uttrykket og får

$$\sqrt{\pi}ae^{-(\frac{ab}{2})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{y}{a})^2+iby} dy \quad (75)$$

Vi bruker nå at vi har at

$$\left(\frac{ab}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{x - \frac{k_0 \hbar t}{m}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2} + \frac{i\hbar t}{2m}}}\right)^2 \quad (76)$$

og vi har nå funnet uttrykket for den tidsavhengige bølgefunksjon

$$\psi(x, t) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi^{\frac{3}{2}}}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2} + \frac{i\hbar t}{2m}}} e^{-\frac{1}{4} \frac{(x - \frac{k_0 t}{m})^2}{\frac{\sigma^2}{2} + \frac{i\hbar t}{2m}}} \quad (77)$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{i\hbar t}{m}} \sqrt{\pi}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \frac{k_0 t}{m})^2}{\sigma^2 + \frac{i\hbar t}{m}}} \quad (78)$$

Vi kan også finne absolutt kvadratet

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + \frac{i\hbar t}{m})(\sigma^2 - \frac{i\hbar t}{m})\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \frac{k_0 t}{m})^2}{\sigma^2 + \frac{i\hbar t}{m}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \frac{k_0 t}{m})^2}{\sigma^2 - \frac{i\hbar t}{m}}} \quad (79)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma^3 + \frac{\hbar^2 t^2}{\sigma^2 m^2}} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x - \frac{k_0 t}{m})^2}{\sigma^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{\sigma^2 m^2}}} \quad (80)$$

Vi ser at vi som forventet har at

$$|\psi(x, t = 0)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \quad (81)$$

Ved tid $t = 0$ er den tidsavhegige bølgepakken lik den stasjonære. Uskarpheten må derfor også være den samme ved $t = 0$

$$\Delta x(t = 0)^2 = \frac{\hbar}{2} \quad (82)$$

Vi kan finne hvordan uskarpheten utvikler seg i tid ved hjelp av standard formler for definisjonen av uskarphet. Men vi kan også se på hvordan uttrykkene forandrer seg fra stasjonær til tidsavhengig bølgepakke, hvor vi essensialt gjør følgende variabel-bytte

$$\sigma^2 \rightarrow \sigma^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{\sigma^2 m^2} \quad (83)$$

Altså må uskarpheten være

$$\Delta x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{\sigma^2 m^2}} \quad (84)$$

Uskarpheten i bevegelsesmengde hadde vi opprinnelig som

$$\Delta p(t=0)^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\sigma} \quad (85)$$

og hvis vi ser på bølgepakken in bevegelsesmengde-rommet and if we consider the time dependent wavefunction in momentum space

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi^{\frac{3}{2}}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2 \frac{\sigma^2}{2}} e^{i(kx - \omega t)} dx \quad (86)$$

ser vi at den delen av bølgefunktjonen som gir bredden til bølgepakken er invariant i tid. Derfor må det holde at uskarpheten i bevegelsesmengde er lik for alle tider, slik som den var for $t = 0$

$$\Delta p(t)^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\sigma} \quad (87)$$

Vi har nå funnet at tidsutviklingen til uskarpheten til en Gaussisk bølgepakke er

$$\Delta p(t)\Delta x(t) = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{\sigma^4 m^2}} \quad (88)$$

1.7 Fase og gruppe-hastighet

Vi vet at vi har farten til en planbølge gitt ved

$$v_f = \frac{dx}{dt} \quad (89)$$

Dette kaller vi fasehastigheten, farten som en bølgetopp beveger seg med. Siden vi har $kdx - \omega dt = 0$ når vi følger en bølgetopp (vi er hele tiden på samme punktet i bølgen), har vi

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu \quad (90)$$

Men dette beskriver ikke hastigheten til en ikke-relativistisk partikkel, som vi kan se ifra S.L. siden vi har at

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{\frac{mv^2}{2}}{mv} = \frac{v}{2} \quad (91)$$

Vi har argumentert for at bølgepakken er det som beskriver en fri partikkel og siden vi har at bølgepakken er en uendelig sum av planbølger med forskjellige bølgelengder og derfor forskjellig fasehastighet, mens farten til en bølgepakke er gitt ved gruppehastigheten som er definert som

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (92)$$

fasehastigheten er farten til et punkt i bølgen, mens gruppehastighet er farten til en lokalisiert bølgepakke av overlagrede bølger. Vi vet at for en fri partikkel har vi $\frac{\hbar k^2}{2m}$, hvilket gir

$$v_g = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v \quad (93)$$

Som er det vi kjenner som hastigheten til en partikkel; så vi konkluderer med at det er gruppehastigheten som gitt hastigheten til en partikkel.