

Forelesninger

Kvantefysikk 2022

January 18, 2022

1 Lys

1.1 Lys som bølger

1.1.1 Bølger, difraksjon og interferens

Bølger $f(x, t)$ følger bølgeligninger

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

hvor v er hastigheten til bølgen. Det finnes to lineært uavhengige løsninger til bølgeligningen, nemlig

$$f_c(x, t) = f_0 \cos(kx - \omega t) \quad (2)$$

$$f_s(x, t) = f_0 \sin(kx - \omega t) \quad (3)$$

hvor vi må ha at $v = \omega/k$ for at dette skal være en løsning. Vi kan også skrive bølgen mer generelt som

$$f(x, t) = f_0 \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (4)$$

hvor vi innfører en fase $\phi \in (0, 2\pi]$. Vi har da at

$$f(x, t)|_{\phi=0} = f_0 \cos(kx - \omega t + 0) = f_c(x, t) \quad (5)$$

$$f(x, t)|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = f_0 \cos(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}) = f_s(x, t) \quad (6)$$

Vi kan også skrive bølgen som en kompleks funksjon

$$f(x, t) = f_0 e^{i(kx - \omega t)} = f_0 (\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)) \quad (7)$$

hvor $i = \sqrt{-1}$ og vi har brukt Euler's formal

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (8)$$

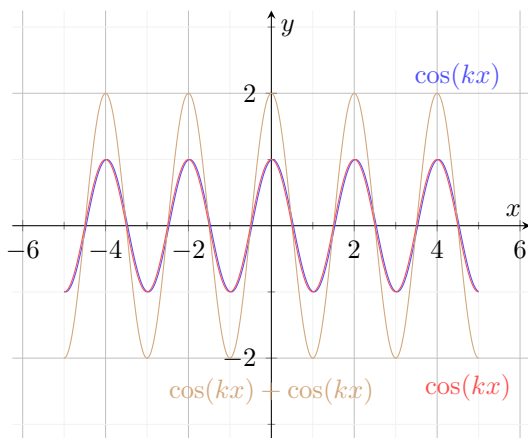
Vi vet at for bølgefænomener, har vi interferens når bølger med forskjellige bølgelengder overlager. Hvis to bølger er i fase så vil den resulterende bølgen når de møtes få en større amplitude

$$A \cos(kx) + B \cos(kx) = (A + B) \cos(kx) \quad (9)$$

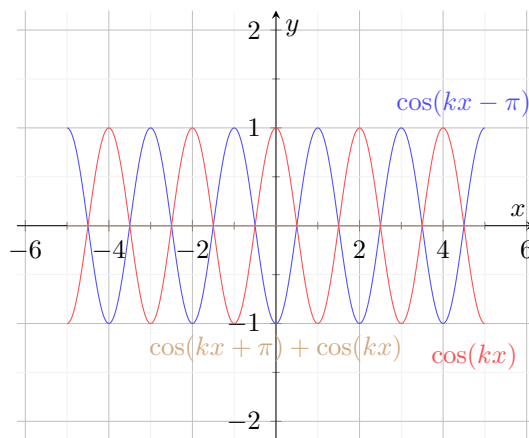
Hvis de to bølgene er i motfase derimot, dvs. at de har en faseforskjell på $\pm\pi$, da får vi destruktiv interferens og du slokker hverandre ut

$$A \cos(kx) + B \cos(kx - \pi) = (A - B) \cos(kx) \quad (10)$$

hvor vi har brukt at $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$. Vi ser her at hvis de to bølgene hadde samme amplitude so slokker de hverandre ut fullstendig. Eksempler på dette ser vi i Fig. 1. Dette er noe av det som kjennetegner bølgebevegelse og vi observerer det både i bølger på vann, lydbølger, lysbølger, og som vi skal se snart i kvantemekaniske sannsynlighetsbølger.



(a) Konstruktiv overlaging



(b) Konstruktiv overlaging

Figure 1: Interferense av bølger

1.1.2 Young's dobbelspalte forsøk

Thomas Young beskrev sitt berømte dobbelspalte eksperiment ved starten av det nittende århundret. For å analysere dobbelspalte eksperimentet trenger vi Huygens-Fresnell's prinsipp som sier at ethvert punkt på en bølgefront, kan sees som en kilde til nye sekunder bølger, og at hvordan den totale bølgen oppfører seg, finnes ved å se på summen av slike sekundære bølger. Fasene er bevart får disse sekundærbølgene, altså fasen er den samme som for den totalbølgen i det punktet.

Vi ser da på bidraget til et tilfeldig punkt på skjermen, som vi vet er summen av bidraget fra begge spaltene. Som vi ser i Fig. 2 oppstår det en sekunderbølge i S_1 og en i S_2 . Summen av disse er det som måles

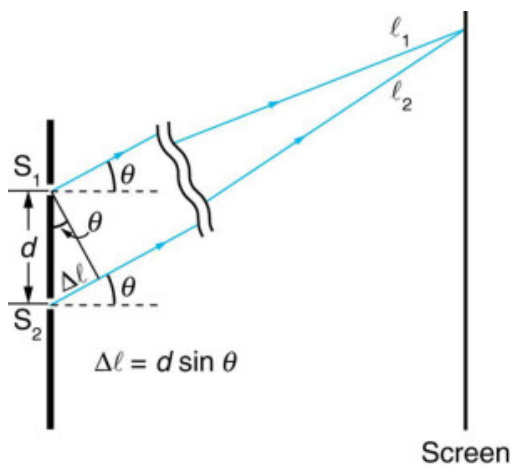


Figure 2: Illustrasjon av Young's dobbelspalte eksperiment

på skjermen. Disse bølgene har forskjellig veilengde til skjermen, og de får derfor også forskjellige faser, som er grunnen til at vi observerer interferens.

Vi ser ifra Fig. 2 at veilengden er gitt som $d \sin(\theta)$ og vi har da at vi har konstruktiv interferens når

$$d \sin(\theta) = m\lambda \quad \forall \mathbb{N} \quad (11)$$

og destruktiv interferens når

$$d \sin(\theta) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \forall \mathbb{N} \quad (12)$$

1.1.3 Maxwell's ligninger

Vi har Maxwell's ligninger med all sin pomp og prakt

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{Gauss' Law for Electric Fields}) \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{Gauss' Law for Magnetic Fields}) \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \quad (\text{Ampere-Maxwells Law}) \quad (15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (\text{Faraday's Law}) \quad (16)$$

Videre har vi fra Maxwell's ligninger at de elektriske og magnetiske feltene også må oppfylle bølgeligningene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

hvor $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$.

1.2 Lys som partikler

1.2.1 Planck's strålingslov*

Det var gjort mange forsøk på å beregne strålingen for et sort legemet. Planck, Rayleigh og Jeans hadde allerede forsøkt. Et svart legeme er et objekt som absorberer all stråling som treffer det. Det klassiske eksempelet på et svart legeme er en eske med et lite hull i.

Rayleigh-Jeans beregnet strålingstettheten til å være

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (19)$$

hvor de betraktet stående bølger inne i det sorte legemet og utledet antallet stående bølger per frekvens til å være $\frac{8\pi\nu}{c^3}$, og antok at alle modene til de stående bølgene hadde den samme energien $\langle E \rangle = k_B T$ som klassisk termodynamikk gir oss. Denne formelen fungerer fint for større bølgelengder men kolliderer helt for korte bølgelengder, dette kaller vi den ultraviolette katastrofen.

Planck løste dette problemet ved å bemerke at antagelsen om at alle svingemodene hadde den samme energien må være kjernen til problemet. Han antok, som et matematisk triks, at hver svingemode hadde kvantisert energi lik $E_n = nh\nu$. Med denne antagelsen er det rett fra å løse problemet ved hjelp av statistisk fysikk.

Vi husker at ekvilibrium distribusjonen til energi-nivåene for enhver svingemode

$$P_r = \frac{e^{-\beta E(r)}}{Z(\beta)} \quad (20)$$

hvor $\beta = 1/k_B T$ og $Z(\beta)$ er partisjonsfunksjonen til systemet. Vi kan nå finne gjennomsnittsenergien til de forskjellige svingemodene

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} h\nu \frac{e^{-\beta h\nu n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h\nu n}} \quad (21)$$

$$= h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n(e^{-\beta h\nu})^n}{\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n} \quad (22)$$

$$= h\nu e^{-\beta h\nu} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{-\beta h\nu})^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n} \quad (23)$$

$$= h\nu e^{-\beta h\nu} \frac{\frac{1}{(1-e^{-\beta h\nu})^2}}{\frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}}} \quad (24)$$

$$= h\nu e^{-\beta h\nu} \frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}} \quad (25)$$

$$= \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (26)$$

hvor vi har brukt binomial formelen til å evaluere de uendelige summene, Vi har nå funnet energitettheten som et produkt mellom svingemoder per frekvens of gjennomsnittsenergien per mode:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (27)$$

som er Planck's berømte lov.

1.2.2 Fotoelektrisk effekt

Fotoelektrisk effekt er prosessen hvor lys treffer et material, typisk et metall, og overfører noe av den kinetiske energien sin til elektronene slik at de kan bevege seg vekk fra materialet. De løsrivde elektroner kalles fotoelektroner. Hvis man antar at lys er bølger, så vet man at energien til en bølge er proportional med kvadratet av amplituden til bølgen som

$$E \propto f_0^2 \quad (28)$$

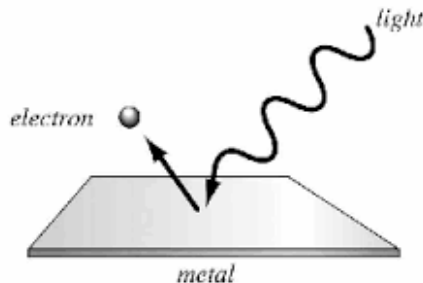


Figure 3: Illustrasjon av fotoelektrisk effekt hvor lys løsrive elektroner fra et material.

og man vet at amplituden er proporsjonal med intensiteten til lyset

$$f_0^2 \propto I \quad (29)$$

Ergo, ifølge klassisk bølgeteori for lys burde lys med veldig høy intensitet være veldig energetisk. Derfor burde lys alltid kunne løsrive noen fotoelektroner fra materialet, hvis vi bare skrur opp lysterken og gir lyset høy nok intensitet. Eksperimenter viste at for lavfrekvent lys som e.g. infrarødt lys eller mikrobølger, kan vi for de fleste metaller aldri få fotoelektrisk effekt uansett hvor stor intensitet lyset har. Mens man for ultraviolett lys ofte observerte fotoelektrisk effekt. Altså det virket som om fotoelektrisk om vi får fotoelektrisk effekt eller ikke, avhenger av frekvensen til lyset og ikke av intensitet (i.e. amplituden).

Einstein foreslo at lys består av lyskvanter, såkalte fotoner, og at energien til disse fotonene er

$$E = h\nu \quad (30)$$

fom først foreslått av Max Planck som et matematisk triks for å regne ut intensitetsfordelingen til strålingen fra et svart legeme. Her er ν frekvensen til fotonet og h er Planck's konstant. For at et foton skal kunne løsrive et elektron fra metallet, må det gi elektronet nok energi til å overkomme kreftene som binder det i metallet, denne energien er karakteristisk for hvert material og vi kaller den W . Den maksimale kintiske energien som et fotoelektron kan ha er derfor

$$E_k = h\nu - W \quad (31)$$

Siden fotonets energi er inverse proporsjonal med ν ser vi at det da må være en minste mulige frekvensen fotonet må ha for å løsrive et fotoelektron. Denne frekvensen finner vi ved å finne når $E_k = 0$. Vi har da

$$\nu_0 = \frac{W}{h} \quad (32)$$

Milikan gjennomførte et fotoelektrisk eksperiment for Natrium, som er et alkali metall med $W = 2.3\text{eV}$. Ifølge Einstein's beregninger burde $\nu_0 = 5.5 \times 10^{14}\text{Hz}$, som tilsvarer en bølgelengde $\lambda_0 = 540\text{nm}$, altså grønt lys. Det vil si at blått lys vil ha nok energi til å løsrive fotoelektron men ikke rødt lys.

1.2.3 Compton spredning

Selv etter at Milikan's resultater samsvarte utmerket Einstein's beregninger for den fotoelektriske effekten, var ikke alle overbevist om at lys består av partikler. Enda mer overbevisende argumenter for lys er partikler fikk man av Arthur Compton i 1923. Compton bestråler grafitt med energetisk kort-bølget Röntgen stråling. Klassisk, (antatt lys er bølger) burde Röntgen strålingen bringe elektronene i karbon atomene oscillere med den samme frekvensen som strålingen. Vi ser i Fig. 4 selv om inkomende stråling har en intensitets-topp ved λ har strålingen etter interaksjon med grafittet to intensitets-topper, en ved λ og en ved λ' som er større enn λ og avhengig av vinkelen vi måler ved. Denne forskyvningen i bølgelengde som lyset får etter å spres på elektronet kan ikke forklares ut ifra klassisk bølgeteori.

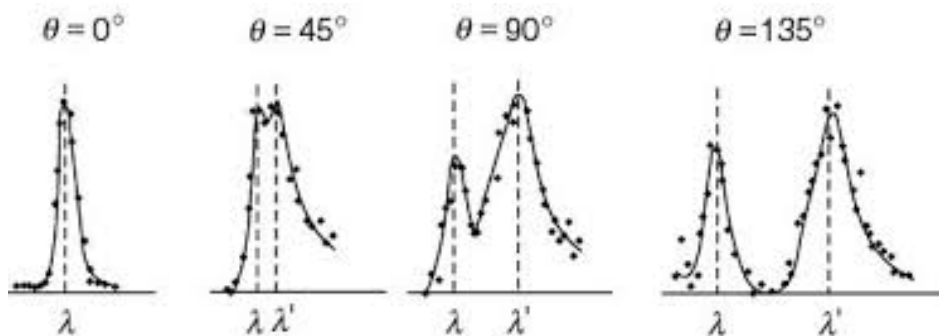


Figure 4: Resultatene av Compton's sprednings eksperiment. Intensiteten til det målte lyset ved flere forskjellige utfallsvinkler etter at lyset interagerer med karbon atomene.

Forklaringen på dette finner vi ved å anta at lys er partikler of låne noen resultater fra Einstein. Vi har at

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (33)$$

som Einstein utledet i sin forklaring av den fotoelektriske effekten. Fra den spesielle relativitets-teorien har vi at $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, som forenkles til $E = pc$ for masseløse partikler, som vi antar fotoner er og for partikler i ro har vi $E = mc^2$. Setter vi dette likt uttryket for energi i Lign. (32) får vi

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (34)$$

hvor vi nå har et uttrykk som gir en sammenheng mellom lysets bølgelengde og bevegelsesmengde. I Compton's

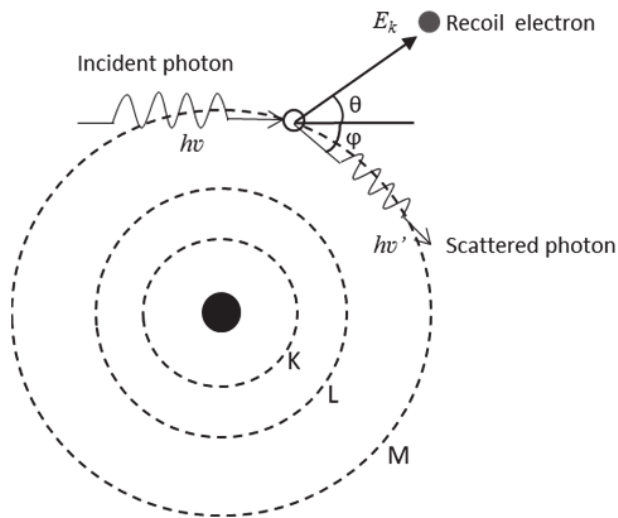


Figure 5: Illustrasjon av Compton's spredningsforsøk. Inkommende Röntgen stråling interagerer med et løst bundet elektron i det ytterste skallet til et karbon-atom. Lyset spres på elektronet og elektronet frigjøres fra atomet.

eksperiment har vi stasjonære elektroner som kolliderer med fotoner. Fotonene kan overføre noe kinetisk energi til elektronene og derfor må bølgelengden til de spredte fotonene være lengre enn for de inkomende. Dette er i sterk kontrast til prediksjonen til klassisk mekanikk.

Det er nå en small sak å analysere dette kollisjons-problemet ved hjelp av bevaringslover for energi og bevegelsesmengde. Vi lar \mathbf{p} og \mathbf{p}' være bevegelsesmengden til det inkomende og utgående fotonet, respektivt,

og \mathbf{p}_e . Vi har da at

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e \quad (35)$$

Hver komponent av bevegelsesmengde-vektoren må være bevart separat. Vi lar θ være vinkelen mellom det inkommande og utgående fotonet. Vi har da

$$p_e^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (36)$$

$$= p^2 + p'^2 - 2pp' \cos(\theta) \quad (37)$$

Energi-bevaring gir $E + mc^2 = E' + E_e$ som uttrykt ved bevegelsesmengden gir

$$pc + mc^2 = p'c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (38)$$

Vi bruker Lign. (35) for å eliminere p_e og deretter kvadrerer vi og har da

$$pc - p'c + mc^2 = \sqrt{(p^2 + p'^2 - 2pp' \cos(\theta))c^2 + m^2 c^4} \quad (39)$$

$$\Rightarrow -2pp'c^2 + 2pmc^3 - 2p'mc^3 + p^2c^2 + p'^2c^2 + m^2c^4 = (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos(\theta))c^2 + m^2c^4 \quad (40)$$

$$\Rightarrow -2pp' + 2pmc - 2p'mc + p^2 + p'^2 + m^2c^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos(\theta) + m^2c^2 \quad (41)$$

$$\Rightarrow -pp' + pmc - p'mc = -pp' \cos(\theta) \quad (42)$$

$$\Rightarrow pp'(1 - \cos(\theta)) = (p - p')mc \quad (43)$$

Vi kan nå sette inn vårt uttrykk for bevegelsesmengde som funksjon av bølgelengde og finne Compton's formel

$$\frac{h^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos(\theta)) = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)mc \quad (44)$$

$$\Rightarrow \frac{h}{mc}(1 - \cos(\theta)) = \lambda' - \lambda \quad (45)$$

Hvor vi har et uttrykk for endringen i bølgelengden som elektronet får etter at det spres elektronet. Dette forklarer at vi har en intensitets-topp i Fig. [4] med forskyvd bølgelengde. Den andre intensitets-toppen sentrert rundt bølgelengden til det inkommande lyset kommer av at lyset også kan interegere med karbon-kjernen også, og siden kjernen er mye mer massive en elektronet er bølgelengde-forskyvningen i denne prosessen forsvinnende liten. Vi ser fra Lign. (44) at faktoren h/mc gjør at $\lambda' - \lambda$ veldig liten. Dette er også grunnen til at denne effekten ikke var observert tidligere, siden for et elektron er $h/mc \approx 0.0024nm$ som er ekstremt lite sammenlignet med bølgelengdene i det synlige spektret $400 - 700nm$, og derfor er effekten vanskelig å observere i synlig lys eksperimenter. Men for Röntgen stråling er har fotonene kortere bølgelengde og effekten kan observeres.

1.3 Bølge-partikkel dualitet