ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
23 Οκτωβρίου 2023
Σειρά 2

Άσκηση 1
Σε μια ακολουθία από $n = 200$ bits το καθένα παίρνει την τιμή 1 με πιθανότητα 1/10 ανεξάρτητα από όλα τα άλλα bits.

1. Να δώσετε το ελάχιστο και το μέγιστο πλήθος από bits ίσα με «1» που εμφανίζονται σε ακολουθίες που ανήκουν στο τυπικό σύνολο $A_\epsilon^{(n)}$ για $\epsilon = 1/10$.

2. Να υπολογίσετε το πλήθος των ακολουθιών που ανήκουν στο τυπικό σύνολο ως ποσοστό του συνόλου όλων των δυνατών ακολουθιών.

3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $\Pr\{A_\epsilon^{(n)}\}$ του παραπάνω τυπικού συνόλου.

Υπόδειξη: Για την ορθή λύση της άσκησης πρέπει το εργαλείο που θα χρησιμοποιήσετε να διαθέτει επαρκή ακρίβεια.

Άσκηση 2

1. Για την τυχαία μεταβλητή X_1 ισχύει $\Pr\{X_1 = 1\} = p$ και $\Pr\{X_1 = 0\} = 1 - p$. Να δείξετε ότι $E\{\log p(X_1)\} = -H(p)$ (όπου $H(p) = -p \log p - (1-p)\log(1-p)$).

2. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) έχουν όλες την ίδια συνάρτηση μάζας πιθανότητας με την παραπάνω X_1 και είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

3. Να δώσετε έναν αναλυτικό τύπο για την συνάρτηση
$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{1}{n} \log p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

4. Ο σκοπός μας είναι με έναν αριθμητικό υπολογισμό να πάρουμε μια ένδειξη ότι οι παραπάνω τ.μ. υπόκεινται στο θεώρημα της ασυμπτωτικής ισοκατανομής (Θ. 3.1.1), δηλαδή ότι
$$-\frac{1}{n} \log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \to -E\{\log p(X_1)\} = H(X_1)$$
κατά πιθανότητα, δηλαδή ότι
$$\Pr\{|-\frac{1}{n} \log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) + E\{\log p(X_1)\}| > \epsilon\} \to 0$$
Γι' αυτόν τον σκοπό να υπολογίσετε την
$$\Pr\{|\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) + E\{\log p(X_1)\}| > \epsilon\}$$
με $\epsilon = 1/2, p = 1/10$ και για δύο τιμές του n, ήτοι για $n = 20$ και για $n = 40$ (και να φτάσετε σε αριθμητικό αποτέλεσμα).

5. Συμφωνεί το αποτέλεσμα που βρήκατε με το ότι η πιθανότητα αυτή τείνει στο μηδέν όταν το n τείνει στο άπειρο (δηλαδή με το θεώρημα);