ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Μάθημα: Διακριτά Μαθηματικά

Ονοματεπώνυμο: Ειρήνη Δόντη

Α.Μ: 03119839

$1^{η}$ Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Αθήνα 2021

Θέμα 1

(α)

Το P_d είναι *ισάριθμο* με το N^d = NxNxN...xN (d φορές), διότι κάθε πολυώνυμο βαθμού d αντιστοιχίζεται με διατεταγμένη d-άδα των συντελεστών του (1-1 και επί).

Το P_d είναι αριθμήσιμο, αφού το N^d είναι αριθμήσιμο για πεπερασμένο αριθμό d.

Οπότε, το $P = \cup P_d$ ($d \in N$) είναι αριθμήσιμο, ως ένωση αριθμήσιμα άπειρου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων.

Έστω, Σ το σύνολο των f_i: N → N στο{0,1} με i = 0,1,2,3,… . Θεωρούμε ότι Σ αριθμήσιμο και έστω, f_0, f_1, f_2,… μία αυθαίρετη απαρίθμηση των συναρτήσεων του συνόλου Σ.

Με τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης, δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα, για να αποδείξουμε ότι το σύνολο Σ δεν είναι αριθμήσιμο:

f_i \ n	0	1	2	3	4	5	…	n
f_0	0	0	1	1	0	1	…	0
f_1	1	1	1	1	0	0	…	1
…	…	…	…	…	…	…	…	…
f_{n-1}	1	1	1	0	0	1	…	1
f_n	1	1	1	1	1	1	…	0

Παρατηρούμε ότι μπορούμε, κάθε φορά, να δημιουργήσουμε μία νέα συνάρτηση που έχει διαφορετικές τιμές από αυτές της διαγωνίου. Οπότε, υπάρχουν άπειρες f: N → N οι οποίες $f \notin P$ (δεν μπορούν να εκφραστούν ως πολυωνυμικές συναρτήσεις).

(β)

Το σύνολο όλων των υπολογιστικών προβλημάτων, αποτελεί το δυναμοσύνολο του N. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι μη αριθμήσιμο με τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης. Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα. Σε στήλες, τοποθετούμε όλους τους φυσικούς που αντιστοιχούν στα πεπερασμένα προγράμματα. Στις γραμμές του πίνακα, τοποθετούμε όλα τα προβλήματα, τα οποία είναι υποσύνολα του N.

Προβλήματα	**Προγράμματα**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5 ...**
1	0	1	1	1	1
2	1	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1
4…	1	1	1	0	1

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει κάποιο πρόβλημα το οποίο έχει διαφορετικές τιμές στη διαγώνιο και επομένως δεν αντιστοιχεί σε κάποιο πρόγραμμα.

Οπότε, από τα παραπάνω, αποδείξαμε ότι τα προβλήματα απόφασης είναι μη αριθμήσιμα. Το σύνολο των προβλημάτων για τα οποία υπάρχει λύση είναι αριθμήσιμο και αντιστοιχεί στα αντίστοιχα προγράμματα. Αντίθετα, το σύνολο των προβλημάτων για τα οποία δεν υπάρχει λύση είναι μη αριθμήσιμα άπειρο, διότι σε αντίθετη περίπτωση με την ένωση δύο συνόλων προβλημάτων που έχουν λύση και του συνόλου που δεν έχει λύση, θα προέκυπτε αριθμήσιμο σύνολο, γιατί είναι ένωση αριθμήσιμων συνόλων.

(γ)

Έστω P(t) η τελική θέση του υποβρυχίου (ή ο στόχος της τορπίλης) συναρτήσει του χρόνου.

Από την εκφώνηση γνωρίζουμε τα εξής:

$P(0) = x \in N$, θεωρούμε ότι τη χρονική $t = 0$ αρχίζει το υποβρύχιο να κινείται.

$U(t) = y \in N$, όπου U(t) είναι η σταθερή ταχύτητα (μέτρα/λεπτό) με την οποία κινείται το υποβρύχιο.

Έστω ότι το υποβρύχιο βυθίζεται τη χρονική στιγμή n, όπου n πεπερασμένος φυσικός αριθμός (πρέπει το υποβρύχιο να βυθιστεί σε πεπερασμένο χρόνο). Δηλαδή, γνωρίζουμε ότι: $P_n(n) = z \in N$

Εφόσον το υποβρύχιο κινείται *σε μία ευθεία με σταθερή* ταχύτητα, τότε η τελική θέση (εκάστοτε στόχος της τορπίλης) διαμορφώνεται ως εξής:

$P_t(t) = x + yt$

Αφού γνωρίζουμε την ώρα που εκτοξεύουμε κάθε τορπίλη, μπορούμε να διατρέξουμε όλες τις πιθανότητες της συνάρτησης τελικής θέσης P(t) του υποβρυχίου, διατρέχοντας όλους τους συνδυασμούς των x και y τη δεδομένη χρονική στιγμή. Οπότε, καταγράφουμε τις τελικές θέσεις $P_t(t)$ στη εκάστοτε χρονική στιγμή t την οποία γνωρίζουμε (αφού ξέρουμε ότι μπορούμε να εκτοξεύσουμε μία τορπίλη κάθε λεπτό). Με άλλα λόγια, θα στηριχθούμε στη μέθοδο της απαρίθμησης:

$P(0) = x$

$P_1(1) = x + 1y$

$P_2(2) = x + 2y$

$P_3(3) = x + 3y$

….

$P_n(n) = x + ny = z$

Ξέρουμε ότι η τορπίλη εκτοξεύεται κάθε 1 λεπτό, οπότε η χρονική στιγμή t προσαυξάνεται κάθε φορά κατά 1 λεπτό.

Αν δεν βυθίσουμε το υποβρύχιο την πρώτη φορά συνεχίζουμε σε επόμενα σύνολα, μέχρι στον χρόνο n να καταφέρουμε να βυθίσουμε το υποβρύχιο. Τα σύνολα αυτά παίρνουν τιμές στο σύνολο των φυσικών και επομένως όλα τα διαφορετικά σύνολα που θα εμφανιστούν είναι αριθμήσιμα άπειρα. Αφού οι μεταβλητές x και y είναι αριθμήσιμα μεγέθη και η συνάρτηση αληθεύει για κάθε επιμέρους θέση που εκτοξεύουμε την τορπίλη, η μέθοδος της απαρίθμησης που αναπτύξαμε είναι *ορθή*. Με άλλα λόγια, εφαρμόζοντας μία σωστή διαδικασία απαρίθμησης, θα απαριθμήσουμε τα σωστά x,y σε κάποια πεπερασμένη χρονική στιγμή.

Το πλήθος των τορπιλών, εφόσον εκτοξεύουμε μία τορπίλη κάθε λεπτό, ταυτίζεται με τον χρόνο που θα κάνουμε ώστε να βυθίσουμε το υποβρύχιο. Γνωρίζουμε ότι:

$P_n(n) = x + ny = z$. Οπότε, $n = \frac{z - x}{y} \in N$, όπου n το *πλήθος τορπιλών* μέχρι τη βύθιση του υποβρυχίου.

<u>Θέμα 2</u>

(α)

(i) Ο Α λέει ψέματα γιατί, αν ο Α έλεγε αλήθεια, ο Β αναγκαστικά έπρεπε να λέει και εκείνος αλήθεια, δηλαδή ότι ο Α είναι απατεώνας, το οποίο είναι άτοπο. Οπότε ο Α είναι απατεώνας και ο Β είναι ευγενής.

(ii) Εφόσον ο C λέει ότι είναι απατεώνες, τότε λέει ψέματα (C απατεώνας). Οπότε, δεν μπορεί να είναι και οι δύο απατεώνες, δηλαδή ο D είναι ιππότης και ο C είναι απατεώνας.

(iii) Εφόσον ο ένας λέει τον άλλο απατεώνα, τότε ένας από τους δύο θα είναι ο ιππότης και ένας ο απατεώνας.

(iv) Αν ο G απαντήσει ότι *δεν* υπάρχει ευγενής μεταξύ εκείνου και του H («Όχι»), τότε σίγουρα ο G είναι απατεώνας και ο H είναι ευγενής (παρόμοια με το (ii)).

(β)

Ισχύει ότι $\sigma_0 \equiv \varphi \rightarrow \varphi \equiv \varphi' \vee \varphi$ το οποίο αληθεύει για κάθε τιμή του φ. Με άλλα λόγια, ο προτασιακός *τύπος σ_0 είναι ταυτολογία*.

Με τον ίδιο τρόπο για το $\sigma_1 \equiv \sigma_0 \rightarrow \varphi \equiv \sigma_0' \vee \varphi$ το οποίο αληθεύει μόνο αν φ αληθές. Οπότε, ο *τύπος σ_1 είναι ικανοποιήσιμος*, γιατί αληθεύει για κάποιες τιμές του φ.

Με τον ίδιο τρόπο για το $\sigma_2 \equiv \sigma_1 \rightarrow \varphi \equiv \sigma_1' \vee \varphi \equiv (\sigma_0' \vee \varphi)' \vee \varphi \equiv \sigma_0 \wedge \varphi' \vee \varphi \equiv$

$(\varphi' \vee \varphi) \wedge (\varphi' \vee \varphi) \equiv \varphi' \vee \varphi \equiv \sigma_0$ το οποίο αληθεύει για όλες τις τιμές του φ. Οπότε, ο *τύπος σ_2 είναι ταυτολογία*, γιατί αληθεύει για όλες τις τιμές του φ.

Το ίδιο μοτίβο συνεχίζεται και με τα υπόλοιπα στοιχεία της ακολουθίας, λόγω των ιδιοτήτων των λογικών πράξεων.

Οπότε, από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι **σ_n ταυτολογία όταν n άρτιος**, ενώ είναι **ικανοποιήσιμος τύπος όταν n περιττός**.

Για κάθε n φυσικό ισχύει ότι το $\sigma_n \models \sigma_{n+1}$ αρκεί ο προτασιακός τύπος φ να είναι πάντα αληθής.

(γ)

(i) Αφού κάθε πρόταση δίνει διαφορετικό πλήθος ψευδών προτάσεων, αναγκαστικά μία πρόταση μπορεί να είναι αληθής και οι υπόλοιπες 99 ψευδείς. Επομένως, η *πρόταση 99* είναι η *αληθής* και οι υπόλοιπες ψευδείς.

(ii) Στην περίπτωση που μία πρόταση είναι αληθής, τότε όλες οι προηγούμενες πρέπει να είναι αληθείς. Οπότε, ο πρώτες y προτάσεις είναι αληθείς και 100 – y είναι ψευδείς. Όμως, η y πρόταση αναφέρει ότι 100 – y προτάσεις είναι ψευδείς. Δηλαδή,

$y = 100 - y$ ή $y = 50$. Οπότε, ο πρώτες *50 προτάσεις* είναι *αληθείς και 50* είναι *ψευδείς*.

(iii) Αντίστοιχα με το ερώτημα (ii), έχουμε $y = 99 - y$, γεγονός που *δεν ισχύει* γιατί ο αριθμός y πρέπει να είναι ακέραιος.

(δ)

1. Βάσει του θεωρήματος πληρότητας, έχουμε ότι: $T \models \varphi \rightarrow T \vdash \varphi$. Η τυπική απόδειξη του φ, βασίζεται σε πεπερασμένες διαδικασίες (π.χ. αντικαταστάσεων), δηλαδή χρησιμοποιούνται πεπερασμένες υποθέσεις T_0. Οπότε, υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T_0 \vdash \varphi$. Επίσης, αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Εγκυρότητας, έχουμε ότι: υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T_0 \models \varphi$. Οπότε, αποδείξαμε το ζητούμενο.

2. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Συμπαγούς. Υποθέτουμε ότι το T δεν είναι ικανοποιήσιμο. Οπότε ισχύει $T \models \varphi$ για κάθε τιμή του προτασιακού τύπου φ. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι: υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο τύπων $T_0 \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T_0 \vee (\varphi')$ μη ικανοποιήσιμο. Αν το φ είναι αντίφαση, το φ' είναι ταυτολογία, με αποτέλεσμα το υποσύνολο τύπων T_0 να είναι μη ικανοποιήσιμο. Για κάθε τιμή του προτασιακού τύπου φ μπορούμε να αποφανθούμε ότι το πεπερασμένο υποσύνολο τύπων T_0 δεν είναι ικανοποιήσιμο.

<u>Θέμα 3</u>

(α)

1. Ο ζητούμενος τύπος είναι ο παρακάτω:

$\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists y\,(M(y) \wedge T(x,y)))$

2. Ο ζητούμενος τύπος είναι ο παρακάτω:

$\forall x \forall y [P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge \exists z (M(z) \wedge T(x,z) \wedge T(y,z)) \rightarrow L(x,y)]$

3. Ο ζητούμενος τύπος είναι ο παρακάτω:

$\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z [M(z) \wedge (T(x,z) \leftrightarrow T(y,z))])$

4. Ο ζητούμενος τύπος είναι ο παρακάτω:

$\exists x$(P(x) ∧ $\exists y \exists z$ [M(y)∧M(z)∧(y≠ z)∧T(x,y)∧T(x,z)∧∀w(M(w)∧T(x,w))→(w=y ∨ w=z)])

5. Ο ζητούμενος τύπος είναι ο παρακάτω:

$\forall x$[P(x)∧$\forall y \forall z$(M(y)∧M(z)∧T(x,y)∧T(x,z)∧z≠ y→$\forall w$((P(w)∧L(w,x)) →(T(w,y)∨T(w,z))))]

(β)

Το αριστερό μέλος της συνεπαγωγής παραπέμπει στο παράδοξο του Russel, δηλαδή η υποπρόταση $\forall x$∀y(Q(x,y)↔ $\neg Q(x,y)$) αποτελεί αντίφαση και συνεπώς είναι μη ικανοποιήσιμη δήλωση. Το δεξί μέλος, $\exists x$∀yQ(x,y), ερμηνεύεται ως εξής: Υπάρχει στοιχείο του σύμπαντος το αντιστοιχίζεται σε κάθε άλλο στοιχείο του σύμπαντος. Εφόσον, η υποπρόταση: $\forall x$∀y(Q(x,y)↔ $\neg Q(x,y)$) είναι μη ικανοποιήσιμη δήλωση για οποιαδήποτε x και y, τότε όλη η πρόταση αληθεύει για οποιαδήποτε x και y, ανεξαρτήτως της ικανοποιησιμότητας ή μη της υποπρότασης $\exists x$∀yQ(x,y), λόγω των ιδιοτήτων της συνεπαγωγής. Οπότε, η δοσμένη πρόταση *είναι λογικά έγκυρη*.

Θέμα 4

(α)

1. Επειδή κάθε στοιχείο του σύμπαντος ικανοποιεί την ανακλαστική ιδιότητα (σχετίζεται με τον εαυτό του: ∀xP(x,x)) και (λογική σύζευξη «∧») για κάθε x ≡ y κάθε στοιχείο του σύμπαντος σχετίζεται με το x προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση. Οπότε, κάθε ζευγάρι στοιχείων του σύμπαντος σχετίζεται προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση. Επομένως η πρόταση φ είναι *λογικά έγκυρη*.

2. Η πρόταση ερμηνεύεται ως εξής: Αν κάθε στοιχείο του σύμπαντος ικανοποιεί την ανακλαστική ιδιότητα (∀xP(x,x)) και (λογική σύζευξη «∧») αν για κάθε ζεύγος στοιχείων (ε,δ) που σχετίζονται, ισχύει ότι για κάθε στοιχείο του σύμπαντος υπάρχει συσχέτιση του ε με αυτό ή αυτού με το δ, τότε υπάρχει στοιχείο που σχετίζεται με

όλα τα στοιχεία του σύμπαντος. Τα παραπάνω ισχύουν στην περίπτωση που το σύμπαν έχει ένα στοιχείο. Εφαρμόζουμε μαθηματική επαγωγή: Έστω πως ισχύει για σύμπαν με n στοιχεία και ε το ελάχιστο στοιχείο. Τα στοιχεία με τα οποία συσχετίζεται το ε τα συμβολίζουμε με k_i . Αν το ε σχετίζεται με το τελευταίο στοιχείο που προσθέσαμε (το συμβολίζουμε με δ), το ε παραμένει το ελάχιστο στοιχείο. Αν το ε δεν εξακολουθεί να είναι το ελάχιστο στοιχείο, τότε η συσχέτιση θα υφίσταται προς την αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή το δ θα σχετίζεται με το ε. Οπότε θα ισχύει:

$P(\varepsilon, k_i) \rightarrow P(\varepsilon, \delta) \vee P(\delta, k_i)$ και επειδή $P(\varepsilon, \delta)$ δεν είναι αληθής, πρέπει $P(\delta, k_i)$ αληθής για κάθε k_i . Οπότε, το δ θα είναι το ελάχιστο σημείο. Οπότε αποδείξαμε ότι ισχύει και για σύμπαν με n + 1 στοιχεία. Συμπερασματικά, μέσω της μαθηματικής επαγωγής, αποδείξαμε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

3. Μία ερμηνεία που *δεν* αποτελεί μοντέλο της ψ είναι εκείνη με σύμπαν τους φυσικούς αριθμούς με κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y) = x \leq y$.

(β)

Οι 3 πρώτες ερμηνείες αφορούν σύμπαν με ίδια στοιχεία:

1. Θεωρούμε ότι το κατηγορηματικό σύμβολο P ερμηνεύεται με τη δοσμένη σχέση. Οπότε, παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιείται η ανακλαστική ιδιότητα της πρότασης για κάθε x,y. Οπότε, *η πρόταση ξ <u>δεν</u>* θα μπορούσε να *αληθεύει* για κάθε στοιχείο του σύμπαντος, γιατί η πρόταση $\forall x(P(x,x) \rightarrow \forall y(P(x,y) \vee P(y,x))) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$ είναι πάντα ψευδής: $(\Psi' \vee X)' \vee Y = \Psi =$ ψευδής για κάθε X, Y τα οποία μπορούν να πάρουν τιμές αληθείς ή ψευδείς.

2. Θεωρούμε ότι το κατηγορηματικό σύμβολο P ερμηνεύεται με τη δοσμένη σχέση. Οπότε, παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η ανακλαστική ιδιότητα της πρότασης γιατί ισχύει $\forall x P(x,x)$ για ***κάθε*** στοιχείο x που ανήκει στο σύμπαν A. Εφόσον τα x και τα y μπορεί να ταυτίζονται, τότε η πρόταση ξ είναι ορθή. Με άλλα λόγια, *η πρόταση ξ* σε

αυτή τη περίπτωση είναι απαραίτητα *αληθής*, αφού όλες οι επιμέρους υποπροτάσεις είναι αληθείς για x ≡ y (η πρόταση παίρνει τιμή: (Α' ∨ Α)' ∨ Α = Α= αληθής).

3. Θεωρούμε ότι το κατηγορηματικό σύμβολο P ερμηνεύεται με τη δοσμένη σχέση. Οπότε, συμπεραίνουμε ότι, υποχρεωτικά, το x = α για κάθε y που ανήκει στο σύμπαν Α. Η *πρόταση ξ*, λοιπόν, *αληθεύει*, αφού όλες οι επιμέρους υποπροτάσεις είναι αληθείς για x ≡ α & ∀y (με όποια τιμή του σύμπαντος) και η ερμηνεία του P είναι ο συνδυασμός (x,y) ≡ (α,y), όπου το y παίρνει όλες τις τιμές του σύμπαντος Α (η πρόταση παίρνει τιμή: (Α' ∨ Α)' ∨ Α = Α= αληθής).

4. Εφόσον κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τον εαυτό του, τότε η P(x,x) ικανοποιείται. Επίσης, θα ικανοποιείται η υποπρόταση $\forall x \forall y P(x,y)$ και, ταυτόχρονα, θα ικανοποιείται η υποπρόταση $\forall x \forall y P(y,x)$ για κάθε $x,y \in N^*$ (ο αριθμός x διαιρεί τον y και το αντίστροφο, αφού $x,y \in N^*$). Οπότε, η υποπρόταση $\forall x \forall y(P(x,y) \vee P(y,x))$ αληθεύει για κάθε $x,y \in N^*$. Επίσης, αφού η υποπρόταση $\forall x \forall y P(x,y)$ ικανοποιείται για κάθε $x,y \in N^*$, τότε θα υπάρχει αναγκαστικά x ώστε να ισχύει η: $\exists x \forall y P(x,y)$. Οπότε, *η πρόταση ξ είναι αληθής*, αφού όλες οι υποπροτάσεις είναι αληθείς και με τις ιδιότητες της συνεπαγωγής αληθεύει όλη η πρόταση. Οπότε, η δοσμένη ερμηνεία *αληθεύει την πρόταση ξ* για κάθε τιμή $x,y \in N^*$.

Θέμα 5

(α)

Εφόσον αναφερόμαστε σε τομή, θα ισχύουν τα εξής:

Αφού R ανακλαστική σχέση: $\forall x((x,x) \in R)$ τότε και $\forall x((x,x) \in R^{-1})$ και κατά συνέπεια $\forall x((x,x) \in R \cap R^{-1})$.

Οπότε, ισχύει η *ανακλαστική* ιδιότητα της $R \cap R^{-1}$.

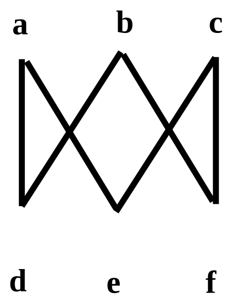
Για κάθε ζευγάρια (x,y), (y,x) ∈ R , ισχύει ότι (y,x), (x,y) ∈ R^{-1}. Αν μόνο το ένα ζευγάρι ανήκει στην R, το άλλο θα ανήκει απαραιτήτως στην R^{-1} και κανένα από τα δύο ζευγάρια δεν θα ανήκει στη τομή.

Οπότε, ισχύει η *συμμετρική* ιδιότητα της $R \cap R^{-1}$.

Στη τομή θα υπάρχουν όλα τα ζευγάρια (x,x), όπως και εκείνα για τα οποία (x,y) ∈ R και (y,x) ∈ R. Όμως, λόγω της μεταβατικότητας της R, με τα παραπάνω, προκύπτει και η *μεταβατικότητα* της $R \cap R^{-1}$.

Οπότε, η $R \cap R^{-1}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, αφού η σχέση είναι ταυτόχρονα ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

(β)



Το διάγραμμα Hasse του συνόλου δίνεται παραπάνω.

(γ)

Η σχέση R είναι σχέση διάταξης, μόνο αν ικανοποιεί, επιπλέον, την αντισυμμετρική ιδιότητα.

Για παράδειγμα, οι αριθμοί 6 = 1x2x3 και 24 = $1x2^3x3$ έχουν τους ίδιους πρώτους παράγοντες. Επομένως, (6, 24) ∈ R και (24, 6) ∈ R, αλλά το 6 **δεν** είναι ίσο με το 24. Οπότε, το R **δεν** είναι σχέση διάταξης, αφού δεν ικανοποιεί την αντισυμμετρική ιδιότητα.