

ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

4 Οκτωβρίου 2023

Σειρά 1

Άσκηση 1 Μια ομοιόμορφα κατανομημένη τυχαία μεταβλητή X_N έχει σύνολο τιμών το

$$\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, N\}$$

(όπου $N \geq 1$) και συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$\Pr\{X_N = k\} = A_N \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

όπου A_N είναι σταθερά κανονικοποίησης. Να υπολογίσετε την $H(X_N)$ για $N = 1, 2, \dots, 10$, να βάλετε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα και να κάνετε ένα διάγραμμα της $H(X_N)$ ως συνάρτησης του N .

Άσκηση 2 Δυο τυχαίες μεταβλητές X, Y παίρνουν και οι δύο τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5 κι έχουν από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p_{XY}(x, y) = p(x, y)$ που δίνεται από τον τύπο

$$p(x, y) = A \left((3/5)^x + (2/5)^y + (1/4)^{x+y} \right)$$

για $x = 1, 2, 3, 4, 5$ και $y = 1, 2, 3, 4, 5$ εκτός από τις τιμές $p(2, 5) = A$ και $p(3, 5) = p(4, 5) = 0$. Η σταθερά A υπολογίζεται από την κανονικοποίηση. Να υπολογίσετε τα εξής:

1. Την σταθερά κανονικοποίησης A ,
2. την από κοινού εντροπία $H(X, Y)$,
3. τις εντροπίες $H(X), H(Y)$,
4. τις αποστάσεις $D[p_X(x)||p_Y(x)], D[p_Y(x)||p_X(x)]$,
5. τις υπό συνθήκη εντροπίες $H(X|Y = 1), H(X|Y = 2), H(X|Y = 3), H(X|Y = 4), H(X|Y = 5)$,
6. τις υπό συνθήκη εντροπίες $H(X|Y), H(Y|X)$ και
7. την αμοιβαία εντροπία $I(X; Y)$.

Άσκηση 3 Μια τράπουλα αποτελείται από 52 χαρτιά που αρχικά βρίσκονται σε μια γνωστή διάταξη, π.χ. στη σειρά που εμφανίζονται όταν η τράπουλα είναι αχρησιμοποίητη.

1. Χωρίζουμε σε ένα τυχαίο σημείο την τράπουλα σε δύο μέρη (με τουλάχιστον ένα χαρτί σε κάθε μέρος) και βάζουμε το δεύτερο μέρος πρώτο και το πρώτο δεύτερο. Ποια είναι η εντροπία της διάταξης που προκύπτει;
2. Κάνουμε την ίδια ενέργεια δεύτερη φορά. Ποια είναι η εντροπία της διάταξης που προκύπτει;