ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

1η ΣΕΙΡΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ειρήνη Δόντη

ΑΜ: 03119839

9ο εξάμηνο

Αθήνα 2023-2024

Για την επίλυση των μαθηματικών σχέσεων της εκάστοτε άσκησης χρησιμοποιούμε κώδικα σε Python.

<u>**Άσκηση 1**</u>

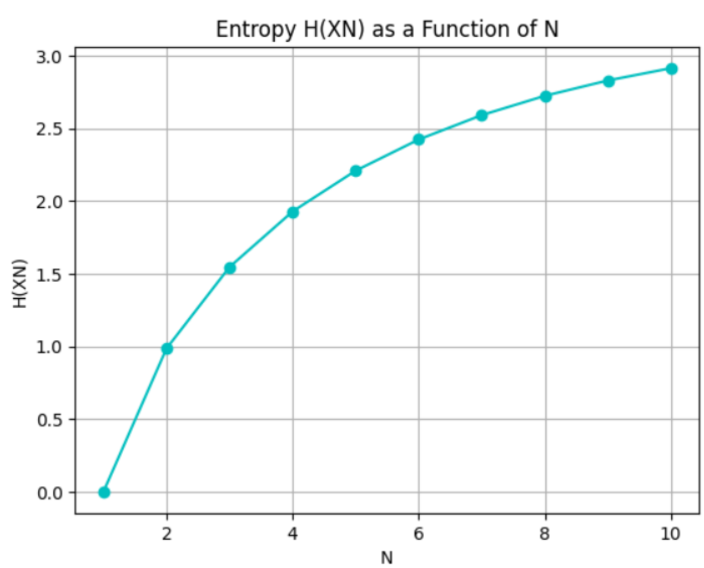
Η εντροπία για την τυχαία μεταβλητή X_N μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο της εντροπίας: $H(X_N) = -\sum_{k=1}^{N} \Pr\{X_N = k\}\log_2(\Pr\{X_N = k\})$

Ισχύει ότι: $\Pr\{X_N = k\} = A_N \left(\frac{3}{4}\right)^k$ και συνεπώς ισχύει: $\sum_{k=1}^{N} \Pr\{X_N = k\} = 1$ ή

$\sum_{k=1}^{N} A_N \left(\frac{3}{4}\right)^k = 1$ ή $A_N = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{3}{4}\right)^k}$. Οπότε, με τη βοήθεια του μαθηματικού εργαλείου παραθέτουμε τα αποτελέσματα για τη σταθερά κανονικοποίησης A_N = [1.3333, 0.7619, 0.5766, 0.4876, 0.4370, 0.4055, 0.3847, 0.3704, 0.3604, 0.3532] για N = 1,…, 10 αντίστοιχα και της εντροπίας $H(X_N)$ συναρτήσει του N σε έναν πίνακα:

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$H(X_N)$	0.0000	0.9852	1.5460	1.9279	2.2086	2.4232	2.5909	2.7235	2.8293	2.9138

Το διάγραμμα της $H(X_N)$ ως συνάρτηση του N δημιουργήθηκε με τη βοήθεια του μαθηματικού εργαλείου και παρατίθεται παρακάτω:



Άσκηση 2

1. Ισχύει: $\sum_{x\epsilon X, y\epsilon Y} p(x,y) = 1$ ή $\sum_{x=1}^{x=5} \sum_{y=1}^{y=5} A(\left(\frac{3}{5}\right)^{x} + \left(\frac{2}{5}\right)^{y} + \left(\frac{1}{4}\right)^{x+y}) = 1$ εκτός από τις τιμές p(2,5) = A και p(3,5) = p(4,5) = 0. Οπότε, με τη βοήθεια του μαθηματικού εργαλείου υπολογίζουμε ότι, A= 0.0968.

2. Για τον υπολογισμό της από κοινού εντροπίας H(X,Y), χρησιμοποιούμε το άθροισμα που υπολογίστηκε από το προηγούμενο υποερώτημα.

   H(X,Y) = - $\sum_{x=1}^{x=5} \sum_{y=1}^{y=5} A(\left(\frac{3}{5}\right)^{x} + \left(\frac{2}{5}\right)^{y} + \left(\frac{1}{4}\right)^{x+y})\log_2(A(\left(\frac{3}{5}\right)^{x} + \left(\frac{2}{5}\right)^{y} + \left(\frac{1}{4}\right)^{x+y}))$ = 4.3921

3. Για να υπολογίσουμε τις εντροπίες H(x) και H(y) χρειαζόμαστε πρώτα τις επιμέρους πιθανότητες Pr{X=x} = $\sum_{y=1}^{y=5} A(\left(\frac{3}{5}\right)^{x} + \left(\frac{2}{5}\right)^{y} + \left(\frac{1}{4}\right)^{x+y})$ και Pr{Y=y} = $\sum_{x=1}^{x=5} A(\left(\frac{3}{5}\right)^{x} + \left(\frac{2}{5}\right)^{y} + \left(\frac{1}{4}\right)^{x+y})$. Οπότε, με τη βοήθεια του μαθηματικού εργαλείου, υπολογίζουμε ότι:
   Pr{X = 1} = 0.3625 , Pr{X = 2} = 0.2402 , Pr{X = 3} = 0.1690 , Pr{X = 4} = 0.1268 , Pr{X=5} = 0.1016, Pr{Y = 1} = 0.3357 , Pr{Y = 2} = 0.2134 , Pr{Y = 3} = 0.1655 , Pr{Y = 4} = 0.1465 , Pr{Y=5} = 0.1389.
   Από τα παραπάνω, υπολογίζουμε τις εντροπίες:
   H(X) = $-\sum_{x=1}^{x=5} p(x)\log_2(p(x))$ = 2.1713, H(Y) = $-\sum_{y=1}^{y=5} p(y)\log_2(p(y))$ = 2.2352.

4. Γνωρίζοντας τις επιμέρους πιθανότητες, υπολογίζουμε ότι:
   $D[p_x(x) \,||\, p_y(x)] = \sum_{x=1}^{x=5} \Pr\{X = x\} \log_2 \frac{\Pr\{X=x\}}{\Pr\{Y=x\}} = 0.0139$
   $D[p_y(x) \,||\, p_x(x)] = \sum_{x=1}^{x=5} \Pr\{Y = x\} \log_2 \frac{\Pr\{Y=x\}}{\Pr\{X=x\}} = 0.0147$

5. Είναι βοηθητικό να υπολογίσουμε τις πιθανότητες Pr{X | Y = y} = $\sum_{x=1}^{x=5} \frac{\Pr\{X=x,Y=y\}}{\Pr\{Y=y\}}$ για κάθε y = 1,2,3,4,5. Γνωρίζοντας τις τιμές των πιθανοτήτων, υπολογίζουμε τις επιμέρους εντροπίες με τον τύπο H(X | Y=y) = - $\sum_{x=1}^{x=5} p(x|Y=y)\log_2 p(x|Y=y)$. Οπότε, με τη βοήθεια του μαθηματικού εργαλείου, υπολογίζουμε ότι:
H(X|Y = 1) = 2.2589 , H(X|Y = 2) = 2.1901 , H(X|Y = 3) = 2.1108 , H(X|Y = 4) = 2.0538, H(X|Y = 5) = 2.0234.
6. Γνωρίζοντας τις επιμέρους εντροπίες H(X|Y = y) υπολογίζουμε τις υπό συνθήκη εντροπίες: H(X|Y) = $\sum_{i=1}^{i=5} p(Y=i)H(X|Y=i) =$ 2.1569 και H(Y|X) = H(X,Y) – H(X|Y) = 2.2209.
7. Η αμοιβαία εντροπία υπολογίζεται με τον τύπο: I(X;Y) = H(X) + H(Y) – H(X,Y) = 0.0143

<u>Άσκηση 3</u>

1. Χωρίζουμε σε τυχαίο σημείο την τράπουλα σε δύο μέρη (με τουλάχιστον ένα χαρτί σε κάθε μέρος) και βάζουμε το δεύτερο μέρος πρώτο και το πρώτο δεύτερο. Η εντροπία της διάταξης είναι H1(x) = $-\sum_{i=1}^{i=51} p(x)\log_2(p(x))$=-51 $\frac{1}{51}\log_2(\frac{1}{51})$ = 5.6724, καθώς υπάρχουν 51 περιπτώσεις, με αρχική ακολουθία [1…52], από τις οποίες χωρίζεται η τράπουλα με πιθανότητα $\frac{1}{51}$.
2. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για δεύτερη φορά. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα αρχικής κατάστασης είναι $\frac{1}{51}$.και για οποιαδήποτε άλλη διάταξη από τις υπόλοιπες 51 έχει πιθανότητα $\frac{50}{51*51}$. Οπότε, η εντροπία της διάταξης είναι H2(x)= $-\frac{1}{51}\log_2(\frac{1}{51})$ - $51\,\frac{50}{51*51}\log_2(\frac{50}{51*51})$ = 5.7004.

<u>Παράθεση Κώδικα σε Γλώσσα Προγραμματισμού Python</u>

<u>Άσκηση 1</u>

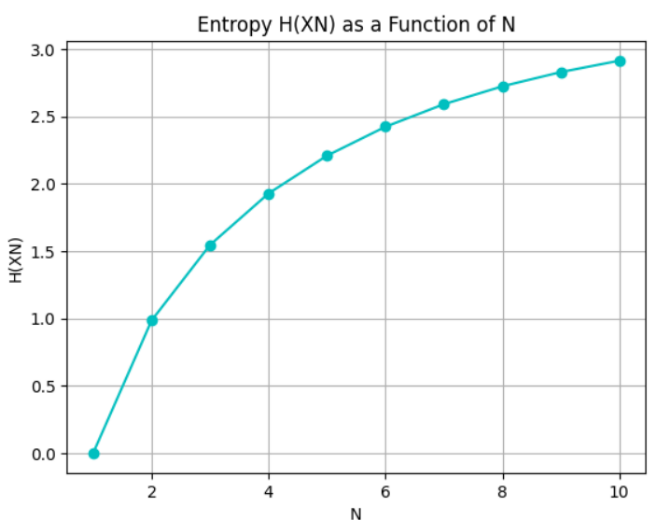
Είσοδος:

```
from math import log
import matplotlib.pyplot as plt
results = []  #store the results

# Define a range of N values
N_values = range(1, 11)  # For example, from N=1 to N=10

for N in N_values:
    # Calculate the sum
    sum_result = sum((3/4)**k for k in range(1, N+1))
    # Calculate the final result
    result = 1 / sum_result
    # Append the result to the list
    results.append((N, result))

# Print or save the results as needed
print("(N, AN) values:", results)

# save entropies
entropies = []

# Entropy for each N
for N in range(1, 11):
    AN = results[N-1][1]
    #print(AN)
    entropy = 0.0

    for k in range(1, N+1):
        probability = AN * (3/4)**k
        #print(k, AN)
        entropy -= probability * log(probability,2)

    entropies.append(entropy)
# print result
for N, entropy in zip(range(1, 11), entropies):
```

```
    print(f"N={N}: H(X{N}) = {entropy:.4f}")

# Make plot of H(XN) as a function of N
plt.plot(range(1, 11), entropies, marker='o', linestyle='-', color = 'c')

plt.xlabel('N')
plt.ylabel('H(XN)')
plt.title('Entropy H(XN) as a Function of N')
plt.grid(True)

# show plot
plt.show()
```

Έξοδος:

```
(N, AN) values: [(1, 1.3333333333333333), (2,
0.7619047619047619), (3, 0.5765765765765766), (4,
0.4876190476190476), (5, 0.4370465215535638), (6,
0.40550440550440553), (7, 0.38468220985654245), (8,
0.3704168432951816), (9, 0.3603933553574939), (10,
0.35322465514668455)]
N=1: H(X1) = 0.0000
N=2: H(X2) = 0.9852
N=3: H(X3) = 1.5460
N=4: H(X4) = 1.9279
N=5: H(X5) = 2.2086
N=6: H(X6) = 2.4232
N=7: H(X7) = 2.5909
N=8: H(X8) = 2.7235
N=9: H(X9) = 2.8293
N=10: H(X10) = 2.9138
```



Άσκηση 2

Είσοδος:

1.

```
from math import log
from itertools import product
# Calculate normalization factor A
k = list(product([i for i in range(1,6)],[i for i in
range(1,6)]))
s = sum([(3/5)**(x)+(2/5)**(y)+(1/4)**(x+y) for (x,y) in k if
not(x == 2 and y == 5) or not(x == 3 and y == 5) or not(x == 4
and y == 5)])
A = 1/(s)
print("A =", A)
```

2.

```
# Calculate Joint Entropy H(X,Y)
k = list(product([i for i in range(1,6)],[i for i in
range(1,6)]))
s = [-
A*((3/5)**(x)+(2/5)**(y)+(1/4)**(x+y))*log(A*((3/5)**(x)+(2/5)
**(y)+(1/4)**(x+y)), 2) for (x,y) in k]
H_xy = sum(s)
print("H(X,Y) =", H_xy)
```

3.

```
# Calculate the probability Pr{X=x} for x in [1,2,3,4,5] by
summing over all possible values of y for a given y

Prx_1 = sum([A*((3/5)**(1)+(2/5)**(y)+(1/4)**(1+y)) for y in
range(1,6)])
Prx_2 = sum([A*((3/5)**(2)+(2/5)**(y)+(1/4)**(2+y)) for y in
range(1,6)])
Prx_3 = sum([A*((3/5)**(3)+(2/5)**(y)+(1/4)**(3+y)) for y in
range(1,6)])
Prx_4 = sum([A*((3/5)**(4)+(2/5)**(y)+(1/4)**(4+y)) for y in
range(1,6)])
Prx_5 = sum([A*((3/5)**(5)+(2/5)**(y)+(1/4)**(5+y)) for y in
range(1,6)])
```

```
X_Probabilites = [Prx_1, Prx_2, Prx_3, Prx_4, Prx_5]
for r in range(1,6):
  print("Pr{ X =",r,"} =", X_Probabilites[r-1])
# Calculate the probability Pr{Y=y} for Y in [1,2,3,4,5] by
summing over all possible values of x for a given y

Pry_1 = sum([A*((3/5)**(x)+(2/5)**(1)+(1/4)**(x+1)) for x in
range(1,6)])
Pry_2 = sum([A*((3/5)**(x)+(2/5)**(2)+(1/4)**(x+2)) for x in
range(1,6)])
Pry_3 = sum([A*((3/5)**(x)+(2/5)**(3)+(1/4)**(x+3)) for x in
range(1,6)])
Pry_4 = sum([A*((3/5)**(x)+(2/5)**(4)+(1/4)**(x+4)) for x in
range(1,6)])
Pry_5 = sum([A*((3/5)**(x)+(2/5)**(5)+(1/4)**(x+5)) for x in
range(1,6)])

Y_Probabilites = [Pry_1, Pry_2, Pry_3, Pry_4, Pry_5]
for r in range(1,6):
  print("Pr{ Y =",r,"} =", Y_Probabilites[r-1])

# Calculate entropy for x
Hx = -1*sum([i*log(i,2) for i in X_Probabilites])
print(f"H(X) = {Hx}")

# Calculate entropy for y
Hy = -1*sum([i*log(i,2) for i in Y_Probabilites])
print(f"H(Y) = {Hy}")
```

4.

```
# Calculate the relative entropy D(px(x)||py(x)) and
D(py(x)||px(x))
s = 0
for i in range(5):
    s +=
X_Probabilites[i]*(log((X_Probabilites[i]/Y_Probabilites[i]),2
))
print(f"D(px(x)||py(x)) = {s}")

s = 0
for i in range(5):
    s +=
Y_Probabilites[i]*(log((Y_Probabilites[i]/X_Probabilites[i]),2
))
```

```
print(f"D(px(x)||py(x)) = {s}")
```

5.

```
Hx_given_y = []
s = 0
for i in range(5):
    prob =
A*((3/5)**(i+1)+(2/5)**(1)+(1/4)**(i+1+1))/Y_Probabilites[0]
    s -= prob*log(prob,2)
print(f"H(X|Y=1) = {s}")
Hx_given_y.append(s)

s = 0
for i in range(5):
    prob =
A*((3/5)**(i+1)+(2/5)**(2)+(1/4)**(i+1+2))/Y_Probabilites[1]
    s -= prob*log(prob,2)
print(f"H(X|Y=2) = {s}")
Hx_given_y.append(s)

s = 0
for i in range(5):
    prob
=A*((3/5)**(i+1)+(2/5)**(3)+(1/4)**(i+1+3))/Y_Probabilites[2]
    s -= prob*log(prob,2)
print(f"H(X|Y=3) = {s}")
Hx_given_y.append(s)

s = 0
for i in range(5):
    prob =
A*((3/5)**(i+1)+(2/5)**(4)+(1/4)**(i+1+4))/Y_Probabilites[3]
    s -= prob*log(prob,2)
print(f"H(X|Y=4) = {s}")
Hx_given_y.append(s)

s = 0
for i in range(5):
    prob =
A*((3/5)**(i+1)+(2/5)**(5)+(1/4)**(i+1+5))/Y_Probabilites[4]
    s -= prob*log(prob,2)
print(f"H(X|Y=5) = {s}")
Hx_given_y.append(s)
```

6.

```
# Since we already know H(X|Y=y) for all yeY, we can simply
sum over x for xeX and calculate H(x|Y)=Sum(p(y)H(X|Y))

s = 0
for i in range(5):
    s += Y_Probabilites[i]*Hx_given_y[i]
print(f"H(X|Y) = {s}")

# H(X,Y) = H(X)+H(Y|x) ->
s = H_xy - Hx
print(f"H(Y|X) = {s}")
```

7.

```
# I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)

mutual_info = Hx + Hy - H_xy
print(f"I(X;Y) = {mutual_info}")
```

Έξοδος:

1.

```
A = 0.09683453517820313
```

2.

```
H(X,Y) = 4.392149520490423
```

3.

```
Pr{ X = 1 } = 0.3624605694101319
Pr{ X = 2 } = 0.24021287905863542
Pr{ X = 3 } = 0.168980451695916
Pr{ X = 4 } = 0.12677004199032896
Pr{ X = 5 } = 0.10157605784498788
Pr{ Y = 1 } = 0.3356877571240623
Pr{ Y = 2 } = 0.21344006677256583
Pr{ Y = 3 } = 0.16544792785261514
Pr{ Y = 4 } = 0.14647780658979684
Pr{ Y = 5 } = 0.13894644166096
H(X) = 2.171267752715971
H(Y) = 2.2351995484883362
```

4.

```
D(px(x)||py(x)) = 0.013891644314934691
D(px(x)||py(x)) = 0.014742859818293638
```

5.

```
H(X|Y=1) = 2.258885945769888
H(X|Y=2) = 2.190123158221156
H(X|Y=3) = 2.1108161511032013
H(X|Y=4) = 2.0537603499484893
H(X|Y=5) = 2.023435139298353
```

6.

```
H(X|Y) = 2.156949972002087
H(Y|X) = 2.220881767774452
```

7.

```
I(X;Y) = 0.014317780713883899
```

Άσκηση 3

Είσοδος:

```
from math import log

#1
h1 = -51*(1/51)*log(1/51,2)
print("1. H1(x)= ", h1)

#2
h2 = -(1/51)*log(1/51,2) -51*(50/(51*51))*log(50/(51*51),2)
print("2. H2(x)= ", h2)
```

Έξοδος:

```
1. H1(x)=  5.672425341971496
2. H2(x)=  5.700434314713428
```