ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Μάθημα: Διακριτά Μαθηματικά

Ονοματεπώνυμο: Ειρήνη Δόντη

Α.Μ: 03119839

2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Αθήνα 2021

Θέμα 1

(α) Εφαρμόζουμε την Αρχή του Περιστερώνα ως εξής:

Οι n αριθμοί που επιλέξαμε είναι τα «περιστέρια», ενώ στις «φωλιές» τοποθετούμε τους αριθμούς $\frac{2^n - 2}{2}$, …, $2^n - 2$ με n > 1.

$1^η$ «φωλιά» (n = 2): τοποθετούμε τους αριθμούς 1, 2.

$2^η$ «φωλιά» (n = 3): τοποθετούμε τους αριθμούς 3, 4, 5, 6.

$3^η$ «φωλιά» (n = 4): τοποθετούμε τους αριθμούς 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

Θα αποδείξουμε ότι οι «φωλιές» είναι n -1:

Έστω ότι έχουμε m «φωλιές». Στην $1^η$ «φωλιά» έχουμε 2 αριθμούς, στη $2^η$ «φωλιά» 4 αριθμούς, στην $3^η$ «φωλιά» 8 αριθμούς και στην m-οστή «φωλιά» 2^m αριθμούς.

Οπότε, συνολικά έχουμε $2 + 4 + 8 + … + 2^m = 2^n - 2$ αριθμούς. Διαιρώντας με το 2, έχουμε: $1 + 2 + 4 + … + 2^{m-1} = \frac{2^n - 2}{2}$ ή $2^m - 1 = 2^{n-1} - 1$ ή m = n -1. Οπότε, οι «φωλιές» είναι n -1 και για δύο αριθμούς α και β με α < β έχουμε, από τον τρόπο κατασκευής των «φωλιών», ότι β ≤ 2α.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τμήμα της ακολουθίας, στο οποίο κάθε στοιχείο που υπάρχει μέσα επαναλαμβάνεται άρτιο πλήθος φορών. Κάθε φορά, μετράμε το πλήθος των εμφανίσεων κάθε στοιχείου από την αρχή της ακολουθίας μέχρι το σημείο στο οποίο βρισκόμαστε. Συμπληρώνουμε, λοιπόν, έναν πίνακα στον οποίο τοποθετούμε 1 αν το πλήθος των εμφανίσεων των στοιχείων είναι περιττός αριθμός, ενώ 0 στην περίπτωση που είναι άρτιος αριθμός. Οι διαφορετικοί συνδυασμοί είναι 2^n , ενώ οι θέσεις στην ακολουθία είναι από 0 … 2^n , δηλαδή σύνολο $2^n + 1$.

Για το δοσμένο παράδειγμα έχουμε ότι:

Στην αρχή, εφόσον δεν έχουμε κάποιο στοιχείο, ο πίνακας είναι: [0,0,0].

Μόλις εισαχθεί το 7 στην ακολουθία, ο πίνακας γίνεται: [0,0,1].

Μόλις εισαχθεί το 5 στην ακολουθία, ο πίνακας γίνεται: *[0,1,1].*

Μόλις εισαχθεί το 3 στην ακολουθία, ο πίνακας γίνεται: [1,1,1].

Μόλις εισαχθεί το 5 στην ακολουθία, ο πίνακας γίνεται: [1,0,1].

Μόλις εισαχθεί το 7 στην ακολουθία, ο πίνακας γίνεται: [1,0,0].

Μόλις εισαχθεί το 5 στην ακολουθία, ο πίνακας γίνεται: [1,1,0].

Μόλις εισαχθεί το 3 στην ακολουθία, ο πίνακας γίνεται: [0,1,0].

Μόλις εισαχθεί το 7 στην ακολουθία, ο πίνακας γίνεται: *[0,1,1]*.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας καταλαμβάνει τις τιμές *[0,1,1]* δύο φορές. Οπότε, αποδείξαμε το ζητούμενο.

<u>**Θέμα 2**</u>

(α) Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με μαθηματική επαγωγή:

Επαγωγική Βάση: Για n = 2 ισχύει.

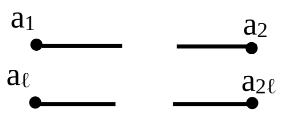
Έστω πως ισχύει για n κορυφές και έστω s^* αυτή η κορυφή που είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή $u \in V \setminus \{s^*\}$ μέσω μονοπατιού το πολύ 2. Έστω A το σύνολο των κορυφών που έχουν ακμή προς την s^* και με B το σύνολο των κορυφών που έχουν ακμή προς τις κορυφές του συνόλου A και απέχουν μήκος 2 από την s^*. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για n + 1 κορυφές. Έστω e η νέα κορυφή και εφόσον αναφερόμαστε σε tournament, η νέα κορυφή θα συνδέεται, απαραίτητα, με όλες τις άλλες προς τη μία κατεύθυνση. Αν η e έχει ακμή προς την s^* ή προς κάποια κορυφή του συνόλου A, τότε η s^* είναι η κορυφή που είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή $u \in V \setminus \{s^*\}$ μέσω μονοπατιού το πολύ 2. Στην αντίθετη περίπτωση, έχουμε όλες τις κορυφές του A και την s^* να έχουν ακμή προς τη e. Εξετάζουμε τις κορυφές του συνόλου B. Όλες αυτές οι κορυφές έχουν ακμή προς κορυφή του συνόλου A και εφόσον υποθέτουμε ότι όλες οι κορυφές του A έχουν ακμή προς τη νέα κορυφή e, η κορυφή e είναι σε αυτή την περίπτωση η κορυφή που είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή $u \in V \setminus \{s^*\}$ μέσω μονοπατιού το πολύ 2. Οπότε, αποδείξαμε το ζητούμενο.

(β)

Θα εφαρμόσουμε μαθηματική επαγωγή:

Θεωρούμε G συνεκτικό δέντρο, στο οποίο ενώνουμε όλες τις κορυφές με ℓ μονοπάτια χωρίς να επικαλύπτονται, δηλαδή να μην έχουν κοινές ακμές. Με άλλα λόγια, θα συνδέσουμε τα μονοπάτια του συνδετικού δέντρου με άκρα μόνο τα T ανά δύο στο απλό δέντρο.

Για n = 2: Έχουμε ότι ℓ = 1, ισχύει.

Έστω ότι ισχύει και για n = 2 ℓ: 

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για n + 2= 2 ℓ + 2: Έχουμε προσθέσει, στην περίπτωση αυτή, άλλες δύο κορυφές A και B. Χρειαζόμαστε ℓ + 1 μονοπάτια, δηλαδή χρειαζόμαστε να συνδέσουμε άλλο ένα μονοπάτι ανάμεσα στις καινούριες κορυφές A και B. Αν το μονοπάτι A – B ανήκει σε κάποιο από τα υπόλοιπα μονοπάτια, δηλαδή σε κάποιο από τα a_κ - $a_{\kappa+\ell}$, μπορούμε να θεωρήσουμε τα a_κ – A και B - $a_{\kappa+\ell}$ Σε αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε απλώς το μονοπάτι A – B. Οπότε, ισχύει και για n +2.

Οπότε, αποδείξαμε το ζητούμενο για συνεκτικό δέντρο G. Ισχύει, γενικά, ότι κάθε συνεκτικό γράφημα περιέχει ένα συνεκτικό δέντρο. Οπότε, η παραπάνω απόδειξη ισχύει και για κάθε συνεκτικό γράφημα G.

Θέμα 3

Ορίζουμε τα σύνολα I και S = V – I. Επιλέγουμε τυχαία μία κορυφή και τη τοποθετούμε στο σύνολο I. Όλοι οι γείτονες τοποθετούνται στο σύνολο S. Συνεχίζουμε με την επόμενη κορυφή που δεν υπάρχει στο σύνολο I ή στο S, προσθέτοντάς την στο σύνολο I και τους γείτονές της στο σύνολο S, μέχρι να τελειώσουν οι κορυφές. Το σύνολο I αποτελεί ανεξάρτητο σύνολο, το οποίο δεν έχει γείτονες των κορυφών που περιέχει. Για κάθε κορυφή που προσθέτουμε στο σύνολο I προσθέτουμε στο σύνολο S το πολύ d κορυφές. Οπότε, προσθέτουμε d + 1 κορυφές, συνολικά, στα δύο σύνολα. Με άλλα λόγια, θα χρειαστούν n/(d + 1) βήματα. Σε κάθε βήμα προσθέτουμε μία κορυφή στο I και συνεπώς θα έχουμε τουλάχιστον n/(d + 1) κορυφές στο ανεξάρτητο σύνολο.

<u>Θέμα 4</u>

(i) Θα αποδειχθεί με επαγωγή στο k:

Για k = 1, το γράφημα είναι αυτοσυμπληρωματικό και έχει 4 κόμβους, εκ των οποίων οι δύο έχουν βαθμό 2 και οι άλλοι δύο βαθμό 1.

Για k = 2 έχουμε δύο μονοπάτια μήκους 3 και τα τοποθετούμε παράλληλα. Κάθε ακραίος κόμβος ενός μονοπατιού συνδέεται με δύο γειτονικούς μεταξύ τους κόμβους του άλλου μονοπατιού, έναν ακραίο και έναν ενδιάμεσο, ενώ κάθε ενδιάμεσος κόμβος ενός μονοπατιού συνδέεται με δύο μη γειτονικούς μεταξύ τους κόμβους του άλλου μονοπατιού, έναν ακραίο και έναν ενδιάμεσο. Στο γράφημα που προκύπτει, οι ενδιάμεσοι κόμβοι των μονοπατιών έχουν βαθμό 4 και οι ακραίοι βαθμό 3. Στο συμπληρωματικό γράφημα αντιστρέφονται οι ακραίοι και οι ενδιάμεσοι κόμβοι, με αποτέλεσμα να προκύπτει γράφημα ισομορφικό του αρχικού. Ο κόμβος, με άλλα λόγια, γίνεται ενδιάμεσος και οι δύο κόμβοι του άλλου μονοπατιού, τώρα, δεν είναι γειτονικοί, αλλά αλλάζουν και εκείνοι (ο ακραίος γίνεται ενδιάμεσος και το αντίστροφο), με αποτέλεσμα να έχουμε πάλι έναν ακραίο και έναν ενδιάμεσο κόμβο. Οπότε, στο συμπληρωματικό γράφημα, ο κόμβος αυτός συνδέεται με δύο μη γειτονικούς κόμβους του άλλου μονοπατιού, έναν ακραίο και έναν ενδιάμεσο και συνεπώς έχει τις ίδιες ιδιότητες με τους ενδιάμεσους κόμβους στο αρχικό γράφημα. Αντίστοιχα, ένας ενδιάμεσος κόμβος γίνεται ακραίος και λαμβάνει την ιδιότητα που είχαν οι ακραίοι στο αρχικό γράφημα. Με άλλα λόγια, το γράφημα που προκύπτει είναι αυτοσυμπληρωματικό.

Για k = κ κατασκευάζουμε ένα αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με τη μέθοδο που περιγράφηκε παραπάνω. Βάσει αυτού, μπορεί να κατασκευαστεί αυτόσυμπληρωματικό γράφημα με k = κ + 1. Όπως πριν, και αφού έχουμε το αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με κ μονοπάτια, προσθέτουμε άλλο ένα μονοπάτι μήκους 3 παράλληλα στα υπόλοιπα. Οι ακραίοι κόμβοι αυτού του μονοπατιού συνδέονται με δύο γειτονικούς μεταξύ τους κόμβους από κάθε άλλο μονοπάτι, έναν ακραίο και έναν ενδιάμεσο. Αντίστοιχα, εκτελούμε και για τους κόμβους του μονοπατιού που προσθέσαμε. Το γράφημα που προκύπτει αποτελεί μία γενίκευση για περισσότερα από δύο παράλληλα μονοπάτια μήκους 3. Όμοια, είναι αυτοσυμπληρωματικό και ικανοποιεί τις απαιτήσεις για τους βαθμούς των κορυφών, αφού οι μισοί είναι ακραίοι κόμβοι με βαθμό 2k - 1 και οι άλλοι μισοί ενδιάμεσοι με βαθμό 2k.

(ii) Θα στηριχθούμε στο αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει το γράφημα του προηγούμενου ερωτήματος με 4k κορυφές. Αν προσθέσουμε άλλη μία κορυφή στο γράφημα και την ενώσουμε με όλους τους ακραίους κόμβους, όλες οι κορυφές θα έχουν βαθμό 2k. Αρχικά, διότι οι ενδιάμεσοι κόμβοι είχαν ήδη βαθμό 2k και δεν προστέθηκε κάποια ακμή. Επίσης, οι ακραίοι κόμβοι είχαν βαθμό 2k – 1 και τους προστέθηκε μία ακμή και , επιπρόσθετα, η νέα κορυφή συνδέεται με τους μισούς εκ των παλιών κόμβων, οπότε έχει βαθμό 2k. Με άλλα λόγια, το γράφημα είναι 2k – κανονικό με 4k + 1 κορυφές. Επιπλέον, για να είναι αυτοσυμπληρωματικό το γράφημα, πρέπει η νέα κορυφή να παραμένει «συμμετρική» ως προς τον εαυτό της στο συμπληρωματικό γράφημα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η κορυφή στο συμπληρωματικό γράφημα θα έχει ακμές με όλους τους ενδιάμεσους κόμβους οι οποίοι μετατράπηκαν σε ακραίοι. Οπότε στο συμπληρωματικό γράφημα η νέα κορυφή έχει ξανά τις ακμές με όλους τους ακραίους κόμβους και συνεπώς το γράφημα να είναι αυτοσυμπληρωματικό. Τα παραπάνω ισχύουν για $k \geq 1$, οπότε αποδείξαμε το ζητούμενο.

<u>Θέμα 5</u>

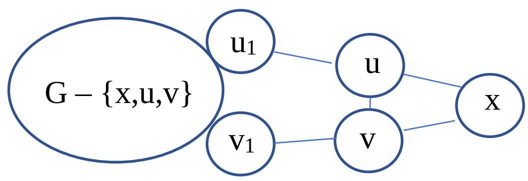
(α) Αν το γράφημα *δεν* περιέχει ακμές περιττού βαθμού:

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε γράφημα με κορυφές άρτιου βαθμού και επομένως έχει κύκλο Euler. Οπότε, για κάθε ακμή που καταλήγει σε μία κορυφή υπάρχει και μία άλλη που απομακρύνεται από την κορυφή, με αποτέλεσμα το πλήθος των ακμών που κατευθύνονται προς την κορυφή να ισούται με το πλήθος αυτών που έχουν κατεύθυνση από την μία κορυφή προς την άλλη. Με άλλα λόγια, ο προς - τα – έσω βαθμός και ο προς – τα – έξω βαθμός της κάθε κορυφής u να είναι ίσοι.

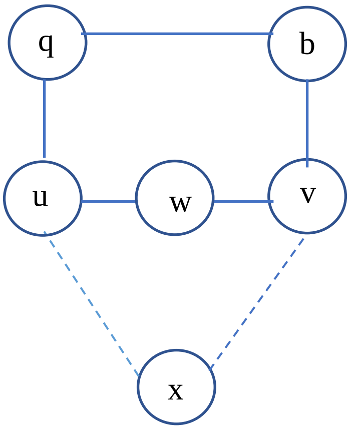
Αν το γράφημα περιέχει ακμές περιττού βαθμού:

Σε αυτή την περίπτωση, οι ακμές αυτές είναι άρτιου πλήθους και για κάθε ζεύγος κορυφών σχεδιάζουμε μία ακμή. Στο γράφημα που προκύπτει, μπορούμε να βρούμε τον κύκλο Euler με αποτέλεσμα να ισχύει ότι ο προς - τα – έσω βαθμός και ο προς – τα – έξω βαθμός της κάθε κορυφής u να είναι ίσοι. Αν παραλείψουμε αυτές τις ακμές, κάθε κορυφή θα έχει μία ακμή λιγότερη, οπότε ο προς - τα – έσω βαθμός και ο προς – τα – έξω βαθμός της κάθε κορυφής u διαφέρουν κατά ένα. Οι κορυφές που στο αρχικό γράφημα είναι άρτιου βαθμού ο προς - τα – έσω βαθμός και ο προς – τα – έξω βαθμός της κάθε κορυφής u είναι ίσοι.

(β) (i) Η κορυφή u συνδέεται με τον κύκλο Hamilton του γραφήματος G – x μέσω των ακμών u_1u και uv. Επομένως ο κύκλος περνά διαδοχικά από τις ακμές u_1uvv_1. Μπορούμε να φτιάξουμε τον ίδιο κύκλο με μόνη αλλαγή να μην περνά από την ακμή uv και να παρεμβάλω την κορυφή x. Έτσι ο κύκλος θα φτάνει στην u θα επισκέπτεται την x και στη συνέχεια την v.



(ii) Στην περίπτωση που οι u και v δεν είναι γειτονικές, δεν έχουμε απαραίτητα κύκλο Hamilton.Σχεδιάζουμε ,ως παράδειγμα, το παρακάτω γράφημα. Αρχικά, έχει κύκλο Hamilton, ενώ με την προσθήκη της x δεν έχει.



Θέμα 6

(α) Αποδεικνύουμε ,αρχικά, τη μία κατεύθυνση με επαγωγή. Δηλαδή αν $d_1 +\ldots+ d_n = 2(n -1)$ τότε, θα αποδείξουμε ότι, υπάρχει δέντρο T με βαθμούς κορυφών d_1 , d_2 , …, d_n .

Για n = 2, έχουμε δέντρο με μία ρίζα και έναν απόγονο $d_1 = 1$ και

$d_2 = 1$ και $d_1 + d_2 = 2(2 – 1) = 2$ ισχύει (Επαγωγική Βάση).

Για n = 3, έχουμε δέντρο με μία ρίζα και δύο απογόνους $d_1 = 2$ και

$d_2 = 1$ και $d_3 = 1$ και $d_1 + d_2 + d_3 = 2(3 – 1) = 4$ ισχύει.

Έστω πως για n = k – 1 κατασκευάζουμε δέντρο με άθροισμα βαθμών 2(k – 1- 1) = 2(k – 2) (Επαγωγική Υπόθεση).

Πρέπει να δείξουμε ότι για n = k μπορούμε να κατασκευάσουμε δέντρο με άθροισμα βαθμών 2(k – 1) (Επαγωγικό Βήμα).

Αποδεικνύουμε πως ένα από τα d_1 , d_2 , …, d_k έχει τιμή 1. Αν για κάθε i: $d_i \geq 2$ τότε: $d_1 +\ldots+ d_k \geq 2k \neq 2(k-1)$ άτοπο.

Θεωρούμε ότι $d_1 = 1$, οπότε υπάρχει $d_i \geq 2$, διότι για κάθε $d_i = 1$ τότε $d_1 +\ldots+ d_k = k$ άτοπο. Έπειτα, θεωρούμε πως $d_2 \geq 2$, οπότε ισχύει ότι $d_1 +\ldots+ d_k = 2(k-1)$ ή

$d_2 + \ldots + d_k = 2(k\text{-}1) - d_1$ ή $(d_2 - 1) + \ldots + d_k = 2(k\text{-}1) - 2 = 2(k - 2)$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε τέτοιο δέντρο. Στην κορυφή με βαθμό $d_2 - 1$ προσθέτω μία ακμή που καταλήγει σε μία νέα κορυφή με βαθμό 1. Με άλλα λόγια, $1 + (d_2 - 1) + 1 + \ldots + d_k = 2(k\text{-}2) + 2 = 2(k - 1)$. Οπότε, κατασκευάσαμε δέντρο T με βαθμούς κορυφών d_1 , d_2 , …, d_k .

Αποδεικνύουμε, έπειτα, τη αντίθετη κατεύθυνση με επαγωγή. Δηλαδή αν υπάρχει δέντρο T με βαθμούς κορυφών d_1 , d_2 , …, d_n τότε, θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα των βαθμών του $d_1 + \ldots + d_n = 2(n\ \text{-}1)$.

Το πλήθος των ακμών του δέντρου με n κορυφές είναι n – 1. Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι διπλάσιο αυτού των ακμών δηλαδή, 2(n-1). Όμοια, λοιπόν, με την προηγούμενη περίπτωση αποδεικνύουμε το ζητούμενο.

(β) Αποδεικνύουμε, αρχικά, ότι: Αν $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G, τότε υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$.

Έστω $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G. Θεωρούμε ότι για κάθε τομή του γραφήματος υπάρχει ακμή με βάρος μικρότερο ή ίσο της e που διασχίζει αυτή την τομή. Με άλλα λόγια, για κάθε τομή μπορούμε να επιλέξουμε τον σχεδιασμό ΕΣΔ με μία ακμή διαφορετική από την e και επομένως να μην την χρησιμοποιήσω για την κατασκευή του ΕΣΔ, άτοπο. Αναγκαστικά, λοιπόν, υπάρχει τομή τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που τη διασχίζει.

Έπειτα, θα αποδείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή θα δείξουμε ότι:

Αν υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, τότε $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G.

Θεωρούμε ότι υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$. Αν ,για την κατασκευή του ΕΣΔ T, δεν επιλέξουμε την e, θα επιλέξουμε απαραίτητα ακμή e’ με μεγαλύτερο βάρος και το νέο ΕΣΔ T’ δεν θα έχει την e και θα έχει την e’. Δεδομένου ότι w(e) < w(e’) θα ισχύει w(T) < w(T’) και επομένως το T’ δεν είναι ΕΣΔ.

Θέμα 7

(α) Στην περίπτωση που οι κύκλοι είναι μήκους τουλάχιστον k, τότε κάθε όψη ορίζεται από τουλάχιστον k ακμές. Ισχύει, δηλαδή, ότι $k*f \leq 2m$. Εφόσον θεωρούμε απλό επίπεδο γράφημα, τότε ισχύει ότι: $m + 2 = n + f$ ή $f = m – n + 2$. Από παραπάνω, ισχύει για κάθε απλό επίπεδο γράφημα G ότι: $k*(m – n + 2) \leq 2m$ ή $(k – 2)m + k(2 – n) \leq 0$ ή $m \leq \frac{k}{k-2}(n - 2)$.

(β) (i)

Από σχέση αθροίσματος βαθμών κορυφών και πλήθους ακμών:

$2m = 3n$ ή $n = \frac{2}{3}m$.

Από τύπο Euler:

$n + f = m + 2$ ή $f = \frac{m}{3} + 2$ (1) από παραπάνω.

Έστω k όψεις βαθμού 5 και ℓ όψεις βαθμού 6. Από σχέση αθροίσματος βαθμών κορυφών (εκφρασμένα με τις όψεις) και πλήθους ακμών έχουμε ότι:

$5k + 6\ell = 2m$ (2)

Επίσης θα ισχύει ότι $f = k + \ell$ (3).

Θέλουμε να δείξουμε ότι $k = 12$.

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι: $5k + 6\ell = 2m = 2(3f – 6) = 6(k + \ell) – 12$ ή $k = 12$, δηλαδή αποδείξαμε το ζητούμενο.

(ii) Οι σχέσεις (2) και (3) ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση. Επιπλέον ισχύει ότι:

$2m \geq 3n$ ή $n \leq \frac{2}{3}m$.

Οπότε, $f \geq \frac{m}{3} + 2$

Όμοια με το προηγούμενο ερώτημα θα καταλήξουμε στο εξής: $k \geq 12$, το οποίο είναι ζητούμενο.

<u>Θέμα 8</u>

Το G περιέχεται στο GxK_q , οπότε: $\chi(GxK_q) \geq \chi(G)$.

Το K_q περιέχεται στο GxK_q , οπότε: $\chi(GxK_q) \geq \chi(K_q)$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι: $\chi(GxK_q) \geq \max\{\chi(G), q\}$.

- Εξετάζουμε τη περίπτωση: $\chi(G) < \chi(K_q)$.

Ο χρωματικός αριθμός του K_q είναι q. Έστω ότι στις κορυφές του 1,2,3, …, q, αποδίδουμε χρώμα $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots \chi_q$. Ο χρωματισμός αυτός ισχύει για το πρώτο αντίγραφο του K_q. Στο δεύτερο, αλλάζω τα χρώματα στις κορυφές κατά μία θέση και αποδίδουμε τα χρώματα $\chi_q, \chi_1, \chi_2, \dots \chi_{q-1}$ στις αντίστοιχες κορυφές 1,2,3, …, q. Όμοια εκτελούμε για το τρίτο αντίγραφο, το τέταρτο κ.ο.κ.

Οπότε, $\chi(GxK_q) = \chi(G)$.

- Το αντίστοιχο ισχύει και στην περίπτωση που $\chi(G) > \chi(K_q)$.

Οπότε, γενικά, από τα παραπάνω: $\chi(GxK_q) = \max\{\chi(G), q\}$.