ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Μάθημα: Διακριτά Μαθηματικά

Ονοματεπώνυμο: Ειρήνη Δόντη

Α.Μ: 03119839

$3^{η}$ Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Αθήνα 2021

Θέμα 1

1. Επιλέγουμε 200 φοιτητές από τους 1000 που θα πάρουν το βιβλίο: C(1000,200)
2. Με C(1000,200) τρόπους μοιράζουμε τα αντίτυπα Hunter. Οπότε, από τους 800 φοιτητές που απομένουν οι 250 επιλέγονται με C(800,250) τρόπους και συνεχίζοντας προκύπτει το γινόμενο: C(1000,200)C(800,250)C(550,100)C(450,50)
3. Ο πρώτος φοιτητής επιλέγει με 4 τρόπους, για κάθε επιλογή του πρώτου ο δεύτερος επιλέγει με 4 τρόπους κ.ο.κ. Οπότε, έχουμε 4^{1000} τρόπους.
4. Εφαρμόζοντας την αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού έχουμε ότι: Από όλους τους τρόπους αφαιρούμε αυτούς που το ένα βιβλίο δεν επιλέχθηκε και αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{4}{1}$ τρόπους. Έπειτα, προσθέτουμε τους τρόπους που δύο βιβλία δεν επιλέχθηκαν και αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{4}{2}$ τρόπους. Τέλος προσθέτουμε τους τρόπους που 3 βιβλία δεν επιλέχθηκαν και αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{4}{3}$τρόπους. Οπότε, όλοι οι τρόποι για να διατεθεί ένα αντίτυπο από κάθε βιβλίο είναι οι εξής : $4^{1000} - \binom{4}{1}3^{1000} + \binom{4}{2}2^{1000} - \binom{4}{3}1^{1000}$.
5. Τα σημεία που μπορεί να μοιραστούν πάνω από 350 βιβλία είναι το μέγιστο 2 γιατί στην αντίθετη περίπτωση, δεν επαρκούν τα βιβλία. Οπότε, εφαρμόζουμε Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού: Από τους τρόπους να μοιραστούν τα 1000 αντίτυπα στα 4 σημεία C(1000 + 4 −1,3), αφαιρούμε αυτούς με τους οποίους μοιράζονται 351 αντίτυπα σε 1 σημείο (μπορεί να είναι σε οποιοδήποτε από τα τέσσερα σημεία) και απομένουν 649 για να μοιραστούν σε όλα τα σημεία με 4C(4 + 649 −1,3) τρόπους. Έπειτα, προσθέτουμε τους διαφορετικούς τρόπους να μοιραστούν 351 αντίτυπα σε 2 σημεία είναι το γινόμενο επιλογής των σημείων επί τους τρόπους να μοιραστούν τα 298 αντίτυπα στα 4 σημεία 6C(4 + 298 −1,3). Οι ζητούμενοι τρόποι διανομής είναι: C(1000 + 4 −1,3) – 4C(4 + 649 −1,3)+ 6C(4 + 298 −1,3).
6. Η διανομή 1000 φοιτητών σε 4 υποδοχές (έχει σημασία η σειρά) έχει τόσους τρόπους: C(1000 + 4 – 1,3)*1000! = $\frac{1003!}{3!}$
7. Πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με 1000! γιατί οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι. Οπότε οι τρόποι είναι:

$[C(1000 + 4 - 1,3) - 4\, C(649 + 4 - 1, 3) + 6\, C(298 + 4 - 1, 3)] \cdot 1000!$

Θέμα 2

1. Σε κάθε αμφιθέατρο μοιράζουμε από 0 έως 35 αντίτυπα θεμάτων τύπου Β. Έστω p_1, p_2, p_3, p_4 : το πλήθος των αντιτύπων θεμάτων τύπου Β που μοιράσαμε στα αμφιθέατρα 1,2,3,4 αντίστοιχα. Ισχύει πως $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 35$ και $p_i \geq 0$ για $i = 1,2,3,4$. Επομένως οι τρόποι είναι $C(4 + 35 - 1, 35) = \frac{38!}{35!3!} = 8436$
2. Έχουμε 190 διακεκριμένους φοιτητές με 155 θέματα τύπου Α και 35 θέματα τύπου Β, δηλαδή υπάρχουν $\frac{190!}{35!155!}$ τρόποι.
3. Έχουμε190 διακεκριμένους φοιτητές με 155 θέματα τύπου Α και 35 θέματα τύπου Β, δηλαδή υπάρχουν $\frac{155!}{35!120!}$ τρόποι. Αν μοιράσουμε στο αμφιθέατρο 2 *μόνο* θέματα τύπου Α θα έχουμε $\frac{120!}{35!85!}$ τρόπους να μοιράσω τα θέματα στα υπόλοιπα 3 αμφιθέατρα. Το ίδιο ισχύει όταν συμβεί το ίδιο με το αμφιθέατρο 3. Αν και στα δύο αμφιθέατρα 2 και 3 μοιράσουμε θέματα τύπου Α θα έχω $\frac{120!}{35!85!}$ τρόπους να μοιράσουμε τα θέματα στα 2 υπόλοιπα αμφιθέατρα. Επομένως η πιθανότητα να μην έχουμε θέματα τύπου Β σε ένα τουλάχιστον από τα δύο αμφιθέατρα είναι οι τρόποι να μην έχω θέματα τύπου Β στο 2 ή 3 δια το σύνολο των τρόπων χωρίς τον περιορισμό δηλ.$\frac{2\frac{155!}{35!120!} - \frac{120!}{35!85!}}{\frac{190!}{35!155!}}$.
4. Αμφιθέατρο 1: $\binom{80}{15}x^{15} + \binom{80}{16}x^{16} + \ldots + \binom{80}{80}x^{80}$

   Αμφιθέατρο 2 & 3: $\binom{35}{10}x^{10} + \binom{35}{12}x^{12} + \ldots + \binom{35}{34}x^{34}$

   Αμφιθέατρο 4: $\binom{40}{10}x^{10} + \binom{40}{12}x^{12} + \ldots + \binom{40}{40}x^{40}$

   Η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει από το γινόμενο:

$$[\binom{80}{15}x^{15} + \binom{80}{16}x^{16} + \ldots + \binom{80}{80}x^{80}]\,[\binom{35}{10}x^{10} + \binom{35}{12}x^{12} + \ldots + \binom{35}{34}x^{34}]\,[\binom{35}{10}x^{10} + \binom{35}{12}x^{12} + \ldots + \binom{35}{34}x^{34}]\,[\binom{40}{10}x^{10} + \binom{40}{12}x^{12} + \ldots + \binom{40}{40}x^{40}]$$

Προσδιορίζουμε τον συντελεστή του x^{155}

Θέμα 3

1. Έστω α_i οι χωρητικότητες με $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_{100}$. Προσδιορίζουμε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{100} = 100$ (1).

   Ισχύει ότι $\alpha_1 = c_1 + \alpha_2$, $\alpha_2 = c_2 + \alpha_3$,…. , $\alpha_{99} = c_{99} + \alpha_{100}$ (2)

   Από (1) και (2): $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \ldots + 100\alpha_{100} = 100$

   100 διακεκριμένες υποδοχές - 100 φοιτητές: Απαριθμητές:

   $c_1 : 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{100} + \ldots$

   $c_2 : 1 + x^2 + x^4 + \ldots$

   …

   $c_{99} : 1 + x^{99} + \ldots$

   $c_{100} : 1 + x^{100} + \ldots$

   Γεννήτρια Συνάρτηση: $[1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100} + \cdots][1 + x^2 + x^4 + \cdots][1 + x^{99} + \ldots][1 + x^{100} + \ldots]$

   Αναζητούμε τον συντελεστή του x^{100}.

2. Χρειαζόμαστε το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης:

   $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + 100\alpha_{100}$ με $0 \leq \alpha_i \leq 1$

   Γεννήτρια Συνάρτηση : $[1 + x][1 + x^2][1 + x^3][1 + x^{100}]$

   Αναζητούμε τον συντελεστή του x^{100}.

Θέμα 4

(α)

1. Έχουμε 500 διακεκριμένα βιβλία σε 8 διακεκριμένες υποδοχές με απαριθμητές κάθε βιβλιοθήκης: $\frac{x^{20}}{20!} + \frac{x^{21}}{21!} + \cdots + \frac{x^{100}}{100!}$. Οπότε, η γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$(\frac{x^{20}}{20!} + \frac{x^{21}}{21!} + \cdots + \frac{x^{100}}{100!})^8$. Αναζητούμε τον συντελεστή του $\frac{x^{500}}{500!}$.

2.Ο απαριθμητής κάθε βιβλιοθήκης είναι αντίστοιχα:

$$20!\frac{x^{20}}{20!} + 21!\frac{x^{21}}{21!} + \cdots + 100!\frac{x^{100}}{100!}$$

Οπότε, η γεννήτρια συνάρτηση είναι: $\left(20!\frac{x^{20}}{20!}+21!\frac{x^{21}}{21!}+\cdots+\ 100!\frac{x^{100}}{100!}\right)^8$

Αναζητούμε, αντίστοιχα, τον συντελεστή $\frac{x^{500}}{500!}$.

(β) Χρησιμοποιούμε εκθετική Γεννήτρια Συνάρτηση, αφού έχουμε πρόβλημα διάταξης: Ως υποδοχές θεωρούμε τα ψηφία 0,1,2,…,9 και n μπαλάκια.

Απαριθμητές:

0,1: $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\ =\ e^x\ -\ 1$

2,4: $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\ =\ \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

7,9: $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\ =\ \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

3,5,6,8: $1\ +\ x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\ =\ e^x$

Η Γεννήτρια Συνάρτηση είναι: $(e^x\ -\ 1)^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2(e^x)^4$

Αναζητούμε τον συντελεστή $\frac{x^n}{n!}$ με $n \geq 4$.

Θέμα 5

Αν Σ = {a,b,c,d,e,f} είναι το αλφάβητο. Κατασκευάζουμε με τη βοήθεια αυτού, αποδεκτές συμβολοσειρές με μήκος n.

Έστω p_n το πλήθος των συμβολοσειρών για τις οποίες ισχύει το συγκεκριμένο μοτίβο.

Για n = 0, ισχύει ότι $p_0 = 1$.

Έστω p_{n-1} το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους n – 1.

Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε αποδεκτές συμβολοσειρές μήκους n:

Έστω p_n τελειώνει σε a ή b με την p_{n-1} να μην περιέχει c ή d. Δηλαδή έχουμε $2*4^{n-1}$

Έστω p_n τελειώνει σε c ή d ή e ή f , οπότε η p_{n-1} δεν περιέχει c ή d.

Δηλαδή έχουμε $4p_{n-1}$.

Οπότε: $p_n = 2*4^{n-1} + 4p_{n-1}$ με $p_0 = 1$ & $n \geq 1$.

Δηλαδή: $\sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n$ - $4\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n$ ή

$P(x) - p_0 - 4xP(x) = \frac{2x}{1-4x}$ ή $P(x) = \frac{2x}{(1-4x)^2} + \frac{1}{1-4x} = \frac{2x+1-4x}{(1-4x)^2} = \frac{1}{2(1-4x)} + \frac{1}{(1-4x)^2}$

Οπότε, $p_n = \frac{1}{2} 4^n \left(1 + \binom{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2} 4^n (n+2)$