ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

3η ΣΕΙΡΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ειρήνη Δόντη

ΑΜ: 03119839

9ο εξάμηνο

Αθήνα 2023-2024

Για την επίλυση των μαθηματικών σχέσεων της εκάστοτε άσκησης χρησιμοποιούμε κώδικα σε Python.

<u>Άσκηση 1</u>

1. Οι πιθανότητες στάσιμης κατάστασης είναι οι εξής:

   $\mu_1 = \frac{1}{5}\mu_1 + \frac{3}{5}\mu_2 + \frac{5}{12}\mu_3$

   $\mu_2 = \frac{3}{4}\mu_1 + \frac{3}{10}\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_3$

   $\mu_3 = \frac{1}{20}\mu_1 + \frac{1}{10}\mu_2 + \frac{1}{3}\mu_3$

   $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$

   Από τη επίλυση του παραπάνω συστήματος, προκύπτει ότι:

   $\mu_1 = \frac{530}{1277} = 0.4150$, $\mu_2 = \frac{615}{1277} = 0.4816$, $\mu_3 = \frac{132}{1277} = 0.1034$.

2. Ισχύει ότι $H(X_n) = H(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = -\mu_1\log(\mu_1) - \mu_2\log(\mu_2) - \mu_3\log(\mu_3) = 1.3726$

3. Εφόσον πρόκειται για στάσιμη διεργασία Markov γνωρίζουμε ότι:

   $H(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_n|X_{n-1}, \dots, X_1) = H(X_2|X_1) = -\sum_i \mu_i \sum_j P_{ij}\log(P_{ij}) = 1.1962$ bits

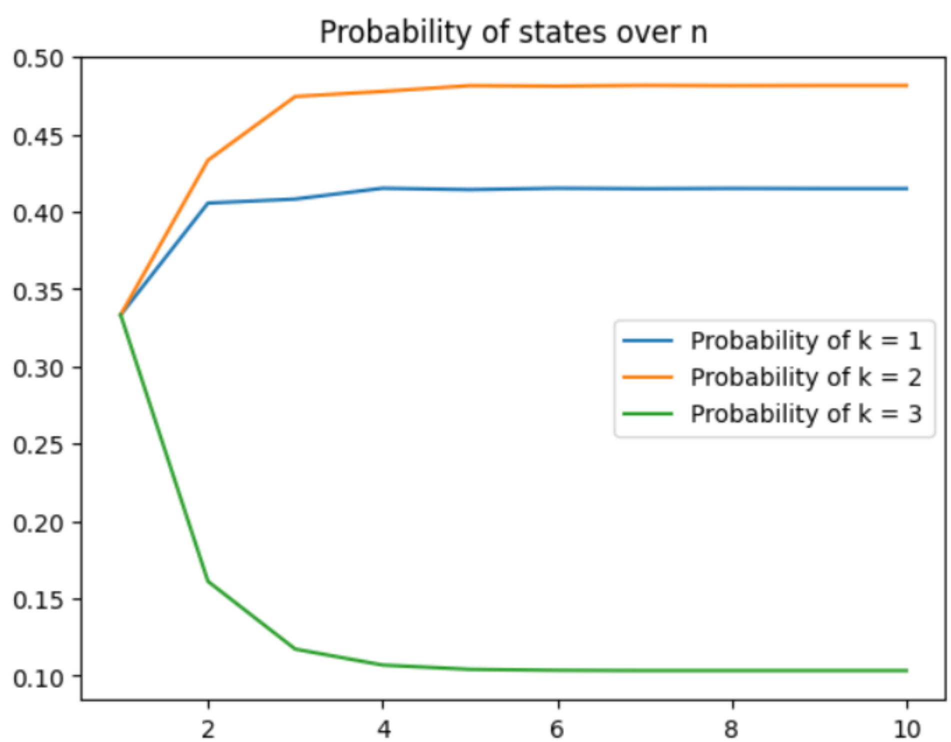
<u>Άσκηση 2</u>

1. Υπολογίζουμε την πιθανότητα της κάθε κατάστασης k τη χρονική στιγμή n, εφόσον έχουμε την αλυσίδα Markov: $P_r\{X_n = k\} = \sum_i P_r\{X_{n-1} = i\}P_{ik}$

Οπότε, υπολογίζουμε αναδρομικά τις πιθανότητες για n=1,…,10 και τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

n	$P_r\{X_n = 1\}$	$P_r\{X_n = 2\}$	$P_r\{X_n = 3\}$
1	0.3333	0.3333	0.3333
2	0.4056	0.4333	0.1611
3	0.4082	0.4745	0.1173
4	0.4152	0.4778	0.1070
5	0.4143	0.4815	0.1042
6	0.4152	0.4812	0.1036
7	0.4149	0.4817	0.1034
8	0.4151	0.4815	0.1034
9	0.4150	0.4816	0.1034
10	0.4150	0.4816	0.1034

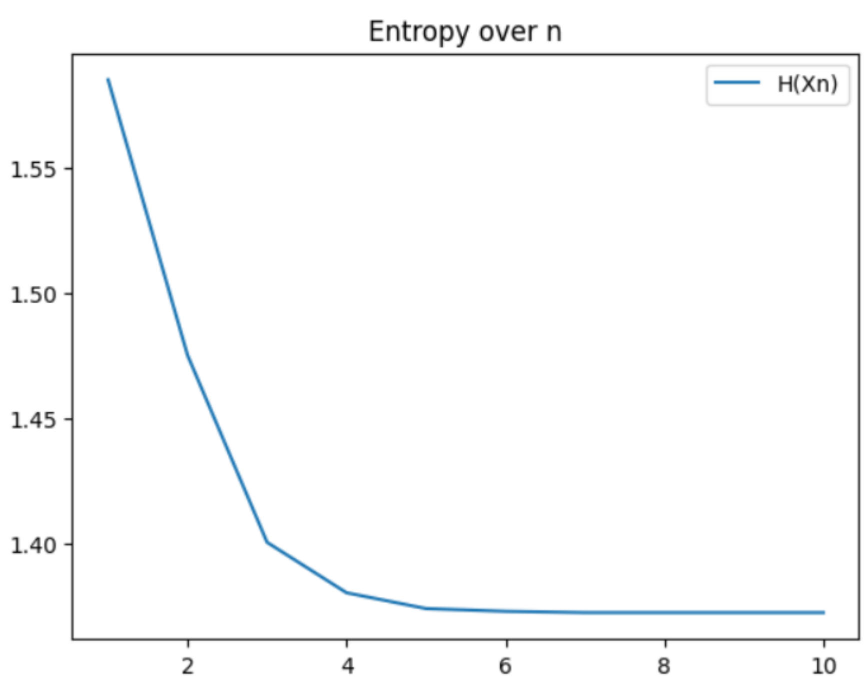
Παρακάτω, παραθέτουμε το διάγραμμα στο οποίο θα φαίνονται οι παραπάνω πιθανότητες για n = 1,2,…,10:



2. Δεδομένων των πιθανοτήτων που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα, υπολογίζουμε την εντροπία για H(X_n) για n = 1,2,…,10 και τα αποτελέσματα καταγράφονται στον παρακάνω πίνακα.

n	**H(X_n)**
1	1.5850
2	1.4752
3	1.4007
4	1.3806
5	1.3743
6	1.3732
7	1.3727
8	1.3727
9	1.3727
10	1.3727

Παρακάτω, παραθέτουμε το διάγραμμα στο οποίο θα φαίνονται οι παραπάνω πιθανότητες για n = 1,2,…,10:



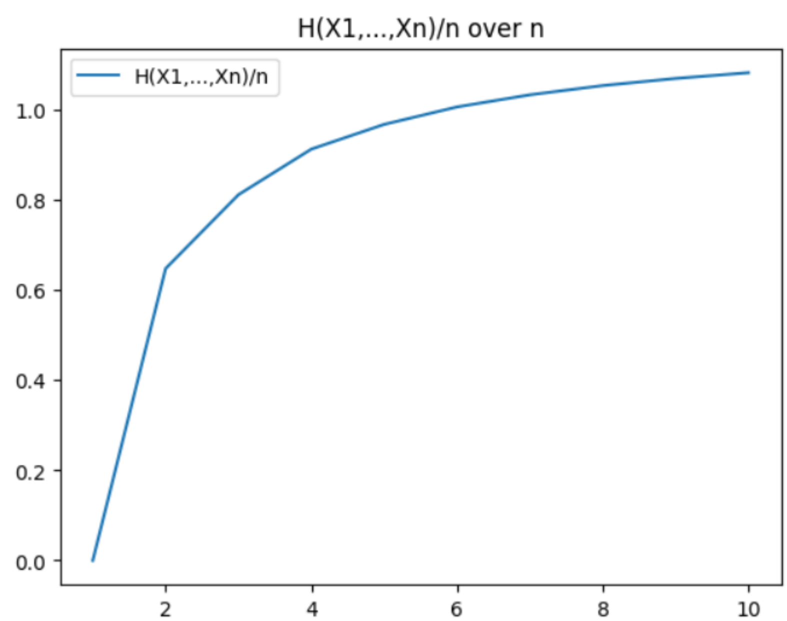
3. Ισχύει ότι $\mathrm{H}(X_1, X_2, \dots, X_n) =$

$$- \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} p(x_1) p(x_2|x_1) p(x_3|x_2) \dots p(x_n|x_{n-1}) \log\big(p(x_1) p(x_2|x_1) p(x_3|x_2) \dots p(x_n|x_{n-1})\big)$$

Με τη βοήθεια του μαθηματικού εργαλείου, υπολογίζουμε το παραπάνω άθροισμα και συνεπώς οι τιμές $\frac{1}{n}\mathrm{H}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ υπολογίζονται στον παρακάτω πίνακα:

n	$\boldsymbol{\frac{1}{n}\mathrm{H}(X_1, X_2, \dots, X_n)}$
1	0.0000
2	0.6477
3	0.8115
4	0.9126
5	0.9675
6	1.0062
7	1.0331
8	1.0536
9	1.0694
10	1.0821

Οι τιμές προσεγγίζουν αρκετά τις αντίστοιχες τιμές του τελευταίου ερωτήματος της πρώτης άσκησης. Παρακάτω, παραθέτουμε το ζητούμενο διάγραμμα:



Παράθεση Κώδικα σε Γλώσσα Προγραμματισμού Python

Άσκηση 1

Είσοδος:

2.

```
from math import log


probs = [
    [1/5, 3/4, 1/20],
    [3/5, 3/10, 1/10],
    [5/12, 1/4, 1/3]
]
m1 = 530/1277
m2 = 615/1277
m3 = 132/1277

res = -m1*log(m1,2) - m2*log(m2, 2) -m3*log(m3, 2)
print("H(Xn) = ", round(res,4))
```

3.

```
sum_m1 = sum(probs[0][i]*log(probs[0][i],2) for i in range(3))
sum_m2 = sum(probs[1][i]*log(probs[1][i],2) for i in range(3))
sum_m3 = sum(probs[2][i]*log(probs[2][i],2) for i in range(3))
res = -m1*sum_m1 - m2*sum_m2 - m3*sum_m3
print("Entropy rate = ", round(res,4), "bits")
```

Έξοδος:

2. `H(Xn) = 1.3726`

3. `Entropy rate = 1.1962 bits`

Άσκηση 2

Είσοδος:

1.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import log
from itertools import permutations, product

state_probs = [
    [1/3,1/3,1/3],
]

for n in range(1, 10):
    next_probs = [0, 0, 0]
    for k in range(3):
        next_probs[k] = round(sum(state_probs[n-
1][i]*probs[i][k] for i in range(3)),4)
    state_probs.append(next_probs)
for i, state in enumerate(state_probs):
    print(f"For n = {i+1}: ", state)

probs_1 = [i[0] for i in state_probs]
probs_2 = [i[1] for i in state_probs]
probs_3 = [i[2] for i in state_probs]
print("P(Xn = 1):", probs_1)
print("P(Xn = 2):",probs_2)
print("P(Xn = 3):",probs_3)
n_values = [(i+1) for i in range(10)]

# Create plot to show how the probabilities change overtime

plt.plot(n_values, probs_1, label="Probability of k = 1")
plt.plot(n_values, probs_2, label="Probability of k = 2")
plt.plot(n_values, probs_3, label="Probability of k = 3")
plt.legend()
plt.title("Probability of states over n")
plt.show()
```

2.

```
entropy_array = []

for n, state in enumerate(state_probs):
    entropy = round(-sum(i*log(i,2) for i in state if i !=
0),4)
    print(f"For n = {n+1}: H(Xn) = ", entropy)
    entropy_array.append(entropy)

plt.plot(n_values, entropy_array, label="H(Xn)")
plt.legend()
plt.title("Entropy over n")
plt.show()
```

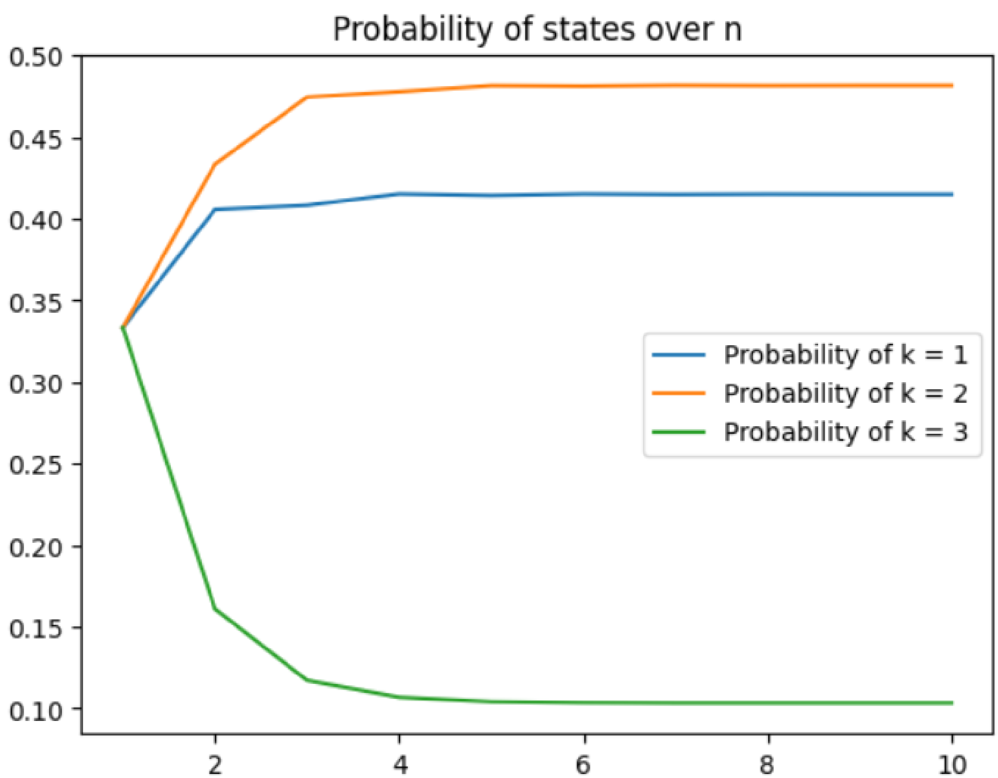
3.

```
def calctermsequence(perm, probs):

    if perm[0] != 2:
        return 0
    prob = 1
    for idx, cur_state in enumerate(perm[1:]):
        prev_state = perm[idx]
        prob *= probs[prev_state-1][cur_state-1]
    return prob*log(prob,2)

res_array = []

for n in range(1,11):
    s = 0
    for perm in product([1,2,3], repeat=n):
        s += calctermsequence(perm, probs)
    if(s == 0): res = 0.0
    else: res = round(-s/n, 4)
    print(f"For n = {n}, H(X1, ... ,Xn)/n = {res} bits")
    res_array.append(res)

plt.plot(n_values, res_array, label="H(X1,...,Xn)/n")
plt.legend()
plt.title("H(X1,...,Xn)/n over n")
plt.show()
```

Έξοδος:

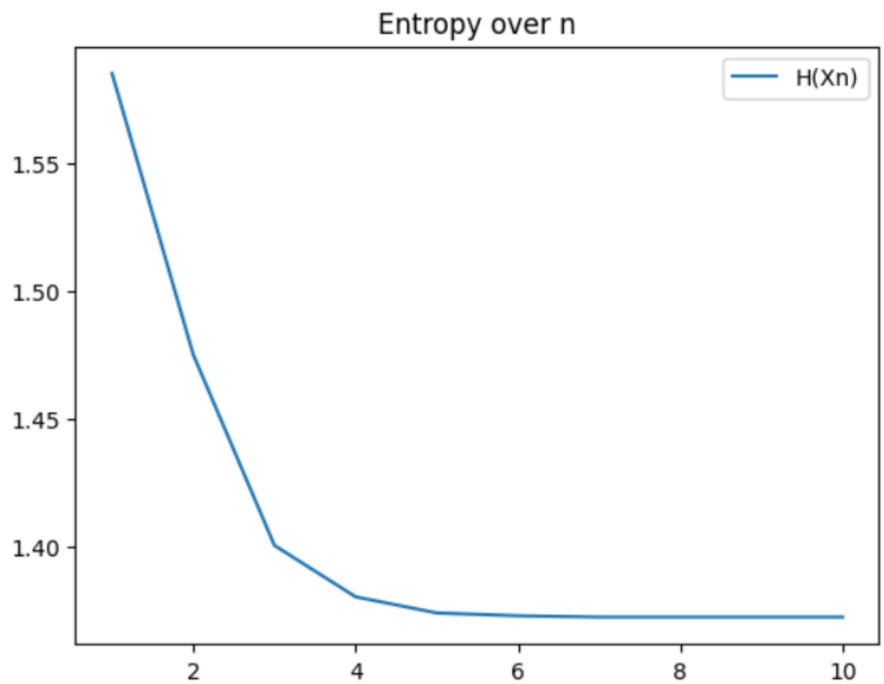
1.

```
For n = 1:  [0.3333333333333333, 0.3333333333333333,
0.3333333333333333]

For n = 2:  [0.4056, 0.4333, 0.1611]
For n = 3:  [0.4082, 0.4745, 0.1173]
For n = 4:  [0.4152, 0.4778, 0.107]
For n = 5:  [0.4143, 0.4815, 0.1042]
For n = 6:  [0.4152, 0.4812, 0.1036]
For n = 7:  [0.4149, 0.4817, 0.1034]
For n = 8:  [0.4151, 0.4815, 0.1034]
For n = 9:  [0.415, 0.4816, 0.1034]
For n = 10:  [0.415, 0.4816, 0.1034]
P(Xn = 1): [0.3333333333333333, 0.4056, 0.4082, 0.4152,
0.4143, 0.4152, 0.4149, 0.4151, 0.415, 0.415]
P(Xn = 2): [0.3333333333333333, 0.4333, 0.4745, 0.4778,
0.4815, 0.4812, 0.4817, 0.4815, 0.4816, 0.4816]
P(Xn = 3): [0.3333333333333333, 0.1611, 0.1173, 0.107, 0.1042,

0.1036, 0.1034, 0.1034, 0.1034, 0.1034]
```



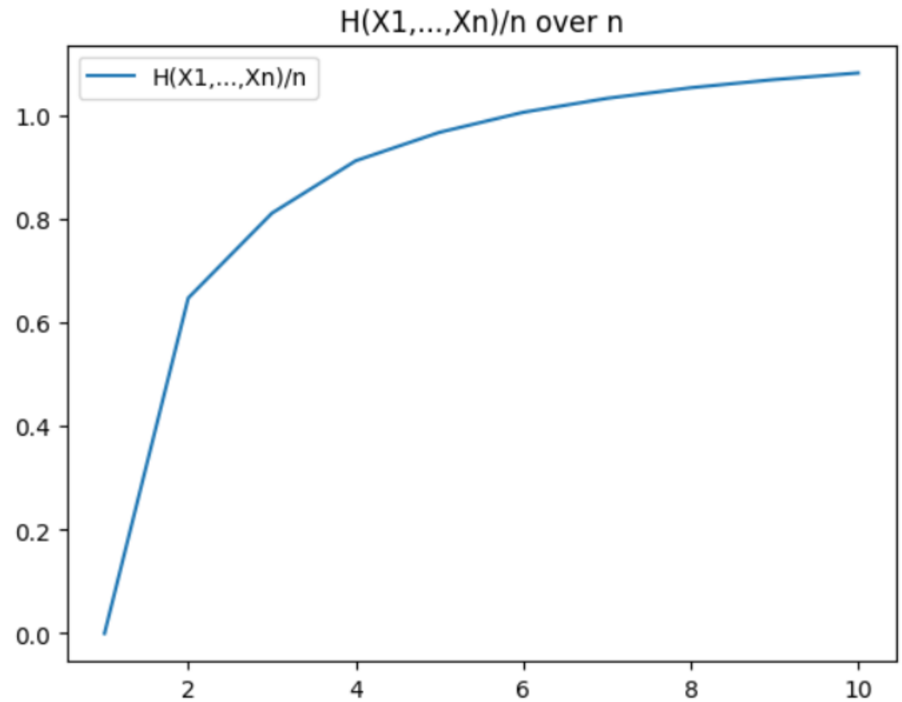
2.

```
For n = 1: H(Xn) =  1.585

For n = 2: H(Xn) =  1.4752
For n = 3: H(Xn) =  1.4007
For n = 4: H(Xn) =  1.3806
For n = 5: H(Xn) =  1.3743
For n = 6: H(Xn) =  1.3732
For n = 7: H(Xn) =  1.3727
For n = 8: H(Xn) =  1.3727
For n = 9: H(Xn) =  1.3727
For n = 10: H(Xn) =  1.3727
```



3.

```
For n = 1, H(X1, ... ,Xn)/n = 0.0 bits

For n = 2, H(X1, ... ,Xn)/n = 0.6477 bits
For n = 3, H(X1, ... ,Xn)/n = 0.8115 bits
For n = 4, H(X1, ... ,Xn)/n = 0.9126 bits
For n = 5, H(X1, ... ,Xn)/n = 0.9675 bits
For n = 6, H(X1, ... ,Xn)/n = 1.0062 bits
For n = 7, H(X1, ... ,Xn)/n = 1.0331 bits
For n = 8, H(X1, ... ,Xn)/n = 1.0536 bits
For n = 9, H(X1, ... ,Xn)/n = 1.0694 bits
For n = 10, H(X1, ... ,Xn)/n = 1.0821 bits
```


H(X1,...,Xn)/n over n
H(X1,...,Xn)/n
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
2
4
6
8
10