

## ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

5 Νοεμβρίου 2023

### Σειρά 3

#### Άσκηση 1

Δίνεται μια αλυσίδα Markov με τον εξής πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων 1, 2 και 3:

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/4 & 1/20 \\ 3/5 & 3/10 & 1/10 \\ 5/12 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. Να υπολογίσετε τους όρους  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) της στάσιμης κατανομής.
2. Να υπολογίσετε την εντροπία  $H(X_n)$  για την αντίστοιχη στάσιμη αλυσίδα Markov (δηλ. αυτή που ξεκινάει με κατανομή της  $X_1$  την κατανομή  $\mu_j$ ).
3. Να υπολογίσετε τον ρυθμό εντροπίας της στάσιμης διεργασίας.

#### Άσκηση 2

Δίνεται μια αλυσίδα Markov με τον ίδιο όπως στην προηγούμενη άσκηση πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων 1, 2 και 3. Αρχικά οι τρεις καταστάσεις είναι ισοπίθανες,

$$\Pr\{X_1 = 1\} = \Pr\{X_1 = 2\} = \Pr\{X_1 = 3\} = 1/3,$$

δηλαδή το σύστημα μπορεί να ξεκινήσει με πιθανότητα  $1/3$  από οποιαδήποτε από τις τρεις καταστάσεις.

1. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες

$$\Pr\{X_n = k\} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (n = 2, \dots, 10)$$

και να κάνετε ένα διάγραμμα, όπου θα φαίνονται οι παραπάνω πιθανότητες για  $n = 1, 2, \dots, 10$ . Συμφωνούν τα αποτελέσματά σας με το αποτέλεσμα του ερωτήματος 1 της προηγούμενης άσκησης;

2. Να υπολογίσετε την εντροπία  $H(X_n)$  για  $n = 1, 2, \dots, 10$  και να την δώσετε σε ένα διάγραμμα.
3. Να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης

$$\frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

για τις τιμές  $n = 1, 2, \dots, 10$  και να παραστήσετε τα αποτελέσματα με ένα διάγραμμα. Συμφωνούν τα αποτελέσματά σας με το αποτέλεσμα του τελευταίου ερωτήματος της Άσκησης 1;

Υπόδειξη: Για να υπολογίσετε την από κοινού εντροπία των  $X_1, X_2, \dots, X_n$  θα χρειασθείτε την από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , η οποία για μια αλυσίδα Markov μπορεί να υπολογισθεί με τον τύπο (4.3). Περαιτέρω ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει με αναδρομικό τρόπο.