Een sprong in Mathematische Hulpmiddelen

OGO 1.1: Groep 1a

door Leroy Bakker 0617167
Roy Berkeveld 0608170
Giso Dal 0615787
Etienne van Delden 0618959
Edin Dudojevič 0608206
Nick van der Veeken 0587266

4 Oktober, 2006

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Samenvatting

Dit document bevat, naast de standaardonderdelen van een verslag, de antwoorden op de opgaven uit de handout “Enige mathematische hulpmiddelen”. Het maken van de opgaven heeft inzicht verschaft in de leer van het formeel specificeren en het interpreteren van formele specificaties.

Hoofdstuk 2

Inleiding

Het doel van OGO is leren samenwerken aan een project dat qua omvang en benodigde tijd veel groter is dan bijvoorbeeld huiswerk opgaven. De kennis die bij de reguliere vakken is vergaard kan bij OGO in de “praktijk” worden toegepast.

Omdat dit het eerste project is, kan er geen opgedane kennis worden toegepast, dus ligt de nadruk nu op de training van zogenaamde OGO vaardigheden, zoals vergaderen, notulen maken en plannen. Daarnaast zullen we leren werken met LaTeX, om nette, wetenschappelijke documenten te maken.

Het volgende OGO project gaat over specificeren, vandaar dat er nu tijdens de OGO bijeenkomsten getraind wordt in het opstellen van formele expressies aan de hand van tekstuele beschrijvingen en het in woorden beschrijven van gegeven formele expressies. Hiervoor hebben wij opgaven gemaakt uit de het boekje “Enkele mathematische hulpmiddelen” [**?**].

Hoofdstuk 3

De opgaven

3.1 Rijtjes

1. Geef in goed Nederlands weer wat de volgende rijtjesexpressies voorstellen ...

   (a) $[a : a \lessdot ar : 1]$
   Antwoord: "Geef een rij van enen even lang als ar."

   (b) $[a : a \lessdot ar \ \wedge \ a < 0 : a] \mathbin{+\!\!+} [a : a \lessdot ar \ \wedge \ a > 0 : a]$
   Antwoord: "Geef de rij ar, maar beginnend met alle negatieve elementen van ar en 0 weglatend."
   Verbeterd antwoord: "Geef de rij ar, maar beginnend met alle negatieve elementen van ar en 0 weglatend, waarbij verdere volgorde behouden blijft."

   (c) $[i \in \mathbb{N} : 0 \leq 2i{+}1 < \#ar : ar(2i) * ar(2i{+}1)]$
   Antwoord: "Geef de producten van de opeenvolgende paren elementen beginnend met een even index uit de rij ar."
   Antwoord: "Geef de producten van de opeenvolgende paren elementen beginnend met een even index uit de rij ar, volgens de volgorde van voorkomen van de elementen."

2. Geef rijtjesexpressies voor ...

   (a) het rijtje nullen in de rij ar met hun plaats van voorkomen.
   Antwoord: $[i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < \#ar \wedge ar(i) = 0 : ar(i), i]$
   Verbeterd antwoord: $[i \in \mathbb{N} : 0 \leqslant i < \#ar \wedge ar(i) = 0 : (ar(i), i)]$
   Redenering: een syntax fout, $ar(i), i$ is geen tupel, dus moest dat $(ar(i), i)$ worden.

(b) het palindroom dat ontstaat door een rij te spiegelen
Antwoord: $rev(ar) = [i : 0 \leq i < \#ar : ar(\#ar - 1 - i)]$
$ar +\!\!+\, rev(ar)$

(c) het rits resultaat van twee even lange rijtjes.
Antwoord: $[i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2\#ar :$ if $(i \bmod 2) = 0 \Rightarrow ar(i/2) \Box (i \bmod 2) = 1 \Rightarrow br((i-1)/2)]$.
Aanname: ar en br zijn even lang.

3.2 Verzamelingen

1. Geef in goed Nederlands weer wat de volgende verzamelingsexpressies voorstellen . . .

(a) $\{x, y : x^2 + y^2 = 1 : x\}$
Antwoord: "Een Verzameling x-coördinaten tussen -1 en 1" .
Verbeterd antwoord: "De verzameling waarden in het gesloten bereik [-1,1]. " .
Redenering: Het gebruik van eenheidscircel impliceerd het gebruik van 2 coordinaten, terwijl er maar 1 waarde terug komt.

(b) $X \setminus \{(x, y) \in X \times X : x > y : x\}$
Antwoord: "Het kleinste element uit X".
Verbeterd antwoord: "Geef het kleinste element uit X."
Redenering: "Geef" toegevoegd (syntax).

(c) $\{ar \in \mathbb{L}(A) : \#ar = 5 \ \wedge \ ar \in VD : \mathsf{rev}(ar)\}$, waarbij A het gewone alfabet en VD een woordenboek is.
Antwoord: "Alle 5-letterwoorden uit het woordenboek, omgedraaid".
Verbeterd antwoord: "Alle 5-letterwoorden uit het woordenboek VD, omgedraaid."
Beredenering: Het was niet duidelijk dat met "het woordenboek" daadwerkelijk VD werd bedoeld.

2. Geef verzamelingsexpressies voor . . .

(a) alle niet door 13 of 37 deelbare gehele getallen.
Antwoord: $\{n \in \mathbb{N} | \neg(13|n \vee 37|n)\}$
Verbeterd antwoord: $\{n \in \mathbb{Z} | \neg(13|n \vee 37|n)\}$

(b) alle gehele getallen die met 481 vermenigvuldigd voorkomen als waarde van een gegeven geheeltallige functie, zeg φ.
Antwoord: $(\cup\ a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} : (n \times 481) = \varphi(a) : \{n\})$

(c) alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ waar 13 wel maar 37 niet inzit.
Antwoord: $\{av \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) : 13 \in av \wedge 37 \notin av : av\}$

3.3 Operaties

Zij $\Delta = \{x :: (x, x)\}$ de *identiteits*relatie of *diagonal*.

1. Wat stellen de volgende relatie expressies voor?

   (a) $(P; C; O)\ \cap\ \Delta$
   Antwoord: "De personen waarvan de partner een collega is van (één of twee van) de ouders van diezelfde persoon."
   Verbeterd antwoord: "De personen waarvan een partner een collega is van (één of twee van) de ouders van diezelfde persoon."
   Redenering: Het gaat om dezelfde persoon en niet om een ander persoon.

   (b) $P; P\ \subseteq\ \Delta$
   Antwoord: "Iedereen heeft een partner."
   Verbeterd antwoord: "De partner-relatie is symmetrisch."

   (c) $\{x, y : x\ (O; O; P)\ y : x\}$
   Antwoord: "Geef alle personen waarvoor geldt dat ze de grootouders van de partner van iemand zijn".
   Antwoord: "Geef alle personen waarvoor geldt dat ze een grootouder van de partner van iemand zijn".

2. Geef relatie-expressies voor ...

   (a) iedereen heeft een partner.
   Antwoord: $\forall_x \exists_y [(x, y) \in P]$

   (b) ouders van collegae zijn collegae.
   Antwoord: O;C $\subseteq \Delta$
   Verbeterd antwoord: $C; O; C; O^{\leftarrow} \subseteq \Delta$

(c) de ouders van mensen die een collega als partner hebben.
Antwoord: $\{x, y : x\ O; C; P\ y : x\}$
Verbeterd antwoord: $\{x, y : xOy \wedge yP; Cy : x\}$

3.4 Functies

1. Beschrijf wat de volgende functies berekenen ...

   (a) $f : \mathbb{L}(A) \times \mathbb{L}(A) \to \mathbb{L}(\mathbb{L}(A))$ gegeven door

   $$f((ar, br)) = [i : 0 \leq i < \#ar \downarrow \#br : [ar(i), br(i)]]$$

   Antwoord: "Geef paartjes van $ar(i)$ en $br(i)$ tot alle elementen van de kortste rij zijn doorgelopen"
   Verbeterd Antwoord: "Geef tupels bestaande uit $ar(i)$ en $br(i)$ tot alle elementen van de kortste rij zijn doorgelopen."
   Redenering: Het gebruik van 'paartjes' was onduidelijk.

   (b) $g : \mathbb{L}(\mathbb{L}(A)) \to \mathbb{L}(A)$ gegeven door $g([]) = []$, $g([a]) = a$ en $g(ar +\!\!+\, br) = g(ar) +\!\!+\, g(br)$
   Antwoord: "Geef A".
   Verbeterd antwoord: "Geef de catenatie van alle rijtjes in A, recursief."

   (c) $g \circ f$ met f, g als hierboven.
   Antwoord: "Geef $ar(i)$, $br(i)$"
   Verbeterd antwoord: "Geef het ritsresultaat van ar en br tot alle elementen van de korste rij zijn doorlopen."

2. Geef definities van functies die het volgende berekenen ...

   (a) de verzameling grootouders van mensen (gegeven de ouder relatie O).
   Antwoord: $f(mens) :\to \mathbb{P}(mens)$, gegeven door:
   $f(y) = \{x : x\text{O;O:}y : x\}$
   Verbeterd antwoord: $f : mens \to \mathbb{P}(mens)$, gegeven door:
   $f(mens) = \{x : x\text{O;O}y : x\}$
   Redenering: Het oude domein was leeg, maar er was wel een co-domein. De expressie was in vierstukken verdeeld, ip. de gebruikelijke drie-deling.

(b) de som van alle delers van een natuurlijk getal.
Antwoord: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gegeven door:
$f(n) = (+(x, n) \in \mathbb{N} : x|n : x)$
Verbeterd antwoord: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gegeven door:
$f(y) = (+\ x \in \mathbb{N} : x|y : x)$
Redenering: De originele variabele en de dummy hadden dezelfde naam.

(c) eindige machtreeksen van een gegeven getal z, informeel: $f(n) = z^0 + ... + z^n$.
Antwoord: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeven door:
$f(n, z) = (+(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} :: z^n)$
Verbeterd Antwoord: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, gegeven door:
$f(n) = (+i \in \mathbb{N} : i \leq n : z^i)$

3.5 Expressies

Laat arr een rij van rijtjes en ars een verzameling van rijtjes van gehele getallen zijn, en laat ar een rijtje gehele getallen.

1. Beschrijf wat de volgende expressies betekenen ...

   (a) $[ar : ar \lessdot arr : (\uparrow a : a \lessdot ar : a)]$
   Antwoord: "Geef een rij met de maxima van ieder rijtje uit arr".
   Verbeterd antwoord: "Geef een rij met de maxima van ieder rijtje uit arr, volgens de volgorde van de rijtjes in arr".

   (b) $(\downarrow p, q : 0 \leq p < q < \#ar\ \wedge\ (+i : p \leq i < q : ar(i)) \geq 13 : q - p)$
   Antwoord: "Geef het minimaal aantal elementen dat nodig is om een som van aaneengesloten elementen uit ar te krijgen die minstens 13 is".

   (c) $(+i : i \in rs : i)/\#rs$, waarbij $rs = \{ar : ar \in ars : (+a : a \lessdot ar : a)\}$
   Aaname: " ars is niet leeg. Als dit het geval is, moet er door 0 gedeeld worden en dat kan niet."
   Antwoord: "Het gemiddelde van alle rijtjes in de verzameling ars."
   Verbeterd antwoord: "Het gemiddelde van alle unieke sommen van alle rijtjes uit ars" .
   Redenering: Het volgende werd vergeten: de som $(+i...)$ en het "unieke": rs is een verzameling en in een verzameling worden dubbelen weggehaald. Ook is de aanname, dat ars niet leeg is, toegevoegd.

2. Geef expressies voor de volgende waarden ...

(a) maximale lengte van enig segment (consecutieve deelrij) van ar met louter nullen.
Antwoord: **if** $\exists_a[a \lessdot ar : a = 0] \rightarrow (\uparrow p, q : 0 \leq p < q \leq \#ar \wedge \forall_i(i : p \leq i < q \wedge ar(i) = 0) : q - p)$ $\Box$ $\neg\exists_a[a \lessdot ar : a = 0] \rightarrow 0$ **fi**

(b) vereniging van alle delers van alle rij-elementen van alle rij-elementen van arr.
Antwoord: $\{\cup a, ar : a \lessdot ar, ar \lessdot arr : \{d \in \mathbb{N} : d|a : d\}\}$
Verbeterd antwoord: $(\cup a, ar : a \lessdot ar \wedge ar \lessdot arr : \{d \in \mathbb{N} : d|a : d\})$
Redenering: Komma kan niet voorkomen als voorwaarde, buitenste acolades geven verzameling in verzameling.

(c) gemiddelde rijsom van ars.
Antwoord: $(+\ ar : ar \in ars : (+a : a \lessdot ar : a))/\#ars$

3.6 Predikaten

1. Geef de betekenis van de volgende predikaten weer als een Nederlandse zin ...

(a) $(\forall x, y, z : xRy \ \wedge \ xRz : y = z)$
Antwoord: "Voor alle voorkomens van y en z die dezelfde relatie met alle voorkomens van x handhaven, geldt dat y en z gelijk zijn aan elkaar."

(b) $(\exists a, b, c : a, b, c \in \mathbb{Z} : a^n + b^n = c^n) \Rightarrow n \leq 2$
Antwoord: "Er bestaan waarden voor a, b en c (uit $\mathbb{Z}$) waarvoor geldt $a^n + b^n = c^n \Rightarrow n \leqslant 2$."
Verbeterd antwoord: "Als er waarden zijn voor a, b en c uit $\mathbb{Z}$ waarbij $a^n + b^n = c^n$, dan is n kleiner of gelijk aan 2."
Redenering: Het origineel had over het hoofd gezien dat de $\exists$ ophield voor de $\Rightarrow$ en had daardoor een verkeerde interpretatie.

(c) $(\uparrow m : m \in M : m)$ bestaat $\equiv (\exists n : n \in \mathbb{N} : n{+}1 = \#M)$
Antwoord: "Wanneer een maximum voor verzameling M bestaat, dan is M geen lege verzameling en vice versa."
Verbeterd antwoord: "Wanneer een maximum voor verzameling M bestaat, dan is M geen lege verzameling en is M eindig door een limiet. Dit geld ook omgekeerd."
Redenering: Er werd geen rekening gehouden met een mogelijke afwezigheid van een maximum door oneindigheid d.m.v. naderende limieten.

2. Geef predikaten voor ...

   (a) een gegeven woord is een palindroom van ten hoogste 13 letters lang is.
   Antwoord: $(\forall\ woord : \#woord \geq 13 \wedge woord \in Palindroom : woord)$
   Verbeterd antwoord: $\#woord \leq 13 \wedge (\forall i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq ((\#woord \text{ div } 2) \wedge woord(i) = woord(\#woord - 1 - i))$
   Redenering: Het begrip Palindroom is nu uitgewerkt, verder is de formule een beetje anders opgezet.

   (b) als een gegeven woord een palindroom bevat dan heeft dat hoogstens 13 letters. [1]
   Antwoord: $((\forall i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < ((\#woord/2) - 1)) \wedge woord(i) = woord(\#woord - 1 - i)) \Rightarrow \#woord \leq 13$
   Verbeterd antwoord: $(deelwoord \in seg(woord) \wedge palindroom(deelwoord)) \Rightarrow \#deelwoord \leq 13$
   Redenering: Nu wordt gekeken of het woord een palindroom bevat en niet alleen of het een palindroom
   is. Verder is Palindroom een boolse functie en seg een functie die alle niet lege consecutieve deelrijen van een ingegeven rij geeft.

   (c) van een gegeven woord is geen enkel segment met lengte ten minste 14 een palindroom.
   Aanname: $\#\mathrm{W} > 0$
   Antwoord: $\neg(\exists ar[ar \in seg(W) : \#ar \geq 14 \wedge \forall_{ar}[\text{palindroom(ar)}])$ voor de definitie van palindroom en seg, zie sectie **??** op **??**
   Verbeterd antwoord: $\forall_{deelwoord}[deelwoord \in seg(woord) \wedge \#deelwoord > 13 : \neg palindroom(deelwoord)]$
   Redenering:

3.7 Voorbeeldje

1. Geef de betekenis van de volgende expressies weer als een Nederlandse zin ...

   (a) $\{k \in V, l \in M, u \in U\ :\ v(u) = \{l\} \wedge w(u) = \{k\}\ :\ k\}$
   Antwoord: "Geef alle vrouwen die van een man gewonnen hebben."
   Verbeterd antwoord: "Geef alle vrouwen die van een man gewonnen hebben in een enkelspel."
   Redenering: Er werd niet opgemerkt dat het een enkelspel betrof.

[1] Er zijn meerdere interpretaties mogelijk van deze zin. Wij nemen aan dat gevraagd wordt dat het palindroom hoogstens 13 letters bevat, en niet het woord zelf.

(b) $(\exists_k \in V, l \in M, u \in U\ :\ k \in w(u) \wedge l \in v(u)\ :\ (\forall_{u'} \in U : \#w(u') = 1 : l \notin v(u')))$
Antwoord: "Voor alle uitslagen van mannen, die uiteindelijk verloren hebben van een vrouw."
Verbeterd antwoord: "Minstens 1 vrouw heeft in dubbelspel een man verslagen die in enkelspel alles gewonnen heeft, of geen enkelspel gespeeld heeft."
Redenering: Het vorige antwoord zei niets nuttigs, aldus een compleet nieuwe interpretatie.

(c) $(\forall_k \in V\ ::\ \#(P(k) \cap M) \leq 1)\ \wedge\ (\forall_l \in M\ ::\ \#(P(l) \cap V) \leq 1)$, waarbij $P(x) = (\cup\, u : x \in v(u) : v(u)) \cup (\cup\, u : x \in w(u) : w(u))$.
Antwoord: "Voor alle vrouwen en mannen die maximaal 1x gespeeld hebben."
Verbeterd antwoord: "Alle vrouwen en mannen hebben hoogstens eenmaal met iemand van het andere geslacht samengespeeld, waarbij ze hebben gewonnen of verloren."

2. Geef expressies voor ...

(a) Alle winnaars hebben ook ooit eens verloren.
Antwoord: $(\forall l \in L, u, x \in U : l \in w(u) \wedge l \in v(x) : l)$
Verbeterd antwoord: $(\forall l \in L, u, x \in U : l \in w(u) \wedge l \in v(x))$

(b) De leden die met de meeste andere leden samengespeeld hebben.[2]
Antwoord: $\{x \in L : (\uparrow y \in L :: (+ : xPy : 1)) = (\uparrow a \in L(\uparrow b \in L :: (+ : aPb : 1))) : x\}$
Verbeterd Antwoord: $\{x \in L : \#[y \in L : xPy] = (\uparrow a \in L :: \#[b \in L : aPb]) : x\}$

Redenering: Het totaalmaximum ging niet uit van maxima van specifieke partners, het telde alle partners en gaf dat als maximum.

(c) De leden hebben niet aan partnerruil gedaan.
Antwoord: $\forall x[x \in L : (\#\ y \in L : xPy) = 1]$
Verbeterd antwoord: $(\forall x \in L : (+y \in L : xPy : 1) = 1)$

[2] Deze opgave kan op meerdere wijzen worden opgevat. Wij hebben ervoor gekozen om deze opgave op te vatten als: " hoogste aantal (andere) leden hebben samengespeeld"

Hoofdstuk 4

Conclusie

Na het individueel maken van de opdrachten zijn deze door de hele groep gezamelijk gecorrigeerd en samengevoegd tot de eerste versie van het productverslag. Deze versie is door de tutor van commentaar voorzien en vervolgens door de groep verbeterd. De meeste fouten zaten initiëel in het gedeelte over relatie-expressies. Na een uitleg door de tutor over dit onderdeel en een frisse, kritische blik op deze en de andere in eerste instantie nog niet geheel correcte opgaven, zijn de gecorrigeerde, definitieve antwoorden op papier gezet.

Hoofdstuk 5

Begrippenlijst

5.1 Tekens

$\in$ element van

$\vee$ of

$\wedge$ en

$\equiv$ equivalent

$\#$ aantal

$\exists$ er is

$\forall$ voor alle

$\emptyset$ lege verzameling

$\neg$ negatie

$\uparrow$ maximum

$\downarrow$ minimum

$\subseteq$ bevat in

$\circ$ compositie

$\cup$ vereniging

$\cap$ doorsnede

$\setminus$ verschil

$\times$ cartesisch product

$\lessdot$ bewoner van

$+\!\!+$ catenatie

Δ identiteitsrelatie

5.2 Verzamelingen

$\mathbb{L}$ lijst

$\mathbb{P}$ machtsverzameling

$\mathbb{F}$ eindige verzameling

$\mathbb{R}$ de standaard verzamelingen reeële getallen

$\mathbb{Z}$ de standaard verzamelingen gehele getallen

$\mathbb{B}$ de standaard verzamelingen boolse getallen

$\mathbb{N}$ de standaard verzamelingen natuurlijke getallen

5.3 Woorden

Bulktypen Verzamelingen en rijtjes zijn zogenaamde bulktypen, waarin van een gegeven basistype meerdere exemplaren bijeengegaard zijn

Verzamelingen Verzamelingen zijn bulks met van elk ding ten hoogste 1 exemplaar

Rijtjes Rijtjes zijn bulks die per ding meerdere exemplaren mogen hebben, waarbij de volgorde belangrijk is

Catenatie Het aaneenritsen van twee rijtjes

Comprehensie Selectie en functietoepassing op de bewoners van die rijtjes gebruiken om de nieuwe rij-bewoners te beschrijven

Dummies Hulpvariabelen

Vereniging Catenatie van verzamelingen

Compositie Het toepassen van een bepaalde functie op een argument

Quantificatie Het beschrijven van een formule door middel van quantoren $\forall$ en $\exists$

Quantor Een expressie die het domein van een bepaalde term waaraan het vastzit weer geeft

Relaties Een verzameling van tupels, rijtjes van elementen, ieder uit een van de verzamelingen waarop de relatie gedefinieerd is.

Expressies Een collectie van symbolen die samenvoegend een quantiteit beschrijven

Functies Een relatie of expressie dat een of meer variabelen betrekt

Predikaten $\mathbb{B}$-waardige functies

Existentiële quantificatie Quantificatie waarbij geldt: "Er bestaat een x die aan P voldoet zo, dat daarvoor Q waar is."

Universele quantificatie Quantificatie waarbij geldt: "Voor alle x waarvoor P waar is, is Q waar."

Propositie Een predikaat zonder variabelen

Variabele Argumenten van een $\mathbb{B}$-waardige functie

Consecutieve rij Een aaneengesloten rij

Tupel groepering van variabelen

5.4 Functies

succ geeft de opvolger

$[\cdot\ ]$ geeft een rij aan

$[]$ een lege rij

π_2 2^{de} in een tupel

fib rij van Fibonacci

avg gemiddelde van een lijst

$0^{\bullet}$ altijd nul

dkr dubbel kwadraten rij

rev keer een rij om

dkv dubbel kwadraten verzameling

set de verzameling gemaakt uit een gegeven rij

seg geeft alle consecutieve deelrijen uit de opgegeven rij.
Met $seg : \mathbb{L}(A) \to \mathbb{P}(\mathbb{L}(A))$, gegeven door
$\{p, q : 0 \leq p < q < \#W : [i : p \leq i \leq q : W(i)]\}$

palindroom boolse functie die controleert op het zijn van een palindroom.
Met $palindroom : \mathbb{L}(A) \to \mathbb{B}$, gegeven door
$\forall_i[i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq (\#ar/2) - 1 \wedge W(i) = W(\#W - i - 1)]]$

Bibliografie

[1] Handout Projectwijzer OGO 1.1, 2006-2007

[2] Handout Enige wiskundige hulpmiddelen, 2006-2007

[3] Tobias Oetiker, Hubert Partl. Irene Hyna, Elisabeth Schlegl, The Not So Short Introduction To Latex, 2006

[4] Rob Nederpelt, Fairouz Kamareddine, Logical Reasoning: A First Course, King's College Publications, London, 2004