JOURNAL OF ALGEBRA 132, 22–49 (1990)

Séries de Poincaré et modules inertes

JACK LESCOT

Département de Mathématiques, Informatique et Mécanique, Université de Caen, 14032 Caen Cedex, France

Communicated by D. A. Buchsbaum

Received September 5, 1986

INTRODUCTION

Soient $(R, \underline{m}, k)$ un anneau local et M un R-module. Si pour tout i le k-espace vectoriel $\operatorname{Tor}_i^R(M, k)$ est de dimension finie, par exemple si M est de type fini, la série de Poincaré du module M est la série formelle $P_R^M(t) = \sum_{i \geqslant 0} \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M, k) t^i$.

Soit $f\colon (S, \underline{n}, k) \to (R, \underline{m}, k)$ un homomorphisme local induisant l'identité sur le corps résiduel k. Nous montrons que si les séries $P_R^M(t)$ et $P_S^M(t)$ sont définies, il existe une inégalité coefficient à coefficient:

$$P_R^k(t) \cdot P_S^M(t) \geqslant P_S^k(t) \cdot P_R^M(t)$$

et nous appelons module inerte par f, tout R-module M pour lequel l'inégalité ci-dessus est une égalité, autrement dit, pour lequel $P_S^M(t)/P_S^k(t) = P_R^M(t)/P_R^k(t)$. Outre le cas trivial $M = k$, l'existence de tels modules a déjà été remarquée, essentiellement en présence d'homomorphismes de Golod ou de grands homomorphismes, par exemple dans les articles de Levin [11–13] ou de Ghione et Gulliksen [6].

Le but de cet article est d'étudier ces modules inertes, de montrer leur existence dans de nombreuses situations, et leur utilité.

Dans le section 1, nous donnons nos notations et nos définitions. En particulier nous introduisons la classe $C(R)$ des R-modules à séries de Poincaré définies. Cette classe contient bien sûr les modules de type fini, mais aussi les duals de Matlis de tels modules qui en général ne sont plus de type fini. Ainsi, en se plaçant dans $C(R)$, on obtient des résultats applicables aux séries de Bass $I_R^M(t) = \sum_{i \geqslant 0} \dim_k \operatorname{Ext}_R^i(k, M) t^i$, puisqu'on a l'égalité $I_R^M(t) = P_R^{M^\vee}(t)$, $M^\vee$ désignant le dual de Matlis de M.

Dans la section 2, nous démontrons l'inégalité coefficient à coefficient indiquée plus haut, ceci grâce à une suite spectrale de changement d'an-

0021-8693/90 $3.00
Copyright © 1990 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

neaux, dont le rôle est essentiel dans ce travail. Nous indiquons comment les inégalités coefficient à coefficient classiques sur les séries de Poincaré $P_R^k(t)$ dérivent de cette nouvelle inégalité.

Dans la section 3, nous donnons des exemples de modules inertes. Le résultat principal de cette section est qu'un module M est inerte par le composé $g \circ f$ de deux homomorphismes locaux si et seulement si il est inerte par chacun d'eux. Ceci permet, à partir d'exemples connus, de montrer l'existence de modules inertes dans de nombreuses situations.

La section 4 consiste en 3 lemmes techniques utilisés dans le reste de l'article.

Dans la section 5 on établit pour les séries de Bass des modules de type fini des résultats de réduction au cas artinien analogues à ceux obtenus par Levin pour les séries de Poincaré [12]. Etant donné un R-module M de type fini on montre que les séries $I_R^M(t)$ et $I_R^{M/\underline{m}^n M}(t)$ sont rationnellement reliées si n est assez grand, et que de même pour n assez grand, les quotients $I_R(t)/P_R^k(t)$ et $I_{R/\underline{m}^n}(t)/P_{R/\underline{m}^n}^k(t)$ sont rationnellement reliés. Notre démonstration utilise les modules inertes et a été le point de départ de cet article.

Dans la section 6 on étudie les modules inertes par un petit homomorphisme f (au sense de [1]). On montre qu'un module M est inerte par f si et seulement si l'application $\operatorname{Tor}_*^S(M, k) \to \operatorname{Tor}_*^R(M, k)$ est injective. De plus cette propriété caractérise les petits homomorphismes. On donne aussi quelques applications concernant les homomorphismes et anneaux de Golod. En leur présence, on montre qu'il existe de nombreux modules inertes. On utilise ce résultat pour répondre à une question d'Avramov [2, (5.12)] concernant la croissance des nombres de Betti d'un module sur une anneau de Golod.

Enfin dans la section 7, on montre comment nos résultats sur les modules inertes permettent de déterminer la série de Poincaré de certains produits fibrés d'anneaux, généralisant des résultats de [8, 5, 7].

Une première version de ce travail est parue sous forme d'un preprint de l'Université de Stockholm, à l'initiative du Professeur J. E. Roos, que j'ai plaisir à remercier.

1. Préliminaires

Tous les anneaux considérés sont noéthériens commutatifs locaux, de même corps résiduel k. Le symbole $(R, \underline{m})$ désigne un anneau local R, d'idéal maximal $\underline{m}$, et donc $k = R/\underline{m}$. Les homomorphismes d'anneaux $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ sont locaux, i.e., $f(\underline{n}) \subset \underline{m}$, et induisent l'identité sur le corps rédisuel k. Tout R-module est aussi considéré comme un S-module pour la structure induite par f.

Soit $(R, \underline{m})$ un anneau local et soit K le complexe de Koszul construit sur un système générateur minimal de l'idéal maximal $\underline{m}$. Ce complexe, bien que dépendant du choix du système générateur minimal, est unique à isomorphisme près et est appelé le complexe de Koszul de l'anneau R. Rappelons que pour tout R-module M, l'homologie de Koszul de M, $H_*(M \otimes_R K)$, est annulée par $\underline{m}$, et est donc un k-espace vectoriel.

Dans cet article nous aurons besoins de travailler avec une classe de R-modules plus large que celle des modules de type fini; celle des R-modules à séries de Poincaré définies. Elle est caractérisée par la proposition suivante qui sera démontrée à la fin de cette section.

PROPOSITION 1.1. *Soit M un R-module, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *Pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n = \dim_k \underline{m}/\underline{m}^2$, $H_i(M \otimes_R K)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.*

(2) *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tor}_i^R(M, k)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.*

(3) *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ext}^i_R(k, M)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.*

On note $C(R)$ la classe des modules vérifiant les conditions équivalentes ci-dessus. Pour un module M de $C(R)$ on définit:

le polynôme de Koszul de M:

$$|H_*(M \otimes_R K)|\ (t) = \sum_{i=0}^{i=n} \dim_k(H_i(M \otimes_R K))t^i,$$

la série de Poincaré de M:

$$P_R^M(t) = \sum_{i \geqslant 0} \dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(M, k))\, t^i,$$

la série de Bass de M:

$$I_R^M(t) = \sum_{i \geqslant 0} \dim_k(\mathrm{Ext}^i_R(k, M))\, t^i.$$

La série de Bass de R sera simplement notée $I_R(t)$.

Soient $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ un homomorphisme local et M un R-module. Nous verrons (corollaire 2.7) que l'hypothèse $M \in C(S)$ entraîne $M \in C(R)$. La réciproque est vraie si on suppose f surjectif, ou plus généralement si on suppose que $R/\underline{n}R$ est un anneau artinien.

LEMME 1.2. *Soit $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ un homomorphisme local. Si l'anneau $R/\underline{n}R$ est artinien, tout R-module M qui est dans $C(R)$ est aussi dans $C(S)$.*

Preuve. Comme pour chaque entier q, $\operatorname{Tor}_q^S(R, k)$ est un module de type fini sur l'anneau artinien $R/\underline{n}R = \operatorname{Tor}_0^S(R, k)$, $\operatorname{Tor}_q^S(R, k)$ est de dimension finie sur k. (Je remercie Avramov de m'avoir signalé cet argument.) Soit maintenant M un R-module de $C(R)$ et considérons la suite spectrale de changement d'anneaux:

$$E_{p,q}^2 : \operatorname{Tor}_p^R(M, \operatorname{Tor}_q^S(R, k)) \overset{p}{\Longrightarrow} \operatorname{Tor}_{p+q}^S(M, k).$$

Muni de sa structure de R-module, $\operatorname{Tor}_q^S(R, k)$ est de longueur finie. Partant de l'hypothèse $M \in C(R)$, une récurrence sur la longueur d'un R-module N de longueur finie montre que $\operatorname{Tor}_q^R(M, N)$ est un R-module de longueur finie. Par conséquent pour tout p et tout q, $E_{p,q}^2$ est de longueur finie et il s'ensuit que $\operatorname{Tor}_{p+q}^S(M, k)$ aussi. Ce qui montre que $M \in C(S)$. ∎

Soit E une enveloppe injective sur l'anneau R du corps résiduel k. Pour tout R-module M on définit le dual de Matlis de M par $M^\vee = \operatorname{Hom}_R(M, E)$. Notons que si M est annulé par $\underline{m}$, on a $M^\vee = \operatorname{Hom}_R(M, E) \simeq \operatorname{Hom}_k(M, k)$. Les duals de Matlis permettent de ramener le calcul des séries de Bass à celui des séries de Poincaré. Nous avons en effet un résultat de dualité bien connu [4, chapitre VI, 5.3].

PROPOSITION 1.3. *Pour tout R-module M et pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe des isomorphismes fonctoriels*:

$$\operatorname{Tor}_i^R(M^\vee, k) \simeq \operatorname{Ext}_R^i(k, M)^\vee \simeq \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Ext}_R^i(k, M), k).$$

De là, il résulte immédiatement que $M \in C(R)$ si et seulement si $M^\vee \in C(R)$ et que

COROLLAIRE 1.4. *Pour tout R-module M de $C(R)$, on a*:

$$P_R^{M^\vee}(t) = I_R^M(t);$$

en particulier

$$P_R^E(t) = I_R(t).$$

On notera que si M est un R-module de type fini mais non artinien, le module $M^\vee$ n'est pas de type fini. En particulier si R n'est pas artinien, $C(R)$ est strictement plus grand que la classe des modules de type fini (si R est artinien, on vérifie facilement que les deux classes sont égales).

Lorsque $M \in C(R)$ les polynômes de Koszul de M et $M^\vee$ sont reliés très simplement:

LEMME 1.5. *Soient K le complexe de Koszul de l'anneau $(R, \underline{m})$ et M un*

R-module. Pour chaque i, $0 \leqslant i \leqslant n = \dim_k \underline{m}/\underline{m}^2$, *il existe un isomorphisme fonctoriel*:

$$H_i(M^\vee \otimes_R K) \simeq \mathrm{Hom}_k(H_{n-i}(M \otimes_R K), k).$$

En particulier si $M \in C(R)$ *on a*:

$$|H_*(M^\vee \otimes_R K)|\,(t) = t^n |H_*(M \otimes_R K)|\,(t^{-1}).$$

Preuve. On montre de manière similaire à [4, chap. VI, 5.3], qu'il existe des isomorphismes fonctoriels:

$$\begin{aligned} H_i(M^\vee \otimes_R K) &\simeq \mathrm{Hom}_R(H_i(\mathrm{Hom}_R(K, M)), E) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_R(H_i(\mathrm{Hom}_R(K, M)), k). \end{aligned}$$

D'autre part, il est bien connu qu'il existe un isomorphisme fonctoriel:

$$H_i(\mathrm{Hom}_R(K, M)) \simeq H_{n-i}(M \otimes_R K).$$

On en déduit l'isomorphisme demandé. ∎

Notons une propriété de changement d'anneaux pour les duals de Matlis [9, lemme 1.3].

LEMME 1.6. *Soient* $f: S \to R$, *un homomorphisme surjectif d'anneaux locaux et M un R-module. Soient* $M_1^\vee$ *le dual de Matlis de M en tant que R-module,* $M_2^\vee$ *son dual de Matlis en tant que S-module. Alors, considéré comme un S-module,* $M_1^\vee$ *est isomorphe à* $M_2^\vee$.

Terminons ces préliminaires par la démonstration de la proposition 1.1.

Preuve de 1.1. Remarquons d'abord que d'après le lemme 1.5, la condition (1) est vérifiée par le module M si et seulement si elle est vérifiée par le module $M^\vee$, et que d'après la proposition 1.3, M vérifie la condition (3) si et seulement si $M^\vee$ vérifie la condition (2). Il suffit donc d'établir que pour tout module M les conditions (1) et (2) sont équivalentes. On montrera dans le paragraphe suivant (2.2) qu'il existe une suite spectrale

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^R_p(k, k) \otimes_k H_q(M \otimes_R K) \overset{p}{\Longrightarrow} (\mathrm{Tor}^R_*(M, k) \otimes_k (k \otimes_R K))_{p+q};$$

l'implication (1) ⇒ (2) en résulte. Quant à l'implication (2) ⇒ (1), elle résulte de la suite spectrale bien connue:

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^R_p(M, k) \otimes_k H_q(K) \overset{p}{\Longrightarrow} H_{p+q}(M \otimes_R K). \quad ∎$$

2. Une suite spectrale de changement d'anneaux

Etant donné $(R, \underline{m})$ un anneau local, nous dirons qu'un complexe T de R-modules libres, de différentielle d, est minimal si la différentielle induite de $k \otimes_R T$ est nulle, ou, ce qui revient au même si $d(T) \subset \underline{m}T$.

Théorème 2.1. *Soient $(R, \underline{m})$ un anneau local, M un R-module, T un complexe minimal de R-modules libres, de graduation positive et de différentielle de degré -1. Il existe une suite spectrale du premier quadrant*:

$$E^2_{p,q} = \operatorname{Tor}^R_p(k, H_q(M \otimes_R T)) \overset{p}{\Longrightarrow} (\operatorname{Tor}^R_*(M, k) \otimes_k (k \otimes_R T))_{p+q}.$$

Preuve. Soit X une résolution libre minimale de k sur R, d'augmentation $\varepsilon: X \to k$. On considère le complexe double: $L_{**} = X \otimes_R M \otimes_R T$, d'homologie totale $H_*(L)$.

(a) En utilisant la filtration: $F_p L = \bigoplus_{i \leqslant p} X_i \otimes_R M \otimes_R T$, on obtient une suite spectrale:

$$E^2_{p,q} = \operatorname{Tor}^R_p(k, H_q(M \otimes_R T)) \overset{p}{\Longrightarrow} H(L)_{p+q}.$$

(b) Soit Y une résolution libre de M d'augmentation $\eta: Y \to M$. Les homomorphismes de complexes:

$$X \otimes_R M \xleftarrow{1 \otimes \eta} X \otimes_R Y \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} k \otimes_R Y$$

induisent des isomorphismes en homologie. Considérons les doubles complexes et homomorphismes correspondants:

$$X \otimes_R M \otimes_R T \xleftarrow{1 \otimes \eta \otimes 1} X \otimes_R Y \otimes_R T \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1 \otimes 1} k \otimes_R Y \otimes_R T.$$

En filtrant ces trois doubles complexes suivant le degré de T on obtient trois suites spectrales. Les homomorphismes correspondants entre ces suites spectrales sont des isomorphismes sur les termes E^2:

$$\begin{array}{ccccc} H_p(H_q(X \otimes_R M) \otimes_R T) & \leftarrow & H_p(H_q(X \otimes_R Y) \otimes_R T) & \rightarrow & H_p(H_q(k \otimes_R Y) \otimes_R T) \\ \simeq & & \simeq & & \simeq \\ H_p(\operatorname{Tor}^R_q(k, M) \otimes_R T) & \simeq & H_p(\operatorname{Tor}^R_q(k, M) \otimes_R T) & \simeq & H_p(\operatorname{Tor}^R_q(k, M) \otimes_R T). \end{array}$$

Par conséquent, [14, chap. XI, 3.4] on obtient aussi des isomorphismes entre l'homologie totale des doubles complexes, c'est-à-dire:

$$H_*(L) = H_*(X \otimes_R M \otimes_R T) \simeq H_*(X \otimes_R Y \otimes_R T) \simeq H_*(k \otimes_R Y \otimes_R T).$$

Mais $k \otimes_R Y \otimes_R T \simeq Y \otimes_R (k \otimes_R T)$ et l'hypothèse sur T dit que la différentielle de $k \otimes_R T$ est nulle. Par conséquent:

$$H_*(L) \simeq \mathrm{Tor}_*^R(M, (k \otimes_R T)) \simeq \mathrm{Tor}_*^R(M, k) \otimes_k (k \otimes_R T).$$

2.2. Prenons pour complexe T le complexe de Koszul K de l'anneau $(R, \underline{m})$. Comme pour tout R-module M, $H_*(M \otimes_R K)$ est annulé par l'idéal $\underline{m}$, la suite spectrale correspondante peut s'écrire:

$E(R, M)$:

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^R(k, k) \otimes_k H_q(M \otimes_R K) \overset{p}{\Longrightarrow} (\mathrm{Tor}_*^R(M, k) \otimes_k (k \otimes_R K))_{p+q}.$$

Soit $n = \dim_k \underline{m}/\underline{m}^2$ la dimension de plongement de R. De l'existence de la suite spectrale ci-dessus, on déduit immédiatement:

Corollaire 2.3. *Pour tout R-module de $C(R)$ il existe une inégalité coefficient à coefficient*:

$$P_R^k(t) \cdot |H_*(M \otimes_R K)|\,(t) \geqslant P_R^M(t) \cdot (1+t)^n.$$

Corollaire 2.4. *Pour tout R-module de $C(R)$ les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *La suite spectrale $E(R, M)$ est dégénérée (c'est-à-dire les différentielles d^r sont nulles pour $r \geqslant 2$).*

(2) *On a l'égalité*

$$P_R^k(t) \cdot |H_*(M \otimes_R K)|\,(t) = P_R^M(t) \cdot (1+t)^n.$$

Définition 2.5. Un R-module M de $C(R)$ est dit *inerte* s'il vérifie les conditions équivalentes du corollaire précédent.

2.6. Soient $f\colon (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ un homomorphisme local, Y une résolution libre minimale de k sur S. Alors le complexe $R \otimes_S Y$ est un complexe minimal de R-modules libres et pour tout R-module M on obtient une suite spectrale:

$E(f, S, R, M)$:

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^R(k, \mathrm{Tor}_q^S(M, k)) \overset{p}{\Longrightarrow} (\mathrm{Tor}_*^R(k, M) \otimes_k \mathrm{Tor}_*^S(k, k))_{p+q}.$$

Si $\mathrm{Tor}_*^S(M, k)$, considéré comme R-module, est annulé par $\underline{m}$, le terme $E^2_{p,q}$ peut se réécrire:

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^R(k, k) \otimes_k \mathrm{Tor}_q^S(M, k).$$

Cette condition est vérifiée, par exemple, lorsque f est surjectif. Mais il n'en est pas toujours ainsi et le corollaire suivant, analogue des corollaires 2.3 et 2.4, nécessite une démonstration:

COROLLAIRE 2.7. *Soit M un R-module. Supposons que $M \in C(S)$. Alors $M \in C(R)$ et on a une inégalité coefficient à coefficient*:

$$P_R^k(t) \cdot P_S^M(t) \gg P_R^M(t) \cdot P_S^k(t).$$

L'égalité est réalisée si et seulement si la suite spectrale $E(f, S, R, M)$ est dégénérée ($d^r = 0$ si $r \geqslant 2$) et si $\underline{m}\,\mathrm{Tor}_*^S(M, k) = 0$.

Preuve. Il est clair que considéré comme R-module $\mathrm{Tor}_q^S(M, k)$ est de longueur finie égale à $\dim_k \mathrm{Tor}_q^S(M, k)$. En particulier, c'est un R-module de type fini et, pour tout p, $\mathrm{Tor}_p^R(k, \mathrm{Tor}_q^S(M, k))$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. On déduit alors de la suite spectrale $E(f, S, R, M)$ que $M \in C(R)$. Pour démontrer le reste du corollaire, il suffit de remarquer que l'on a toujours l'inégalité:

$$\dim_k(\mathrm{Tor}_p^R(k, \mathrm{Tor}_q^S(M, k))) \leqslant \dim_k \mathrm{Tor}_p^R(k, k) \cdot \dim_k \mathrm{Tor}_q^S(M, k)$$

et que, q étant fixé, l'égalité n'a lieu pour tout p que si $\underline{m}\,\mathrm{Tor}_q^S(M, k) = 0$. C'est une conséquence du lemme suivant, en prenant $N = \mathrm{Tor}_q^S(M, k)$ et en tenant compte de l'isomorphisme $\mathrm{Tor}_p^R(k, \mathrm{Tor}_q^S(M, k)) \simeq \mathrm{Tor}_p^R(\mathrm{Tor}_q^S(M, k), k)$.

LEMME 2.8. *Soit N un R-module de longueur finie $l(N)$. Alors on a une inégalité coefficient à coefficient*: $P_R^N(t) \ll l(N)\, P_R^k(t)$, *et l'égalité se produit si et seulement si $\underline{m}N = 0$.*

Preuve. If suffit de faire une récurrence sur la longueur de N. C'est clair si $l(N) = 1$. Si $l(N) > 1$ on peut trouver une suite exacte $0 \to N' \to N \to k \to 0$. L'inégalité: $\dim_k \mathrm{Tor}_q^R(N, k) \leqslant \dim_k \mathrm{Tor}_q^R(N', k) + \dim_k \mathrm{Tor}_q^R(k, k)$, et l'hypothèse de récurrence appliquée à N' permettent d'écrire:

$$P_R^N(t) \ll P_R^{N'}(t) + P_R^k(t) \ll (l(N') + 1)\, P_R^k(t) = l(N)\, P_R^k(t).$$

Enfin l'égalité $P_R^N(t) = l(N) \cdot P_R^k(t)$ entraîne en particulier que $l(N) = \dim_k(N/\underline{m}N)$; ce qui implique $\underline{m}N = 0$. La réciproque est évidente. ▮

DÉFINITION 2.9. Soit $f\colon (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ un homomorphisme local. Un R-module M est dit *inerte par f* si $M \in C(S)$ et si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites:

(1) $P_R^k(t) \cdot P_S^M(t) = P_R^M(t) \cdot P_S^k(t)$

(2) la suite spectrale $E(f, S, R, M)$ est dégénérée et $\underline{m}\,\mathrm{Tor}_*^S(M, k) = 0$.

Remarque 2.10. Comme établi dans le lemme 1.2, si l'on sait que $R/\underline{n}R$ est un anneau artinien, par exemple si f est surjectif, on peut remplacer dans le corollaire 2.7 et la définition 2.9 l'hypothèse $M \in C(S)$ par $M \in C(R)$.

Remarque 2.11. La situation 2.2 peut être considérée comme un cas particulier de la situation 2.6 et c'est ce que nous ferons dans un certain nombre de démonstrations:

Soient $(R, \underline{m})$ un anneau local, K son complexe de Koszul et M un R-module. Considérons $(\hat{R}, \hat{\underline{m}})$ le complété $\underline{m}$-adique de R et posons $\hat{M} = M \otimes_R \hat{R}$, $\hat{K} = K \otimes_R \hat{R}$. Alors $\hat{K}$ est le complexe de Koszul de $\hat{R}$ et on vérifie facilement que les suites spectrales $E(R, M)$ et $E(\hat{R}, \hat{M})$ sont isomorphes. On sait que l'anneau $\hat{R}$ est le quotient d'un anneau local régulier $(S, \underline{n})$ par un idéal I inclus dans $\underline{n}^2$. Notons s la surjection canonique de S sur $\hat{R}$. Il est bien connu que le complexe de Koszul K' de S est aussi une résolution libre minimale de k. Comme les complexes $\hat{R} \otimes_S K'$ et $\hat{K}$ sont isomorphes, on en déduit que les trois suites spectrales: $E(s, S, \hat{R}, M)$, $E(\hat{R}, \hat{M})$ et $E(R, M)$ sont isomorphes. En particulier, les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) Le R-module M est inerte.

(b) Le $\hat{R}$-module $\hat{M}$ est inerte.

(c) Le $\hat{R}$-module $\hat{M}$ est inerte par s.

Il existe pour les séries de Bass des inégalités coefficient à coefficient analogues à celles établies plus haut pour les séries de Poincaré: compte tenu de la proposition 1.1, du corollaire 1.4 et des lemmes 1.5 et 1.6, on peut énoncer l'analogue des corollaires 2.3 et 2.7.

COROLLAIRE 2.12. (1) *Soient* $(R, \underline{m})$ *un anneau local et* M *un* R*-module de* $C(R)$. *Il existe une inégalité coefficient à coefficient*:

$$P_R^k(t) \cdot t^n \, |H_*(M \otimes_R K)| \, (t^{-1}) \gg I_R^M(t) \cdot (1+t)^n.$$

(2) *Soient* $f\colon (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ *un homomorphisme local surjectif et* M *un* R*-module de* $C(R)$. *Il existe une inégalité coefficient à coefficient*:

$$P_R^k(t) \cdot I_S^M(t) \gg P_S^k(t) \cdot I_R^M(t).$$

Nous terminons ce paragraphe en montrant comment les inégalités des corollaires 2.3 et 2.7 permettent de retrouver très simplement les majorations classiques des séries de Poincaré $P_R^k(t)$.

2.13. Soit $f\colon (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ un homomorphisme local et supposons l'anneau $R/\underline{n}R$ artinien. De la suite exacte $0 \to \underline{m} \to R \to k \to 0$, on déduit l'égalité $P_R^{\underline{m}}(t) = (P_R^k(t) - t)/t$, et l'inégalité

(a) $P_S^{\underline{m}}(t) \leqslant (P_S^R(t) - 1) + (P_S^k(t) - 1)/t.$

Celles-ci, combinées avec l'inégalité

(b) $P_R^{\underline{m}}(t) \cdot P_S^k(t) \leqslant P_R^k(t) \cdot P_S^{\underline{m}}(t)$

donnent l'inégalité coefficient à coefficient bien connue:

$$\text{(c)} \quad P_R^k(t) \leqslant \frac{P_S^k(t)}{1 - t(P_S^R(t) - 1)}.$$

Des considérations similaires, utilisant le corollaire 2.3 permettent d'obtenir l'inégalité:

$$\text{(d)} \quad P_R^k(t) \leqslant \frac{(1+t)^n}{1 - t(|H_*(K)|\,(t) - 1)}$$

où $n = \dim_k \underline{m}/\underline{m}^2$ et K désigne le complexe de Koszul.

Nous dirons qu'un anneau R est un *anneau de Golod* si (d) est une égalité, et qu'un homomorphisme local f est un *homomorphisme de Golod* si (c) est une égalité. Pour des définitions équivalentes, nous renvoyons le lecteur à [1, 3, 11].

Dans [1], Avramov impose à un homomorphisme de Golod de vérifier de plus la condition $\underline{m}I\,\mathrm{Tor}_*^S(R, k) = 0$, où $I\,\mathrm{Tor}_*^S(R, k) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tor}_*^S(R, k) \to \mathrm{Tor}_0^S(k, k))$. Il montre ensuite dans [3] que cette condition est automatiquement satisfaite si (c) est une égalité. Ce résultat découle aussi de notre démonstration de l'inégalité (c). En effet, si (c) est une égalité, il est facile de voir que (a) et (b) sont aussi des égalités: $\underline{m}$ est donc inerte par f et par conséquent $\underline{m}\,\mathrm{Tor}_*^S(\underline{m}, k) = 0$ d'une part et d'autre part $\mathrm{Tor}_*^S(\underline{m}, k) \to I\,\mathrm{Tor}_*^S(R, k)$ est surjectif; d'où le résultat.

3. Exemples de modules inertes

Dans la section précédente, nous avons remarqué que si $f\colon (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ est un homomorphisme de Golod, $\underline{m}$ est inerte par f. On vérifie de même que si $(R, \underline{m})$ est un anneau de Golod $\underline{m}$ est un R-module inerte. Nous allons voir maintenant d'autres exemples.

Commençons par deux exemples triviaux, mais comme nous le verrons dans les paragraphes 5, 6, 7, qui ont leur utilité.

Lemme 3.1. *Soient $f\colon (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ un homomorphisme local et M un R-module*

(a) *Si $\underline{m}M = 0$ et si M est de type fini, M est inerte sur R et inerte par f.*

(b) *Si $M \in C(R)$, M est inerte par l'application identique $1_R: R \to R$.*

Comme le complexe de Koszul d'un anneau régulier est aussi une résolution minimale du corps résiduel k, il est clair que:

LEMME 3.2. *Si R est un anneau régulier, tout R-module M de $C(R)$ est inerte.*

Dans [13], Levin introduit la notion de grand homomorphisme:

DÉFINITION. Un homomorphisme local surjectif $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ est *grand* si l'application induite $f_*: \mathrm{Tor}_*^S(k, k) \to \mathrm{Tor}_*^R(k, k)$ est surjective.

Avec nos définitions, on peut énoncer une partie du théorème 1.1 de [13] sous la forme suivante:

THÉORÈME 3.3. *Soit $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ un homomorphisme local surjectif. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *L'homomorphisme f est grand.*

(2) *L'anneau R, considéré comme R-module, est inerte par f.*

(3) *Tout R-module de $C(R)$ est inerte par f.*

Remarque 3.4. Dans [13], la condition (3) n'est énoncée que pour les modules de type fini. L'extension aux modules de $C(R)$ se fait sans difficulté. On peut en effet considérer les suites spectrales associées à ces modules comme limites inductives de celles associées à leurs sous-modules de type fini.

Le résultat suivant est une généralisation de l'équivalence des conditions (2) et (3) du théorème précédent. Il sera démontré à la fin du paragraphe 7.

PROPOSITION 3.5. *Soint $(R, \underline{m})$ un anneau local et I un idéal*

(a) *Si le R-module R/I est inerte, tout module de $C(R)$ annulé par I est inerte.*

(b) *Soit $f: S \to R$ un homomorphisme local surjectif. Si le R-module R/I est inerte par f, tout module de $C(R)$ annulé par I est inerte par f.*

Passons maintenant au résultat principal de cette section.

THÉORÈME 3.6. (1) *Soient $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ et $g: (R, \underline{m}) \to (R', \underline{m}')$ deux homomorphismes locaux. Posons $h = g \circ f$ et soit M un R'-module qui, considéré comme S-module, est dans $C(S)$. Alors le module M est inerte par*

h si et seulement si M est inerte par g et, considéré comme R-module, inerte par f.

(2) *Soient $g: (R, \underline{m}) \to (R', \underline{m}')$ un homomorphisme local surjectif et M un R'-module de $C(R')$. Alors le module M est inerte sur R' si et seulement si M est inerte par g et, est inerte considéré comme R-module.*

Preuve. (1) L'hypothèse $M \in C(S)$ entraîne $M \in C(R)$ et $M \in C(R')$, donc les séries de Poincaré de M sur S, R, R' sont bien définies. Si M est inerte par f et g, on a:

$$P_S^M(t)/P_S^k(t) = P_R^M(t)/P_R^k(t) = P_{R'}^M(t)/P_{R'}^k(t).$$

Ce qui établit que M est inerte par h.

Supposons maintenant que M soit inerte par h. On a donc l'égalité et les inégalités suivantes:

(a) $P_S^M(t) \cdot P_{R'}^k(t) = P_{R'}^M(t) \cdot P_S^k(t)$

(b) $P_S^M(t) \cdot P_R^k(t) \geqslant P_R^M(t) \cdot P_S^k(t)$

(c) $P_R^M(t) \cdot P_{R'}^k(t) \geqslant P_{R'}^M(t) \cdot P_R^k(t)$.

Observons que l'hypothèse $P_R^M(t) = 0$ entraîne $P_{R'}^M(t) = P_S^M(t) = 0$. Dans ce cas, l'assertion est triviale. Supposons $P_R^M(t) \neq 0$.

Par multiplication de (b) et (c), on obtient:

$$P_R^k(t) \cdot P_R^M(t) \cdot P_{R'}^k(t) \cdot P_S^M(t) \geqslant P_R^k(t) \cdot P_R^M(t) \cdot P_{R'}^M(t) \cdot P_S^k(t).$$

Cette inégalité ne diffère de (a) que par multiplication des deux membres par la série non nulle à termes positifs $P_R^k(t) \cdot P_R^M(t)$. C'est donc une égalité et nécessairement (b) et (c) sont aussi des égalités. Donc M est inerte par f et g.

(2) Quitte à compléter les anneaux R et R', on peut supposer que R est quotient d'un anneau régulier $(S, \underline{n})$, par un idéal I inclus dans $\underline{n}^2$. On peut alors trouver un anneau régulier $(S', \underline{n}')$, quotient de S par une S-suite $x_1, ..., x_p$ formée d'éléments de $\underline{n} - \underline{n}^2$, et un homomorphisme surjectif $s': S' \to R'$ tels que $\ker s' \subset \underline{n}'^2$, le diagramme suivant étant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S' \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s'} \\ R & \xrightarrow{g} & R'. \end{array}$$

Supposons que M soit un R'-module inerte. Il est alors inerte par s' (2.11); d'autre part f est un grand homomorphisme [13, théorème 2.2] et par conséquent M est aussi inerte par f. Le résultat précédent s'applique:

M est inerte par $s' \circ f$, donc M est inerte par g et par s; d'après (2.11) c'est aussi un R-module inerte. La réciproque se montre de manière analogue. ∎

Nous allons maintenant regarder quelques applications de ce théorème.

COROLLAIRE 3.7. *Soient $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ un homomorphisme local surjectif, M un R-module de $C(R)$.*

(a) *Supposons l'anneau S régulier. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Le R-module M est inerte.*

(2) *Le R-module M est inerte par f.*

(b) *Supposons l'anneau R régulier. Tout R-module de $C(R)$ est inerte par f et, est inerte considéré comme S-module; en particulier f est un grand homomorphisme.*

Preuve. (a) Comme M est inerte sur S d'après (3.2), l'équivalence résulte du théorème précédent.
La preuve de (b) est analogue. ∎

Dans un certain nombre de travaux, on trouve des exemples de modules inertes par des homomorphismes de Golod. Le théorème 3.6 permet, par factorisation de ces homomorphismes, d'obtenir une situation plus générale. Illustrons ceci par deux applications:
Soient $(R, \underline{m})$ un anneau local, J un idéal inclus dans $\underline{m}$ et x un élément régulier de $\underline{m}$. L'homomorphisme $f: R \to R/xJ$ est de Golod et Ghione et Gulliksen ont montré [6, théorème 5] que tout R-module de type fini annulé par J est inerte par f. En étendant ce résultat aux modules de $C(R)$ comme dans la remarque 3.4, on obtient:

COROLLAIRE 3.8. *Soit I un idéal de R tel que $I \subset xJ$. Tout R-module de $C(R)$ annulé par J est inerte par la projection $g: R \to R/I$.*

Dans [12] Levin établit un théorème de réduction aux anneaux artiniens. On peut l'énoncer sous la forme:

THÉORÈME 3.9. *Soit $(R, \underline{m})$ un anneau local, il existe un entier s_0 tel que pour tout $s \geqslant s_0$, l'homomorphisme surjectif $f: R \to R/\underline{m}^s$ est de Golod. De plus tout R-module de type fini annulé par $\underline{m}^{s-1}$, considéré comme $R/\underline{m}^s$-module, est inerte par f.*

On en déduit:

COROLLAIRE 3.10. *Soit $(R, \underline{m})$ un anneau local, il existe un entier s_0 tel que si J est un idéal de R vérifiant $J \subset \underline{m}^s$, $s \geqslant s_0$ et si f désigne l'homomor-*

phisme: $R \to R/J$, *tout* R-*module de type fini annulé par* $\underline{m}^{s-1}$ *est inerte par* f *quand on le considère comme un* R/J-*module.*

Lorsque l'anneau R est supposé régulier, on sait que l'on peut choisir $s_0 = 2$. Compte tenu du corollaire 3.7, on obtient:

COROLLAIRE 3.11. *Soient* $(S, \underline{n})$ *un anneau local régulier et* J *un idéal de* S *inclus dans* $\underline{n}^s$ *avec* $s \geqslant 2$. *Notons* $(R, \underline{m})$ *l'anneau quotient* S/J. *Alors tout* R-*module de type fini, annulé par* $\underline{m}^{s-1}$ *est inerte.*

Terminons ce paragraphe par une application du corollaire précédent.

COROLLAIRE 3.12. *Pour tout anneau local* $(R, \underline{m})$, *le quotient* $I_R^{R/\underline{m}^2}(t)/P_R^k(t)$ *est rationnel.*

Preuve. Quitte à compléter R, on peut supposer R quotient d'un anneau régulier $(S, \underline{n})$ par une idéal J telque $J \subset \underline{n}^2$.

(1) Supposons $J \not\subset \underline{n}^3$. Le résultat de [9, exemple 1.11] donne:

$$I_R^{R/\underline{m}^2}(t) = I_R^{\underline{m}/\underline{m}^2}(t) - tP_R^k(t) = (n-t)\, P_R^k(t)$$

(où $n = \dim_k \underline{m}/\underline{m}^2$).

(2) Supposons $J \subset \underline{n}^3$. Le R-module $(R/\underline{m}^2)^\vee$, étant annulé par $\underline{m}^2$, est inerte d'après le corollaire précédent et par suite:

$$\begin{aligned}(1+t)^n \cdot I_R^{R/\underline{m}^2}(t) &= |H_*((R/\underline{m}^2)^\vee \otimes_R K)|\,(t) \cdot P_R^k(t)\\ &= t^n\, |H_*(R/\underline{m}^2 \otimes_R K)|\,(t^{-1}) \cdot P_R^k(t). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

On peut montrer que le quotient $I_R^{R/\underline{m}^3}(t)/P_R^k(t)$ n'est pas toujours rationnel [10, chapitre 3].

4. TROIS LEMMES TECHNIQUES

Le premier de ces lemmes, nous dit que les suites spectrales $E(R, M)$ et $E(f, S, R, M)$ sont fonctorielles en leurs divers arguments. Pour énoncer ce lemme nous utilisons les notations suivantes: si $j: M \to M'$ est un homomorphisme de R-modules j_* ou $\bar{j}_*$ désigne l'homomorphisme induit en homologie. Si $f: S \to R$ est un homomorphisme local et M un R-module, $(M, f)_*$ désigne l'homomorphisme induit de $\mathrm{Tor}_*^S(M, k)$ dans $\mathrm{Tor}_*^R(M, k)$ et on note f_* pour $(k, f)_*$.

LEMME 4.1. *Soient* $(S, \underline{n})$ *et* $(R, \underline{m})$ *des anneaux locaux,* M *un* R-*module et* $f: S \to R$ *un homomorphisme local.*

(A) *Soit M' un R-module et $j: M \to M'$ un homomorphisme de R-modules.*

(1) *Il existe un homomorphisme de suites spectrales:*

$$E(j): E(R, M) \to E(R, M')$$

qui sur le terme E^2, est induit par l'application $\bar{j}_*: H_*(M \otimes_R K) \to H_*(M' \otimes_R K)$ et qui converge vers l'application induite sur les aboutissements par $j_*: \mathrm{Tor}_*^R(M, k) \to \mathrm{Tor}_*^R(M', k)$.

(2) *Il existe un homomorphisme de suites spectrales:*

$$E(j): E(f, S, R, M) \to E(f, S, R, M')$$

qui sur le terme E^2 est induit par l'application $\bar{j}_*: \mathrm{Tor}_*^S(M, k) \to \mathrm{Tor}_*^S(M', k)$ et qui converge vers l'application induite sur les aboutissements par $j_*: \mathrm{Tor}_*^R(M, k) \to \mathrm{Tor}_*^R(M', k)$.

(B) *Soit $g: (S', \underline{n}') \to (S, \underline{n})$ un homomorphisme local et posons $f' = f \circ g$. Il existe un homomorphisme de suites spectrales:*

$$E(g): E(f', S', R, M) \to E(f, S, R, M)$$

qui sur le terme E^2 est induit par l'application $(M, g)_*$: $\mathrm{Tor}_*^{S'}(M, k) \to \mathrm{Tor}_*^S(M, k)$ et qui converge vers l'application induite sur les aboutissements par $g_*: \mathrm{Tor}_*^{S'}(k, k) \to \mathrm{Tor}_*^S(k, k)$.

(C) *Soient $h: (R, \underline{m}) \to (R', \underline{m}')$ un homomorphisme local et M un R'-module.*

(1) *Supposons que h est surjectif et que $\ker h \subset \underline{m}^2$. Il existe un homomorphisme de suites spectrales*

$$E(h): E(R, M) \to E(R', M)$$

qui sur le terme E^2 est induit par l'application $h_*: \mathrm{Tor}_*^R(k, k) \to \mathrm{Tor}_*^{R'}(k, k)$ et qui converge vers l'application induite sur les aboutissements par:

$$(M, h)_*: \mathrm{Tor}_*^R(M, k) \to \mathrm{Tor}_*^{R'}(M, k).$$

(2) *Posons $f' = h \circ f$. Il existe un homomorphisme de suites spectrales:*

$$E(h): E(f, S, R, M) \to E(f', S, R', M)$$

qui sur le terme E^2 est induit par l'application $h_*: \mathrm{Tor}_*^R(k, k) \to \mathrm{Tor}_*^{R'}(k, k)$ et qui converge vers l'application induite sur les aboutissements par:

$$(M, h)_*: \mathrm{Tor}_*^R(M, k) \to \mathrm{Tor}_*^{R'}(M, k).$$

La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur. Elle utilise essentiellement le théorème de comparaison pour les complexes de modules libres [14, chapitre III, théorème 6.1]. L'hypothèse sur l'homomorphisme h dans (C)(1) est nécessaire pour que, K étant le complexe de Koszul de R, $R' \otimes_R K$ soit le complexe de Koszul de R'.

Les deux autres lemmes concernent les suites spectrales dégénérées (i.e., $d^r = 0$ pour $r \geqslant 2$).

LEMME 4.2. *Soient* $E = (E^r)$ *et* $E' = (E'^r)$ *deux suites spectrales, et* $f = (f^r): E \to E'$ *un homomorphisme de suites spectrales*:

(a) *Si l'application* f^2 *est injective et si la suite spectrale* E' *est dégénérée, la suite spectrale* E *est aussi dégénérée.*

(b) *Si l'application* f^2 *est surjective et si la suite spectrale* E *est dégénérée, la suite spectrale* E' *est aussi dégénérée.*

Preuve. Montrons (a), la démonstration de (b) étant analogue. Soient (d^r) la différentielle de (E^r), (d'^r) la différentielle de (E'^r). Pour $r = 2$ on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E^2 & \xrightarrow{f^2} & E'^2 \\ \downarrow{\scriptstyle d^2} & & \downarrow{\scriptstyle d'^2} \\ E^2 & \xrightarrow{f^2} & E'^2 \end{array}$$

$0 = d'^2 \circ f^2 = f^2 \circ d^2$, comme f^2 est injective, on a $d^2 = 0$ et par suite $E^2 = E^3$, $f^2 = f^3$. On démontre de même, par récurrence, que pour tout $r \geqslant 2$, $d^r = 0$. ∎

LEMME 4.3. *Soient* (A, F) *et* (A, F') *deux* R*-modules différentiels, gradués et filtrés, les filtrations* F *et* F' *étant canoniquement bornées* [14, *chap.* XI, 3]. *Supposons que les deux suites spectrales associées* E *et* E' *soient dégénérées. Soit* f *un homomorphisme de* (A, F) *dans* (A', F') (*respectant les graduations, filtrations et différentielles*) *et* $\bar{f}: E \to E'$ *l'homomorphisme induit entre les suites spectrales. Si l'homomorphisme* $\bar{f}^2: E^2 \to E'^2$ *est injectif* (*resp. surjectif*) *alors l'homomorphisme* $f_*: H_*(A) \to H_*(A')$ *est injectif* (*resp. surjectif*).

Preuve. Puisque les suites spectrales E et E' sont dégénérées, on a $\bar{f}^2 = \bar{f}^3 = \cdots = \bar{f}^\infty$. L'application $\bar{f}^\infty$ s'identifie à l'application: $\mathrm{Gr}(H_*(A)) \to \mathrm{Gr}(H_*(A'))$ induites entre les gradués associés à $H_*(A)$ et $H_*(A')$. Les filtrations étant canoniquement bornées, il en résulte que f_* est injective (resp. surjective) si $\bar{f}^2$ l'est. ∎

5. Réductions aux cas artiniens

Dans ce paragraphe, on établit pour les séries de Bass des modules de type fini et celles des anneaux des résultats analogues à ceux que Levin a obtenu pour les séries de Poincaré [12]. Dans tout ce paragraphe, on considère $(R, \underline{m})$ un anneau local. On pose $n = \dim_k \underline{m}/\underline{m}^2$. Soit M un R-module de type fini. On désigne par $H(M)(t)$ la série de Hilbert de M associée à la filtration $\underline{m}$-adique, c'est-à-dire:

$$H(M)(t) = \sum_{i \geqslant 0} c_i t^i \qquad \text{où} \qquad c_i = \dim_k \underline{m}^i M / \underline{m}^{i+1} M.$$

Il est bien connu que $H(M)(t)$ est une fraction rationnelle. Remarquons que $H(\underline{m}^s M)(t) = \sum_{i \geqslant 0} c_{s+i} t^i$.

Théorème 5.1. *Soit M un R-module de type fini, il existe un entier s_0 tel que pour $s > s_0$ on a:*

(a) $P_R^{M/\underline{m}^s M}(t) = tH(\underline{m}^s M)(-t) \cdot P_R^k(t) + P_R^M(t)$.

(b) $I_R^{M/\underline{m}^s M}(t) = t^{-1} H(\underline{m}^s M)(-t^{-1}) \cdot P_R^k(t) + I_R^M(t)$.

L'assertion (a) est démontrée par Levin dans [12]. Il ne semble pas que sa démonstration puisse s'adapter pour prouver (b). La démonstration que nous donnons utilise les modules inertes et permet d'obtenir à la fois (a) et (b). Nous avons besoin de plusieurs lemmes. Soit K le complexe de Koszul de R.

Lemme 5.2. *Pour tout R-module M de type fini, il existe un entier s_0 tel que pour $s \geqslant s_0$ les homomorphismes induits:*

(a) $H_*(\underline{m}^{s+1} M \otimes_R K) \to H_*(\underline{m}^s M \otimes_R K)$

(b) $H_*((\underline{m}^s M)^\vee \otimes_R K) \to H_*((\underline{m}^{s+1} M)^\vee \otimes_R K)$

sont nuls.

Preuve. L'existence d'un entier s_0 tel que pour tout $s \geqslant s_0$ l'application (a) soit nulle a été démontrée par Levin [12, lemma 1], en utilisant le lemme d'Artin–Rees. Le foncteur $\mathrm{Hom}_k(-, k)$ étant exact, le lemme 1.5 montre que l'application (b) est nulle pour les mêmes valeurs de s. ∎

Le module M et l'entier s_0 étant fixés nous avons:

Lemme 5.3. *Pour tout entier $s \geqslant s_0$*

(1) $|H_*(\underline{m}^s M \otimes_R K)|\,(t) = H(\underline{m}^s M)(-t) \cdot (1+t)^n$.

(2) $|H_*((\underline{m}^s M)^\vee \otimes_R K)|\,(t) = H(\underline{m}^s M)(-t^{-1}) \cdot (1+t)^n$.

Preuve. Le calcul de (1) est analogue au calcul effectué dans [12, relation 6]. Il existe pour $s \geqslant s_0$ des suites exactes:

$$0 \to H_p(\underline{m}^{s+i}M \otimes_R K) \to H_p(\underline{m}^{s+i}M/\underline{m}^{s+i+1}M \otimes_R K)$$
$$\to H_{p-1}(\underline{m}^{s+i+1}M \otimes_R K) \to 0.$$

Puisque $\underline{m}^{s+i}M/\underline{m}^{s+i+1}M$ est un k-espace vectoriel de dimension c_{s+i}, on en déduit:

$$|H_*(\underline{m}^{s+i}M \otimes_R K)|\,(t) + t\,|H_*(\underline{m}^{s+i+1}M \otimes_R K)|\,(t) = c_{s+i}(1+t)^n.$$

On obtient la formule (1) par des sommations alternées. La relation (2) résulte alors du lemme 1.5. ▮

LEMME 5.4. *Pour tout entier* $s \geqslant s_0$

(1) *les R-modules* $\underline{m}^sM$ *et* $(\underline{m}^sM)^\vee$ *sont inertes.*

(2) *L'homomorphisme*: $\operatorname{Tor}_*^R(\underline{m}^sM, k) \to \operatorname{Tor}_*^R(\underline{m}^sM/\underline{m}^{s+1}M, k)$ *est injectif.*

(3) *L'homomorphisme*: $\operatorname{Tor}_*^R((\underline{m}^sM/\underline{m}^{s+1}M)^\vee, k) \to \operatorname{Tor}_*^R((\underline{m}^sM)^\vee, k)$ *est surjectif.*

Preuve. La surjection canonique $j: \underline{m}^sM \to \underline{m}^sM/\underline{m}^{s+1}M$ induit un homomorphisme de suites spectrales:

$$E(j): R(R, \underline{m}^sM) \to E(R, \underline{m}^sM/\underline{m}^{s+1}M).$$

Du lemme 5.2 on déduit que l'application $H_*(\underline{m}^sM \otimes_R K) \to H_*((\underline{m}^sM/\underline{m}^{s+1}M) \otimes_R K)$ est injective. Le lemme 4.1(A) montre alors que $E(j)^2$ est injectif. Comme $\underline{m}^sM/\underline{m}^{s+1}M$ est annulé par $\underline{m}$, la suite spectrale $E(R, \underline{m}^sM/\underline{m}^{s+1}M)$ est dégénérée (3.1). Le lemme 4.2 montre que la suite spectrale $E(R, \underline{m}^sM)$ est aussi dégénérée, donc $\underline{m}^sM$ est inerte. On déduit maintenant du lemme 4.3 que l'application induite par j sur les aboutissements des deux suites spectrales est aussi injective. Le lemme 4.1(A) permet d'obtenir (2). De manière analogue $E(j^\vee)^2$ est surjectif et on en déduit que $(\underline{m}^sM)^\vee$ est inerte, puis on obtient (3). ▮

Remarque. L'assertion (2) figure dans [12]. En dualisant la démonstration de Levin, Roos a démontré l'assetion (3) [15, Remarque 1].

Démontrons maintenant le théorème 5.1.

Soit s_0 comme dans le lemme 5.4. Si $s > s_0$ ce lemme s'applique à $s-1$ et on en déduit que les homomorphismes:

$$\operatorname{Tor}_*^R(\underline{m}^sM, k) \to \operatorname{Tor}_*^R(\underline{m}^{s-1}M, k)$$

et

$$\operatorname{Tor}_*^R((\underline{m}^{s-1}M)^\vee, k) \to \operatorname{Tor}_*^R((\underline{m}^sM)^\vee, k)$$

sont nuls. Comme l'application $\underline{m}^s M \to M$ se factorise en $\underline{m}^s M \to \underline{m}^{s-1} M \to M$, les homomorphismes:

$$\mathrm{Tor}_*^R(\underline{m}^s M, k) \to \mathrm{Tor}_*^R(M, k) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tor}_*^R(M^\vee, k) \to \mathrm{Tor}_*^R((\underline{m}^s M)^\vee, k)$$

sont également nuls. Par conséquent, nous avons la relation:

$$P_R^{M/\underline{m}^s M}(t) = tP_R^{\underline{m}^s M}(t) + P^M(t)$$

et, compte-tenu du corollaire 1.4, la relation:

$$I_R^{M/\underline{m}^s M} = t^{-1} P_R^{(\underline{m}^s M)^\vee}(t) + I_R^M(t).$$

Maintenant le lemme 5.4 nous dit que $\underline{m}^s M$ et $(\underline{m}^s M)^\vee$ sont inertes. Les relations du théorème résultent alors du lemme 5.3. ∎

Dans [12], Levin établit que pour s assez grand, l'homomorphisme $R \to R/\underline{m}^s$ est de Golod et que

$$P_{R/\underline{m}^s}^k(t) = P_R^k(t)/(1 - t^2 H(\underline{m}^s)(-t) \cdot P_R^k(t)).$$

Pour les séries de Bass, nous montrons:

THÉORÈME 5.5. *Il existe un entier s_0 tel que pour $s > s_0$ on a:*

(a) *Si l'anneau R n'est pas régulier*

$$I_{R/\underline{m}^s}(t)/P_{R/\underline{m}^s}^k(t) = (t^{-1})\, H(\underline{m}^s)(-t^{-1}) + I_R(t)/P_R^k(t).$$

(b) *Si l'anneau R est régulier de dimension n*

$$I_{R/\underline{m}^s}(t)/P_{R/\underline{m}^s}^k(t) = (t^{-1})\, H(\underline{m}^s)(-t^{-1}) - t^{n+1}/(1+t)^n.$$

Preuve. Choisissons un entier s_0' qui satisfasse d'une part le théorème de Levin énoncé en 3.9, et d'autre part le théorème 5.1 pour le module $\underline{m}$, et soit $s_0 = s_0' + 1$. Pour $s > s_0$ posons $R' = R/\underline{m}^s$, $\underline{m}' = \underline{m}/\underline{m}^s$. Puisque $\underline{m}'$ est annulé par $\underline{m}^{s-1}$ il en est de même de $(\underline{m}')^\vee$. Le théorème 3.9, le corollaire 1.4 et le lemme 1.6 permettent d'écrire:

$$I_{R'}^{\underline{m}'}(t)/P_{R'}^k(t) = P_{R'}^{(\underline{m}')^\vee}(t)/P_{R'}^k(t) = P_R^{(\underline{m}')^\vee}(t)/P_R^k(t) = I_R^{\underline{m}'}(t)/P_R^k(t).$$

D'autre part, puisque $\underline{m}^s = \underline{m}^{s-1} \cdot \underline{m}$, en appliquant le théorème 5.1 nous avons aussi:

$$I_R^{\underline{m}'}(t)/P_R^k(t) = (t^{-1})\, H(\underline{m}^s)(-t^{-1}) + I_R^{\underline{m}}(t)/P_R^k(t).$$

Pour conclure, utilisons un résultat établi dans [9, corollaire 1.8]. Puisque l'anneau R' n'est jamais régulier, nous avons:

$$I_{R'}^{\underline{m}'}(t) = I_{R'}(t) + tP_{R'}^k(t).$$

De même, si R n'est pas régulier, nous avons:

$$I_R^{\underline{m}}(t) = I_R(t) + tP_R^k(t)$$

et si R est régulier de dimension n, nous avons:

$$I_R^{\underline{m}}(t) = t(1+t)^n - t^{n+1}.$$

Les relations du théorème en résultent. ▮

6. Modules inertes et petits homomorphismes

Le concept de petit homomorphisme a été introduit par Avramov dans [1]:

Définition. Un homomorphisme local $f: S \to R$ est dit *petit* si l'application canonique $f_*: \operatorname{Tor}_*^S(k, k) \to \operatorname{Tor}_*^R(k, k)$ est injective.

Dans le théorème suivant nous allons voir que l'on peut remplacer le module k dans la définition ci-dessus par certains R-modules, qui en fait seront les modules inertes par f.

Théorème 6.1. *Soient $(R, \underline{m})$ un anneau local, K son complexe de Koszul. Un R-module M de $C(R)$ est inerte si et seulement si l'application canonique: $H_*(M \otimes_R K) \to \operatorname{Tor}_*^R(M, k)$ est injective.*

II. *Soient $(S, \underline{n})$, $(R, \underline{m})$ deux anneaux locaux, $f: S \to R$ un homomorphisme local, M un R-module de $C(R)$.*

(a) *Si l'application canonique $(M, f)_*: \operatorname{Tor}_*^S(M, k) \to \operatorname{Tor}_*^R(M, k)$ est injective, le R-module M est inerte par f, si de plus $\operatorname{Tor}_*^R(M, k)$ n'est pas nul, f est un petit homomorphisme.*

(b) *Si l'homomorphisme f est petit, le R-module M est inerte par f si et seulement si l'application $(M, f)_*: \operatorname{Tor}_*^S(M, k) \to \operatorname{Tor}_*^R(M, k)$ est injective.*

Preuve. Remarquons d'abord que l'assertion I peut être considérée comme un cas particulier de II(b). En effet, utilisant 2.11 et gardant les notations de ce numéro, on observe que l'homomorphisme $s: S \to \hat{R}$ est petit. Par conséquent, il suffit d'établir II.

Preuve de II(a). Puisque $\operatorname{Tor}_*^S(M, k)$ s'identifie à un sous R-module de $\operatorname{Tor}_*^R(M, k)$, on déduit d'une part que $M \in C(S)$, et d'autre part que $\underline{m} \operatorname{Tor}_*^S(M, k) = 0$. Donc le terme E^2 de la suite spectrale $E(f, S, R, M)$ peut se réécrire:

$$E_{p,q}^2 = \operatorname{Tor}_p^R(k, k) \otimes_k \operatorname{Tor}_q^S M, k),$$

et il faut montrer que cette suite spectrale est dégénérée. D'après le lemme 4.1(B), il existe un homomorphisme de suites spectrales:

$$E(f): E(f, S, R, M) \to E(1_R, R, R, M)$$

qui sur le terme E^2 est induit par:

$$(M, f)_* : \mathrm{Tor}_*^S(M, k) \to \mathrm{Tor}_*^R(M, k).$$

Cette dernière application étant injective, $E(f)^2$ est injective, et $E(1_R, R, R, M)$ étant dégénérée, (3.1), le lemme 4.2 s'applique: $E(f, S, R, M)$ est dégénérée, ce qui montre que M est inerte par f. Observons maintenant que l'application induite entre les aboutissements des suites spectrales est aussi injective d'après le lemme 4.3. Or, d'après le lemme 4.1 (B), cette application n'est autre que:

$$1 \otimes f_*: \mathrm{Tor}_*^R(M, k) \otimes_k \mathrm{Tor}_*^S(k, k) \to \mathrm{Tor}_*^R(M, k) \otimes_k \mathrm{Tor}_*^R(k, k).$$

Par conséquent, si $\mathrm{Tor}_*^R(M, k)$ n'est pas nul, l'application f_* est injective.

Preuve de II(b). Soit M un R-module inerte par f. D'après le lemme 4.1(C), il existe un homomorphisme de suites spectrales:

$$E(f): E(1_S, S, S, M) \to E(f, S, R, M)$$

qui sur le terme E^2 est induit par l'application injective

$$f_*: \mathrm{Tor}_*^S(k, k) \to \mathrm{Tor}_*^R(k, k).$$

Par conséquent, $E(f)^2$ est injective, et les deux suites spectrales étant dégénérées, les lemmes 4.3 et 4.1(C) montrent que l'application

$$(M, f)_* \otimes 1: \mathrm{Tor}_*^S(M, k) \otimes_k \mathrm{Tor}_*^S(k, k) \to \mathrm{Tor}_*^R(M, k) \otimes_k \mathrm{Tor}_*^S(k, k)$$

est injective et donc que l'application $(M, f)_*$ est injective. Ce qui, compte-tenu de II(a), démontre II(b). ∎

Remarque. Le théorème 3.8 de [11] montre que l'injectivité de $(M, f)_*$ correspond à la nullité de certaines opérations de Massey.

Le reste de ce paragraphe, concerne plus particulièrement les anneaux et homomorphismes de Golod. Rappelons qu'un homomorphisme de Golod est un petit homomorphisme [1, théorème 3.5]. Si $f: S \to R$ est un petit homomorphisme, il est bien connu que l'homomorphisme $f_p: \mathrm{Tor}_p^S(R, k) \to \mathrm{Tor}_p^S(k, k)$ est nulle pour $p > 0$. Par conséquent, en utilisant (2.13) et le théorème précédent, on peut énoncer:

COROLLAIRE 6.2. I. *Soit* $(R, \underline{m})$ *un anneau local, K son complexe de Koszul. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(1) *L'anneau R est un anneau de Golod.*

(2) *Le R-module* $\underline{m}$ *est inerte.*

(3) *L'homomorphisme canonique*: $H_*(\underline{m} \otimes_R K) \to \mathrm{Tor}_*^R(\underline{m}, k)$ *est injectif.*

II. *Soit* $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ *un homomorphisme surjectif d'anneaux locaux. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(1) *L'homomorphisme f est un homomorphisme de Golod.*

(2) *L'homomorphisme f est petit, et le R-module* $\underline{m}$ *est inerte par f.*

(3) *L'homomorphisme canonique* $(\underline{m}, f)_*: \mathrm{Tor}_*^S(\underline{m}, k) \to \mathrm{Tor}_*^R(\underline{m}, k)$ *est injectif.*

Le corollaire suivant montre qu'en présence d'anneaux ou d'homomorphismes de Golod il existe de nombreux modules inertes.

Soient $(R, \underline{m})$ un anneau local et M un R-module de type fini. Soit Y une résolution libre minimale de M sur R. Pour $i \geqslant 1$ les modules de syzygie de M sont les modules $\mathrm{Im}(Y_i \to Y_{i-1})$.

COROLLAIRE 6.3. (1) *Soient* $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ *un homomorphisme de Golod et M un R-module de type fini. Si M est inerte par f, alors les modules de syzygie de M sont aussi inertes par f.*

(2) *Soient* $(R, \underline{m})$ *un anneau de Golod, et M un R-module de type fini.*

(a) *Si M est inerte, alors les modules de syzygie de M sont aussi inertes.*

(b) *Soit* $n = \dim \underline{m}/\underline{m}^2$. *Tous les modules de syzygie de M d'indice supérieur ou égal à n sont inertes.*

Preuve. Soit N le premier module de syzygie de M. L'assertion (1) est une conséquence du théorème 6.1 et du lemme suivant:

LEMME. *Si pour tout* $i \geqslant p$ *l'application* $\mathrm{Tor}_i^S(M, k) \to \mathrm{Tor}_i^R(M, k)$ *est injective, alors pour tout* $i \geqslant p-1$ *l'application* $\mathrm{Tor}_i^S(N, k) \to \mathrm{Tor}_i^R(N, k)$ *est injective.*

Preuve du lemme. Soient X une résolution libre minimale de k sur S, Y une résolution libre minimale de k sur R. Puisque l'homomorphisme f est de Golod, il existe une suite exacte de complexes:

$$0 \to X \otimes_S R \to Y \to Y \otimes_R F \to 0$$

où F est un complexe de R-modules libres, de différentielle nulle, vérifiant rang $F_i = \dim_k I\operatorname{Tor}_{i-1}^S(R, k)$ (pour les détails voir [11, théorème 1.5 et chapitre 4]). Tensorisant cette suite de complexes par M et N au dessus de R, et prenant les longues suites d'homologie, on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \operatorname{Tor}_i^S(M,k) \arrow[r] & \operatorname{Tor}_i^R(M,k) \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "\delta_i"] & \bigoplus_{j\geq 1} \operatorname{Tor}_{i-j}^R(M,k) \otimes_k F_j \arrow[r] \arrow[d, "\oplus \delta_{i-j} \otimes 1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \operatorname{Tor}_{i-1}^S(N,k) \arrow[r] & \operatorname{Tor}_{i-1}^R(N,k) \arrow[r, "s'_{i-1}"] & \bigoplus_{j\geq 1} \operatorname{Tor}_{i-j-1}^R(N,k) \otimes_k F_j \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse du lemme équivaut à la surjectivité de s_i pour $i > p$. Comme les homomorphismes de connecion δ_i sont des isomorphismes pour $i \geqslant 1$ et comme δ_0 est surjective, on déduit que s'_{i-1} est aussi surjective pour $i > p$. On en déduit le lemme et par suite (1).

Soient maintenant R un anneau de Golod et K son complexe de Koszul. On déduit 2(a) du lemme suivant, de démonstration analogue au précédent. Ce lemme sert aussi à prouver 2(b).

LEMME. *Si pour tout $i \geqslant p$, l'application $H_i(M \otimes_R K) \to \operatorname{Tor}_i^R(M, k)$ est injective, alors pour tout $i \geqslant p-1$ l'application $H_i(N \otimes_R K) \to \operatorname{Tor}_i^R(N, k)$ est injective.*

Montrons 2(b). Soit T le $n^{\text{ième}}$ module de syzygie de M. Comme $H_i(M \otimes_R K) = 0$ pour $i > n$, on montre par itération, que l'application $H_i(T \otimes_R K) \to \operatorname{Tor}_i^R(T, k)$ est injective pour $i > 0$. Comme on a toujours $H_0(T \otimes_R K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Tor}_0^R(T, k)$, on déduit du théorème 6.1 que T est un module inerte. Il en est de même pour les modules de syzygie d'ordre supérieur. ∎

Montrons que le corollaire précédent caractérise les anneaux de Golod, ainsi que les homomorphismes de Golod parmi les petits homomorphismes.

COROLLAIRE 6.4. (a) *Soit $(R, \underline{m})$ un anneau local. S'il existe un R-module M de type fini non nul qui est inerte ainsi que son premier module de syzygie, alors R est un anneau de Golod.*

(b) *Soit $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ un homomorphisme local. Supposons f petit. S'il existe un R-module M de type fini non nul qui est inerte par f ainsi que son premier module de syzygie, alors f est un homomorphisme de Golod.*

Preuve. Comme dans la démonstration du théorème 6.1, on peut considérer (a) comme un cas particulier de (b).

Montrons (b). Soient M un R-module de type fini non nul et N son premier module de syzygie. Il existe une suite exacte:

$$0 \to N \to R^b \to M \to 0,$$

avec $b = b_0(M)$.

Supposons M et N inertes par f et considérons pour $p \geqslant 0$ le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tor}^S_{p+1}(M,k) \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "(M,f)_{p+1}"'] & \mathrm{Tor}^S_p(N,k) \arrow[d, "(N,f)_p"] \\ \mathrm{Tor}^R_{p+1}(M,k) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Tor}^R_p(N,k). \end{tikzcd}$$

Comme f est petit, $(M,f)_{p+1}$ est injectif et on en déduit que δ_p aussi. Par conséquent, on a la relation

$$P^N_S(t) = b(P^R_S(t) - 1) + (P^M_S(t) - b)/t.$$

Transformant cette égalité en utilisant les relations:

$$P^N_S(t)/P^k_S(t) = P^N_R(t)/P^k_R(t), \qquad P^M_S(t)/P^k_S(t) = P^M_R(t)/P^k_R(t),$$
$$P^N_R(t) = (P^M_R(t) - b)/t,$$

on obtient:

$$P^k_R(t) = P^k_S(t)/(1 - t(P^R_S(t) - 1)). \quad \blacksquare$$

Le corollaire 6.3(b) permet de résoudre un problème de [2, (5.12)] concernant la croissance des nombres de Betti $b_i(M) = \dim_k \mathrm{Tor}^R_i(M,k)$ d'un module de type fini sur un anneau de Golod.

COROLLAIRE 6.5. *Soient $(R, \underline{m})$ un anneau de Golod et M un R-module de type fini. Supposons que R ne soit ni un anneau régulier, ni une intersection complète. Alors si M n'est pas de dimension projective finie, la suite $b_i(M)$ est strictement croissante pour $i > n = \dim_k \underline{m}/\underline{m}^2$.*

Preuve. Soient $p \geqslant n$ et N le $p^{\text{ième}}$ module de syzygie de M. Le corollaire 6.3 nous dit que N est un R-module inerte et par conséquent:

$$P^N_R(t) = |H_*(N \otimes_R K)|\,(t)/(1 - t(|H_*(K)|\,(t) - 1)).$$

Posons pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $c_i = \dim_k H_i(K)$ et $c_i(N) = \dim_k H_i(N \otimes_R K)$. Il est clair que $b_0(N) = c_0(N)$, $b_1(N) = c_1(N)$ et $b_2(N) = c_2(N) + c_1 \cdot c_0(N)$. Or pour tout $i > 0$ nous avons l'inégalité $c_i(N) \leqslant c_{i+1}(N) + c_{i-1}(N)$. Rappelons brièvement pourquoi. Quitte à compléter R et N on peut supposer que R est le quotient d'un anneau régulier $(S, \underline{n})$ par un idéal I inclus dans $\underline{n}^2$. On a alors l'égalité $c_i(N) = \dim_k(\mathrm{Tor}_i^S(N, k))$. Soit X une résolution libre minimale de N sur S, rang $X_i = c_i(N)$. En tensorisant par le corps des fractions Q de S, on obtient une résolution de $N \otimes_S Q$ par les Q-espaces vectoriels $X_i \otimes_S Q$. On en déduit pour $i > 0$ l'inégalité:

$$\begin{aligned} c_i(N) &= \dim_Q(X_i \otimes_S Q) \leqslant \dim_Q(X_{i+1} \otimes_S Q) + \dim_Q(X_{i-1} \otimes_S Q) \\ &= c_{i+1}(N) + c_{i-1}(N). \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration du corollaire, il suffit de remarquer que l'hypothèse sur R équivaut à $c_1 \geqslant 2$ et que celle sur M implique $N \neq 0$, donc $c_0(N) \neq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} b_{p+1}(M) = b_1(N) = c_1(N) &\leqslant c_2(N) + c_0(N) < c_2(N) + c_1 \cdot c_0(N) \\ &= b_2(N) = b_{p+2}(M). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7. Produits fibrés d'anneaux locaux

Soient $(R_1, \underline{m}_1)$, $(R_2, \underline{m}_2)$ et $(R_0, \underline{m}_0)$ trois anneaux locaux et $p_1 : R_1 \to R_0$, $p_2 : R_2 \to R_0$ des homomorphismes locaux surjectifs. Le produit fibré de R_1 et R_2 au-dessus de R_0 est le sous-anneau de $R_1 \oplus R_2$ formé des couples (x, y) vérifiant $p_1(x) = p_2(y)$. Il est facile de voir que R est un anneau local dont l'idéal maximal sera noté $\underline{m}$.

Si on prend pour anneau R_0 le corps résiduel k (p_1 et p_2 étant les projections naturelles), Kostrikin et Shafarevič dans [8], Dress et Krämer dans [5] ont montré que

$$P_R^k(t)^{-1} = P_{R_1}^k(t)^{-1} + P_{R_2}^k(t)^{-1} - 1,$$

en notant $P_R^k(t)^{-1}$ pour $1/P_R^k(t)$.

Dans [7] Herzog donne une généralisation de ce résultat, mais, comme il le remarque, elle ne recouvre pas complètement le cas $R_0 = k$.

Nous allons voir qu'une généralisation naturelle du cas $R_0 = k$, donnant aussi le résultat de Herzog, est le théorème suivant:

Théorème 7.1. *Soient $s_1 : R \to R_1$ et $s_2 : R \to R_2$ les projections canoniques. Alors si R_0, considéré comme R_1-module, est inerte par s_1 et, considéré comme R_2-module, est inerte par s_2 on a la formule*:

$$P_R^k(t)^{-1} = P_{R_1}^k(t)^{-1} + P_{R_2}^k(t)^{-1} - P_{R_1}^{R_0}(t) \cdot P_{R_1}^k(t)^{-1}.$$

On établit ce théorème comme dans [7], en montrant que les homomorphismes s_1 et s_2 sont grands (définition précédant le théorème 3.3). Pour cela, nous utilisons une nouvelle caractérisation de cette propriété.

LEMME 7.2. *Soit $f: S \to R$ un homomorphisme local surjectif. L'homomorphisme f est grand si et seulement si il existe un anneau quotient R' de R tel que:*

(1) *Le R-module R' est inerte par f.*

(2) *La projection $R \to R'$ induit une injection* $\mathrm{Tor}_*^S(R, k) \to \mathrm{Tor}_*^S(R', k)$.

Preuve. Si f est grand, R est inerte par f (théorème 3.3), par conséquent, $R' = R$ convient. Montrons la réciproque. L'homomorphisme f étant surjectif, pour tout R-module M le terme E^2 de la suite spectrale $E(f, S, R, M)$ peut s'écrire

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^R(k, k) \otimes_k \mathrm{Tor}_q^S(M, k).$$

Par conséquent, la projection $R \to R'$ induit un homomorphisme de suites spectrales: $E(f, S, R, R) \to E(f, S, R, R')$ qui au niveau des termes E^2 est injectif. La suite spectrale $E(f, S, R, R')$ est dégénérée puisque R' est inerte par f. Donc, la suite spectrale $E(f, S, R, R)$ est aussi dégénérée (lemme 4.2). Ceci montre que R est inerte par f et cette propriété caractérise les grands homomorphismes (théorème 3.3). ∎

Démontrons maintenant le théorème 7.1.

Preuve de 7.1. Remarquons que pour $i = 1$ ou 2, $p_{i,*}: \mathrm{Tor}_*^R(R_i, k) \to \mathrm{Tor}_*^R(R_0, k)$ est injectif. C'est clair en dimension zéro. Considérons la suite exacte de R-modules:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R_1 \oplus R_2 \xrightarrow{p_1 - p_2} R_0 \longrightarrow 0.$$

On en déduit pour $q > 0$ des isomorphismes:

$$(p_1 - p_2)_q: \mathrm{Tor}_q^R(R_1, k) \oplus \mathrm{Tor}_q^R(R_2, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_q^R(R_0, k);$$

par conséquent, $p_{1,q}$ et $p_{2,q}$ sont injectifs.

Le lemme précédent et l'hypothèse du théorème nous permettent de conclure que s_1 et s_2 sont des grands homomorphismes. Soient maintenant $\underline{a}_1 = \ker p_1$ et $\underline{a}_2 = \ker p_2$. On sait qu'il existe des isomorphismes de R-modules $\underline{a}_1 \simeq \ker s_2$, $\underline{a}_2 \simeq \ker s_1$ et $\underline{a}_1 \oplus \underline{a}_2 \simeq \ker(p_1 \circ s_1)$, $p_1 \circ s_1 = p_2 \circ s_2$ étant la projection de R sur R_0. On peut écrire:

$$P_R^{R_0}(t) = 1 + tP_R^{\underline{a}_1}(t) + tP_R^{\underline{a}_2}(t) = P_R^{R_1}(t) + P_R^{R_2}(t) - 1.$$

En multipliant cette égalité par $P_R^k(t)^{-1}$ et en utilisant les propriétés des grands homomorphismes s_1 et s_2, on obtient

$$P_R^k(t)^{-1} = P_{R_1}^k(t)^{-1} + P_{R_2}^k(t)^{-1} - P_{R_1}^{R_0}(t) \cdot P_{R_1}^k(t)^{-1}. \quad ∎$$

Notons aussi comme dans [7].

COROLLAIRE 7.3. *Sous les hypothèses du théorème, pour tout R_0-module M de $C(R_0)$ on a:*

$$P^M_{R_1}(t)/P^k_{R_1}(t) = P^M_R(t)/P^k_R(t) = P^M_{R_2}(t)/P^k_{R_2}(t).$$

Preuve. C'est clair puisque s_1 et s_2 sont des grands homomorphismes. ∎

Voyons maintenant deux types de situations dans lesquelles le théorème 7.1 s'applique.

7.4. Supposons que R_0 soit inerte sur R_1 et R_2. Il est alors inerte par s_1 et s_2 d'après le théorème 3.6, et les hypothèses du théorème 7.1 sont satisfaites. Il en est ainsi si $R_0 = k$, ou, plus généralement si R_0 est un anneau régulier de dimension n (corollaire 3.7). On a dans ce cas la relation:

$$P^k_R(t)^{-1} = P^k_{R_1}(t)^{-1} + P^k_{R_2}(t)^{-1} - (1+t)^n$$

et on peut établir pour la série de Bass $I_R(t)$ des résultats analogues à ceux obtenus dans [9] pour $R_0 = k$ [10, complément au chapitre II].

7.5. Supposons qu'il existe des anneaux locaux A_1 et A_2 et des homomorphismes locaux, $f_1: A_1 \to R_1$, $g_1: A_1 \to R_2$, $f_2: A_2 \to R_2$, $g_2: A_2 \to R_1$ tels que $p_1 \circ f_1 = p_2 \circ g_1$, $p_2 \circ f_2 = p_1 \circ g_2$. Si R_0 est inerte par f_1 et f_2 les conditions du théorème sont satisfaites. En effet la propriété universelle du produit fibré montre qu'il existe des homomorphismes locaux $h_1: A_1 \to R$, $h_2: A_2 \to R$ tels que $f_1 = s_1 \circ h_1$, $f_2 = s_2 \circ h_2$ et le théorème 3.6 montre alors que R_0 est inerte par s_1 et s_2.

Cette situation généralise le résultat de Herzog: les représentations équivalentes de [7] correspondent au cas où l'on peut choisir $A_1 = R_1$, $f_1 = 1_{R_1}$, $A_2 = R_2$, $f_2 = 1_{R_2}$.

En utilisant cette situation, nous allons démontrer la proposition 3.4. Nous nous contenterons de prouver l'assertion (b).

PROPOSITION 3.4(b). *Soient $f: (S, \underline{n}) \to (R, \underline{m})$ un homomorphisme local surjectif et I un idéal de R. Si le R-module R/I est inerte par f, alors tout module de $C(R)$ annulé par I est aussi inerte par f.*

Preuve. Soient $p_1: R \to R/I$ la projection canonique et $p_2 = p_1 \circ f$. Considérons T le produit fibré de R et de S au-dessus de R/I. La situation 7.5 est réalisée: il suffit en effet de choisir $A_1 = A_2 = S$, $f_2 = g_1 = 1_S: S \to S$, $f_1 = g_2 = f: S \to R$. Par conséquent, le théorème précédent et son corollaire 7.3 s'appliquent. Si le R-module $M \in C(R)$ est annulé par I, on a:

$$P^M_S(t)/P^k_S(t) = P^M_T(t)/P^k_T(t) = P^M_R(t)/P^k_R(t);$$

ce qui montre que M est inerte par f. ∎

BIBLIOGRAPHIE

1. L. L. AVRAMOV, Small homomorphisms of local rings, *J. Algebra* **50** (1978), 400–453.
2. L. L. AVRAMOV, Local algebra and rational homotopy, in Homotopie algébrique et Algèbre locale, *Astérisque* **113–114** (1984), 15–43.
3. L. L. AVRAMOV, Golod homomorphisms, *in* "Algebra, Algebraic Topology, and Their Interactions" (J. E. Roos, Ed.), pp. 59–78, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1183, Springer-Verlag, Berlin.
4. H. CARTAN AND S. EILENBERG, "Homological Algebra," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956.
5. A. DRESS AND H. KRÄMER, Bettireihen von Faserprodukten lokaler Ring, *Math. Ann.* **215** (1975), 79–82.
6. F. GHIONE AND T. H. GULLIKSEN, Some reduction formulas for the Poincaré series of modules, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)* **58**, No. 2 (1975), 82–91.
7. J. HERZOG, Algebra retracts and Poincaré series, *Manuscripta Math.* **21** (1977), 307–314.
8. A. I. KOSTRIKIN AND I. R. SHAFAREVIČ, Groupes d'homologie des algèbres nilpotentes (en Russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **115** (1957), 1066–1069.
9. J. LESCOT, La série de Bass d'un produit fibré d'anneaux locaux, *in* "Séminaire d'Algèbre" (P. Dubreil et M. P. Malliavin, Eds.), pp. 218–239, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1029, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
10. J. LESCOT, Thèse, Caen, 1985.
11. G. LEVIN, Lectures on Golod homomorphisms, Reports, Dept. Math., Stockholm University, No. 15, 1976.
12. G. LEVIN, Poincaré series of modules over local rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **72** (1978), 6–10.
13. G. LEVIN, Large homomorphisms of local rings, *Math. Scand.* **46** (1980), 209–215.
14. S. MACLANE, "Homology," Springer-Verlag, Berlin, 1963.
15. J. E. ROOS, Sur l'algèbre Ext de Yoneda d'un anneau local de Golod, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A*, **286** (1978), 9–12.