Formelsammlung

MAA
Jan Caspar, Aktualisiert 21. April 2017

Algebraische Struktur

Man nennt $[(T_1, \ldots, T_m), f_1, \ldots, f_n]$ eine algebraische Struktur (mit den Trägermengen $T_1, \ldots, T_m$ und Operationen $f_1, \ldots, f_n$).

Beispiele
Sehr oft haben wir es mit Strukturen mit einer Trägermenge und einer oder mehreren binären Operationen zu tun. z.B. $[Z, +][N, \cdot][N, +, \cdot][R, +, \cdot][Pot(M), \bigcup, \bigcap]$

Relationale Struktur

Man nennt $[(T_1, \ldots, T_m), r_1, \ldots, r_n]$ eine relationale Struktur (mit den Trägermengen $T_1, \ldots, T_m$ und Relationen $r_1, \ldots, r_n$).

Beispiele
e: $[N, \leq]$, $[N_0, |]$, Graph $[G, E]$.

Halbgruppe

Eine binäre Operation $\circ$ heißt assoziativ auf T, falls für alle $x, y, z \in T$ gilt:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

Ist $\circ$ assoziativ auf T, so nennt man $[T, \circ]$ eine **Halbgruppe**.

Beispiele
$[N, +][R, \cdot][Pot(M), \bigcup]$

Monoid

$\varepsilon \in T$ heißt neutrales Element bzgl. $\circ$, falls für alle $x \in T$ gilt:

$$\varepsilon \circ x = x \circ \varepsilon = x$$

Besitzt T ein neutrales Element bzgl. $\circ$, so nennt man eine Halbgruppe $[T, \circ]$ auch **Monoid**.

Beispiele
$[N_0, +][R, \cdot][Pot(M), \bigcup][f | f : A \to A, \circ]$

Gruppe

Ein Element $a \in T$ heißt invertierbar bzgl. $\circ$, falls es ein $b \in T$ gibt mit

$$a \circ b = b \circ a = \varepsilon.$$

Man nennt b dann das zu a **inverse Element** bzgl. $\circ$
Falls jedes $a \in T$ bzgl. $\circ$ invertierbar ist, so nennt man ein Monoid $[T, \circ]$ auch **Gruppe.**

Beispiele
$[Z, +][R\ 0, \cdot][f | f : Abij. \to A, \circ]$

kommutative Strukturen (abelsch)

Eine binäre Operation $\circ$ heißt kommutativ auf T, falls für alle $x, y \in T$ gilt:

$$x \circ y = y \circ x.$$

Ist die Operation $\circ$ kommutativ, spricht man auch von

- einer **kommutativen** Halbgruppe,
- einem **kommutativen** Monoid,
- einer **kommutativen** Gruppe.

Statt kommutativ sagt man auch **abelsch**, z.B. abelsche Gruppe

Permutationen

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. f ist Permutation von M genau dann wenn:

$$f : M \to M \text{ ist bijektiv}$$

Seien f und g Permutationen von M, dann ist $f \circ g : M \longrightarrow M, x \mapsto f(g(x))$ eine **Permutation**.

Hintereinanderausführung

- $f \circ g$ heißt **Hintereinanderausführung** (f nach g)
- ist assoziativ.
- Bzgl. $\circ$ gibt es ein neutrales Element, die identische Funktion $\varepsilon : M \longrightarrow M, x \mapsto x$
- Zu jeder Permutation f existiert die inverse Permutation f^{-1}
  mit: $\underset{x \in M}{\forall} (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ und $\underset{x \in M}{\forall} (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$
  d.h. $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \varepsilon$

Symmetrische Gruppe

Die Permutationen einer Menge M bilden mit der Hintereinanderausführung $\circ$ eine Gruppe, genannt, die **symmetrische** Gruppe von M, in Zeichen S_M.

- Wir schreiben $S_n := S_{1,2,\ldots,n}$ für $n \in N$. Das sind die Permutationen der ersten n natürlichen Zahlen.
- Die S_n hat $n!$ Elemente.

Null und Eins

- Das neutrale Element einer Gruppe wird auch **Einselement** genannt.
- In **additiver Schreibweise** bezeichnet man das Operationssymbol in einer Struktur manchmal mit +. Das neutrale Element nennt man dann das **Nullelement**. Es gilt:

$$0 + a = a + 0 = a$$

- In einer Gruppe $[T, \circ]$ bezeichnet man das inverse Element von **a** mit a^{-1} , in additiver Schreibweise mit $-a$.

Ring

Eine Algebra $[T, +, \circ]$ heißt **Ring**, wenn

1. $[T, +]$ eine **abelsche** Gruppe und
2. $[T, \circ]$ eine Halbgruppe ist, und
3. wenn für alle $a, b, c \in T$ gilt:
   $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$
   $(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a$. („Distributivgesetz“)

Ist $[T, +, \circ]$ ein Ring und $\circ$ kommutativ, so ist $[T, +, \circ]$ ein **kommutativer Ring**.
Gibt es ein Einselement bzgl. $\circ$, dann ist es ein **Ring mit Einselement.**

Beispiel
$[Z, +, \cdot]$

Polynomringe

Polynome mit Addition und Multiplikation (aus der Schule bekannt) bilden einen **kommutativen Ring mit Einselement**.

Körper

Ein kommutativer Ring $[T, +, \circ]$ heißt **Körper**, falls $[T\ 0, \circ]$ eine Gruppe ist.

Unterstruktur

Sei $[T, f_1, \ldots, f_n]$ algebraische Struktur einer gewissen Klasse und $U \subseteq T, U \neq \emptyset$. Ist $[U, f_1, \ldots, f_n]$ eine Struktur derselben Klasse, so nennt man $[U, f_1, \ldots, f_n]$ eine **Unterstruktur** von $[T, f_1, \ldots, f_n]$.

Wichtig:
Die Operationen f_j müssen **abgeschlossen** auf U sein, d.h. falls f_j eine k-stellige Funktion ist, dann muss für alle $x_1, \ldots, x_k \in U$ gelten: $f(x_1, \ldots, x_k) \in U$.

Beispiele

- [Z, +] Untergruppe von [R, +]
- [Z, +, ·] Unterring von [R, +, ·] (Kein Unterkörper!)
- [Q, +, ·] Unterkörper von [R, +, ·]
- [G, +, ·] Unterring von [Z, +, ·], wobei G = {. . . , −4, −2, 0, 2, 4, 6, . . .} = 2Z

Isomorphismus

Isomorph bedeutet:

- gleich „bis auf die Bezeichnung der Objekte“
- nicht unterscheidbar aus der Sicht der Algebra
- alle „algebraischen Eigenschaften“ bleiben erhalten (z.B. Ordnung eines Elements)
- Verknüpfungstabellen sind identisch (bis auf Umbenennung und Umstellung der Objekte)

Graphisomorphismus

Um zu beweisen, dass zwei Graphen isomorph sind, ist es notwendig, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Beide Graphen haben dieselbe Anzahl Knoten und Kanten.
- Knoten mit denselben Eingangs- und Ausgangsgraden lassen sich einander zuordnen.

Diese Bedinungen sind nicht hinreichend.

Tabelle mit Knoten aufstellen

1. OutDeg und InDeg für Knoten von ersten Graph aufstellen
2. Knoten von zweiten Graphen zuordnen anhand von erster Tabelle (gleiche In und Out Degrees)

Sei G = [V, →] ein Graph.
$InDeg(v) := |\{w \in V | w \longrightarrow v\}|$ (Eingangsgrad)
$OutDeg(v) := |w \in V | v \to w|$ (Ausgangsgrad)

pq Formel

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Rechnen mit Restklassen

$\sim_n$ ist „verträglich“ mit + und · und damit eine **Kongruenzrelation**.

$$[x]_n + [y]_n := [x + y]_n$$
$$[x]_n * [y]_n := [x \cdot y]_{nS}$$

Eigenschaften der Restklassenoperationen

- $[Z_n, +, \cdot]$ ist kommutativer Ring mit Einselement
- $a \in Z_n$ ist invertierbar $\Longleftrightarrow ggT(a, n) = 1$ (a und n teilerfremd)
- Falls p Primzahl, dann $[Z_p, +, \cdot]$ ist (endlicher) Körper.

Dividieren mit Restklassen

Multiplikation mit Inverse.

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Findet den größten gemeinsamen Teiler (GCD) von zwei positiven ganzen Zahlen. (Benötigt für Inverse, a^{-1} mit $a * a^{-1} = 1 mod\ n$ für a^{-1} existiert nur wenn ggT(a,n)=1)

ggT(a,b) $d = s * a + t * b$, wobei d der GGT ist.

Folglich wenn a und b teilerfremd sind $1 = s * a + t * b$

1. Setze

$$m = a$$
$$n = b$$
$$s = 1$$
$$t = 0$$
$$u = 0$$
$$v = 1$$

2. Berechne q und r mit $m = q * n + r$ (Division mit Rest)
3. Setze

$$m = n$$
$$n = r$$
$$u_{neu} = s - q * u$$
$$v_{neu} = t - q * v$$

4. Setze

$$s = u$$
$$t = v$$
$$u = u_{neu}$$
$$v = v_{neu}$$

5. Falls $n > 0$ gehe zu Schritt 2

Für a = 37 und b = 16

$$\begin{aligned} 37 &= 1 * 37 + 0 \\ 16 &= 0 * 37 + 1 * 16 \quad (q = 2) \\ 5 &= 1 * 37 - 2 * 16 \quad (q = 3) \\ 1 &= (-3) * 37 + 7 * 16 (q = 5) \\ 0 &= 16 * 37 - 37 * 16 \end{aligned}$$

$ggT(37, 16) = 1 = (-3) * 37 + 7 * 16$

Komplexe Zahlen

$[\mathbb{C}, +, \cdot]$ ist ein Körper.

i^2 = -1 , i^3 = $-i$ | i^4 = 1, i^5 = i ; i^{-1} = $\frac{1}{i}$ = $-i$

Kartesische Koordinaten / Polarkoordinaten

- Kartesische Koordinaten: (x, y) $x = r\ cos(\phi)$, $y = r\ sin(\phi)$
- Polarkoordinaten $[r; \phi]$ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \phi = arctan(\frac{y}{x})$
- $x + yi = r(cos(\phi) + i\ \sin(\phi))$

Rechenoperationen

$z_1 = a + bi$ $z_2 = c + di$ bzw. $z_1 = [r_1; \phi_1]$ $z_2 = [r_2; \phi_2]$

$z_1 \pm z_2$	$z_1 * z_2$	$\frac{z_1}{z_2}$	
$a \pm c + (b \pm d)i$	$a \pm c + (b \pm d)i$	Bruch erweitern mit z_2^*	karth.
ungünstig	$[r_1 * r_2; \phi_1 + \phi_2]$	$[\frac{r_1}{r_2}; \phi_1 - \phi_2]$	polar

konjugiert Komplex
$z = a + i * b \rightharpoonup z^* = a - i * b$

Potenzieren

$z^n = [r^n; n\phi]$ d.h.
$z^n = r^n(cos(n\phi) + i\ sin(n\phi))$

Betrag

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Newton-Algorithmus

1. wähle Näherungsgrenze & Startwerte
2. Setze Startwert in Funktion und erste Ableitung ein
3. dividiere Funktionswert durch den Funktionswert der ersten Ableitung $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \overline{x}$
4. von Startwert das Ergebnis der Division von 3. abziehen ($x = x - \overline{x}$), wieder Funktionswerte mit neuem Wert dividieren so lange bis Näherung ausreicht.

Sonstiges

- $a \circ b := (b - 1)(a + 1)$ ist nicht kommutativ auf R
- Hintereinanderausführung von totalen Funktionen ist assoziativ.
- $[\mathbb{N}, *]$ ist keine abelsche Gruppe.
- In $[\mathbb{Z}_9, *]$ gilt $3 * 7 = 3$
- In jeder Gruppe $[G, \circ]$ gilt **nicht**: $(a \circ b)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1}$
- In einem Monoid mit neutralen Element e gibt es ein a mit $a \circ a = e$
- Falls e das neutrale Element in einer Gruppe ist, dann ist $e^{-1} = e$
- Jede Algebra ist zu sich selbst isomorph
- Die Gleichung $|z^2| = 1$ hat nicht genau 2 komplexe Lösungen