MAA 2 - Matrizen, Vektoren, Gauß

Jan Caspar, Aktualisiert 9. Juni 2017, MIT https://github.com/eisenwinter/fh-hgb-stuff

Vektorrechnung

Analog im $\mathbb{R}^3$ man muss nur die z Komponente einfach dazunehmen.

Betrag / Länge $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Normierung (Einheitsv.) $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Lineare Abhängigkeit

$\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow a_1 = k * b_1, a_2 = k * b_2$$

Nun gilt es ein k zu finden welches **beide** Gleichungen erfüllt, gibt es dies nicht sind die Vektoren **nicht** linear abhängig.

$\mathbb{R}^3$

Mit zwei Vektoren

Analog zu $\mathbb{R}^2$ mit dritter Komponente

Mit drei Vektoren

Möglichkeit A Determinante bestimmen, wenn die Determinante = 0 dann sind die Vektoren linear abhängig, sonst nicht.
ℹ Matrizen → Determinanten

Möglichkeit B ℹ Gauß Algorithmus anwenden. Besitzt das Gleichungssystem eine Nullzeile so ist linear abhängig. Besitzt es **keine** Nullzeile so ist es linear unabhängig.

Möglichkeit C Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren linear abhängig wenn sie in einer Ebene liegen. Dies lässt sich beweisen in dem der Dritte durch ein Vielfaches der ersten Zwei darstellbar ist. Wers genau wissen will solls nachlesen - mir geht der Platz aus.

Zum Beispiel

Sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

Lösung mit Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \}\text{linear abh.}$$

weil Nullzeile.

Matrizen

Definition

$m \times n$ Matrix $A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Quadratisch: $A_{n,n}$

Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Diagonalmatrix mit nur „Einsern" in der Diagonale, sonst nur Null

Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Elemente unter - (oder oberhalb) - der Diagonale sind alle Null

Transponierte Matrix A^T $a_{ij} \rightarrow a_{ji} \implies (A^T)^T = A$

Entsteht aus A durch Vertauschen von Zeilen und Spalten („stürzen")

Addition / Subtraktion

$A_{m,n} \pm B_{m,n} = C_{m,n}$ mit $c_{i,j} = a_{i,j} \pm b_{i,j}$
$\implies$ nur Matrizen gleichen Typs addieren/subtrahieren!

Multiplikation

Mit einer reellen Zahl k

$$k * A = A * k = \begin{pmatrix} k * a_{11} & \dots & k * a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k * a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

jedes Matrixelement wird mit k multipliziert!

Mit einer Matrix

$$\boxed{A_{m,n} * B_{n,p} = C_{m,p}}$$

$$\vec{z}_i \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \mathbf{\dots} & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ * \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & s_j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \mathbf{b_{2j}} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \mathbf{\dots} & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \mathbf{b_{nj}} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & [\![c_{ij}]\!] & \dots & c_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \vec{z}_j * \vec{s}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj} = a_{i1} * b_{1j} + a_{i2} * b_{2j} + \dots + a_{in} * b_{nj}$$

Falk-Schema

wenn Spaltenzahl der ersten Matrix gleich Zeilenzahl der zweiten Matrix. Man schreibt die eine Matrix links, die andere über die neue Matrix und multipliziert dann Zeilen bzw. Spaltenweise.

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$

geht weil A = 3x**2** und B = **2**x2

			Spalte j	
			1	2
			-1	1
			1	-2
Zeile i				
1	1	4	3	-7
2	2	5	3	-8
3	3	-6	-9	15

$C = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -8 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}$

Zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & 13 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 3*1+13*0+1*2 & 3*2+13*(-1)+1*5 \\ 4*1+6*0+0*2 & 4*2+6*(-1)+0*5 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Inverse (Kehrmatrix) A^{-1} zu A

$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$ $\qquad det A^{-1} = \frac{1}{det A}$

Die Inverse existiert für quadratische Matrizen wenn $det A \neq 0 \Leftrightarrow$ Matrix regulär

Spezialfall 2×2 Matrizen

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{det A} * \begin{matrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{matrix}$$

Zum Beispiel

Invertieren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{1*3-2*2} * \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinanten

$$D = det A = |A| = |a_{ik}| = \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

Reguläre Matrix: $det A \neq 0$ (bei GS genau eine Lösung)

Singuläre Matrix: $det A = 0$ (bei GS unendlich viele Lösungen)

2×2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$$

3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$= a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + a_{13} * a_{21} * a_{32} - a_{13} * a_{22} * a_{31} - a_{11} * a_{23} * a_{32} - a_{12} * a_{21} * a_{33}$

Regel von Sarrus

Hauptdiagonale ↘ - Nebendiagonale ↙

Erste zwei Spalten rechts nochmal anschreiben.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \\ & & & & - \\ \searrow & \searrow & \searrow & \swarrow & \swarrow \\ \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Zum Beispiel

Determinante von $\begin{array}{ccc|cc} 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}$

$0 + (3 * 3 * 3) + 0 - 0 - 0 - 24 = 3$ $\qquad det A = 3$

Determinante einer Dreiecksmatrix $A_{n,n}$

$det A = a_{11} * a_{22} * \dots * a_{nn}$

Der Laplace'sche Entwicklungssatz

Determinanten von $n \times n$ Matrizen lassen sich durch den Laplace'schen Entwicklungssatz rekursiv berechnen.

Entwicklung nach der k-ten Spalte bzw. i-ten Zeile:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} * (-1)^{1+k} |S_{ik}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * (-1)^{1+k} |S_{ik}|$$

S_{ik} ist die $((n-1) \times (n-1))$-Matrix, die man erhält, wenn die i-te Zeile und k-te Spalte gestrichen wird ("Streichungsmatrix"). Es ist dabei völlig egal, nach welcher Zeile oder Spalte entwickelt wird.

Tipp Zeile oder Spalte wählen die möglichst viele Nullen enthält.

Beispiel

Entwickeln nach der zweiten Spalte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2 * (-1)^{1+2} * \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$
$$+ 5 * (-1)^{2+2} * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$
$$+ 8 * (-1)^{3+2} * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= -2 * (-6) + 5 * (-12) - 8 * (-6)$$
$$= 0$$

Rang

Rang einer Matrix berechnen

Es wird der ℹ Gauß Algorithmus angewandt. Sobald man die ℹ Dreiecksmatrix erhalten hat kennt man den Rang der Matrix, dieser ist nämlich die Anzahl der Zeilen die **nicht** aus nur Nullen bestehen.

Spezialfall: Rang quadratischer Matrizen

Entspricht der Rang einer quadratischen Matrix ihrer Zeilen- und Spaltenzahl, wird sie reguläre Matrix genannt. Reguläre Matrizen sind invertierbar, d.h. es lässt sich eine inverse Matrix berechnen.

regulär / singulär

Quadratische Matrizen sind genau dann **regulär**, wenn ihre Determinante nicht Null ist. Hat nun eine 3×3 Matrix eine Determinante ungleich 0, so ist der Rang der Matrix 3, bei einer 2×2 wäre der Rang zwei, analog.
Sollte die Determinante 0 sein so kann man nur sagen, dass der Rang für eine 3×3 Matrix kleiner 3 ist. Es muss der Rang wie oben angegeben berechnet werden.

Newton-Algorithmus

1. wähle Näherungsgrenze & Startwerte
2. Setze Startwert in Funktion und erste Ableitung ein
3. dividiere Funktionswert durch den Funktionswert der ersten Ableitung $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \overline{x}$
4. von Startwert das Ergebnis der Division von 3. abziehen ($x = x - \overline{x}$), wieder Funktionswerte mit neuem Wert dividieren so lange bis Näherung ausreicht.

Zum Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x + 1$ und $f'(x) = 3x^2 - 1$ ergibt $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1}$

Gauß Algorithmus

Basis

Ziel ist es eine Dreiecksmatrix (Matrizen) zu bekommen mit Hilfe der folgenden Aktionen auf den Zeilen:

- vertauschen
- mit einer Zahl multiplizieren
- durch eine Zahl dividieren
- addieren
- subtrahieren

Wichtig ist das **keine „Treppe“** mit Nullen entsteht da dies heißt unser Gleichungssystem hat unendliche viele Lösungen.

Schreibarbeit minimieren

Am einfachsten ist es die Koeffizienten Matrix in so einer Tabelle zu notieren, wobei r.S. für rechte Seite steht:

λ	x_1	x_2	x_3	r.S.

Nun wird anhand der verfügbaren Operationen solange umgeformt bis die Dreiecksmatrix entsteht. **Achtung** die Reihenfolge der Berechnung der Nullen spielt eine wichtige Rolle. Man sollte stets zuerst die Nullen der **ersten Spalte** berechnen, welche der beiden Zeilen ist irrelevant, erst danach die Nullen der zweiten Spalte.

Tipp — Falls in der ersten Zeile (der ersten Spalte!) bereits eine Null vorliegt, lohnt es sich die Zeilen entsprechend zu vertauschen, um sich die Berechnung einer Null zu sparen.

Zum Beispiel

Gegen ist $x - y + z = 1, 4x + 3z = 3, 2x - 5y + 3z = 3$

Die Tabelle:

λ	x_1	x_2	x_3	r.S.		Anm.
	1	-1	1	1	$1x + 1 = 1 \to x_1 = 0$	unverändert
-4	4	0	3	3		**-4** * 1 Zeile
-2	2	-5	3	3		**-2** * 1 Zeile
	0	4	-1	-1	$4y - 1 = -1 \to x_2 = 0$	neue 2 Zeile
	0	-3	1	1		neue 3 Zeile
	0	0	3	3	$\to x_3 = 1$	

$$\Longrightarrow L = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

Algebraische Strukturen

Eine algebraische Struktur ist eine nicht leere Menge M, auf der eine oder mehrere Verknüpfungen mit Rechenregeln, z.B. Addition; und Multiplikation definiert sind

Verknüpfung

Eine Verknüpfung $\circ$ auf einer Menge M ordnet jedem geordneten Paar$(x, y) \in M \times M$ ein Element $x \circ y \in M$ zu

Man bezeichnet die algebraische Struktur als $(M, \circ, *)$, z.B. $(R, +, *)$.

algebraischen Gesetze

Die möglichen algebraischen Gesetze sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Für alle $x, y, z \in M$ gelten die folgenden Axiome.

Existenzgesetz:$x \circ y = z$

Addition	Multiplikation
$E^+ x + y = z$	$E^* x * y = z$

Assoziativgesetz:$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

Addition	Multiplikation
$A^+ (x + y) + z = x + (y + z)$	$A^* (x * y) * z = x * (y * z)$

Neutrales Element e: $x \circ e = e \circ x = x$

Addition	Multiplikation
$N^+ x + 0 = 0 + x = x$	$N^* x * 1 = 1 * x = x$

Inverses Element $\overline{x}$: $x \circ \overline{x} = \overline{x} \circ x = e$

Addition	Multiplikation
$I^+ x + (-x) = (-x) + x = 0$	$I^* x * \frac{1}{x} = \frac{1}{x} * x = 1$

Kommutativgesetz:$x \circ y = y \circ x$

Addition	Multiplikation
$K^+ x + y = y + x$	$K^* x * y = y * x$

Außerdem gibt es das Distributivgesetz D

$x * (y + z) = x * y + x * z$
$(x + y) * z = x * z + y * z$

Gruppen

Eine Menge M heißt bezüglich einer Verknüpfung $\circ$ eine **Gruppe** G, wenn die folgenden Axiome gelten.

Existenzgesetz $x \circ y = z$
Assoziativgesetz $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
Neutrales Element $x \circ e = e \circ x = x$
Inverses Element $x \circ \overline{x} = \overline{x} \circ x = e$

Eine Gruppe heißt eine **kommutative Gruppe** bzw. **abelsche Gruppe**, wenn außerdem das Kommutativgesetz $x \circ y = y \circ x$ gilt.

Ringe

Eine Menge M heißt bezüglich zweier Verknüpfungen $\circ$ und $*$ ein Ring R, wenn die folgenden Axiome gelten.

Existenzgesetz $x \circ y = z, x * y = z$
Assoziativgesetz $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), (x * y) * z = x * (y * z)$
Neutrales Element $x \circ e = e \circ x = x$
Inverses Element $x \circ \overline{x} = \overline{x} \circ x = e$
Kommutativgesetz $x \circ y = y \circ x$
Distributivgesetz $x * (y \circ z) = x * y \circ x * z, (x \circ y) * z = x * z \circ y * z$

Ein Ring heißt ein **kommutativer Ring**, wenn außerdem das Kommutativgesetz bezüglich $*$ $x * y = y * x$ gilt.

Es gibt auch Ringe mit einem **neutralen Element** bezüglich $*$: $x * e' = e' * x = x'$.

Körper

Eine Menge M heißt bezüglich zweier Verknüpfungen $\circ$ und $*$ ein Körper K, wenn die folgenden Axiome gelten:

Existenzgesetz $x \circ y = z, x * y = z$
Assoziativgesetz $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,$(x * y) * z = x * (y * z)$
Neutrales Element $x \circ e = e \circ x = x, x * e' = e' * x = x'$
Inverses Element $x \circ \overline{x} = \overline{x} \circ x = e, x * \widehat{x} = \widehat{x} * x = e'$
Kommutativgesetz $x \circ y = y \circ x, x * y = y * x$
Distributivgesetz $x * (y \circ z) = x * y \circ x * z, (x \circ y) * z = x * z \circ y * z$

Notizen