LGI v1.3.6

LGI, MIT, https://github.com/eisenwinter/fh-hgb-stuff
Jan Caspar, Aktualisiert 9. Februar 2017

Aussagen formalisieren

nicht A	$\neg A$
A und B	$A \wedge B$
A oder B	$A \vee B$
wenn A dann B B ist notwendig für A Aus A folgt B A ist hinreichend für B	$A \implies B$
Genau dann A, wenn B Dann und nur dann A, wenn B A ist gleichwertig mit B A ist äquivalent zu B A ist notwendig und hinreichend für B	$A \Leftrightarrow B$
Für alle x ist A(x) Jedes x erfüllt A(x) Es ist A(x) für alle x	$\underset{x}{\forall} A(x)$
Für alle x aus M ist A(x) Jedes x der Menge M erfüllt A(x) Es ist A(x) für alle x in M	$\underset{x \in M}{\forall} A(x)$
Es gibt ein x mit A(x) Es existiert ein x, so dass A(x) gilt Für mindestens ein x gilt A(x)	$\underset{x}{\exists} A(x)$
Es gibt ein x aus M mit A(x) Für mindestens ein x in M gilt A(x)	$\underset{x \in M}{\exists} A(x)$

Aussagen formalisieren Beispiele

Es gibt genau ein x mit der Eigenschaft A

$$\underset{x,y}{\forall} A_{x \to y} \wedge A_x \implies x = y$$

Es gibt höchstens ein x mit der Eigenschaft A

$$\underbrace{\underset{x}{\exists} A}_{Existenz} \wedge \underbrace{\underset{x,y}{\forall} A_x \wedge A_{x \to y} \implies x = y}_{Eindeutigkeit}$$

Es gibt genau zwei Dinge mit der Eigenschaft A

$$\underset{x}{\exists}\underset{y}{\exists} x \neq y \wedge A(x) \wedge A(y) \wedge \neg \underset{z}{\exists} z \neq x \wedge z \neq y \wedge A(z)$$

Alle Vögel haben Flügel aber nicht alle fliegen

$$(\underset{Vogel(x)}{\forall} hatFlügel(x)) \wedge (\neg \underset{Vogel(x)}{\forall} fliegt(x))$$

Superlativ (3 ist die kleinste mit Eigenschaft)

$$Eig(x) \wedge \underset{x}{\forall} Eig(x) \implies x \geq 3$$

Standarform Allquantor

$\underset{c \in A \cup B}{\forall} \ldots$ wird $\underset{c}{\forall} c \in A \cup B \implies \ldots$

Standarform Existenzquantor

$\underset{a \in s}{\exists} \ldots$ .wird $\underset{a}{\exists} a \in s \wedge \ldots$

All- / Existenzquantor Negation

Aus $\neg(\exists \ldots)$ wird $\forall \neg \ldots$ und aus $\neg(\forall \ldots)$ wird $\exists \neg \ldots$.

Beispiel

$\underset{x \in \mathbb{N}}{\exists} x < 10$ wird zu $\neg(\underset{x \in €}{\exists} x < 10)$ auflösen $\underset{x \in €}{\forall} \neg(x < 10)$ und $\neg(x < 10) \Leftrightarrow x \geq 10$

All- / Existenzquantor Beweisen

$\exists$ konkreten fixen Wert wählen
$\forall$ beliebig, fix wählen

Problemspezifikation : Muster

Gegben Werte (a,b,x,y) (Eingabe)
wobei a irgendwas ist, b > 0, x ∈ $\mathbb{Z}$ (Eingabebedingung)
Gesucht k (Ausgabe)
so-dass Bedingung (Ausgabebedingung)

Beispiel Problemspezifikation: Runden

Gegben x (Eingabe)
wobei x ∈ $\mathbb{R}$ (Eingabebedingung)
Gesucht y (Ausgabe)

so-dass $|x - z| \leq \frac{1}{2} \wedge \overbrace{(|x - y| = \frac{1}{2} \implies x > y)}^{0{,}5 \to auf runden}$

Beispiel Problemspezifikation: Wurzel reeler Zahl (Ohne $\sqrt{}$)

Gegben z (Eingabe)
wobei $z \in \mathbb{R},\ z \geq 0$ (Eingabebedingung)
Gesucht w (Ausgabe)

so-dass $w \in \mathbb{R} \wedge \overbrace{w * w}^{w^2} = z$ (Ausgabebedingung)

Beispiel Problemspezifikation: Folgen

zwei aufeinanderfolgenden Positionen einer gegebenen endlichen Folgen s ein neues Objekt n einfügen.
Gegben s
wobei s eine endliche Folge
Gesucht a, eine endliche Folge mit Länge l(s)*2-1
so-dass $(\underset{1 \leq i \leq l(a)-1}{\forall} a_{2*i-1} = s_i) \wedge (\underset{1 \leq j \leq l(a)}{\forall} a_{2*i} = n)$

Definieren : Muster

Aussage $Name(p,a,r) :\Leftrightarrow \underset{y \in \mathbb{N}}{\exists} Aussage(p,a,r)$

Funktion $Name(p,a,r) := p * a * r$

Beispiel Definition: Primzahl

$$Prim(x) :\Leftrightarrow \overbrace{(\underset{t \neq x, t \neq 1}{\forall} \neg(t|x))}^{\text{Für alle Teiler } \neq 1 \text{ oder x}} \wedge x > 1$$

Beispiel Definition: istEnthalten von 2 Folgen a,b (Aussage)

$$istEnthalten(a,b) :\Leftrightarrow \underset{1 \leq x < l(a)}{\forall} \underset{1 \leq y \leq l(b)}{\exists} a_x = b_y$$

Gesetze der Logik

a	b	$a \implies b$	$a \Leftrightarrow b$	$\neg a \vee b$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

$\neg(A \wedge B)$ $\neg(A \implies B)$ $\neg \underset{x}{\forall} A(x)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$ $(A \wedge \neg B)$ $\underset{x}{\exists} \neg A(x)$	$\neg(A \vee B)$ $\neg(A \Leftrightarrow B)$ $\neg \underset{x}{\exists} A(x)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$ $(A \wedge B)$ o.$(A \Leftrightarrow (\neg B))$ $\underset{x}{\forall} \neg A(x)$

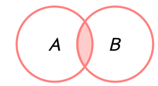
Syntaxanalyse Muster

$$\underbrace{\overbrace{\underset{i}{\forall}}^{Q}\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\overbrace{\leqq}^{PK_2}(\overbrace{4}^{OK},\overbrace{i}^{V})}_{\text{atomare Aus.}}\ \overbrace{\wedge}^{J}\ \underbrace{\overbrace{<}^{PK_2}(\overbrace{i}^{V},\overbrace{n}^{K})}_{\text{atomare Aus.}}}_{Junktoraussage}\ \overbrace{\Longrightarrow}^{J}\ \underbrace{\overbrace{\geq}^{Pk_2}(\underbrace{\overbrace{hoch(}^{FK_2}\overbrace{2}^{OK},\overbrace{i}^{V})}_{Term},\underbrace{\overbrace{hoch(}^{Fk_2}\overbrace{i}^{V},\overbrace{2}^{OK})}_{Term})}_{\text{atomare Aussage}}}_{Junktoraussage}}_{Quantoraussage}$$

Achtung Auch Mengenlehreoperationen wie „Vereinigt“ ($\cup$) sind Funktionen.

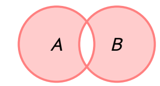
Mengenlehre

$A \cap B$



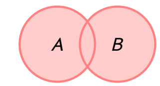
$\cap U := \{x | \underset{x \in U}{\forall} x \in a\}$

$A \Delta B$



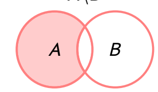
$A \Delta B := \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$A \cup B$



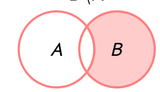
$\cup U := \{x | \underset{a \in U}{\exists} x \in a\}$

$A \backslash B$



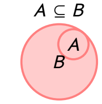
$A \backslash B := \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$

$B \backslash A$



$A^B := \{x | (x \in B) \wedge (x \notin A)\}$

$A \subseteq B$



$A \subseteq B :\Leftrightarrow \underset{x \in A}{\forall} x \in B$

Schreibweisen

aufzählend	prädikativ
$\{1,2,3,4,5\}$	$\{x | 1 \leq x \leq 5\}$

Mengelehre Operationen

Stets die leere Menge in betracht ziehen!

Teilmengenbeziehung

$x \subseteq y :\Leftrightarrow \underset{z}{\forall}(z \in x \implies z \in y)$

Die Teilmengenbeziehung ist partiell geordnet wenn

Reflexivität weil $A \subseteq A$
Antisymmetrie weil $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ heißt $A = B$
Transitivität weil $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ heißt $A \subseteq C$

Potenzmenge

Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen. $Pot(A) := \{M | m \subseteq A\}$.

Leere Menge: $Pot(\emptyset) = \{\emptyset\} \to Pot(Pot(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Anzahl nach Potenzierung 2^n wobei n die Anzahl der Objekte (inkl. leere Menge) in der Ursprungsmenge sind.

Karthesisches Produkt

$A \times B := \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$ z.B.
$\{1,2\} \times \{4,5,6\} = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6)\}$

Landau Notation

$O(g) :\Leftrightarrow \underset{c>0}{\exists} \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \underset{n>n_0}{\forall} |f(n)| \leq c * |g(n)|$

Zum Beweisen wähle ein $c \geq 1$ damit $f(n) \leq c$ erfüllt ist.

Relationen & Funktionen

R ist **Relation zwischem** M und $N :\Leftrightarrow R \subseteq M \times N$

R ist eine **Relation auf** $M :\Leftrightarrow R \subseteq M \times M$

f ist eine **partielle Funktion** von M nach N

$:\Leftrightarrow (f \subseteq M \times N) \wedge (\underset{x,y,y'}{\forall} (x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \implies y = y')$,

„Eine partielle Funktion hat für jeden Wert einen einzigartigen Rückgabewert.“

f ist eine **totale Funktion** von M nach $N :\Leftrightarrow :\Leftrightarrow \underbrace{(f \subseteq M \times N) \wedge (\underset{x,y,y'}{\forall} (x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \implies y = y')}_{partiell} \wedge (\underset{x \in M}{\forall} \underset{y \in N}{\exists} (x,y) \in f)$

„Eine totale Funktion hat für jeden Wert aus der Menge einen definierten und einzigartigen Rückgabewert.“

Funktionsdefinition

$f : M \to N, x \mapsto t$ bedeutet $f : \{(x,t) | x \in M\} \wedge \underset{x \in M}{\forall} f(x) \in N$

Zum Beispiel

$f : \mathbb{N}_5 \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2$ entspricht f der Menge

$\{(x, x^2) | x \in \mathbb{N}_5\} = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,25)\}$

Bild, Urbild.Inverse

$f : M \to N, A \subseteq M, B \subseteq N$

Bild $f(A) := \{f(x) | x \in A\}$ Bild von A unter F

Urbild $f^{-1}(B) := \{x \in M | f(x) \in B\}$ Urbild von B unter f. Sprich,

$f^{-1}(\overbrace{\{4,5\}}^{f(x)}) = \{4, \ldots\}$, bei welchen Paramtern kommt dieses Ergebnis. Achtung! Nur die die tatsächlich getroffen werden.

Inverse Allgemein: $f^{-1} : f(M) \to M$. Falls f injektive $f^{-1}\{(y,x) | (x,y) \in f\}$, Tuppel umdrehen. Falls f bijektiv drehen sich Quell- und Zielraum um (Beispiel $f : M \to N \ldots f^{-1} : N \to M$)

Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

injektiv nie gleicher Funktionswert für verschiedene Argumente, jedes $x \in N$ hat höchstens einen Verweis.

$\underset{m,n \in \mathbb{N}}{\forall} f(m) = f(n) \implies m = n$

surjektiv nur wenn alle Werte aus Bereich für Argumente funktionieren; jedes $x \in N$ hat minestens einen Verweis.

$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \underset{m \in \mathbb{N}}{\exists} f(m) = n$

bijektiv ist surjektiv und injektiv, jedes $x \in N$ hat genau einen Verweis $\to$beide Menge sind gleich groß. **Bijektiv wenn Surjektiv und Injektiv!**

Hintereinander ausführen

$g \circ f = g(f(x))$

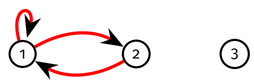
Achtung auf korrekte Zahlenräumen!

Eigenschaften von Relationen

Eigenschaft	für alle x,y,z $\in$ M
reflexiv	xRx
	Jeder Knoten besitzt eine Schleife
irreflexiv	$\neg(xRx)$
	Kein Knoten besitzt eine Schleife
symmetrisch	$xRy \Rightarrow yRx$
	Jeder Pfeil besitzt einen „Gegenpfeil“
asymmetrisch	$xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
	Kein Pfeil besitzt einen „Gegenpfeil“, es gibt auch keine Schleifen
antisymmetrisch	$xRy \bigwedge yRx \Rightarrow x = y$
	Kein Pfeil zwischen zwei verschiedenen Knoten besitzt einen „Gegenpfeil“
transitiv	$xRy \bigwedge yRz \Rightarrow xRz$
	Jede „Pfeilkette“ aus zwei Pfeilen besitzt einen ”Überbrückungspfeil“

Symterie

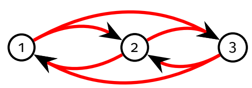
Beispiel $A := \{1,2,3\}$ $R := \{(1,2), (2,1), (1,1)$ $R \subsetneqq A \times A$



Symetrisch weil $\underset{a,b \in A}{\forall} (a,b) \in R \implies (b,a) \in R$, isolierte Knoten sind damit egal!

Transitiv

Beispiel $A := \{1,2,3\}$ $R := \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1)\}$ $R \subsetneqq A \times A$



Transitiv weil $\underset{a,b,c \in A}{\forall} (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \implies (a,c) \in R$

Verknüpfung von Relationen

$R^2 = R \circ R, R^n := R \circ R^{n-1}$ für $n \geq 3$

$(x,y) \in R^n$ Es gibt einen Weg der Länge **n** von x nach y

$(x,y) \in R^+$ Es gibt einen Weg von x nach y (Länge ≥ 1)

Hüllen von Graphen

R^{-1} Umkrehrelation (geschrieben: $\longleftarrow$), Tuppel umdrehen

$R \cup R^{-1}$ symetrische Hülle ($\leftrightarrow$)

$R^0 \cup R$ reflexive Hülle ($\to^0 \cup \to$)

R^+ transitive Hülle ($\to^+$)

R^* reflexiv-transitive Hülle ($\to^*$)

Hüllen bilden

R^+

1. (a,b) in R, so ist (a,b) in R^+
2. (a,b) und (b,c) in R, so ist (a,c) auch in $R^+(R \circ R)$

R^*

$R^+ \cup \{(a,a) | a \in M\}$ (Selbstveweise/Schleifen)

Äquivalenzrelationen

Eine Relation $\sim \subseteq M \times M$ heißt Aquivalenzrelation auf M (alle $x, y, z \in M$) wenn

reflexiv $x \sim x$

symetrisch $x \sim y \implies y \sim x$

transitiv $(x \sim y \wedge y \sim z) \implies x \sim z$

Beispiel

$A \sim B :\Leftrightarrow \sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b$

reflexiv $\sum_{a \in A} a = \sum_{a \in A} a$ Ja, z.B. {1}, 1=1

symetrisch $\sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b \implies \sum_{b \in B} b = \sum_{a \in A} a$ Ja, z.B. {1,2},{0,3}, $3 = 3 \implies 3 = 3$

transitiv $(\sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b) \wedge (\sum_{a \in A} b = \sum_{c \in C} c) \implies \sum_{a \in A} a = \sum_{c \in C} c$ Ja, z.B. {1,1,1},{1,2},{0,3}, $3 = 3 \wedge 3 = 3 \implies 3 = 3$

Äquivalenzklassen

$[x]_\sim := \{y \in M | y \sim x\}$.

Es gilt $i \neq j$

$M_i \cap M_j = \{\}$

Für jedes a und b aus M_i ist aRb wahr

Für jedes a aus M_i und b aus M_j ist aRb falsch.

Partition einer Menge

P ist eine Parition auf M $:\Leftrightarrow \underset{A \in P}{\forall} A \subseteq M \wedge A \neq \emptyset \wedge \underset{A,B \in P}{\forall} A \neq B \implies A \cap B = \emptyset$

Ordnungsrelationen

$\leq \subseteq M \times M$ ist Ordnungsrelationen g.d.w. für alle $x, y, z \in M$ gilt

reflexiv $x \leq y$

antisymetrisch $(x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y$

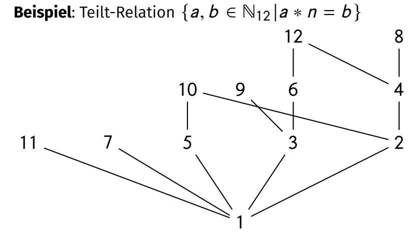
transitiv $(x \leq y \wedge y \leq z) \implies x \leq z$

Ordnungsrelationen werden auch partielle Ordnungen genannt. Gilt zusätzlich $(x \leq y \vee y \leq x)$ (**Linearität**) so heißt sie totale oder lineare Ordnung.

Hasse Diagramm

Zwischen x und y wird eine Linie gezeichnet,.falls $x \leq y \wedge \neg \underset{z}{\exists} z \neq x \wedge z \neq y \wedge x \leq z \leq y$

Beispiel: Teilt-Relation $\{a, b \in \mathbb{N}_{12} | a * n = b\}$



Zu lesen zum Besipiel rechter Ast, 4 teilt 8, 2 teilt 4, daher teilt auch 2 die 8.

Induktionsbeweis

1. Induktionsanfang, $A_n[1]$ ausrechnen. n auf kleinsten Wert setzen (0 oder 1)
2. Induktionsanahme, $\overline{n}$ bliebig aber fix wählen. Nochmal hinschreiben!
3. Induktionsabschluss. (n+1). Entweder in linke ODER rechte Seite von Anahme mit n+1.Umformen, so dass die Anahme wieder auftaucht und mit anderem Teil der Anahme ersetzen.

Beispiel:

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2}, \mathbb{N}$

1. Anfang, $n = 1 \rightsquigarrow 1 = 1$ wahr
2. Anahme, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2}$
3. Induktionsabschluss $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$, jetzt $\sum_{i=1}^{n} i$ gleich mit Anahme oben, ersetzen mit rechter Seite von Anahme. $= \frac{n*(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)*(n+2)}{2}$