



# ASZTRODINAMIKA

Illés Gergely Levente

Illés Gergely Levente  
Janus Pannonius Gimnázium  
illesgergelypecs@gmail.com

2. kiadás, 2022

Fedélfotó: Apollo 11 lifts off for its historic mission to the Moon

Felhasznált irodalom és illusztrációk:

<https://en.wikipedia.org>

<https://hu.wikipedia.org>

<https://wiki.kerbalspaceprogram.com>

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/termesztudomanyok/fizika>

NAT2020 OH-FIZ910TB/I, ISBN 978-615-6256-14-0



# TERMINOLÓGIA

## ÉGITESTEK KERINGÉSÉNEK LEÍRÁSA I.

### Vonatkoztatási sík (*reference plane*)

Az égi mechanikákban a vonatkoztatási síkot a keringés elemeinek leírásánál használják. A két fő keringési elem, amit a vonatkoztatási síkhoz mérnek az inklináció és a felszálló csomó hossza. A leírandó testtől függően különböző viszonyítási síkokat használhatunk:

- **Ekliptika:** Az ekliptika a Nap egy év alatt megtett látszólagos útja az égbolton. A naprendszeren belül általánosságban ez használandó, hiszen a keringő testek pályája általában ezen a síkon helyezkedik el.
- **Egyenlítői sík:** Az egyenlítői síkot műholdak keringésénél használják, melyek keringésének fél nagytengelye relatív alacsony
- **Laplace sík:** A helyi Laplace sík műholdak keringésénél, melyek keringési fél nagytengelye közepes vagy nagyméretűnek mondható

### Csomók (*orbital nodes*)

A felszálló csomó ( $\Uparrow$ ) egy égitest pályájának egyik kitüntetett pontja, ahol az égitest pályája metszi a vonatkoztatási síkot. A másik metszési pont a leszálló csomó ( $\Downarrow$ ). A felszálló és leszálló csomót összekötő vonal neve a csomóvonal, amely másképpen fogalmazva a vonatkoztatási sík és a pályasík metszésvonala.

### Orbit normal

Egy normál vektor a keringési sík része. Az égitest sebessége és gravitáció keresztbe szorzásának eredménye. Egy test, amely az óramutató járásával megegyező irányban kering, egy másik égitest körül kering, az égitest szemszögéből nézve az lefele mutat, másképpen jelölve „Anti-Normal”, „Dél” vagy „N-”. Ellenkező esetben, ha a test az óramutató járásával ellentétes irányban kering, akkor az égitest szemszögéből nézve az felfele mutat, másképpen jelölve „Normal”, „Észak” vagy „N+”.

### Keringési sebesség (*orbital speed*)

A keringési sebessége egy keringő testnek az a sebessége, amellyel kering a rendszer tömegközéppontja (*angolul: barycenter*) körül. A keringési sebesség lehet az átlagsebesség, amellyel teljesít egy teljes keringést vagy a pillanatnyi sebességét jelölheti.

### Prográd / retrográd mozgás

Retrográd (*angolul: retrograde*) mozgásnak nevezzük az égitest olyan mozgását, ami az adott rendszerben lévő legtöbb égitest mozgásával ellentétes irányú. Ellentéte a prográd (*angolul: prograde*) (vagy direkt) mozgás, ami a szokásos, nem rendhagyó irányban történő mozgást jelöli. A mozgás vonatkozhat a test saját tengelye körüli forgására, vagy egy másik égitest körüli keringésére. Az első esetben retrográd forgásról, a másik esetben retrográd keringésről beszélünk.

### Csillagászati periódus (*Sidereal period*)

A csillagászati (vagy sziderikus) periódus az az idő intervallum, ami alatt egy keringő test egy teljes keringést teljesít a csillagokhoz vonatkoztatva.

### Szinodikus periódus (*Synodic period*)

A szinodikus periódus az az idő intervallum, ami szükséges ahhoz, hogy egy égitestről nézve a másik égitest ugyanott megjelenjen egy másik égitest segítségével. (Pl.: Amikor a Hold, a Naphoz viszonyítva, a Földről vizsgálva visszatér ugyanazon megvilágítottsági pontjára, akkor teljesítve egy szinodikus periódust)

# TERMINOLÓGIA

## ÉGITESTEK KERINGÉSÉNEK LEÍRÁSA II.

### Apszispontok

**Apoapszis** – egy égitest pályájának azon a pontját jelenti, amely a központi égitesthez legtávolabb található

$$r_a = Ap + R \quad \text{ahol } r_a \text{ az apoapszis sugara, } Ap \text{ a felszíntől az égitesthez mért maximális távolság és } R \text{ az égitest sugara}$$

**Periapszis** – egy égitest pályájának azon a pontját jelenti, amely a központi égitesthez legközelebb található

$$r_p = Pe + R \quad \text{ahol } r_p \text{ az periapszis is sugara, } Pe \text{ a felszíntől az égitesthez mért minimális távolság és } R \text{ az égitest sugara}$$

### Fél-tengelyek

A nagytengely az ellipszis legnagyobb átmérője, amely az ellipszis két csúcsa között áthalad a középponton és mindkét fókuszpontra. A fél nagytengely az ennek a fele.

A fél nagytengely közvetlen kapcsolatban áll az ellipszis excentricitásával ( $e$ ), a fél kistengellyel ( $b$ ) és a fókuszpontra átmenő, nagytengelyre merőleges húrnak a felével (angolul: *semi-latus rectum*) ( $\ell$ ).

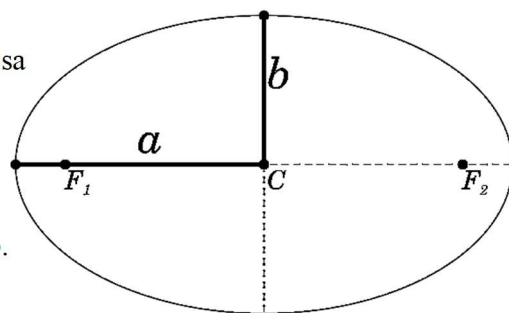
$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$\ell = a(1 - e^2)$$

$$a\ell = b^2$$

A fél nagy tengely a közepes értéke az apoapszisnak ( $r_a$ ) és a periapszisnak ( $r_p$ ).

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$



### Excentricitás

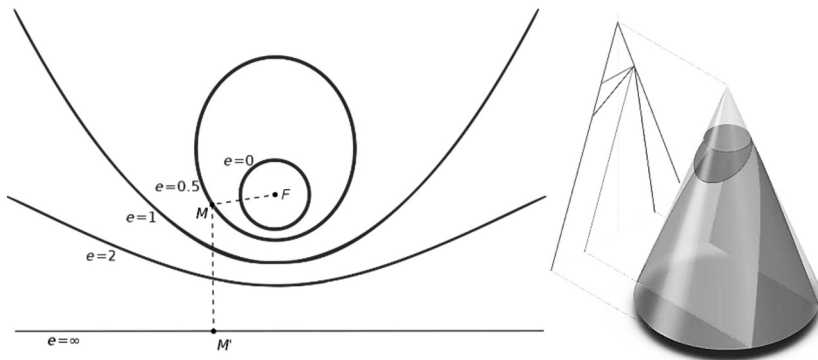
Jelölése:  $e$

Matematikában egy kúpszelet excentricitása egy nem-negatív valós szám, amely leírja annak alakját.

Az excentricitás megmutatja, hogy egy kúpszelet mennyire tér el attól, hogy kör legyen.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow r_p = a(1 - e), \quad r_a = a(1 + e)$$



### Excentricitás vektor

Jelölése:  $\vec{e}$

Égi mechanikákban az excentricitás vektor egy Kepleri pályán egy dimenzió nélküli vektor, ami az apoapszistól a periapszisba mutat. Nagysága egyenlő a pálya skaláris excentrikusságával. Kepleri pályákon az excentricitás vektor egy állandó mozgás.

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \left( \frac{|\vec{v}|^2}{\mu} - \frac{1}{|\vec{r}|} \right) \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{\mu} \vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}$$

ahol  $\vec{r}$  a pozíció vektor,  $\vec{v}$  a sebesség vektor,  $\vec{h}$  a fajlagos perdület ( $\vec{h} = \vec{r} \cdot \vec{v}$ ) és  $\mu$  a standard gravitációs paraméter

**Periapszis szöge** (*argument of periapsis*)Jelölése:  $\omega$ 

A periapszis szöge megmutatja a szöget a keringő test felszálló csomójától ( $\mathcal{Q}$ ) a periapszisáig a haladás irányában.

Ha a periapszis szöge  $0^\circ$ , az azt jelenti, hogy a keringő test a legközelebb lesz a központi testtől, amikor az átlépi a vonatkoztatási síkot (pl.: egyenlítő: Dél  $\rightarrow$  Észak). Ha a periapszis szöge  $90^\circ$ , az azt jelenti, hogy a keringő test akkor éri el a periapszist, amikor az a legtávolabb van a vonatkoztatási síkhoz képest.

$$\omega = \cos^{-1} \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{|\vec{n}| |\vec{e}|}$$

ha  $e_z < 0$  akkor  $\omega \rightarrow 2\pi - \omega$

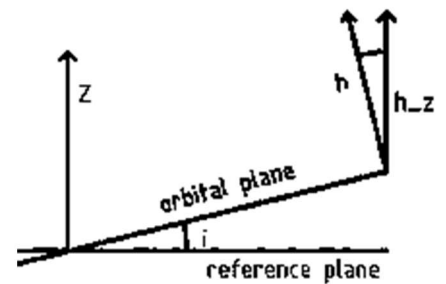
ahol  $\vec{n}$  egy vektor, ami a felszálló csomó fele mutat ( $\vec{n}$  z-komponense nulla) és  $\vec{e}$  excentricitás vektor (ami a periapszis irányába mutat)

**Inklináció** (*vagy pályahajlás*)Jelölése:  $i$ 

Az inklináció az égitest a vonatkoztatási síkkal bezárt szöge.

$$i = \cos^{-1} \frac{\vec{h}_z}{|\vec{h}|}$$

ahol  $\vec{h}$  a keringés perdület vektora és ahol  $\vec{h}_z$  a z-komponense a  $\vec{h}$ -nak

**Valódi anomália** (*true anomaly*)Jelölése:  $\nu$  vagy  $\theta$  vagy  $f$ 

Égi mechanikákban a valódi anomália egy szög paraméter ami megmutatja egy Kepleri pályán haladó test pozícióját.

$$f \in [0^\circ; 360^\circ] \text{ vagy } f \in [0; 2\pi]$$

Ahogy az ábra ( $\rightarrow$ ) mutatja a valódi anomália  $f$  az egyik szög paraméter (anomália) ami megmutatja a pozíciót egy pálya körül. A másik kettő az excentricitás anomália ( $E$ ) és a közepes anomália.

Elliptikus pályákra a valódi anomália  $f$  kiszámolható a keringési állapot vektorokból:

$$f = \cos^{-1} \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{|\vec{e}| |\vec{r}|}$$

ha  $\vec{r} \cdot \vec{v} < 0$  akkor  $f := 2\pi - f$

ahol  $\vec{v}$  a keringési sebesség vektor,  $\vec{e}$  az excentricitás vektor és  $\vec{r}$  a keringési pálya pozíció vektora (ábrán az  $\overline{FP}$  szakasz)

Ha  $e = 0$ :

Ilyenkor a valódi anomália nincs definiálva, mert a körpályáknak nincs olyan pontja amit a periapszisának mondhatunk. Ilyenkor a hosszúság szögét (*angolul: argument of latitude*)  $u$ -t használjuk

$$u = \cos^{-1} \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}| |\vec{r}|}$$

ha  $r_z < 0$  akkor  $u := 2\pi - u$

ahol  $\vec{n}$  egy vektor, ami a felszálló csomó fele mutat ( $\vec{n}$  z-komponense nulla) és  $\vec{r}_z$  a keringés pozíció vektorának ( $\vec{r}$ ) z-komponense.

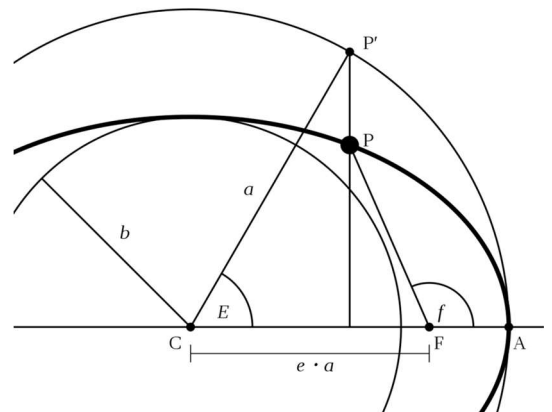
Ha  $e = 0$  és  $i = 0$ :

Ilyenkor a hosszúság szöge sincs definiálva, ilyenkor a valódi hosszúságot használjuk

$$l = \cos^{-1} \frac{\vec{r}_x}{|r|}$$

ha  $\vec{v}_x > 0$  akkor  $l := 2\pi - l$

ahol  $\vec{r}_x$  a keringés pozíció vektorának ( $\vec{r}$ ) x-komponense és  $\vec{v}_x$  a keringés sebesség vektorának ( $\vec{v}$ ) x-komponense.



A P pont valódi anomáliája az  $f$  szög. Az ellipszis közepe a C pont és a fókusz az F pont

Excentrikusság anomáliából ( $E$ ) számolva:

$$f = 2 \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right)$$

vagy

$$f = E + 2 \cos^{-1} \left( \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \sin E} \right) \text{ ahol } \beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$$

Közepes anomáliából ( $M$ ) számolva:

Fourier-sorral kiszámolva

$$f = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-ke) \beta^{|k+n|} \right] \sin kM$$

Bessel függvényvel ( $J_n$ ) és ahol paraméter  $\beta = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}$

Kihagyva az  $e^4$ -nél nagyobb hatványokkal ( $O(e^4)$ -el jelezve) ahol  $e \approx 0$ :

$$f = M + \left( 2e - \frac{1}{4}e^3 \right) \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M + O(e^4)$$

Sugár a valódi anomáliából számolva:

$$r = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos f}$$

ahol  $a$  a fél nagytengely

### Excentricitás anomália (*eccentric anomaly*)

Az égi mechanikában az excentricitás anomália egy szög paraméter ami megmutatja egy test pozícióját, ami egy elliptikus Kepleri pályán mozog.

#### Kiszámítása

$$r = a(1 - e \cos E)$$

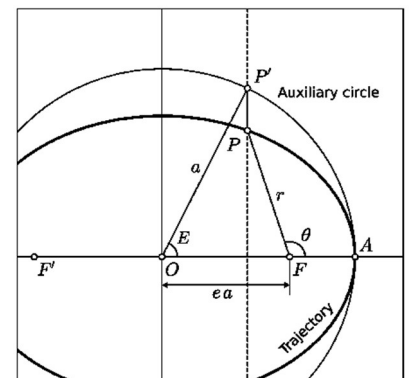
#### Valódi anomáliából

$$\tan E = \frac{\sin E}{\cos E} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin f}{e + \cos f}$$

#### Közepes anomáliából

$$E = M + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(ne)}{n} \sin(nM)$$

ahol  $J_n$  a Bessel-függvény első változata



A P pont excentricitás anomáliája az  $E$  szög. Az elliptikus közepe az  $O$  pont és a fókuszpontja az  $F$  pont

### Közepes anomália (*angolul: mean anomaly*)

Az égi mechanikában a közepes anomália az elliptikus pálya keringési periódus és az azóta „eltelt távolság” szögben kifejezve.

Legyen  $T$  az az idő ami szükségesleltetik egy teljes keringési periódus teljesítéséhez. Időben  $T$  a sugár vektor ami  $2\pi$  radiánig megy (*sweeps*).

Az átlagos ideje ennek (*rate of sweep*)  $n$ , akkor:

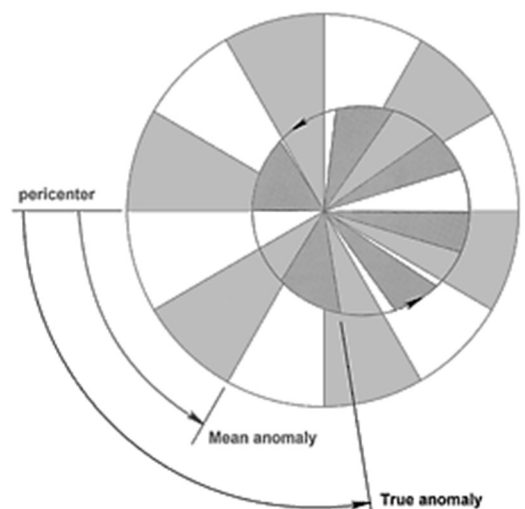
$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{360^\circ}{T}$$

amit közepes szögsebességnek hívnak.

Legyen  $\tau$  az az idő amikor a test a pericenter van. A fentebbi definíciók alapján az új mennyiség,  $M$ , a közepes anomália definiálható:

$$M = n(t - \tau)$$

ami megadja a szögtávolságot a pericenter egy tetszőleges időben ( $t$ ) szögben vagy radiánban.



A közepes anomália kiszámolható az excentricitás anomáliából ( $E$ ) és az excentricitásból ( $e$ ) a Kepler-egyenlettel:

$$M = E - e \sin E$$

Legyen  $\varpi$  a pericenter hossza, azaz a pericenter szögtávolsága vonatkoztatási pont irányától

Legyen  $\ell$  a közepes távolság, azaz a test szögtávolsága ugyanazon vonatkoztatási ponttól nézve, feltételezve, hogy egységes szögsebességgel mozog

$$M = \ell - \varpi$$

Közepes szögsebesség kifejezhető:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

ahol  $\mu$  a standard gravitációs paraméter és  $a$  a fél nagytengely, azaz:

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau)$$

**A felszálló csomó hossza** (*longitude of the ascending node*)

Jelölése:  $\Omega$  vagy  $\Omega$

A felszálló csomó hossza az a szög amely a vonatkoztatási irányból (angolul: reference direction) ered és a felszálló csomó irányába mutat. A felszálló csomó hossza kiszámítható a fajlagos relatív perdület vektorból (angolul: specific relative angular momentum) ( $\vec{h}$ ):

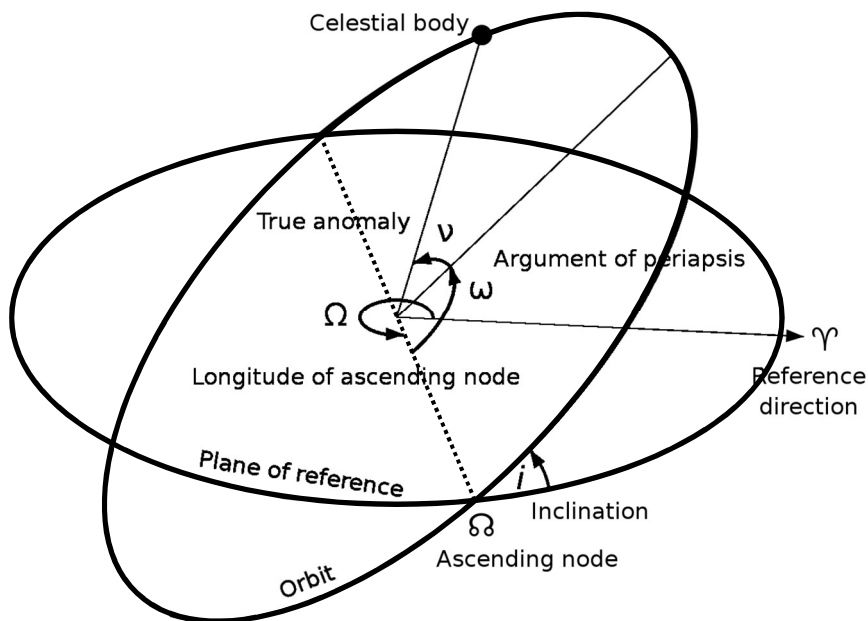
$$\vec{n} = \vec{k} \cdot \vec{h} = (-h_y, h_x, 0)$$

$$\Omega = \begin{cases} \cos^{-1} \frac{n_x}{|\vec{n}|}, & n_y \geq 0 \\ 2\pi - \cos^{-1} \frac{n_x}{|\vec{n}|}, & n_y < 0 \end{cases}$$

ahol  $\vec{n} = \langle n_x, n_y, n_z \rangle$  vektor ami felszálló csomó fele mutat. A vonatkoztatási sík feltételezve egy  $xy$ -sík, és a

hosszúság eredete egy pozitív az  $x$ -tengelyen.  $\vec{k}$  egy egység vektor  $(0, 0, 1)$  ami egy normál vektor az  $xy$ -síkon.

Olyan keringésekre, ahol  $i = 0$ ,  $\Omega$  definiálatlan, ilyenkor egyezmény alapján  $\Omega = 0$ , ami megfelel annak, hogy  $\vec{n}$  pont az  $x$ -tengelyre mutat.



A keringés elemeinek ábrája

# ORBITÁLIS MECHANIKÁK

## KETTŐ-TEST PROBLÉMÁK FAJTÁI EXCENTRIKUSSÁG ALAPJÁN

### Körpályák

A körpálya a legegyszerűbb fajta keringési pálya. A keringő test a rendszer tömegközéppontjához képest állandó távolságban van, azaz a pályája kör alakú

#### Általános jellemzése

$$e = 0$$

$$v, \omega, r, E_h, E_m = \text{állandó}$$

nincs apoapszis, se periapszis

#### Gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

ahol  $v$  a keringési sebesség,  $r$  a pálya magassága és  $\omega$  pedig a szögsebesség radián per egységnyi időben.

#### Keringési sebesség

$$v = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

ahol  $\mu$  a standard gravitációs paraméter,  $r$  a bolygók közötti távolság és  $M_1$  és  $M_2$  a két test tömege

#### Szögsebesség és keringési periódus

$$\text{mivel } \omega^2 r^3 = \mu \text{ ezért } T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}}$$

#### Energia

A *vis-viva energia* negatív és

$$\varepsilon = -\frac{v^2}{2}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2r}$$

Ebből az következik, hogy a *virialtétel* alkalmazható idő-átlag nélkül.

### Elliptikus pályák

Olyan Kepleri pálya amely excentricitása kisebb mint 1, de nagyobb, mint 0, azaz  $e \in ]0; 1[$ .

#### Keringési sebesség

A keringési sebesség a *vis-viva egyenlettel* kiszámolható:

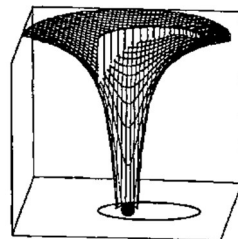
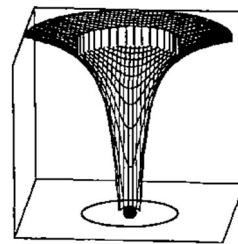
$$v = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

ahol  $\mu$  a standard gravitációs paraméter ( $\mu = G(M_1 + M_2)$ ),  $r$  a távolság a keringő test és a rendszer tömegközéppontja között és  $a$  a fél nagytengely

#### Keringési periódus

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

ahol  $\mu$  a standard gravitációs paraméter és  $a$  a fél nagytengely





Energia

Azzal a feltételezés mellett, hogy a *vis-viva energia* ( $\varepsilon$ ) negatív és, hogy a *vis-viva egyenlet* a következő alakot fel tudja venni:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} = \varepsilon < 0$$

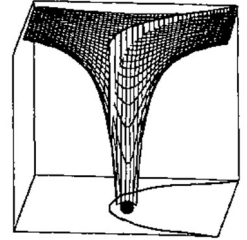
ahol  $v$  a keringési sebesség,  $r$  a távolság a központi test közepétől,  $a$  a fél nagytengely és  $\mu$  a fél nagytengely.

Energia a fél nagytengellyel kifejezve:

$$E = -G \frac{M_1 M_2}{2a}$$

Parabolikus pályák

Olyan Kepleri pálya, mely excentrikussága 1 ( $e = 1$ ). Amikor a központi test felé mozgunk, akkor elfogó pályán (*angolul: capture orbit*) van az üreszköz, ellenkező esetben szökési pályán (*angolul: escape orbit*) van.

Sebesség

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

ahol  $r$  a távolság a keringő test és a központi test tömegközéppontja között és  $\mu$  a standard gravitációs állandó

A mozgás egyenlete (*angolul: Equation of motion*)

$$r = \frac{h^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + \cos f}$$

ahol  $r$  a távolság a keringő test és a központi test tömegközéppontja között,  $h$  a keringő test *fajlagos perdülete*,  $f$  a keringő test valódi anomáliája és  $\mu$  a standard gravitációs paraméter

Energia

Azzal a feltételezéssel, hogy a parabolikus pályán haladó test *vis-viva energiája* 0:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0$$

ahol  $v$  a keringés sebessége,  $r$  a távolság a keringő test és a központi test tömegközéppontja között és  $\mu$  a standard gravitációs paraméter

Barker-egyenlet

A Barker-egyenlet összefüggésbe hozza a keringés idejét ( $t$ ) a valódi anomáliával ( $f$ ) egy parabolikus pályán.

$$t - T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \left( D + \frac{1}{3} D^3 \right)$$

ahol  $D = \tan \frac{f}{2}$  egy segédváltozó,  $T$  az periapszis áthaladás ideje (time of periapsis passage),  $\mu$  a standard gravitációs potenciál és  $p$  a fókuszon átmenő, nagytengelyre merőleges húr a fele ( $p = h^2 / \mu$ )

Általánosítva az idő a parabolikus pálya bármely két pontja között:

$$t_f - t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \left( D_f + \frac{1}{3} D_f^3 - D_0 - \frac{1}{3} D_0^3 \right)$$

**Hiperbolikus pályák**

A hiperbolikus pálya excentrikussága nagyobb, mint 1 ( $e > 1$ )

Standard gravitációs paraméter

$$\mu = \frac{v^2}{2/r - 1/a}$$

Excentrikusság ( $e > 1$ )

$$e = \frac{\ell}{r_p} - 1$$

Fél nagytengely ( $a < 0$ )

$$a = \frac{1}{2/r - v^2/\mu}$$

Fél kistengely

$$b = -a\sqrt{e^2 - 1}$$

Periapszis távolsága

$$r_p = -a(e - 1)$$

Vis-viva energia

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

Fajlagos perdület

$$h = \sqrt{\mu\ell}$$

Sebesség

Vis-viva egyenlettel:

$$v = \mu(2/r - 1/a) = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

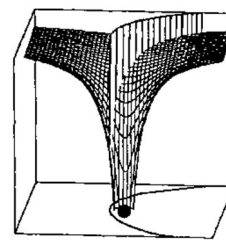
Fókuszon átmenő, nagytengelyre merőleges húr a fele (semi-latus rectum)

$$l = a(e^2 - 1)$$

Pozíció

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos f}$$

ahol  $f$  a valódi anomália,  $e$  az excentrikusság és  $r$  a távolság a két test között

**Pálya süllyedés (orbital decay)**

A pálya süllyedése alatt a két test közötti távolság időszakos csökkenését értjük sok keringési periódus alatt.

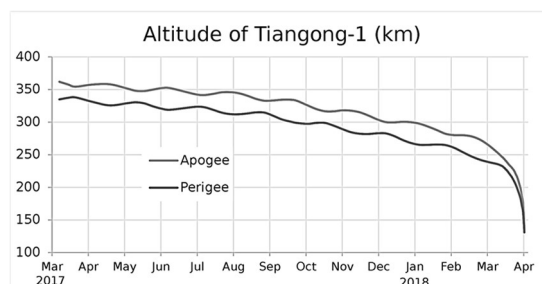
A pálya süllyedés elsődleges forrása a légköri ellenállás. Az egyszerűsített modell egy közel körpálya alakú pályára írható fel. Ahol központi égitest légkörrel rendelkezik. Az egyszerűsített modell megmutatja a keringési magasság változásának sebességét:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\alpha_0(R) \cdot T(R)}{\pi}$$

ahol  $R$  a távolság az űrhajó és a központi bolygó tömegközéppontja között,  $\alpha_0$  az űrhajóra ható gyorsulások összege (ez általában egy függvény a magasság értelmében, hisz a közegellenállás nagysága a magasságtól függően változik) és  $T$  a Kepleri periódus függvénye a magasság értelmében.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \rho(R) v^2 c_d \frac{A}{m}$$

ahol  $\rho(R)$  az adott magasságban a légkör sűrűsége,  $v$  a keringés sebessége,  $A$  a test homloklapfelülete,  $m$  az űrhajó tömege és  $c_d$  a test alakú együtthatója az alakú és felületi súrlódást beleszámolva

**Pálya egyenlet (Orbit equation)**

Az asztrodinamikában a pálya egyenlet meghatározza a pályáját egy testnek – melynek tömege  $m$  – ami egy nagyobb égitest körül – melynek tömege  $M$  – anélkül, hogy a pozíciót az idő értelmében adnánk meg.

Nézzük meg az általános két-test rendszert, melynek központi égitest tömege  $M$  és egy sokkal kisebb testet, ami kering a központi égitest körül (melynek tömege  $m$ ). Polárkoordináta-rendszerben a következő egyenlet írható fel:

$$r = \frac{\ell^2}{m^2 \mu} \cdot \frac{1}{1 + e \cos f}$$

ahol  $r$  a távolság a két test között,  $f$  a valódi anomália,  $\ell$  a specifikus perdület ( $\ell = m r^2 \dot{f}$ ),  $\mu$  a standard gravitációs paraméter ( $-GM$ ),  $e$  a pálya excentricitása, ami egyenlő a következő egyenlettel:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m^3\mu^2}}$$

ahol  $E$  a pálya energiája

**Egyenes vonalú pálya** (*radial trajectory*)

Egyenes vonalú pályának nevezzük az égi mechanikában azon pályákat, melyeknek perdülete nulla. Két test ilyenkor egyenes vonalban közelítik egymást.

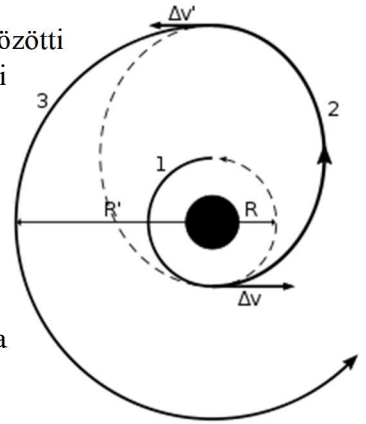
**Hohmann-transzfer pálya**

Energia-felhasználás szempontjából két, azonos síkban lévő, kör alakú keringési pálya közötti leghatékonyabb (időtartam szempontjából azonban a leghosszabb) átmeneti pálya az égi mechanikában. A művelet során mindössze kétszer kell az űrhajó meghajtását igénybe venni: először a kisebb sugarú körpálya elhagyásakor, amikor az űrhajó a körpályáról elliptikus pályára tér át, majd az ellipszis nagyobbik sugaránál, ahol az ellipszis a nagyobb körpályát érinti, és az űrhajó az elliptikus pályáról a nagyobb kör alakú pályára tér át. Az ellipszis alakú átmeneti pálya egyik érintője a kisebb, a másik érintője a nagyobb sugarú pályánál van.

Egy nagyobb test körül keringő kisebb test teljes energiája a mozgási energia és a potenciális energia összege

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{-GMm}{2a}$$

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$



A Hohmann-pálya eléréséhez szükséges delta-v ( $\Delta v$ ) számítása (az azonnali impulzus esetére):

$$\Delta v = \sqrt{\frac{\mu}{R}} \left( \sqrt{\frac{2R'}{R+R'}} - 1 \right)$$

$$\Delta v' = \sqrt{\frac{\mu}{R'}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2R}{R+R'}} \right)$$

ahol  $R$  és  $R'$  az indulási és az érkező körpályák sugarai a bolygó tömegközéppontjától viszonyítva

Kepler III. törvénye szerint a két pálya közötti átmenet ideje:

$$t_H = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 a_H^3}{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8\mu}}$$

a keringési periódus fele az ellipszisen, ahol  $a_H$  a fél nagytengelye a Hohmann-pályának

**Fél-elliptikus transzfer** (*Bi-elliptic transfer*)

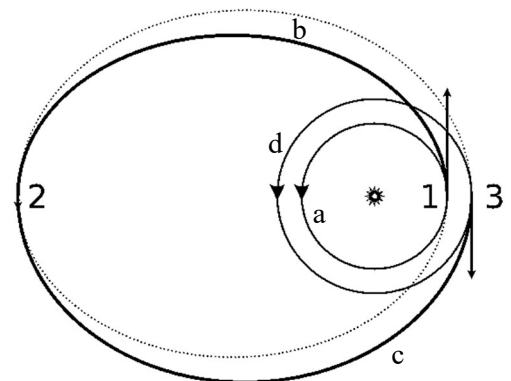
A Fél-elliptikus transzfer, amely megváltoztatja az űrhajó pályáját. Egyes szituációkban kevesebb  $\Delta v$ -t igényel, mint a Hohmann transzfer.

Delta-v

*Vis-viva egyenlettel:*

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

ahol  $v$  a keringési sebesség,  $\mu$  a standard gravitációs paraméter,  $r$  a pályamagasság a központi test középpontjából és  $a$  a keringés fél nagytengelye.



A következőkben:

- $r_1$  a kiindulási körpálya sugara
- $r_2$  a kívánt magasságú körpálya sugara
- $r_b$  a két sugár közös apszis sugara, szabad paraméter a manőverben
- $a_1$  és  $a_2$  a fél nagytengelyei a két ellipszis alakú transzfer pályának, melyek:

$$a_1 = \frac{r_1 + r_b}{2}$$

$$a_2 = \frac{r_2 + r_b}{2}$$

Egy körpályáról indulva (ábrán a), melynek sugara  $r_1$  egy prográd égetést végzünk egy ponton (ábrán 1) ami egy elliptikus pályára rakja az űrhajót (ábrán b). Az első égetés magnitúdója:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a_1}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

Amikor az első transzfer pálya apoapszisát elérjük – mely sugara  $r_b$  – prográd égetést végzünk (ábrán 2), ami fölemeli a pálya periapszisát a kívánt magasságra. Az új pálya szintén ellipszis alakú (ábrán c). A második égetés magnitúdója

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_b} - \frac{\mu}{a_2}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_b} - \frac{\mu}{a_1}}$$

Végül, amikor elérjük a pálya periapszisát, égetést végzünk retrográd irányban (ábrán 3) amivel a pályát körpályává módosítja (ábrán d). A végső égetés magnitúdója:

$$\Delta v_3 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_2} - \frac{\mu}{a_2}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}$$

Ha a kívánt új magasság és az első transzfer magassága egyenlő (azaz  $r_b = r_2$ ), akkor a manőver leegyszerűsül a Hohmann-transzferre ( $\Delta v_3$  ilyenkor nullának tekintendő).

### Transzfer idő

Fentiekből a keringési periódus:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

a teljes transzfer idő így a két fél ellipszis bejárására szükséges idők összege, vagyis

$$t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{\mu}} \quad \text{és} \quad t_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a_2^3}{\mu}}$$

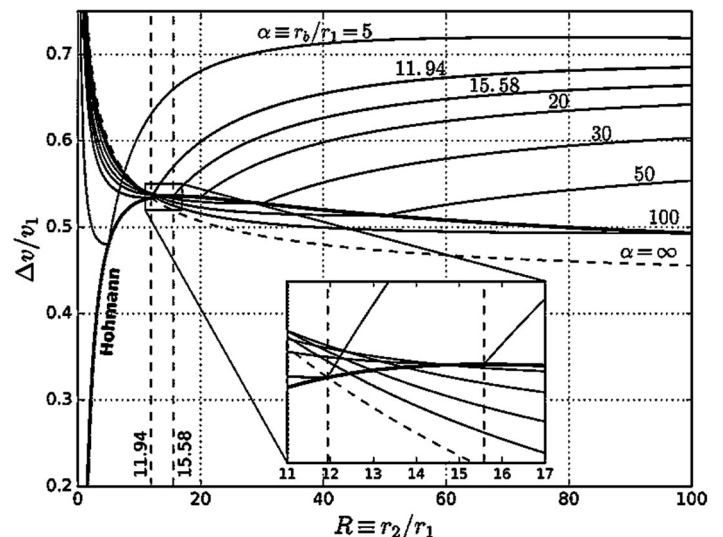
végül:  $t = t_1 + t_2$

### Fél-elliptikus- vagy Hohmann-transzfer?

Legyen  $R$  a vég- és kiindulási sugarak közötti arány ( $R \equiv r_2/r_1$ ) és  $\alpha$  a fél-elliptikus apoapszis sugarának és a kiindulási sugár közötti arány ( $\alpha \equiv r_b/r_1$ ).

A diagramm alapján belátható, hogy a Hohmann-transzfer mindig hatékonyabb (kevesebb  $\Delta v$ ), ha a sugarak aránya,  $R$  kisebb, mint 11,94. Az is belátható, hogy ha a végső pálya sugara legalább 15,58-szor akkora, mint a kiindulási sugara, akkor minden fél-elliptikus transzfer pálya hatékonyabb, független az apoapszisa sugarától.

A 11,94 és 15,58 arányszámok között, hogy melyik transzfer változat a jobb, arról az  $r_b$  dönt. Bármely  $R$ -re igaz ebben az intervallumban, hogy van olyan  $r_b$ , mely fél-elliptikus transzferrel hatékonyabb, mint Hohmann-transzferrel



# ORBITÁLIS MECHANIKÁK

## ASZTRODINAMIKAI EGYENLETEK

### Dinamikus surlódás (Chandrasekhar-surlódás)

Az asztrofizikában a dinamikus surlódás vagy Chandrasekhar-surlódás vagy gravitációs surlódás a lendület és a mozgási energia veszteség, amit a testek interakciója az anyaggal a térben okoz a mozgása során.

Chandrasekhar dinamikus surlódás egyenlet

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = -16\pi^2 (\ln \Lambda) G^2 m(M+m) \frac{1}{v_M^3} \int_0^{v_M} v^2 \cdot f(v) \cdot dv \cdot \vec{v}_M$$

ahol  $G$  a gravitációs állandó,  $M$  a kérdéses test tömege,  $m$  a napok tömege az egyes elosztásban,  $v_M$  a kérdéses test sebessége,  $\ln(\Lambda)$  a Coulomb logaritmus és  $f(v)$  a napok számszerű eloszlása.

Maxwell-disztribúció

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{4\pi \ln(\Lambda) G^2 \rho M}{v_M^3} \left[ \operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right] \vec{v}_M$$

ahol  $X = v_M/(\sqrt{2}\rho)$  a kérdéses test sebessége és a modális sebesség aránya a Maxwelli disztribúcióban,  $\operatorname{erf}(X)$  a Gauss-féle hibafüggvény és  $\rho = mN$  az anyag mező sűrűsége

Leegyszerűsítve:

$$F_{dyn} \approx C \frac{G^2 M^2 \rho}{v_M^2}$$

ahol  $C$  egy dimenzió nélküli faktor amiben, a  $v_M$  a környező anyagok viszonyított sebességétől függ.

### Kozmikus sebesség

Az Első kozmikus sebesség vagy körsebesség az a legkisebb sebesség, amellyel egy űreszköz az égitest körüli körpályára állhat, azaz nem esik vissza a felszínre. Jelölése:  $v_{K1}$

Centrifugális és gravitációs erők egyensúlyával felírva:

$$m \frac{v_{K1}^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2} \Rightarrow v_{K1} = \sqrt{G \frac{M}{R}}$$

$$g^* = \frac{G \cdot M}{R^2}, v_{K1} = \sqrt{g^* \cdot R}$$

ahol  $g^*$  az adott magasságban érvényes nehézségi gyorsulás

A Második kozmikus sebesség az az elméleti küszöbsebesség, amellyel az űreszköz el tudja hagyni az égitest gravitációs mezőjét. Akkor mozgási energiával kell rendelkeznie a testnek, mely egyenlő vagy nagyobb, mint a gravitációs helyzeti energia. Jelölése:  $v_{K2}$

$$\frac{1}{2} m v_{K2}^2 = \frac{GMm}{R} \Rightarrow v_{K2} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$$

$$v_{K2} = \sqrt{2} \cdot v_{K1}$$

A Harmadik kozmikus sebesség az az elméleti küszöbsebesség, amellyel egy űreszköz egy olyan parabolapályára tud állni, amelynek a fókuszpontjában a Nap áll. Ezen pályán haladva az űrszonda elszakad a Nap gravitációjától, és végleg elhagyja a Naprendszer, eljut a csillagközi térbe.

$$v_{K3} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

A Negyedik kozmikus sebesség az az elméleti küszöbsebesség, amelyet elérve egy űreszköz képes elszakadni a Tejútrendszerrel, és végleg kilépni az intergalaktikus térbe, eljutni más galaxisokig.

### Kepler egyenlete (Kepler's equation)

Az égi mechanikában Kepler egyenlete összefüggésbe hozza a pálya tulajdonságait a központi erővel. A központi erő az az erő, aminek iránya az erő közepe fele vagy éppen vele ellentétes irányban hat.

#### A Kepler egyenlet

$$M = E - e \sin E$$

ahol  $M$  a közepes anomália,  $E$  az excentricitás anomália és  $e$  az excentricitás

Az excentricitás anomália  $E$  hasznos lehet a pozíció kiszámítására egy Kepleri pályán. Például a periasztron koordinátái legyenek  $x = a(1 - e)$ ,  $y = 0$  a  $t = t_0$  időben, akkor ahhoz, hogy megtaláljuk a keringő test pozícióját bármely pillanatban, ahhoz ki kell számolni a közepes anomáliát ( $M$ ) a közepes mozgásból ( $n$ ) a következő egyenlettel:

$$M = n(t - t_0)$$

akkor a Kepler egyenlettel fentebb kiszámoljuk az  $E$ -t, majd a koordinátákat:

$$x = a(\cos E - e)$$

$$y = b \sin E$$

#### Hiperbolikus Kepler egyenlet

$$M = e \sinh H - H$$

ahol  $H$  a hiperbolikus excentrikusság anomália

#### Radiális Kepler egyenlet

$$t(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1-x)}$$

ahol  $t$  arányos az idővel és  $x$  arányos a távolsággal a vonzás közepétől az egyenesen.

#### Fordított Kepler egyenlet

Fourier-sor kiterjesztésével a Bessel-függvénnyel

$$E = M + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} J_m(me) \sin(mM), \quad e \leq 1, \quad M \in [-\pi; \pi]$$

A fordított Kepler egyenlet a Kepler egyenlet megoldása az  $e$  összes valós számra:

$$E = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( \frac{d^{n-1}}{d\theta^{n-1}} \left( \left( \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta - \sin \theta}} \right)^n \right) \right), & e = 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( \frac{d^{n-1}}{d\theta^{n-1}} \left( \left( \frac{\theta}{\theta - \sin \theta} \right)^n \right) \right), & e \neq 1 \end{cases}$$

### Stacionárius pálya

Stacionárius pálya vagy egyenlítői szinkron pálya az a pálya, amely magasságban keringve a körpálya keringési ideje megegyezik azzal az idővel, amellyel a bolygó egy teljes forgást végez. A keringési és a forgási irány megegyeznek. Azaz a keringő test mindig egy pont felett kering.

Egy tipikus stacionárius pálya inklinációja  $0^\circ$  és excentrikussága 0.

A következő egyenlet megmutatja a bolygó tömegközéppontjától az űreszköz pályamagasságának nagyságát.

$$r_{stac} = \sqrt[3]{\frac{\mu t^2}{4\pi^2}}$$

ahol  $\mu$  a standard gravitációs paraméter és  $t$  a bolygó forgási ideje

**Kepler I. törvénye – A bolygók pályája**

A bolygók pályája ellipszis, és annak egyik gyújtópontjában (vagy fókuszpontjában) van a Nap.

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$$

ahol  $(r, \varphi)$  a bolygók napközponú polárkoordinátái,  $\ell$  a fókuszon átmenő, a nagytengelyre merőleges húr fele (*semi-latus rectum*),  $e$  pedig az excentricitás.

$\theta = 0^\circ$  foknál a bolygó a pálya periapszisánál (perihélium) van.

$$r_p = \frac{\ell}{1 + e}$$

$\theta = 90^\circ$  és  $\theta = 270^\circ$  fokoknál a pályamagassága egyenlő a fókuszon átmenő, a nagytengelyre merőleges húr felével, azaz  $\ell$ -el.

$\theta = 180^\circ$  foknál a bolygó a pálya apoapszisánál (aphélium) van.

$$r_a = \frac{\ell}{1 - e}$$

Fél nagytengely

$$a = \frac{\ell}{1 - e^2}$$

Fél kistengely

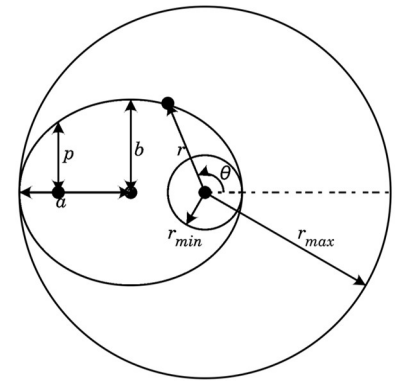
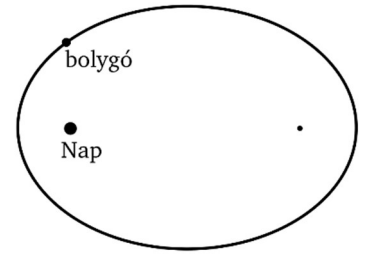
$$b = \frac{\ell}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Excentricitás

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

Ellipszis területe

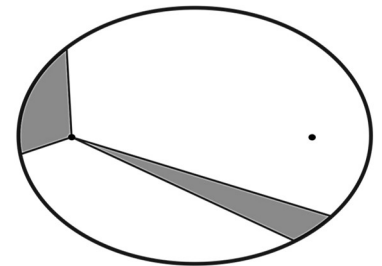
$$A = \pi ab$$

**Kepler II. törvénye – A felületi törvény**

A bolygók vezérsugara (a bolygót a nappal összekötő szakasz) azonos idő alatt azonos területet sűrol.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \right) = \text{állandó}$$

ahol  $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$  az adott (nagyon kicsi) szögelfordulás alatt sűrolt terület, ennek az idő szerinti első differenciálhányadosa a területi sebesség, ami konstans, azaz állandó.

**Kepler III. törvénye**

A bolygók keringési idejeinek  $(T_1, T_2)$  négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az ellipszispályák fél nagytengelyeinek  $(a_1, a_2)$  köbei, azaz

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

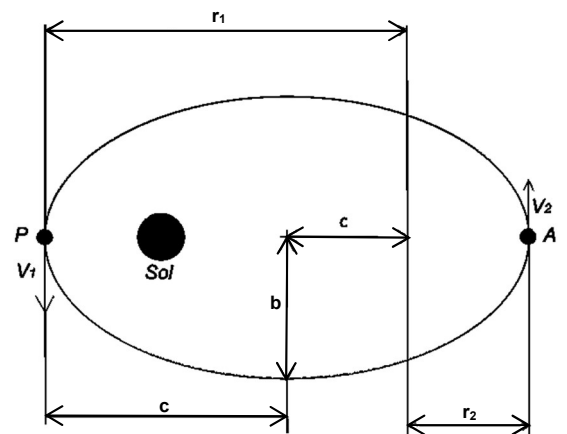
Pontos alakja

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}$$

$\mu = k^2(m_1 + m_2)$ , ahol  $k$  a Gauss-féle gravitációs állandó,  $m_1$  és  $m_2$  pedig a testek tömege

A Gauss-féle gravitációs állandó:

$$k = \frac{2\pi}{T\sqrt{1+m}}$$



Másképpen kifejezve

Newton gravitációs törvénye végett a centripetális erőt egyenlőként felírhatjuk a gravitációs erővel (körpálya esetén)

$$mr\omega^2 = G \frac{mM}{r^2}$$

Majd a szögsebességet  $\omega$  kifejezve a keringési periódussal  $T$ , majd átrendezve megkapjuk Kepler III. törvényét

$$mr \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = G \frac{mM}{r^2} \rightarrow T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 \rightarrow T^2 \propto r^3$$

**Keringési periódus (orbital period)**Fajtái

- Sziderikus / csillagászati periódus (lásd Terminológia > Égitestek keringésének leírása I.)
- Szinodikus periódus (lásd Terminológia > Égitestek keringésének leírása I.)
- Draconitikus / nodális periódus (angolul: draconitic / nodal period)

A nodális periódus az az időintervallum amely a felszálló csomón való áthaladással kezdődik, illetve ér véget.

Föld közeli műholdaknál:

$$T_{\text{nodális}} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}} \left( 1 - \frac{3J_2(4 - 5 \sin^2 i)}{4 \left( \frac{a}{R} \right)^2 \sqrt{1 - e^2} (1 + e \cos \omega)^2} - \frac{3J_2(1 + e \cos \omega)^3}{2 \left( \frac{a}{R} \right)^2 (1 - e^2)^3} \right)$$

ahol  $a$  a fél nagytengely,  $\mu$  a standard gravitációs paraméter,  $J_2$  a perturbációs tényező (mivel a föld nem tökéletes gömb alakú),  $i$  az inklináció,  $R$  a föld sugara és  $\omega$  a periapszis szöge.

- Anomalisztikus periódus (angolul: anomalistic period)

Az Anomalisztikus periódus az az időintervallum amely a periapszison való áthaladással kezdődik, illetve ér véget. A csillagászati periódussal azért különbözik, mert a test a fél nagytengelyénél lassabban halad a test.

- Tropikus periódus (angolul: tropical period)

Az az időintervallum amely akkor kezdődik és ér véget amikor a bolygó tengelyferdesége ugyanazon a ponton van.

Kis test egy központi test körül kering

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

ahol  $a$  a fél nagytengely és  $\mu$  a standard gravitációs paraméter

Homogén sűrűségű központi test

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{r^3} \cdot \frac{3\pi}{G\rho}}$$

ahol  $r$  a gömb sugara,  $a$  a pálya fél nagytengelye,  $G$  a gravitációs állandó és  $\rho$  a test homogén sűrűsége ( $kg/m^3$ )

**Keringési sebesség**Kis excentricitású pályák esetén megközelítés

$$v \approx \frac{2\pi a}{T} \approx \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

Kis excentricitású pályák esetén sebesség pontosabb megközelítéssel

$$v_o = \frac{2\pi a}{T} \left[ 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 - \dots \right]$$

Pillanatnyi keringési sebesség

$$v = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$



**Nehézségi gyorsulás** (*surface gravity*)Jelölése:  $g$ Általános képlete

$$g \propto \frac{m}{r^2} \rightarrow g = \frac{\mu}{r^2}$$

ahol  $\mu$  a standard gravitációs paraméter és  $r$  a távolság a testek közöttHomogén vagy átlag sűrűséggel számolva

$$g = \frac{4\pi}{3} G \rho r$$

ahol  $\rho$  a sűrűség,  $G$  a gravitációs állandó és  $r$  a távolság a testek közöttAdott magasságra érvényes nehézségi gyorsulás

$$g^* = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

**Vis-viva energia** (*specific orbital energy*)Jelölése:  $\varepsilon$ 

$$\text{Mértékegysége: } [\varepsilon] = \frac{MJ}{kg} = \frac{km^2}{s^2}$$

A gravitációs két-test problémában a két test vis-viva energiája a helyzeti és mozgási energiáik összege osztva a redukált tömegükkel

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{h^2} (1 - e^2) = -\frac{\mu}{2a}$$

ahol  $v$  a relatív keringési sebesség,  $r$  a testek közötti távolság,  $\mu$  a standard gravitációs paraméter,  $h$  a *fajlagos perdület* a redukált tömeg értelmében,  $e$  a pálya excentricitása és  $a$  a fél nagytengely hossza.

**Vis-viva egyenlet** (*vis-viva equation or orbital-energy-invariance law*)

A vis-viva egyenlet az egyik egyenlet amivel le lehet írni a keringő testek mozgását. A mechanikai energia megmaradás törvényének következménye.

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

ahol  $v$  a relatív sebessége a két test között,  $r$  a távolság a két tömegközéppont között,  $a$  a fél nagytengely hossza és  $\mu$  a standard gravitációs paraméter

**Standard gravitációs paraméter**Jelölése  $\mu$ Egy két-teszt rendszerben, amelyben a kisebb test tömege elhanyagolható

$$\text{Ha } M_1 \gg M_2 \rightarrow \mu = G \cdot M_1$$

Egy két-teszt rendszerben, amelyben a kisebb test tömege **nem** elhanyagolható

$$\mu = G(M_1 + M_2)$$

Általánosítva

$$\mu = G(M_1 + M_2 + \dots + M_n)$$

**Redukált tömeg**

A fizikában a redukált tömeg egy úgynevezett „hatékonyabb” tömeg a newtoni mechanika kéttest-problémáinak megoldására. Ez egy olyan mennyiség, ami által a kéttest-problémát úgy tárgyalhatjuk, mintha egytest-probléma lenne. Zárt rendszerben lejátszódó mechanikai jelenségek tárgyalásánál az általunk kiválasztott anyagi pont viszonylagos mozgását leírhatjuk egy  $\mu$  tömegű anyagi pontnak a kölcsönhatási erő hatására létrejövő mozgásával. A redukált tömeget általában  $\mu$ -vel jelöljük, tömeg dimenziója van, mértékegysége SI-ben  $kg$ .

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

# ORBITÁLIS MECHANIKÁK

## KIEGÉSZÍTŐ EGYENLETEK

### Gravitációs állandó

$$G = (6,67430 \pm 0,00015) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

### Szögelfordulás

A tömegpont által a megfigyelés ideje alatt befutott körív  $i$  és a pályasugár  $r$  hányadosa adja meg az  $i$  körívhez tartozó középponti szöget radiánban, amit szögelfordulásnak nevezünk.

$$\alpha = \frac{i}{r}$$

### Szögsebesség

Az egyenletes körmozgást végző testhez a kör középpontjából húzott sugár (vezérsugár) szögelfordulásának és a szögelfordulás idejének hányadosát szögsebességnek nevezzük.

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

### Tehetetlenségi nyomaték

A tömeggel analóg mennyiség forgómozgásnál. Vagyis a tehetetlenségi nyomaték a forgást végző merev test forgási tehetetlensége.

Jelölése:  $I$ ,  $J$  vagy  $\Theta$

Mértékegysége:  $[I] = kg \cdot m^2$

Egy tengely körül forgó tömegpont (vagy pontszerű test) skalár tehetetlenségi forgatónyomatékát az

$$I = mr^2$$

definiálja, ahol  $m$  a tömege és  $r$  a forgástengelytől mért távolság

Mozgási energiája:

$$E_m = \frac{1}{2} I \omega^2$$

ahol  $\omega$  a szögsebesség

### Perdület (*angular momentum*)

A klasszikus fizikában a perdület a forgási analógiája a lineáris lendületnek. Egy fontos fizikai mennyiség, ugyanis egy zárt rendszer perdülete állandó.

Jelölése:  $\vec{N}$  vagy  $\vec{L}$

Mértékegysége:  $[\vec{L}] = N \cdot m \cdot s$

$$L = I \omega$$

ahol  $I$  a tehetetlenségi nyomaték és  $\omega$  a szögsebesség

**Specifikus perdület** (*Specific angular momentum*)Jelölése:  $\vec{h}$ 

Az égi mechanikában egy test specifikus viszonyított perdülete a test perdülete és a test tömegének hányadosa. Két keringő égitest esetén a két égitest viszonyított pozícióinak és a viszonyított sebességeiknek vektoriális szorzata osztva a kérdéses test tömegével. A „Specifikus” ebben a kontextusban azt jelzi, hogy perdület osztva egységnyi tömeggel.

A specifikus perdület viszonyított pozíció vektor  $\vec{r}$  és viszonyított sebesség vektor  $\vec{v}$  vektoriális szorzata:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = \frac{\vec{L}}{m} = \sqrt{\ell\mu}$$

**Fókuszon átmenő, nagytengelyre merőleges húr fele** (*semi-latus rectum*)Jelölése:  $\ell$  (ell)

$$\ell = a(1 - e^2)$$

$$\ell = \frac{2r_a r_p}{r_a + r_p}$$

**Keringési pálya sötéttségének időtartamának maximuma**

A pálya sötéttségének időtartama megmutatja, hogy a keringő test mennyi ideig marad a központi bolygó árnyékában. A pontos idő függ a holdak és pálya elrendezésétől.

A legrosszabb esetre felírható egyenlet:

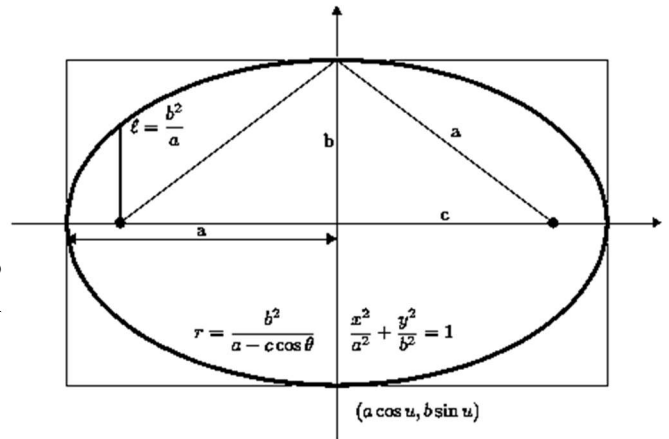
$$t_{\text{sötéttség}} = \frac{2ab}{h} \left[ \sin^{-1} \left( \frac{R}{b} \right) + \frac{eR}{b} \right]$$

ahol  $a$  a fél nagytengelye a pályának,  $b$  a fél kistengelye a pályának,  $h$  a specifikus perdület ( $h = \sqrt{\ell\mu}$ ),  $e$  a pálya excentrikussága és  $R$  a bolygó sugara

Közel körpályákra, ahol  $e$  nagyon alacsony a következőre egyszerűsíthető a fenti egyenlet:

$$t_{\text{sötéttség}} = \frac{2r_a^2}{h} \cdot \sin^{-1} \left( \frac{R}{b} \right)$$

ahol az paraméterek a fentiekben ugyanaz,  $r_a$  az apoapszis magassága a tömegközépponttól és  $h = \sqrt{r_a\mu}$

**Gyorsítás, Delta-v és az új apszispontok**

Legyen  $r_{c,1}$  és  $r_{o,1}$  a két apszispontja egy tetszőleges körpályának. Hajtson végre az űrhajó egy égetést magadott  $\Delta v$  – vel  $r_{c,1}$  ponton. Ha pozitív előjelű a tolóerő, akkor az űrhajó felgyorsul, ha negatív, akkor lelassul. A probléma feltételezi, hogy a tolóerő nagysága ugyanakkora mindkét irányban és a lassítás nem fordítja meg az űrhajó pályájának irányát. Az új körpálya apszispontjai  $r_{c,2}$  és  $r_{o,2}$  úgy, hogy  $r_{c,2} = r_{c,1}$ .

Az űrhajó sebessége a gyorsítás előtt:

$$v_1 = \sqrt{2\mu \frac{r_{c,1} + r_{o,1} - r_{c,1}}{r_{c,1}(r_{c,1} + r_{o,1})}} = \sqrt{2\mu \frac{r_{o,1}}{r_{c,1}(r_{c,1} + r_{o,1})}}$$

Az űrhajó sebessége a gyorsítás után:

$$v_2 = v_1 + \Delta v = \sqrt{2\mu \frac{r_{c,2} + r_{o,2} - r_{c,2}}{r_{c,2}(r_{c,2} + r_{o,2})}} = \sqrt{2\mu \frac{r_{o,2}}{r_{c,1}(r_{c,1} + r_{o,2})}} = \sqrt{2\mu \frac{r_{o,1}}{r_{c,1}(r_{c,1} + r_{o,1})}} + \Delta v$$

$$\Delta v = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{c,1}}} \left( \sqrt{\frac{r_{o,2}}{r_{c,1} + r_{o,2}}} - \sqrt{\frac{r_{o,1}}{r_{c,1} + r_{o,1}}} \right)$$

$$r_{o,2} = r_{c,1} \frac{r_{c,1} \left( \sqrt{2\mu \frac{r_{o,1}}{r_{c,1}(r_{c,1} + r_{o,1})}} + \Delta v \right)^2}{2\mu - r_{c,1} \left( \sqrt{2\mu \frac{r_{o,1}}{r_{c,1}(r_{c,1} + r_{o,1})}} + \Delta v \right)^2} = \frac{r_{c,1} \cdot v_2^2}{2\mu - r_{c,1} \cdot v_2^2}$$

### A keringő test energiája

$$E = \frac{\mu^2 m^3}{2l^2} (e^2 - 1) = \frac{\mu m (r_p + r_a)}{4r_p r_a} (e^2 - 1) = -\frac{\mu m}{r_p + r_a}$$

Megjegyzés: A kötött keringéseknél (amikor az  $v_{K2}$ -t nem éri el a test) az energia negatív, szökési pályákon az energia nem-negatív

### Keringési periódus

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\mu} a^3} = \sqrt{\frac{\pi^2 (r_p + r_a)^3}{2\mu}}$$

### Gravitációs potenciál

A gravitációs potenciál ( $V$ ) egy adott pontban egyenlő egy egységnyi tömeg gravitációs potenciális energiájával ( $U$ ):

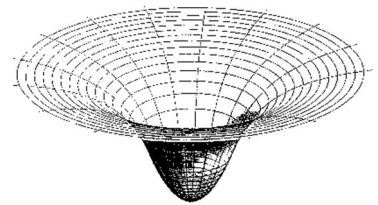
$$V = \frac{U}{m}$$

ahol  $m$  a test tömege.

Ha a test tömege 1 kilogramm, akkor a testhez hozzárendelhető potenciális energia megegyezik a gravitációs potenciállal. Tehát a potenciál úgy értelmezhető, mint a gravitációs tér által végzett negatív előjelű munka, amely egy tömegegységnek a végtelenségből való vonzásához szükséges.

Bizonyos helyzetekben az egyenletek egyszerűsíthetők egy olyan helyzet feltételezésével, amely szinte független a távolságtól. Ebben az esetben a potenciális energia különbsége két adott magasság között megközelítőleg egyenesen arányos a magasságok különbségével:

$$\Delta U \approx mg\Delta h$$



# ÉGI MECHANIKÁK

## GRAVITÁCIÓS HATÁSOK

### Egy rendszer tömegközéppontja (*barycenter*)

A csillagászatban a rendszer tömegközéppontja az a pont amely körül a rendszer tagja keringenek. A rendszer tömegközéppontja az egyik fókuszpontja a test elliptikus pályájának.

Egy egyszerű két-teszt rendszerben a nehezebb test középpontja és a rendszer tömegközéppontja közötti távolság ( $r_1$ ) kiszámolható a következő módon:

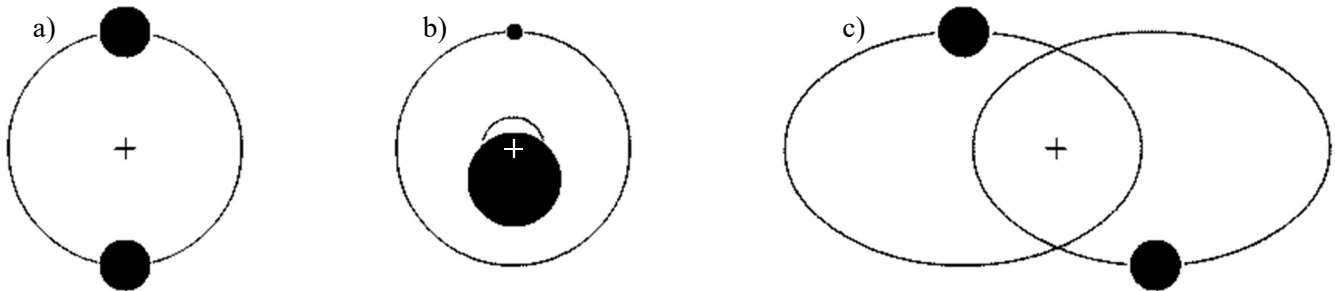
$$r_1 = a \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{a}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

ahol  $r_1$  a távolság a nehezebb test középpontja és a rendszer tömegközéppontja között,  $a$  a távolság a két test között és  $m_1$  és  $m_2$  a két test tömege

A tömegközéppont az égitesten belül vagy kívül van?

Ha  $m_1 \gg m_2$  akkor igaz, hogy a  $\frac{r_1}{R_1}$  arány a következővel megközelíthető:

$$\frac{a}{R_1} \cdot \frac{m_2}{m_1}$$



Különböző rendszerek tömegközéppontjai a): a rendszertömegközéppontjától a testek egyenlő távolságra vannak. b): A kisebb test a nagyobb körül kering, a rendszer tömegközéppontja a nagyobb testen belül van és a nagyobb test akörül kering. c): az elliptikus pályájú testek a rendszer tömegközéppontja körül keringenek

### Hill-mező (*Hill sphere*)

Egy test Hill mezeje az a mező amelyben a test központi testként viselkedik a műholdak fölött.

A Hill-mező megközelíti a kisebb test hatássugarát (*gravitational sphere of influence*) a nagyobb test perturbációinak fényében.

#### Formula

Ha a kisebb test tömege  $m$ , és egy nagyobb test körül kering, melynek tömege  $M$ , fél nagytengelye  $a$  és excentricitása  $e$ , akkor a kisebb test Hill-mező sugara  $r_H$  a következően megközelíthető:

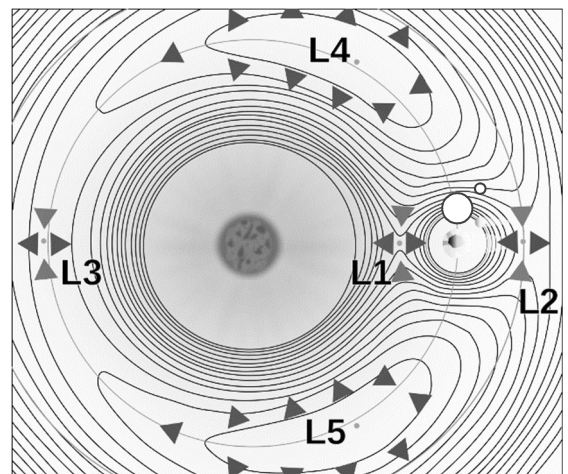
$$r_H \approx a(1 - e) \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

Ha az excentricitás elhanyagolható, akkor az egyenlet a következőre egyszerűsül:

$$r_H \approx a \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

A fentebbi egyenletet átrendezve a következőt kapjuk:

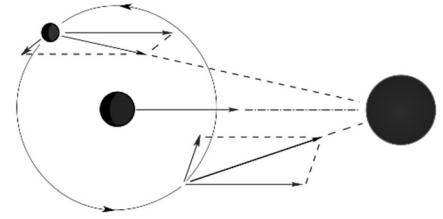
$$3 \frac{r_H^3}{a^3} \approx \frac{m}{M}$$



**Perturbáció**

A perturbáció a bolygók, üstökösök mozgásában más égitestek gravitációjának következtében jelentkező zavaró hatás.

A nap perturbációs erői a holdon (lásd ábra →)

**Hatássugár** (*Sphere of influence* vagy *SOI*)

Az asztrodinamikában és a csillagászatban a hatássugár egy szferoid alakú terület egy bolygó körül, ahol a legfőbb gravitációs befolyást végző test maga bolygó. Általában azon területek leírásánál használatos, ahol a bolygó dominálja a körülötte lévő testek pályáit (például: holdak).

Egy általánosított egyenlettel leírható egy bolygó hatássugara  $r_{SOI}$ :

$$r_{SOI} \approx a \left( \frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{5}}$$

ahol  $a$  a gél nagytengelye a kisebb testnek (általában bolygónak) a nagyobb test körül (általában Nap).  $m$  és  $M$  a kisebb és nagyobb testek tömegei (általában a bolygó és a Nap).

**Növelt pontosság**

$$r_{SOI}(\theta) \approx a \left( \frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[10]{1 + 3 \cos^2(\theta)}}$$

Kiátlagolva minden irányba a következőt kapjuk:

$$\overline{r_{SOI}} \approx 0.9431a \left( \frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{5}}$$

**Lagrange-pontok** (*librációs pontok*)

A Lagrange-pontok ( $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$ ) a csillagászatban a tér azon öt pontja, amelyben egy kis test két, egymás körül keringő nagyobb test együttes gravitációs vonzásának hatására azokhoz képest közelítőleg nyugalomban maradhat. Az ebben a pontban elhelyezett test helyzete fix marad a másik kettőhöz képest, ebből a szempontból hasonló a geostacionárius pályához.

Az  **$L_1$  pont** a két nagy tömeg  $M_1$  és  $M_2$  közötti egyenesen van, ahol az  $M_2$  gravitációs vonzása megegyezik az  $M_1$ -ével. Az  $L_1$  pont helyzete a következő egyenlet megoldása. A centripetális erőt a gravitáció biztosítja:

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} - \frac{M_2}{r^2} = \left( \frac{M_1 R}{M_1 + M_2} - r \right) \frac{M_1 + M_2}{R^3}$$

ahol  $r$  az  $L_1$  távolsága a kisebb testtől,  $R$  a távolság a két fő test között (pl.: Nap és Föld),  $M_1$  és  $M_2$  a nagyobb és a kisebb test tömegei.

A jobb oldalon a zárójelben lévő kifejezés az  $L_1$  távolsága a tömegközépponttól.

$r$ -re megoldani ötödfokú egyenletet kapunk, de ha a  $M_1 \gg M_2$  akkor az  $L_1$  és  $L_2$  pontok megközelítőlegesen egyenlő távolságra ( $r$ ) vannak a kisebb testtől és egyenlők a Hill-mező sugarával:

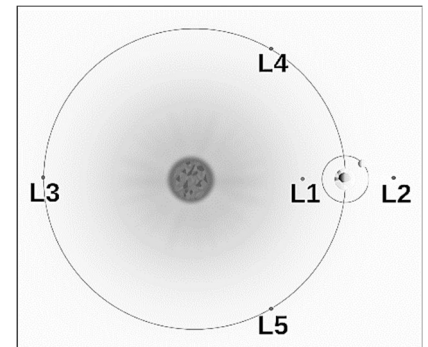
$$r \approx R \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}$$

Az  **$L_2$  pont** a két nagy tömeg közötti egyenesen található, a kisebb tömegű égitesten túl. Itt a két égitest gravitációs ereje egyensúlyba hozza a centrifugális erők hatásával, ami a vizsgált testre hat. Az  $L_2$  pont helyzete a következő egyenlet megoldása. A centripetális erőt a gravitáció biztosítja:

$$\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = \left[ \frac{M_1}{M_1 + M_2} (R+r) \right] \frac{M_1 + M_2}{R^3}$$

ahol a paraméterek megegyeznek az  $L_1$  pontnál leírtakkal, és szintén ha a  $M_1 \gg M_2$  akkor az  $L_1$  és  $L_2$  pontok megközelítőlegesen egyenlő távolságra ( $r$ ) vannak a kisebb testtől és egyenlők a Hill-mező sugarával:

$$r \approx R \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}$$



Az  **$L_3$  pont** a két nagy tömeg közötti egyenesen található, a nagyobb tömegű testen túl. Az  **$L_2$  pont** helyzete a következő egyenlet megoldása. A centripetális erőt a gravitáció biztosítja:

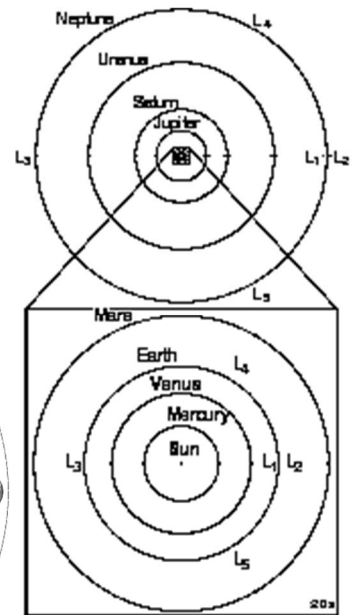
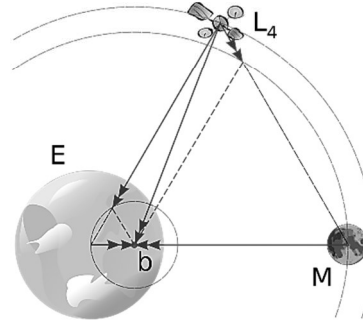
$$\frac{M_1}{(R-r)^2} + \frac{M_2}{(2R-r)^2} = \left( \frac{M_2}{M_1+M_2} R + R-r \right) \frac{M_1+M_2}{R^3}$$

ahol a paraméterek megegyeznek a fentebb leírtakkal és  $r$  az  $L_3$  hosszúsága a kisebb testtől.

ha a  $M_1 \gg M_2$  akkor:

$$r \approx R \frac{7M_2}{12M_1}$$

Az  **$L_4$  és  $L_5$  pont** egy szabályos háromszög harmadik csúcsa úgy, hogy a két égitestet összekötő egyenesre  $60^\circ$ -kal előrébb ( $L_4$ ) és hátrébb ( $L_5$ ) vannak.



# REPÜLÉSTECHNIKA

## FELSZÁLLÁS ELŐTTI TECHNIKA

### Tömeg definíciók

A rakéta teljes (*wet mass*) tömege:  $m_{teljes}$

A rakéta üzemanyagának (*propellant*) tömege:  $m_{üzemanyag}$

A rakéta száraz (*dry mass*) tömege (üzemanyag nélkül):  $m_{száraz} = m_{teljes} - m_{üzemanyag}$

A rakéta hasznos terhének (payload) tömege:  $m_{hasznos}$

### Ciolkovszkij-egyenlet

A Ciolkovszkij-egyenlet az idealizált rakéta mozgását írja le. Ciolkovszkij rakéta egyenlete idealizált gravitáció és légellenállás nélküli (vákuum) esetre:

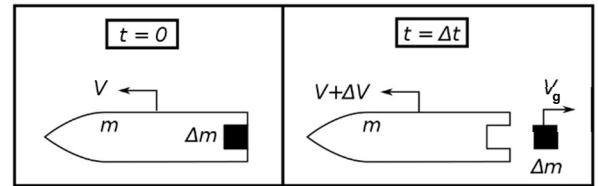
$$v(t) = v_g \cdot \ln \left( \frac{m_0}{m(t)} \right)$$

ahol  $v$  a rakéta sebessége  $t$  időpontban,  $v_g$  a rakétát elhagyó gázszugár sebessége a rakétához képest,  $m_0$  a rakéta kiindulási tömege és  $m$  a rakéta tömege  $t$  idő múlva

Másképpen kifejezve, az űrhajó maximális sebesség változása  $\Delta v$ :

$$\Delta v = v_g \cdot \ln \frac{m_0}{m_{sz}} = I_{sp} \cdot g_0 \cdot \ln \frac{m_0}{m_{sz}}$$

ahol  $v_g = I_{sp} \cdot g_0$  (ahol  $I_{sp}$  specifikus impulzus értelmében és  $g_0$  a standard gravitáció) a rakétát elhagyó gázszugár sebessége a rakétához képest,  $m_0$  a rakéta kiindulási tömege és  $m_{sz}$  a rakéta száraz tömege, azaz a rakéta tömege üzemanyag nélkül.



Adott a rakétát elhagyó gázszugár sebessége ( $v_g$ ) a rakéta konstrukciója alapján, az kívánt  $\Delta v$  mennyiség és a rakéta száraz tömege  $m_{sz}$ . Az egyenlet megoldható az üzemanyag tömegére ( $m_{\text{ü}} = m_0 - m_{sz}$ ):

$$m_0 = m_{sz} \cdot e^{\Delta v / v_g}$$

ahol a paraméterek ugyanazok, mint azok fentebb le vannak írva és az  $e$  az Euler-féle szám.

### Tömeg arány

A repüléstechnikában a tömeg arány egy rakéta hatékonyságát mutatja meg. Megmutatja, hogy mennyivel nehezebb a rakéta üzemanyaggal és anélkül. Egy hatékonyabb rakéta dizájn képes elérni egy bizonyos sebesség célt kevesebb üzemanyaggal.

$$\frac{m_{teljes}}{m_{száraz}} = e^{\Delta v / v_g}$$

Sutton-féle:

$$M_R = \frac{m_{száraz}}{m_{teljes}}$$



**Üzemanyag tömeg hányados**

Az üzemanyag tömeg hányados megmutatja a rakéta üzemanyag és kiindulási tömegeinek arányát.

$$\zeta = \frac{m_{\ddot{u}}}{m_0} = \frac{m_0 - m_t}{m_0} = \frac{m_{\ddot{u}}}{m_{\ddot{u}} + m_t} = 1 - \frac{m_t}{m_0}$$

**Üzemanyag fogyasztás**

$$\dot{m} = \frac{F_T}{I_{sp}}, \quad [\dot{m}] = \frac{kg}{s}$$

**Specifikus impulzus**

A specifikus impulzus megmutatja, hogy mennyire hatékony egy rakéta hajtóműve. Minél nagyobb, annál nagyobb a tolóerő ugyanazon tömegű üzemanyaggal. A specifikus impulzus nem változik a gravitációs erő változásával!

$$I_{sp} = \frac{F_T}{\dot{m}}, \quad [I_{sp}] = \frac{m}{s}$$

ahol  $F_T$  tolóerő newtonban és  $\dot{m}$  az üzemanyag fogyasztás

Súly specifikus impulzus:

$$I_{sp,g_0} = \frac{F_T}{\dot{m} \cdot g_0} = \frac{I_{sp}}{g_0}$$

ahol  $[I_{sp,g_0}] = s$  és  $g_0$  a felszíni nehézségi gyorsulás

**Több hajtóművek esetén**

$$I_{sp} = \frac{\sum_i^n F_{T_i}}{\sum_i^n \dot{m}_i} = \frac{\sum_i^n F_{T_i}}{\sum_i^n \frac{F_{T_i}}{I_{sp_i}}}$$

ahol  $I_{sp_i}$  az egyes hajtóművek specifikus impulzusa,  $F_{T_i}$  az egyes hajtóművek tolóereje és  $\dot{m}_i$  az egyes hajtóművek üzemanyag fogyasztása

**Hajtóművek összehasonlítása**

Különböző hajtóműveknek különböző tömegük is lehet, ezért olykor néha nem elég a hajtóművek összehasonlítása csak specifikus impulzus alapján. Azonban ilyenkor összehasonlíthatjuk a hajtóműveket a munkavégzésük alapján:

Definíciók alapján:  $F_T = I_{sp} \dot{m}_{\ddot{u}}$

A teljes égés ideje ( $m_{\ddot{u}}$  az üzemanyag tömege):  $t_{max} = m_{\ddot{u}} \frac{I_{sp}}{F_T}$

Newton harmadik törvénye:  $\frac{dv}{dt} m = F_T$  ahol a tömeg három tömeg komponens összesítve: a hasznos teher, a hajtómű és az üzemanyag tömegei ( $m_{haszn} + m_{hajtómű} + m_{üzemanyag}$ ) amit beleépítve az egyenletbe a következőt kapjuk:

$$v(t) = I_{sp} \log \left[ \frac{(m_{haszn} + m_{hajt} + m_{\ddot{u}})}{(m_{haszn} + m_{hajt} + m_{\ddot{u}}) - \frac{F_T}{I_{sp}} t} \right], \quad 0 < t \leq m_{\ddot{u}} \frac{I_{sp}}{F_T}$$

a fent leírtból kiszámolhatjuk a hajtómű által végzett teljes munkát a következően:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F_T \cdot dr = \int_0^{t_{max}} F_T \frac{dr(t)}{dt} dt = \int_0^{t_{max}} v(t) \cdot dt$$

vagy

$$W = I_{sp}^2 \left[ m_{\ddot{u}} + (m_{haszn} + m_{hajt}) \log \left( \frac{m_{haszn} + m_{hajt}}{m_{haszn} + m_{hajt} + m_{\ddot{u}}} \right) \right]$$

**Tolóerő-súly arány** (*thrust-to-weight ratio*)Jelölése:  $TWR$ 

A tolóerő-súly arány megmutatja a rakéta erejét a súlyához viszonyítva

$$TWR = \frac{F_T}{m \cdot g}$$

ahol  $F_T$  a rakéta hajtóműveinek tolóereje,  $m$  a test tömege és  $g$  a helyi felszíni nehézségi gyorsulás

Amikor a  $TWR$ -je és a nehézségi gyorsulása egy égitestnek ( $A$ ) ismert, akkor egy másik égitest ( $B$ )  $TWR$ -jét kiszámolhatjuk, ha ismerjük annak is a nehézségi gyorsulását.

$$TWR_A \cdot \frac{g_B}{g_A} = TWR_B$$

**Gyorsulás**

Ahhoz, hogy a maximális gyorsulást megbecsüljük ( $a$ ) egy függőleges kilövésnél a felszínen, csak a nehézségi gyorsulást és a  $TWR$ -t ismerve, a dinamika alaptörvényét átírva a gyorsulásra:

$$a = \frac{F_T - mg}{m} = \frac{F_T}{m} - g = g(TWR - 1)$$

**Felszállás**

Ahhoz, hogy a rakéta felszálljon, annyi erőt kell kifejteni ellentétes irányban, hogy legyőzze a testre ható gravitációs erőt. Azaz a testre ható erők eredőjének nagyobbának kell lennie nullánál, hogy a rakéta felszálljon. Tolóerő-súly aránnyal kifejezve:

$$\sum_i^n F_{T_i} = F_T > F_g = m \cdot g$$

$$\frac{F_T}{m \cdot g} > 1$$

A felszállás alatt a  $TWR$  változik:

- Az üzemanyag elhasználódik, így könnyebb lesz, növelve az arányt
- A nehézségi gyorsulás kisebb, minél távolabb vagyunk a test tömegpontjához képest
- Minél kisebb a légköri nyomás, annál kisebb a légköri ellenállás, növelve az arányt

**Gravitációs kanyar** (*Gravity turn*)

Amint a test megkezdí a gravitációs kanyarját, az csökkenti a  $TWR$  arányát. Ahhoz, hogy kiszámoljuk azt az erőt, amivel letudja győzni a gravitációs erőt a rakéta a következően számolható ki:

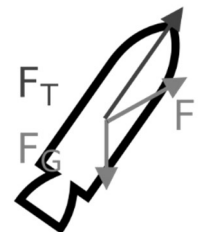
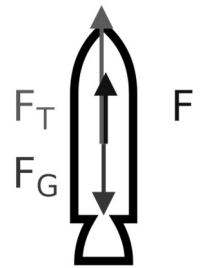
$$F = F_T \cos \alpha$$

ahol  $\alpha$  a rakéta dőlésszöge a merőlegeshez ( $0^\circ$ ) viszonyítva (ábrán  $30^\circ$ ).

Így ezzel kibővítve a  $TWR$  felírható a következőképpen:

$$TWR = \frac{F_T \cos \alpha}{m \cdot g}$$

érdemes megjegyezni, hogy ez az összefüggés csak a felszállás közben érvényes.

**Közegellenállási erő**

A folyadékdinamikában a közegellenállási erő a gázokban (levegőben) vagy folyadékban mozgó testekre – surlódáshoz hasonló – mozgást akadályozó erő. A közegellenállási erő iránya mindig ellentétes a testnek a közeghez viszonyított sebességével.

$$F_{köz} = \frac{1}{2} k A \rho v^2$$

ahol  $k$  a közegellenállási (alaki) tényező,  $\rho$  a közeg sűrűsége,  $A$  a test homlokfelülete és  $v$  a test a közeghez viszonyított sebessége

# BIZONYÍTÁSOK

## EGYENLETEK BIZONYÍTÁSAI

### Hill-mező levezetése

A Hill-sugárt megtalálhatjuk a gravitációs és a centrifugális erők egyenlő tételével, amelyek egy részecskére hatnak. Feltételezzük, hogy a két tömeg  $m$  és  $M$  közötti távolság  $r$ , és hogy a részecske  $r_H$  magasságban kering a másodlagos testtől. Amikor a részecske az elsődleges és a másodlagos testet összekötő egyenesen van, akkor az egyensúly állapotát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{Gm}{r_H^2} - \frac{GM}{(r - r_H)^2} + \Omega^2(r - r_H) = 0$$

ahol  $G$  a gravitációs állandó és  $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$  a Kepleri szögsebessége a másodlagos testnek az elsődleges körül (feltételezve, hogy  $m \ll M$ ). Így a fenti egyenlet a következő módon leírható:

$$\frac{m}{r_H^2} - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-2} + \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) = 0$$

amit binomiális bővítéssel az  $r_H/r$ , a következőként írható fel:

$$\frac{m}{r_H^2} - \frac{M}{r^2} \left(1 - 2\frac{r_H}{r}\right) + \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) = \frac{m}{r_H^2} - \frac{M}{r^2} \left(3\frac{r_H}{r}\right) \approx 0$$

Azaz lássuk be, hogy a fenti összefüggés átírható a következőre:

$$r_H \approx a \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

### Ciolkovszkij-egyenlet levezetése

Jelöljük a rakétából kiáramló gázszugár a rakétához képest állandó sebességét  $v_g$ -vel, az inerciarendszerhez képesti pillanatnyi sebességét pedig  $v_{gi}$ -vel, az indulástól számított  $t$  idő elteltével a rakéta tömegét  $m$ -el,  $t + dt$  időpillanatban a rakéta tömege pedig legyen  $m - dm$ . A rakéta a  $t$ -ik időpillanatban mért  $P_1$  impulzusára (lendületére) az alábbi összefüggés írható:

$$P_1 = mv$$

A  $t + dt$  időpontban a  $P_2$  impulzusa pedig így írható:

$$P_2 = (m - dm) \cdot (v + dv) + dm \cdot v_{gi}$$

A két impulzus különbsége, ha a másodrendűen kicsi  $dm \cdot dv_{gi}$  tagot elhanyagoljuk:

$$dP = P_2 - P_1 = m \cdot dv + dm \cdot (v_{gi} - v)$$

azonban, mivel a gázszugár relatív sebessége a rakétához képest:

$$v_g = v_{gi} - v$$

és mivel a rakétára semmiféle külső erő nem hat, a két impulzus különbsége nulla, ezért írhatjuk:

$$m \cdot dv = -dm \cdot v_g$$

A rakéta pillanatnyi  $m$  tömegével elosztva mindkét oldalt:

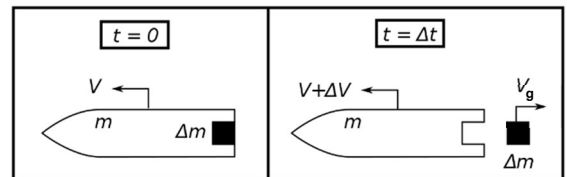
$$dv = -\frac{dm}{m} \cdot v_g$$

a rakétamozgás differenciálegyenletéhez jutunk, aminek megoldása egyszerűen integrálással történik:

$$\int_0^v dv + \int_{m_0}^m v_g \cdot \frac{dm}{m} = 0$$

és innen a rakéta sebessége:

$$v = v_g \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$



**Tömeg arány levezetése**

$$v = v_g \cdot \ln\left(\frac{m_t}{m_{sz}}\right)$$

$$m_t = m_{sz} \cdot e^{\Delta v/v_g}$$

$$\Rightarrow \frac{m_{teljes}}{m_{száraz}} = e^{\Delta v/v_g}$$

**Stacionárius pálya magasság levezetése**

Ahhoz, hogy megkapjuk a stacionárius pálya magasságát, először fel kell írunk egy egyenletet a gravitációs erőre és a centripetális erőre. Ebből a gravitációs erő:

$$F_{grav} = G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$$

ahol  $G$  a gravitációs állandó,  $M_1$  és  $M_2$  a bolygó és az űreszköz tömegei és  $r$  az űreszköz és a bolygó tömegközéppontja közötti távolság

Mivel a centripetális erők egyenlő a gravitációs erővel egy stacionárius pályán, ezért ezeket egyenlőként felírhatjuk:

$$F_{grav} = G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} = M_2 \cdot \frac{v^2}{r} = F_{cp}$$

A műhold tömegeivel osztva az egyenlet egyszerűsíthető a következőre, ezzel bebizonyítva, hogy a *stacionárius pálya magassága független az űreszköz tömegétől*:

$$G \frac{M_1}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

Tudjuk, hogy a sebesség a megtett út és az idő hányadosa. Jelen esetben, mivel körpályáról beszélünk ezért az út  $2\pi r$  a keringési periódus pedig  $t$  ezért a keringési sebesség:

$$v = \frac{2\pi r}{t}$$

De mivel a sebesség négyzete érdekel minket, ezért:

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{t^2}$$

Majd ezt visszahelyezve az előző egyenletbe a  $v^2$  helyére:

$$G \frac{M_1}{r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{t^2 r}$$

Majd kifejezve az egyenlet  $r$ -re:

$$G \frac{M_1}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{t^2}$$

$$GM_1 = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2}$$

$$r^3 = \frac{GM_1 t^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_1 t^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{\mu t^2}{4\pi^2}}$$

**Vis-viva egyenlet levezetése** (ahol  $0 \leq \text{excentricitás} < 1$ )

A vis-viva egyenletben az  $m$  tömegű keringő test tömege elhanyagolható a központi testhez tömegéhez  $M$  képest. A központi test és a keringő testet általában *primernek* és *részecskének* szokás nevezni. Egyes amikor elliptikus- vagy körpályáról beszélünk a vis-viva egyenlet gyorsan levezethető az energia megmaradásából és a lendületből.

A teljes vis-viva energia (*specific total energy*) állandó a keringés során. A következőkben az  $a$  az alsó indexben az apoapszis,  $p$  pedig a periapszist jelölik majd.

$$\varepsilon = \frac{v_a^2}{2} - \frac{GM}{r_a} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{GM}{r_p}$$

átrendezve:

$$\frac{v_a^2}{2} - \frac{v_p^2}{2} = \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{r_p}$$

Emlékezzünk vissza arra, hogy egy elliptikus pályákra (így ezért körpályákra is) a sebesség és sugár vektorok merőlegesek az apoapsziszánál és a periapsziszánál. A perdület megmaradásához szükséges a specifikus perdület

$$h = r_p v_p = r_a v_a = \text{állandó, ebből kifolyóan: } v_p = \frac{r_a}{r_p} v_a:$$

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r_a^2}{r_p^2} \right) v_a^2 = \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{r_p}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{r_p^2 - r_a^2}{r_p^2} \right) v_a^2 = \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{r_p}$$

Kiemelve a mozgási energiát az apoapsziszánál és a periapsziszánál, majd egyszerűsíteni:

$$\frac{1}{2} v_a^2 = \left( \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{r_p} \right) \cdot \frac{r_p^2}{r_p^2 - r_a^2}$$

$$\frac{1}{2} v_a^2 = GM \left( \frac{r_p - r_a}{r_a r_p} \right) \cdot \frac{r_p^2}{r_p^2 - r_a^2}$$

$$\frac{1}{2} v_a^2 = GM \frac{r_p}{r_a(r_p + r_a)}$$

Az ellipszis geometriájából következően  $2a = r_p + r_a$ , ahol  $a$  a fél nagytengely hossza. Ebből következik, hogy:

$$\frac{1}{2} v_a^2 = GM \frac{2a - r_p}{r_a(2a)} = GM \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a} \right) = \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{2a}$$

Ezt behelyettesítve az eredeti egyenletbe, a vis-viva energiára:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{GM}{r_p} = \frac{v_a^2}{2} - \frac{GM}{r_a} = -\frac{GM}{2a}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$$

vagy

$$\Rightarrow v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Ezért tehát a megmaradó (*conserved*) perdület  $L = m \cdot h$  levezethető a  $r_a + r_p = 2a$  és  $r_a r_p = b^2$  összefüggésekkel, ahol  $a$  a fél nagytengelye és  $b$  a fél kistengelye az elliptikus pályának. Ebből következően:

$$v_a^2 = GM \left( \frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \left( \frac{2a - r_a}{r_a} \right) = \frac{GM}{a} \left( \frac{r_p}{r_a} \right) = \frac{GM}{a} \left( \frac{b}{r_a} \right)^2$$

vagy

$$v_p^2 = GM \left( \frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \left( \frac{2a - r_p}{r_p} \right) = \frac{GM}{a} \left( \frac{r_a}{r_p} \right) = \frac{GM}{a} \left( \frac{b}{r_p} \right)^2$$

Ebből kifolyólag a specifikus perdület  $h = r_p v_p = r_a v_a = b \sqrt{\frac{GM}{a}}$  és a teljes perdület  $L = mh = mb \sqrt{\frac{GM}{a}}$

# TARTALOMJEGYZÉK

Terminológia.....	2
Égitestek keringésének leírása I. ....	2
Vonatkoztatási sík ( <i>reference plane</i> ) .....	2
Csomók ( <i>orbital nodes</i> ) .....	2
Orbit normal.....	2
Keringési sebesség ( <i>orbital speed</i> ).....	2
Prográd / retrográd mozgás .....	2
Csillagászati periódus ( <i>Sidereal period</i> ) .....	2
Szinodikus periódus ( <i>Synodic period</i> ) .....	2
Égitestek keringésének leírása II.....	3
Apszispontok.....	3
Fél-tengelyek.....	3
Excentricitás.....	3
Excentricitás vektor.....	3
Periapszis szöge ( <i>argument of periapsis</i> ).....	4
Inklináció ( <i>vagy pályahajlás</i> ).....	4
Valódi anomália ( <i>true anomaly</i> ) .....	4
Excentricitás anomália ( <i>eccentric anomaly</i> ) .....	5
Közepes anomália ( <i>angolul: mean anomaly</i> ).....	5
A felszálló csomó hossza ( <i>longitude of the ascending node</i> ).....	6
Orbitális mechanikák .....	7
Kettő-test problémák fajtái excentrikusság alapján .....	7
Körpályák.....	7
Elliptikus pályák .....	7
Parabolikus pályák .....	8
Hiperbolikus pályák .....	9
Pálya süllyedés ( <i>orbital decay</i> ) .....	9
Pálya egyenlet (Orbit equation) .....	9
Egyenes vonalú pálya ( <i>radial trajectory</i> ) .....	10
Hohmann-transzfer pálya.....	10
Fél-elliptikus transzfer ( <i>Bi-elliptic transfer</i> ) .....	10
Asztrodinamikai egyenletek.....	12
Dinamikus surlódás ( <i>Chandrasekhar-surlódás</i> ) .....	12
Kozmikus sebesség.....	12
Kepler egyenlete ( <i>Kepler's equation</i> ) .....	13
Stacionárius pálya .....	13
Kepler I. törvénye – A bolygók pályája .....	14

Kepler II. törvénye – A felületi törvény .....	14
Kepler III. törvénye .....	14
Keringési periódus ( <i>orbital period</i> ) .....	15
Keringési sebesség .....	15
Nehézségi gyorsulás ( <i>surface gravity</i> ) .....	16
Vis-viva energia ( <i>specific orbital energy</i> ) .....	16
Vis-viva egyenlet ( <i>vis-viva equation or orbital-energy-invariance law</i> ) .....	16
Standard gravitációs paraméter .....	16
Kiegészítő egyenletek .....	17
Tehetlenségi nyomaték .....	17
Perdület ( <i>angular momentum</i> ) .....	17
Specifikus perdület ( <i>Specific angular momemntum</i> ) .....	18
Fókuszon átmenő, nagytengelyre merőleges húr fele ( <i>semi-latus rectum</i> ) .....	18
Keringési pálya sötétségének időtartamának maximuma .....	18
Gyorsítás, Delta-v és az új apszispontok .....	18
A keringő test energiája .....	19
Keringési periódus .....	19
Gravitációs potenciál .....	19
Égi Mechanikák .....	20
Egy rendszer tömegközéppontja ( <i>barycenter</i> ) .....	20
Perturbáció .....	21
Hatássugár ( <i>Sphere of influence vagy SOI</i> ) .....	21
Lagrange-pontok ( <i>librációs pontok</i> ) .....	21
Repüléstechnika .....	23
Tömeg definíciók .....	23
Ciolkovszkij-egyenlet .....	23
Tömeg arány .....	23
Üzemanyag tömeg hányados .....	24
Üzemanyag fogyasztás .....	24
Specifikus impulzus .....	24
Tolóerő-súly arány ( <i>thrust-to-weight ratio</i> ) .....	25
Közegellenállási erő .....	25
Bizonyítások .....	26
Hill-mező levezetése .....	26
Ciolkovszkij-egyenlet levezetése .....	26
Tömeg arány levezetése .....	27
Stacionárius pálya magasság levezetése .....	27
Vis-viva egyenlet levezetése ( <i>ahol <math>0 \leq excentricitás &lt; 1</math></i> ) .....	28