

数理アルゴリズムとシミュレーション 演習課題 5

提出期限: 2020/11/12 23:59

以下の課題を行い、レポートを提出すること。レポートの作成に関しては、manaba の「演習課題」ページ内の項目をしっかりと確認すること。また、レポートの作成にあたって参考にした文献や Web ページはその出典を明示すること。

課題 1

A を正則な n 次正方行列とする。このとき以下の記述について正誤を答えよ。

- (1-1) λ が A の固有値のとき、 $\frac{1}{\lambda}$ は A^{-1} の固有値である。
- (1-2) A^{-1} の固有ベクトルと A の固有ベクトルは一致する。
- (1-3) P を n 次の正則行列とする。このとき、 A の固有値と $P^T A P$ の固有値は一致する。
- (1-4) σ を A の固有値でない複素数、 I を単位行列とする。このとき、 λ が A の固有値ならば、 $\frac{1}{\lambda - \sigma}$ は $(\sigma I - A)^{-1}$ の固有値である。

課題 2

実対称行列 A に対して、相異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交することを証明せよ。

課題 3

- (3-1) べき乗法の MATLAB プログラムを作成し、行列 A の絶対値最大固有値 λ とそれに対応する固有ベクトル \mathbf{x} を求めよ。ここで行列 A と初期ベクトル $\mathbf{x}^{(0)}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として、 k 回目の反復で求めた近似固有値 $\lambda^{(k)}$ とそれに対応する近似固有ベクトル $\mathbf{x}^{(k)}$ による残差

$$r = \left\| A\mathbf{x}^{(k)} - \lambda^{(k)}\mathbf{x}^{(k)} \right\|_2$$

が 10^{-5} 以下となったときに反復を停止せよ。なお、べき乗法のアルゴリズムは manaba の「べき乗法の資料」を参考にせよ。

- (3-2) 以下の構造を持つ 100×100 の五重対角行列 A に対してべき乗法を適用し，絶対値最大固有値を求めよ．初期ベクトル $\mathbf{x}^{(0)}$ の要素は全て 1 とせよ．反復の停止条件は (3-1) と同様とする．五重対角行列は MATLAB の関数 `diag` を用いることで作成が容易になる．関数の詳細は各自で調べること．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

課題 4

行列 A を (3-2) で用いた

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする．以下の問題に答えよ．

- (4-1) 逆反復法の MATLAB プログラムを作成し， A の絶対値最小の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．また，反復ごとの残差の値をグラフに描画せよ．ただし，初期ベクトルの要素は全て 1 とし， k 反復目で求めた近似固有値 $\lambda^{(k)}$ とそれに対応する近似固有ベクトル $\mathbf{x}^{(k)}$ による残差

$$r = \left\| A\mathbf{x}^{(k)} - \lambda^{(k)}\mathbf{x}^{(k)} \right\|_2$$

が 10^{-5} 以下となったときに反復を停止せよ．なお，逆反復法のアルゴリズムは manaba の「逆反復法の資料」を参考にせよ．

- (4-2) 区間 $[2.0, 3.0]$ 内を 0.01 刻みのシフトでシフト付き逆反復法を行ったとき，それぞれのシフトでの反復回数をグラフに描画せよ．ただし，初期ベクトルと反復の停止条件は (4-1) と同様とする．なお，シフト付き逆反復法のアルゴリズムは manaba の「シフト付き逆反復法の資料」を参考にせよ．

- (4-3) (4-2) と同様の条件でシフト付き逆反復法を行い，それぞれのシフトで収束した近似固有値をグラフに描画せよ． x 軸をシフトの値， y 軸を収束した近似固有値の値とすること．