数理アルゴリズムとシミュレーション 演習課題 2

提出期限: 2020/10/22 23:59

以下の課題を行い，レポートを提出すること．レポートの作成に関しては，manaba の「演習課題」ページ内の項目をしっかりと確認すること．また，レポートの作成にあたって参考にした文献や Web ページはその出典を明示すること．

課題 1

領域 Ω を $[0,1]\times[0,1]$ の正方形とし，その境界を Γ とする．関数 $u(x,y)$ は領域 Ω 上で

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

を満たし，境界 Γ 上での境界条件を以下の式とする．

$$u(x,0) = x,\ u(x,1) = 1-x\ (0 \le x < 1),\quad u(0,y) = y,\ u(1,y) = 1-y\ (0 \le y \le 1)$$

これらの条件を満たす解をガウス・ザイデル法によって求めるプログラムを次に示す手順に従って作成せよ．

(1-1) $n = 50$ とし，初期値を $u_{i,j} = 0$ $(1 \le i, j \le n)$ とした，ガウス・ザイデル法のプログラムを以下に示す.
このプログラムでは, ある 1 反復内での i, j 要素を計算しているときの r の値を r_{ij} とし，

$$R = \max_{1 \le i,j \le n} |r_{ij}|$$

について, $R < 10^{-4}$ となるまで反復計算を行う．また, 最大反復回数は 2000 に設定している．プログラム内の空欄 (1)，(2)，(3)，(4) に入るものをそれぞれ選べ.

ソースコード 1　ガウス・ザイデル法

```
n = 50;
u = zeros(n+2,n+2); % 初期状態の設定
% 境界条件の設定
u(:,1) = linspace(0,1,n+2);
u(:,n+2) = linspace(1,0,n+2);
u(1,:) = linspace(0,1,n+2);
u(n+2,:) = linspace(1,0,n+2);
maxit = 2000; % 最大反復回数
tol = 1e-04; % 判定条件

for it = 1:maxit
   R = 0;
   for [    (1)    ]
      for [    (2)    ]
         r = [    (3)    ];
         u(i,j) = u(i,j) + r;
         R = [    (4)    ];
      end
   end
   if R < tol
      break;
   end
end
```

(1)

(a) $\mathrm{i} = 1 : \mathrm{n}$　(b) $\mathrm{i} = 1 : \mathrm{n} + 1$　(c) $\mathrm{i} = 2 : \mathrm{n}$　(d) $\mathrm{i} = 2 : \mathrm{n} + 1$

(2)

(a) $\mathrm{j} = 1 : \mathrm{n}$　(b) $\mathrm{j} = 1 : \mathrm{n} + 1$　(c) $\mathrm{j} = 2 : \mathrm{n}$　(d) $\mathrm{j} = 2 : \mathrm{n} + 1$

(3)

(a) $(\mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}+1) + \mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}-1) + \mathrm{u}(\mathrm{i}-1,\mathrm{j}) + \mathrm{u}(\mathrm{i}+1,\mathrm{j})) - \mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j})$

(b) $(\mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}+1) + \mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}-1) + \mathrm{u}(\mathrm{i}-1,\mathrm{j}) + \mathrm{u}(\mathrm{i}+1,\mathrm{j}))\,/4 - \mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j})$

(c) $(\mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}+1) + \mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}-1) + \mathrm{u}(\mathrm{i}-1,\mathrm{j}) + \mathrm{u}(\mathrm{i}+1,\mathrm{j}) - \mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}))\,/4$

(d) $(\mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}+1) + \mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j}-1) + \mathrm{u}(\mathrm{i}-1,\mathrm{j}) + \mathrm{u}(\mathrm{i}+1,\mathrm{j})) - \mathrm{u}(\mathrm{i},\mathrm{j})/4$

(4)

(a) `abs(max(R,r))`　(b) `max(R,r)`　(c) `max(R, abs(r))`

(1-2) ガウス・ザイデル法を実行し, 反復ごとの R の値を示すときに用いるグラフとして, 線形グラフ (`plot`), 片対数グラフ (`semilogx`), 片対数グラフ (`semilogy`), 両対数グラフ (`loglog`) のうち適切であるものを選択せよ.

(a) 線形グラフ (`plot`)　(b) 片対数グラフ (`semilogx`)
(c) 片対数グラフ (`semilogy`)　(d) 両対数グラフ (`loglog`)

ちなみに, ソースコード 1 のガウス・ザイデル法を実行し, 反復終了時の $u_{i,j}$ の値を MATLAB の関数 `surf` を用いてグラフに描画した結果は図 1 のようになる. 課題 2 を解く際の参考にすると良い.

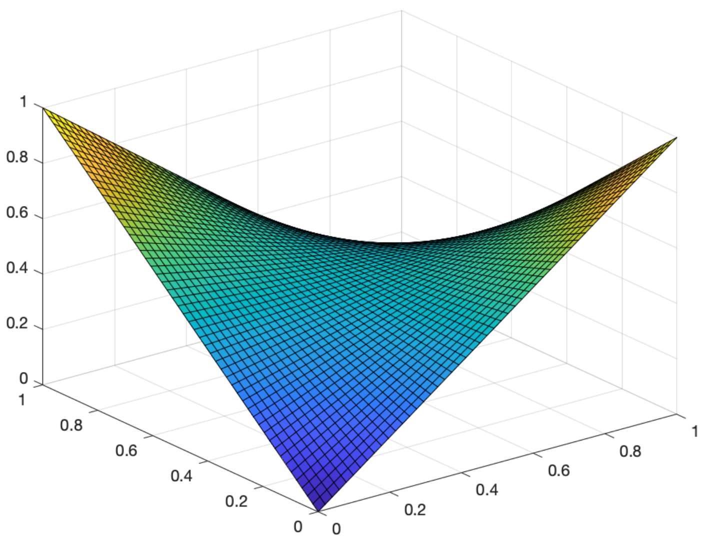

図 1　反復終了時の $u_{i,j}$ の値

課題 2

(2-1) 領域 Ω を $[0,1]\times[0,1]$ の正方形とし，その境界を Γ とする．関数 $u(x,y)$ は領域 Ω 上で

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

を満たし，境界 Γ 上での境界条件を以下の式とする．

$$u(x,0)=\sin(\pi x),\ u(x,1)=0\ (0\le x\le 1),\quad u(0,y)=0,\ u(1,y)=\sin(\pi y)\ (0\le y\le 1)$$

これらの条件を満たす解 $u_{i,j}$ $(0\le i,j\le n+1)$ をガウス・ザイデル法を実行して計算し，反復終了時の $u_{i,j}$ の値を MATLAB の関数 `surf` を用いてグラフに描画せよ．ただし，初期値を $u_{i,j}=0$ $(1\le i,j\le n)$ とし，$n=50,\ R\le 10^{-4}$ とすること．

(2-2) 図 2 に示すような，正方形の中に正方形の穴が空いた領域 Ω を考える．

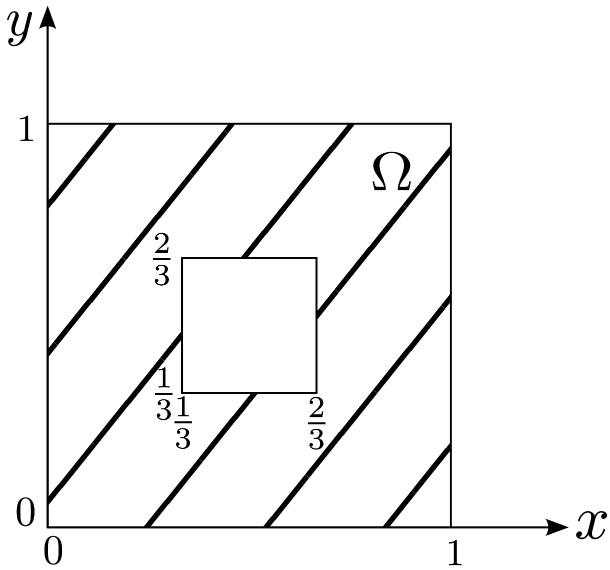

図 2　正方形の中に正方形の穴が空いた領域

関数 $u(x,y)$ は領域 Ω 上で

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

を満たす．また，外側の正方形の境界を Γ_1，中央の正方形の境界を Γ_2 とする．こ

の時，境界 Γ_1, Γ_2 で満たすべき条件は

$$u(x,0)=0,\ u(x,1)=50(1-x)^4,\ u(0,y)=50y,\ u(1,y)=0,$$
$$u\left(x,\frac{1}{3}\right)=u\left(x,\frac{2}{3}\right)=u\left(\frac{1}{3},y\right)=u\left(\frac{2}{3},y\right)=40\ (\frac{1}{3}\le x,y\le\frac{2}{3})$$

となる．これらの条件を満たす解 $u_{i,j}$ $(0\le i,j\le n+1)$ をガウス・ザイデル法を用いて計算し，反復終了時の $u_{i,j}$ の値を `surf` を用いてグラフに描画せよ．ただし，初期値を $u_{i,j}=0$ $(1\le i,j\le n)$ とし，$n=50,\ R\le 10^{-4}$ とすること．なお，`surf` を用いる際に穴の領域は $u(x,y)=40$ $(\frac{1}{3}<x,y<\frac{2}{3})$ としてよい．