数理アルゴリズムとシミュレーション 演習課題 4

提出期限: 2020/11/5 23:59

以下の課題を行い，レポートを提出すること．レポートの作成に関しては，manaba の「演習課題」ページ内の項目をしっかりと確認すること． また，レポートの作成にあたって参考にした文献や Web ページはその出典を明示すること．

課題 1

n 個あるページにおいて，ページ j からページ i へジャンプする確率を $p_{i,j}$ とする．ただし，リンクがあるページへはすべて等しい確率でジャンプするものとする．確率遷移行列 $P=\{p_{i,j}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ の各列の要素の和が 1，つまり各 j に対して $\sum_i p_{i,j}=1$ とする．ページランク問題

$$\left[\alpha P+(1-\alpha)\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}^\mathsf{T}\right]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

のページランクベクトル $\boldsymbol{x}$ は更新式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\alpha P\boldsymbol{x}^{(k)}+(1-\alpha)\boldsymbol{v},\ \ \boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{v},\ \ k=0,1,2,\dots \tag{1}$$

で反復すれば計算することができる．ここで，$\boldsymbol{e}=[1,1,\dots 1]^\mathsf{T}$，$\boldsymbol{v}$ は $v=\dfrac{1}{n}\boldsymbol{e}$ となるベクトルであり，$0<\alpha<1$ である．

(1-1) 図 1 で示される 6 ページ間のリンクを表現するような確率遷移行列 P を選べ．

$$\text{(a)}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&1\\\frac{1}{2}&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\text{(b)}\begin{pmatrix}0&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}\text{(d)}\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1\\0&1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

(1-2) 反復式 (1) を用いることで (1-1) で与えた行列 P に関するページランクベクトル $\boldsymbol{x}$ を計算する．反復式 (1) の停止条件は

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|_2}\left\|\left[\alpha P+(1-\alpha)\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}^{\top}\right]\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_2<10^{-4}$$

とする．ただし，$\alpha=0.85$，$\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{v}$ とする．このとき得られたページランクベクトル $\boldsymbol{x}$ に基づき，ページ番号をランクが高い順に並べよ．

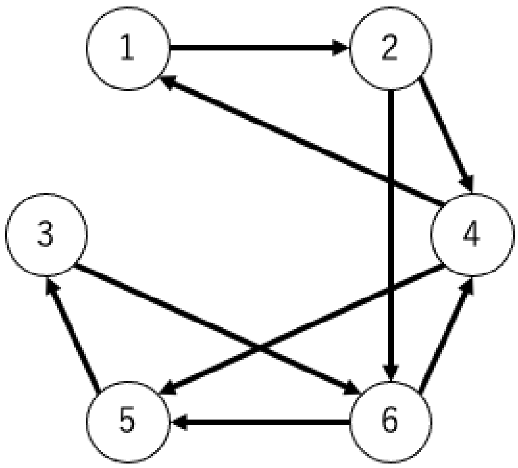

図 1: 6 ページ間のリンク．

課題 2

図 2 のようなバネに繋がれた 4 つの質点の運動を考える．このとき，各質点の運動方程式は以下のように表せる．

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2u_i(t)}{\mathrm{d}t^2}=k_{i+1}(u_{i+1}(t)-u_i(t))-k_i(u_i(t)-u_{i-1}(t)),\ i=1,\ldots,4.$$

ここで，m_i は各質点の質量，k_i はバネ定数，$u_i(t)$ は各質点の変位を表す．ただし，$u_i(t)$ は

$$u_i(t)=a_i\sin(\omega t+\phi_i)$$

で表されるとし，$u_0(t)=u_5(t)=0$ とする．ここで，a_i を各質点の振動の振幅とし，ω を角振動数，ϕ_i を位相とする．

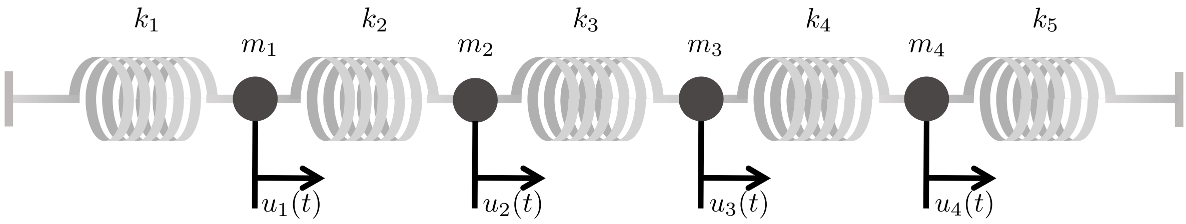

図 2: 4 つの質点からなるバネモデル

この運動方程式から一般化固有値問題 $K\boldsymbol{x} = \lambda M\boldsymbol{x}$ を導出したとき，行列 K, M として正しいものをそれぞれ選べ．ただし $\lambda = \omega^2$ とし，$\boldsymbol{x} = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ \ x_4)^{\mathrm{T}}$ とする．

(2-1)

$$\text{(a)}K = \begin{pmatrix} (k_1+k_2) & k_2 & 0 & 0 \\ k_2 & (k_2+k_3) & k_3 & 0 \\ 0 & k_3 & (k_3+k_4) & k_4 \\ 0 & 0 & k_4 & (k_4+k_5) \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}K = \begin{pmatrix} (k_1+k_2) & k_2 & 0 & 0 \\ k_2 & (k_2+k_3+k_4) & k_3 & 0 \\ 0 & k_3 & (k_3+k_4+k_5) & k_4 \\ 0 & 0 & k_4 & (k_4+k_5) \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}K = \begin{pmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) & k_4 \\ 0 & 0 & k_4 & -(k_4+k_5) \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}K = \begin{pmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3+k_4) & k_3 & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4+k_5) & k_4 \\ 0 & 0 & k_4 & -(k_4+k_5) \end{pmatrix}$$

(2-2)

$$\text{(a)}M = \begin{pmatrix} -m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & -m_1 & m_2 & m_3 \\ m_3 & m_2 & -m_1 & m_2 \\ m_4 & m_3 & m_2 & -m_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_3 & m_2 & m_1 & m_2 \\ m_4 & m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}M = \begin{pmatrix} -m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_4 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)}M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix}.$$

課題 3

λ は $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の固有値であることと，$\det(A-\lambda \mathrm{I})=0$ は等価であることを示せ．ここで，$\det(X)=0 \Leftrightarrow X$ は特異行列であることを証明なしで用いてよい．

課題 4

manaba にアップロードされている make_P.m を実行することで生成される確率遷移行列 P を用いて以下の問題を解け．ページランク問題，ページランクベクトルの更新式については課題 1 を参考にせよ．

(4-1) ページランクベクトルの更新式を用いることで，生成した行列 P に関するページランクベクトルを計算し，各反復での

$$\tfrac{1}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|_2}\left\|\left[\alpha P+(1-\alpha)\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}^{\mathsf{T}}\right]\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_2$$

の値をグラフに描け．反復の停止条件は

$$\tfrac{1}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|_2}\left\|\left[\alpha P+(1-\alpha)\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}^{\mathsf{T}}\right]\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_2<10^{-4}$$

とし，$\alpha=0.85,\ \boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{v}$ とする．

(4-2) (4-1) で得られたページランクベクトルに基づき，ページ番号をランクが高い順に上から 3 つ挙げよ．

(4-3) (4-1) において，α の値を $\alpha=0.5,0.55,0.6,...,0.95$ と変更したときの収束までの反復回数をグラフに描け．