

姿勢推定のための KalmanFilter

Eisoku Kuroiwa

2017 年 3 月 19 日

目次

- section 1 回転に関する知識
- section 2 オイラー角表現の KalmanFilter
- section 3 Quaternion 表現の KalmanFilter

1 回転に関する知識

ここでは姿勢推定の KalmanFilter を意識しつつ、回転に関するもろもろの知識をまとめて、証明する。

証明することは

subsection 1.1 回転行列の角速度の関係

ある剛体 A が回転している時に、その剛体の角速度ベクトルを world 座標系 W で表記した ω^W と world 座標系 W 相対の A の回転行列 ${}^W_A \mathbf{R}$ の間には

$${}^W_A \dot{\mathbf{R}}_A^W \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z^W & \omega_y^W \\ \omega_z^W & 0 & -\omega_x^W \\ -\omega_y^W & \omega_x^W & 0 \end{pmatrix} = [\omega^W]_{\times} \quad (1)$$

が成り立つ。ここでいう ω^W は world 座標系の角速度ベクトルであって、IMU が出力するような local 座標系の角速度ベクトルではないことが重要。

subsection 1.2 回転行列と RPY の関係

剛体 A の角速度ベクトルを A 座標系相対で表記した ω^A が IMU から取得できる。それと、world 座標系 W 相対の A の回転行列 ${}^W_A \mathbf{R}$ をロール・ピッチ・ヨーに変換したものの関係式は

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} & \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} & \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x^A \\ \omega_y^A \\ \omega_z^A \end{pmatrix} \quad (2)$$

である。

subsection 1.3 回転行列と Quaternion の関係

同様に、クォータニオン $\tilde{\mathbf{q}}$ を使って表記すると

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \omega^W \tilde{\mathbf{q}} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}} \omega^A \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x^A & -\omega_y^A & -\omega_z^A \\ \omega_x^A & 0 & \omega_z^A & -\omega_y^A \\ \omega_y^A & -\omega_z^A & 0 & \omega_x^A \\ \omega_z^A & \omega_y^A & -\omega_x^A & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \quad (5)$$

となる。ただし、スカラー部を q_0 、ベクトル部を $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ として、 $\tilde{\mathbf{q}} = (q_0, \mathbf{q})$ とした。

subsection 1.4 加速度と回転の関係

http://knock.t.u-tokyo.ac.jp/lecture/pdf_data01/5.pdfの式 (14) に詳しいが、

$$\mathbf{a}^A = \dot{\mathbf{v}}^A + \omega^A \times \mathbf{v}^A + {}^W_A \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +g \end{pmatrix} \quad (6)$$

いや、これは微妙かも。違うかもしれない。難しいので、一旦置いておく。

subsection 1.5 クォータニオンと回転行列の関係

$${}^W_A \mathbf{R} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

である。

1.1 回転行列の角速度の関係

1.1.1 証明

${}^W_A \mathbf{R}$ は回転行列なので、

$${}^W_A \mathbf{R}_A^W \mathbf{R}^T = \mathbf{E} \quad (8)$$

が成り立つ。この両辺を微分すると

$$\frac{d}{dt} \{ {}^W_A \mathbf{R}_A^W \mathbf{R}^T \} = \frac{d}{dt} \mathbf{E} \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow {}^W_A \dot{\mathbf{R}}_A^W \mathbf{R}^T + {}^W_A \mathbf{R}_A^W \dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{O} \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow {}^W_A \dot{\mathbf{R}}_A^W \mathbf{R}^T + \{ {}^W_A \dot{\mathbf{R}}_A^W \mathbf{R}^T \}^T = \mathbf{O} \quad (11)$$

となるので, ${}^W_A \dot{\mathbf{R}}_A^W \mathbf{R}^T$ は歪対称行列だと分かる. よって

$${}^W_A \dot{\mathbf{R}}_A^W \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow {}^W_A \dot{\mathbf{R}}_A^W \mathbf{R}^T = [X]_{\times} \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow {}^W_A \dot{\mathbf{R}} = [X]_{\times} {}^W_A \mathbf{R} \quad (14)$$

となる X が存在する. ここで, A の原点から伸びているとあるベクトル \mathbf{p}^A を考える. \mathbf{p}^A は A に固定されていて, 一緒に動く. Equation 14を利用すると

$${}^W_A \dot{\mathbf{R}} \mathbf{p}^A = [X]_{\times} {}^W_A \mathbf{R} \mathbf{p}^A \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow {}^W_{A(t)} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{p}^{A(t)} = [X]_{\times} {}^W_{A(t)} \mathbf{R} \mathbf{p}^{A(t)} \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow {}^W_A \dot{\mathbf{R}} \mathbf{p}^A = [X]_{\times} \mathbf{p}_t^W \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^W_A \mathbf{R}(t + \Delta t) - {}^W_A \mathbf{R}(t)}{\Delta t} \mathbf{p}^A = [X]_{\times} \mathbf{p}^W \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}_{t+\Delta t}^W - \mathbf{p}_t^W}{\Delta t} = [X]_{\times} \mathbf{p}^W \quad (19)$$

となる. \mathbf{p}_t^W は時刻 t のときの座標系 W で表記したベクトルとなる. $\mathbf{p}_{t+\Delta t}^W$ は \mathbf{p}_t^W をとあるベクトル \mathbf{s}^W 周りに微量 $\Delta\theta$ だけ回転させたものと考えられて,

$$\mathbf{p}_{t+\Delta t}^W = \mathbf{p}_t^W + \Delta\mathbf{p} \quad (20)$$

と表現すると

$$\Delta\mathbf{p} \text{ の向き} = \mathbf{s}^W \times \mathbf{p}_t^W \text{ の向き} \quad (21)$$

$$\Delta\mathbf{p} \text{ の大きさ} = \|\mathbf{p}_t^W\| \Delta\theta \quad (22)$$

つまり

$$\Delta\mathbf{p} = \frac{\mathbf{s}^W \times \mathbf{p}_t^W}{\|\mathbf{s}^W \times \mathbf{p}_t^W\|} \|\mathbf{p}_t^W\| \Delta\theta \quad (23)$$

$$= \frac{\mathbf{s}^W \times \mathbf{p}_t^W}{\|\mathbf{s}^W\| \|\mathbf{p}_t^W\| \sin(\frac{\pi}{2})} \|\mathbf{p}_t^W\| \Delta\theta \quad (24)$$

$$= \frac{\mathbf{s}^W}{\|\mathbf{s}^W\|} \times \mathbf{p}_t^W \Delta\theta \quad (25)$$

なので, Equation 19より

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}_{t+\Delta t}^W - \mathbf{p}_t^W}{\Delta t} = [X]_{\times} \mathbf{p}^W \quad (26)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\mathbf{s}^W}{\|\mathbf{s}^W\|} \times \mathbf{p}_t^W \Delta\theta}{\Delta t} = [X]_{\times} \mathbf{p}^W \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{s}^W}{\|\mathbf{s}^W\|} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \times \mathbf{p}^W = [X]_{\times} \mathbf{p}^W \quad (28)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^W \times \mathbf{p}^W = [X]_{\times} \mathbf{p}^W \quad (29)$$

となる. よって, $[X]_{\times} = [\boldsymbol{\omega}^W]_{\times}$ と分かった.

Equation 14より,

$${}^W_A \dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega}^W]_{\times} {}^W_A \mathbf{R} \quad (30)$$

となって証明できた.

ここでいう $\boldsymbol{\omega}^W$ は world 座標系の角速度ベクトルであって, IMU が出力するような local 座標系の角速度ベクトルではないことが重要.

1.1.2 具体例で実験

Figure 1のようなパターンを考える. このとき,

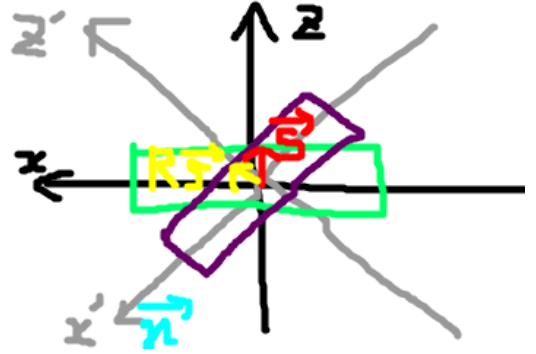


図1: 黒い座標を W の座標系, BODY リンクを想定した直方体が world 座標系の原点に最初あって (緑色の直方体), 今はピッチ軸周りに 45 度回転して (灰色座標および紫色の直方体) いる状態. ここからさらに水色の軸 \mathbf{n} 周りに $\Delta\eta$ 回転しようとしている. はてなブログから持ってきたのであれけど, 黄色のベクトルが \mathbf{p}^A

$${}^W_{A(t)} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$${}^{A(t)}_{A(t+\Delta t)} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\eta & -\sin \Delta\eta \\ 0 & \sin \Delta\eta & \cos \Delta\eta \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{p}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

となる. 回転行列はListing 1で求められる.

Listing 1: matrix_from_euler.py

```
1 #!/usr/bin/env python
2 import tf, math
3 tf.transformations.euler_matrix(0, math.pi/4, 0)
```

Equation 19の左辺は

$$\mathbf{p}_{t+\Delta t}^W = {}^W_{A(t+\Delta t)} \mathbf{R} \mathbf{p}^A \quad (34)$$

$$= {}^W_{A(t)} \mathbf{R}_{A(t+\Delta t)}^{A(t)} \mathbf{R} \mathbf{p}^A \quad (35)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cos \Delta \eta}{\sqrt{2}} \\ -\sin \Delta \eta \\ \frac{\cos \Delta \eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\Delta \eta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{p}_t^W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (38)$$

より,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}_{t+\Delta t}^W - \mathbf{p}_t^W}{\Delta t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\Delta \eta}{\Delta t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Equation 19とEquation 29から, $\boldsymbol{\omega}^W$ は

$$\boldsymbol{\omega}^W \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\Delta \eta}{\Delta t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

を満たすはず.

$$\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} \frac{\Delta \eta}{\Delta t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

なので,

$$\boldsymbol{\omega}^W = {}^W_{A(t)} \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta \eta}{\Delta t} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta \eta}{\Delta t} \end{pmatrix} \quad (42)$$

であるが, これはEquation 40を満たすので, 合っている.

ジャイロセンサが感知するのは, $\boldsymbol{\omega}^A$ の方.

1.2 回転行列と RPY の関係

1.2.1 証明

https://www.jstage.jst.go.jp/article/sicetr1965/40/11/40_11_1160/_pdfが 参 考 に な る し, このテクニックはすごい気がする.

RPY は, オイラー角の一種で, Z→Y→X の順番で軸周りに回転していくスタイル. 回転角度を順に, Yaw(γ)→Pitch(β)→Roll(α) と呼ぶ. これを使って回転行列を表現すると

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (43)$$

となる.

一方, $[\boldsymbol{\omega}]_{\times} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$ であり,

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$= \omega_x \mathbf{X}_1 + \omega_y \mathbf{X}_2 + \omega_z \mathbf{X}_3 \quad (45)$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

となって, ここで急に

$$\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^T = \mathbf{X}_1 \quad (49)$$

$$\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_1^T = \mathbf{O} \quad (50)$$

$$\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_3 \mathbf{X}_1^T = \mathbf{O} \quad (51)$$

という関係式を思い出すことができれば,

$$\omega_x \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1 [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{X}_1^T \quad (52)$$

$$\omega_y \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{X}_2^T \quad (53)$$

$$\omega_z \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_3 [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{X}_3^T \quad (54)$$

という境地に達する. これを使うと, 割と簡単に $[\boldsymbol{\omega}]_{\times} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$ をオイラー角の微分について整理することが可能になる. (この境地に達しないと, 回転行列の微分をして,,, のようにゴリゴリ計算しないといけなくて, sympy を使ってもちょっと無理だった.)

どう簡単になるかというと, りあえず最初の式に注目すると,

$$\omega_x \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1 [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{X}_1^T \quad (55)$$

$$\Leftrightarrow \omega_x \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1 \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \mathbf{X}_1^T \quad (56)$$

$$\Leftrightarrow \omega_x \mathbf{X}_1 = (\mathbf{X}_1 \dot{\mathbf{R}}) (\mathbf{X}_1 \mathbf{R})^T \quad (57)$$

が成り立つ.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (58)$$

と置くと,

$$\omega_x \mathbf{X}_1 = (\mathbf{X}_1 \dot{\mathbf{R}}) (\mathbf{X}_1 \mathbf{R})^T \quad (59)$$

$$\Leftrightarrow \omega_x \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dot{a}_{31} & -\dot{a}_{32} & -\dot{a}_{33} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_{31} & a_{21} \\ 0 & -a_{32} & a_{22} \\ 0 & -a_{33} & a_{23} \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$\Leftrightarrow \omega_x \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dot{a}_{31}a_{31} + \dot{a}_{32}a_{32} + \dot{a}_{33}a_{33} & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} \\ 0 & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} & \dot{a}_{21}a_{21} + \dot{a}_{22}a_{22} + \dot{a}_{23}a_{23} \\ 0 & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} & \dot{a}_{21}a_{21} + \dot{a}_{22}a_{22} + \dot{a}_{23}a_{23} \end{pmatrix} \quad (61)$$

ここで, 回転行列の性質 $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$ と $a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} = 0$ より, 微分して, $\dot{a}_{31}a_{31} + \dot{a}_{32}a_{32} + \dot{a}_{33}a_{33} = 0$ と $\dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} = -a_{31}\dot{a}_{21} - a_{32}\dot{a}_{22} - a_{33}\dot{a}_{23}$ なので,

$$\omega_x \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dot{a}_{31}a_{31} + \dot{a}_{32}a_{32} + \dot{a}_{33}a_{33} & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} \\ 0 & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} & \dot{a}_{21}a_{21} + \dot{a}_{22}a_{22} + \dot{a}_{23}a_{23} \\ 0 & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} & \dot{a}_{21}a_{21} + \dot{a}_{22}a_{22} + \dot{a}_{23}a_{23} \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$\Leftrightarrow \omega_x \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} \\ 0 & \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\Leftrightarrow \omega_x \mathbf{X}_1 = (\dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23}) \mathbf{X}_1 \quad (64)$$

$$\Leftrightarrow \omega_x = \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} \quad (65)$$

これはすごい. 他の項にも適用して,

$$\omega_x = \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} \quad (66)$$

$$\omega_y = \dot{a}_{11}a_{31} + \dot{a}_{12}a_{32} + \dot{a}_{13}a_{33} \quad (67)$$

$$\omega_z = \dot{a}_{21}a_{11} + \dot{a}_{22}a_{12} + \dot{a}_{23}a_{13} \quad (68)$$

となる. これを, 今回注目している Z-Y-X オイラー角に当てはめて整理すると (これもなかなか大変...)

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (69)$$

$$\Leftrightarrow \omega^W = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (70)$$

ω^A を求めるために, 両辺左から ${}^W_A \mathbf{R}^T$ をかけて整理すると

$$\omega^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (71)$$

ちなみに, Listing 2で検証可能.

Listing 2: rotation_matrix.py

```
1 #!/usr/bin/env python
2 from sympy import *
3 interactive.printing.init_printing(use_latex=true)
4 var("a:z")
```

```
5 roll = Matrix([[1, 0, 0],
6               [0, cos(a), -sin(a)],
7               [0, sin(a), cos(a)]])
8 pitch = Matrix([[cos(b), 0, sin(b)],
9               [0, 1, 0],
10              [-sin(b), 0, cos(b)]])
11 yaw = Matrix([[cos(c), -sin(c), 0],
12              [sin(c), cos(c), 0],
13              [0, 0, 1]])
14 rot = yaw * pitch * roll
15 tar = Matrix([[cos(b)*cos(c), -sin(c), 0],
16              [cos(b)*sin(c), cos(c), 0],
17              [-sin(b), 0, 1]])
18 Q = rot.transpose() * tar
19 print expand(Q[1,0])
```

この逆は

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} & \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} & \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \end{pmatrix} \omega^A \quad (72)$$

となる*1.

1.2.2 具体例で実験

subsection 1.1.2と同じシチュエーションを考える. 角速度を求めようとする

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (73)$$

なので

$$\omega^W = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\alpha} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\alpha} \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$\omega^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (75)$$

となり, 確かに直感と合う.

また, 別のシチュエーションとして, ヨー方向に 90 度回転させた後に, world 座標のピッチ方向に回転させた場合は,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad (76)$$

*1 http://www.wolframalpha.com/input/?i=Inverse%5B%7B%7B1%2C0%2C-sin%28b%29%7D%2C%7B0%2Ccos%28a%29%2C+sin%28a%29*cos%28b%29%7D%2C%7B0%2C-sin%28a%29%2C+cos%28a%29+cos%28b%29%7D%7D%5D

のとき,

$$\omega^W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$\omega^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

となり, 確かに直感と合う.

1.3 回転行列と Quaternion の関係

<http://www.mss.co.jp/technology/report/pdf/18-07.pdf>が参考になる.

1.3.1 クォータニオンの定義

スカラー部を q_0 , ベクトル部を $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ として, $\tilde{\mathbf{q}} = (q_0, \mathbf{q})$ とする.

回転クォータニオンは

$$\tilde{\mathbf{q}} = \cos \frac{\theta}{2} + (u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}) \sin \frac{\theta}{2} \quad (79)$$

で, とある座標系 B で表現された位置ベクトル \mathbf{a} を座標系は動かさずに位置ベクトルだけ回転させるときは $\mathbf{a}_{t+1}^B = \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{a}_t^B \tilde{\mathbf{q}}^*$ で, 座標系を動かして位置ベクトルの先っぽにある点は動かさないときは $\mathbf{a}_{t+1}^B = \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{a}_t^B \tilde{\mathbf{q}}^*$ となる.

ベクトルと掛け算するときは $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ を $a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ と見なして計算するというのがミソ^{*2}. 例えば $(3, 0, 0)$ を $x = z, y = 0$ の軸周りに 60 度回すとする, 回転クォータニオンは $\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \right) \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{k}$ なので,

$$\tilde{\mathbf{q}} \mathbf{a}_t^B \tilde{\mathbf{q}}^* = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{k} \right) \cdot 3 \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{k} \right) \quad (80)$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{k} \right) \quad (81)$$

$$= \left(\frac{9}{4} \mathbf{i} + \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \mathbf{j} \right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{8} \mathbf{i} + \frac{3}{8} \mathbf{k} \right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{3}{8} \mathbf{k} - \frac{3}{8} \mathbf{i} \right) \quad (82)$$

$$= \frac{9}{4} \mathbf{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{3}{4} \mathbf{k} \quad (83)$$

となつて, 回転後は $\left(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{4} \right)$ となる.

一般的にもできて, クォータニオンのベクトル部の掛け算は $\mathbf{u} \mathbf{j} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{u} \times \mathbf{j}$ なので

$$\mathbf{a}_{t+1}^B = \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{a}_t^B \tilde{\mathbf{q}}^* \quad (84)$$

$$= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{a} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (85)$$

$$= \left(\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{a} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \times \mathbf{a} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (86)$$

$$= \left\{ -\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \sin \frac{\theta}{2} + \left(\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{a} + \mathbf{u} \times \mathbf{a} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (87)$$

$$= -\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left(\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{a} + \mathbf{u} \times \mathbf{a} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (88)$$

$$= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{u} + \{ \mathbf{a} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{u} \} \cos \theta + \mathbf{u} \times \mathbf{a} \sin \theta \quad (89)$$

となつて, 綺麗にベクトル部だけ残る.

1.3.2 クォータニオンの定義

あるベクトル \mathbf{a}_t があって, 回っていて, $t = t$ のときのクォータニオンを $\tilde{\mathbf{q}}_t$, $t = t + \Delta t$ のときのクォータニオンを $\tilde{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ とすると,

$$\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} \mathbf{a}_0 \tilde{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^* \quad (90)$$

$$= \tilde{\Delta \mathbf{q}} \mathbf{a}_t \tilde{\Delta \mathbf{q}}^* \quad (91)$$

$$= \tilde{\Delta \mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}_t \mathbf{a}_0 \tilde{\mathbf{q}}_t^* \tilde{\Delta \mathbf{q}}^* \quad (92)$$

となるので,

$$\tilde{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \tilde{\Delta \mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}_t \quad (93)$$

となる. ここで, $\tilde{\Delta \mathbf{q}}$ は \mathbf{s}^W 周りに微量 $\Delta \theta$ だけ回転させたものと考えられて,

$$\tilde{\Delta \mathbf{q}} = \cos \frac{\Delta \theta}{2} + \frac{\mathbf{s}^W}{\|\mathbf{s}^W\|} \sin \frac{\Delta \theta}{2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{s}^W}{\|\mathbf{s}^W\|} \Delta \theta \quad (94)$$

となるので,

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_t = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} - \tilde{\mathbf{q}}_t}{\Delta t} \quad (95)$$

$$= \frac{\tilde{\Delta \mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}_t - \tilde{\mathbf{q}}_t}{\Delta t} \quad (96)$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{s}^W}{\|\mathbf{s}^W\|} \Delta \theta \right) \tilde{\mathbf{q}}_t - \tilde{\mathbf{q}}_t}{\Delta t} \quad (97)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{s}^W}{\|\mathbf{s}^W\|} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \tilde{\mathbf{q}}_t \quad (98)$$

$$= \frac{1}{2} \omega^W \tilde{\mathbf{q}}_t \quad (99)$$

と分かる. 行列形式で表現すると

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_t = \frac{1}{2} \omega^W \tilde{\mathbf{q}}_t \quad (100)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} \left\{ q_0 + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\} \quad (101)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ q_0 \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} - (\omega_X q_1 + \omega_Y q_2 + \omega_Z q_3) + \begin{pmatrix} \omega_Y q_3 - \omega_Z q_2 \\ \omega_Z q_1 - \omega_X q_3 \\ \omega_X q_2 - \omega_Y q_1 \end{pmatrix} \right\} \quad (102)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_X & -\omega_Y & -\omega_Z \\ \omega_X & 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Y & \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ \omega_Z & -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (103)$$

となる.

しかし, ω^W は world 座標系で表された角速度で, IMU が観測するのは local 座標で表された角速度なので, ベクトルの回転ではなくて座標系の回転であるためにクォータニオンの順番が変わることに注意しつつ

$$\omega^A = \tilde{\mathbf{q}}_t^* \omega^W \tilde{\mathbf{q}}_t \quad (104)$$

$$\Leftrightarrow \omega^W = \tilde{\mathbf{q}}_t \omega^A \tilde{\mathbf{q}}_t^* \quad (105)$$

と変換しなくては行けない.

^{*2} <http://mathtrain.jp/quaternion>

そうすると

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_t = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^W \tilde{\mathbf{q}}_t \quad (106)$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_t \boldsymbol{\omega}^A \tilde{\mathbf{q}}_t^* \tilde{\mathbf{q}}_t \quad (107)$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_t \boldsymbol{\omega}^A \quad (108)$$

これを行列形式で書くと

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (109)$$

のように中身がちょっと変わるので、注意。

1.4 加速度と回転の関係

わかった気になってはいたけど、よく分かっていない。

回転しながら自由落下している IMU は加速度としてどんな値を返すか、が分かれば良さそう。

1.5 クォータニオンと回転行列の関係

<http://jp.mathworks.com/help/aeroblks/quaternionstodirectioncosinematrix.html>が参考になる。

$$\mathbf{p}^A = {}^W_A \mathbf{R}^T \mathbf{p}^W \quad (110)$$

$$\mathbf{p}^A = \tilde{\mathbf{q}}^* \mathbf{p}^W \tilde{\mathbf{q}} \quad (111)$$

であることに注目して、クォータニオンの演算を書き下すと

$$\mathbf{p}^A = \tilde{\mathbf{q}}^* \mathbf{p}^W \tilde{\mathbf{q}} \quad (112)$$

$$= (q_0 - \mathbf{q}) \mathbf{p}^W (q_0 + \mathbf{q}) \quad (113)$$

$$= q_0^2 \mathbf{p}^W - 2(\mathbf{q} \times \mathbf{p}^W) q_0 + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}^W) \mathbf{q} - (\mathbf{q} \times \mathbf{p}^W) \times \mathbf{q} \quad (114)$$

$$= q_0^2 \mathbf{p}^W - 2(\mathbf{q} \times \mathbf{p}^W) q_0 + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}^W) \mathbf{q} + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}^W) \mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{p}^W \quad (115)$$

$$= (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{p}^W - 2(\mathbf{q} \times \mathbf{p}^W) q_0 + 2(\mathbf{q}^T \mathbf{p}^W) \mathbf{q} \quad (116)$$

$$= (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{p}^W - 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{p}^W) + 2\mathbf{q}(\mathbf{q}^T \mathbf{p}^W) \quad (117)$$

$$= (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{E} \mathbf{p}^W - 2q_0[\mathbf{q}]_{\times} \mathbf{p}^W + 2\mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{p}^W \quad (118)$$

$$= \{(q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{E} - 2q_0[\mathbf{q}]_{\times} + 2\mathbf{q} \mathbf{q}^T\} \mathbf{p}^W \quad (119)$$

$$= \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_0 q_3 + q_1 q_2) & 2(-q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(-q_0 q_3 + q_2 q_1) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) \\ 2(q_0 q_2 + q_3 q_1) & 2(-q_0 q_1 + q_3 q_2) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \mathbf{p}^W \quad (120)$$

となるので、

$${}^W_A \mathbf{R} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(-q_0 q_3 + q_2 q_1) & 2(q_0 q_2 + q_3 q_1) \\ 2(q_0 q_3 + q_1 q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(-q_0 q_1 + q_3 q_2) \\ 2(-q_0 q_2 + q_1 q_3) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (121)$$

となる。Equation 43の

$${}^W_A \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (122)$$

と比較して、いいところ取りをすると

$$\cos \beta \cos \gamma = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \quad (123)$$

$$\cos \beta \sin \gamma = 2(q_0 q_3 + q_1 q_2) \quad (124)$$

$$-\sin \beta = 2(-q_0 q_2 + q_1 q_3) \quad (125)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) \quad (126)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \quad (127)$$

なので、

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan \frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \\ \arcsin \{-2(-q_0 q_2 + q_1 q_3)\} \\ \arctan \frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \end{pmatrix} \quad (128)$$

これは解の一つを見つけたただけであって、唯一の解ではない。本当はもう一つある。オイラー角は一意には決まらない。

ちなみに、クォータニオンとオイラー角は https://en.wikipedia.org/wiki/Conversion_between_quaternions_and_Euler_angles より

$${}^W_A \mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\gamma) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_x(\alpha) \quad (129)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \sin \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & \sin \frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \cos \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (130)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (131)$$

wikipedia の式を写しただけで、検算はしていない。

2 オイラー角表現の KalmanFilter

ここでいうオイラー角は ZXY オイラー角で、ロール・ピッチ・ヨーのこと。

IMU が観測する角速度と RPY の関係式は

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} & \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} & \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (132)$$

で、自身が加速していない場合の加速度と姿勢の関係式は

$$\begin{pmatrix} acc_x \\ acc_y \\ acc_z \end{pmatrix} = {}^W_A \mathbf{R}^T \mathbf{g}^W \quad (133)$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} g \quad (134)$$

Equation 132を $\alpha = 0$, $\beta = 0$ で近似すれば線形+互いに素にできるし、近似しなければ EKF でできる。EKF の

場合は $\beta = \frac{\pi}{2}$ で Equation 132 が 0 除算してしまって破綻する。

2.1 線形カルマンフィルタ

2.1.1 事前準備

関係式（ゼロ点付近で近似）

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (135)$$

内部状態（オイラー角+その微分（角速度）のバイアス）

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ b_{w_x} \\ b_{w_y} \\ b_{w_z} \end{pmatrix} \quad (136)$$

予測（互いに独立しているので、decouple 可能）

$$\mathbf{x}_{k+1}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k^+ + \begin{pmatrix} \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (137)$$

観測（線形にするために観測した加速度を元に求めた姿勢を観測したことにする）

$$\alpha = \arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \arctan \frac{acc_y}{acc_z} \quad (138)$$

$$\beta = \arctan \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \arctan \frac{-acc_x}{\sqrt{acc_y^2 + acc_z^2}} \quad (139)$$

2.1.2 中身

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k+1}^- \\ b_{\omega_{x_{k+1}}}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k^+ \\ b_{\omega_{x_k}}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta t \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\alpha}_{k+1} \quad (140)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}_{k+1}^+ \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (141)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \clubsuit & \heartsuit \\ \diamond & \spadesuit \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (142)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit - \Delta t \diamond & \heartsuit - \Delta t \spadesuit \\ \diamond & \spadesuit \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta t & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (143)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t & \heartsuit - \spadesuit\Delta t \\ \diamond - \spadesuit\Delta t & \spadesuit \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (144)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper} & \heartsuit - \spadesuit\Delta t \\ \diamond - \spadesuit\Delta t & \spadesuit + Q_{k+1}^{lower} \end{pmatrix} \quad (145)$$

加速度から求めた姿勢を観測したことになっているので、

$$h\left(\begin{pmatrix} \alpha_{k+1}^- \\ b_{\omega_{x_{k+1}}}^- \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k+1}^- \\ b_{\omega_{x_{k+1}}}^- \end{pmatrix} = \alpha_{k+1}^- \quad (146)$$

よって、

$$y_{k+1} = z_{k+1} - \alpha_{k+1}^- \quad (147)$$

$$\mathbf{S}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}_{k+1}^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T + R_{k+1} \quad (148)$$

$$= \clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper} + R_{k+1} \quad (149)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T \mathbf{S}_{k+1}^{-1} \quad (150)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper} \\ \diamond - \spadesuit\Delta t \end{pmatrix} \mathbf{S}_{k+1}^{-1} \quad (151)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \frac{R_{k+1}}{\clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper}}} \\ \frac{\diamond - \spadesuit\Delta t}{\clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper} + R_{k+1}} \end{pmatrix} \quad (152)$$

となるので

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k+1}^+ \\ b_{\omega_{x_{k+1}}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1}^- \\ b_{\omega_{x_{k+1}}}^- \end{pmatrix} + \mathbf{K}_{k+1} y_{k+1} \quad (153)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper} z_{k+1} + R_{k+1} \alpha_{k+1}^- \\ \clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper} + R_{k+1} \end{pmatrix} b_{\omega_{x_{k+1}}}^+ \quad (154)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^+ = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{k+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}) \mathbf{P}_{k+1}^- \quad (155)$$

$$= \left(\mathbf{E} - \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \frac{R_{k+1}}{\clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper}}} & 0 \\ \frac{\diamond - \spadesuit\Delta t}{\clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper} + R_{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \right) \mathbf{P}_{k+1}^- \quad (156)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \frac{R_{k+1}}{\clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper}}} & 0 \\ -\frac{\diamond - \spadesuit\Delta t}{\clubsuit - (\diamond + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q_{k+1}^{upper} + R_{k+1}} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}_{k+1}^- \quad (157)$$

となる。

ここで、2016/02/22 の hrpsys の実装では

$$\begin{pmatrix} \alpha_0^+ \\ b_{\omega_{x_0}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (158)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = \mathbf{O} \quad (159)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.001 * \Delta t & 0 \\ 0 & 0.003 * \Delta t \end{pmatrix} \quad (160)$$

$$R = 1000 \quad (161)$$

なので、1 ステップ進めると

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^- \\ b_{\omega_{x1}}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x1} \Delta t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (162)$$

$$P_1^- = \begin{pmatrix} 0.001 * \Delta t & 0 \\ 0 & 0.003 * \Delta t \end{pmatrix} \quad (163)$$

$$S_1 = 0.001 * \Delta t + 1000 \quad (164)$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{0.001 * \Delta t}{0.001 * \Delta t + 1000} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (165)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^+ \\ b_{\omega_{x1}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x1} \Delta t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{0.001 * \Delta t}{0.001 * \Delta t + 1000} \\ 0 \end{pmatrix} (z_1 - \omega_{x1} \Delta t) \quad (166)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{0.001 * \Delta t * z_1 + 1000 * \omega_{x1} \Delta t}{0.001 * \Delta t + 1000} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (167)$$

$$P_1^+ = \begin{pmatrix} \frac{1000}{0.001 * \Delta t + 1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.001 * \Delta t & 0 \\ 0 & 0.003 * \Delta t \end{pmatrix} \quad (168)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{0.001 * \Delta t + 1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (169)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0.001 * \Delta t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (170)$$

で、もう 1 ステップ進めると

$$\begin{pmatrix} \alpha_2^- \\ b_{\omega_{x2}}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.001 * \Delta t * z_1 + 1000 * \omega_{x1} \Delta t}{0.001 * \Delta t + 1000} + \omega_{x2} \Delta t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (171)$$

$$P_2^- = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{0.001 * \Delta t + 1000} + \Delta^2 t + 0.001 * \Delta t & -\Delta t \\ -\Delta t & 1 + 0.003 * \Delta t \end{pmatrix} \quad (172)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)e^3 \Delta t}{\Delta t + 1e^6} & -\Delta t \\ -\Delta t & 1 + 0.003 * \Delta t \end{pmatrix} \quad (173)$$

$$S_2 \simeq \frac{(2 + 1000\Delta t) \Delta t}{0.001 * \Delta t + 1000} + 1000 \quad (174)$$

$$= \frac{(3 + 1000\Delta t) \Delta t + 1e^6}{0.001 * \Delta t + 1000} \quad (175)$$

$$K_2 \simeq \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t + 1e^6} \\ \frac{-0.001 * \Delta^2 t - 1000\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t + 1e^6} \end{pmatrix} \quad (176)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t + 1e^6} \\ \frac{-1000\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t + 1e^6} \end{pmatrix} \quad (177)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2^+ \\ b_{\omega_{x2}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2^- \\ b_{\omega_{x2}}^- \end{pmatrix} + K_2 (z_2 - \alpha_2^-) \quad (178)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)\Delta t z_2 + (\Delta t + 1e^6)\alpha_2^-}{(3+1000\Delta t)\Delta t + 1e^6} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (179)$$

$$P_2^+ = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t + 1e^6}{(3+1000\Delta t)\Delta t + 1e^6} & 0 \\ \frac{1000\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t + 1e^6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)e^3 \Delta t}{\Delta t + 1e^6} & -\Delta t \\ -\Delta t & 1 + 0.003 * \Delta t \end{pmatrix} \quad (180)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)e^3 \Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t + 1e^6} & \frac{-(\Delta t + 1e^6)\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t + 1e^6} \\ ? & ? \end{pmatrix} \quad (181)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0.002 * \Delta t & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \quad (182)$$

となって、最終的には

$$P^+ = \begin{pmatrix} 0.558269 & -0.077438 \\ -0.077438 & 0.0216277 \end{pmatrix} \quad (183)$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.000558269 \\ -7.7438e - 05 \end{pmatrix} \quad (184)$$

$$S = 1000.56 \quad (185)$$

に収束していた。なんでだろう。

ただ、とりあえずジャイロの積算のみに頼っていることが分かったので、ゼロ点がずれていると一生ずれるのと早く動くはずれるということがわかった。

Equation 132を使って入力しているジャイロを変換することで、ゼロ点周りでの近似誤差を減らすことが可能。

2.2 非線形カルマンフィルタ

3 Quaternion 表現の KalmanFilter

3.1 ジャイロのバイアスを含めた EKF

3.1.1 関係式

角速度からクォータニオンを更新する式

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \tilde{\mathbf{q}}_t \quad (186)$$

クォータニオンから重力加速度を求める式

$$\begin{pmatrix} acc_x \\ acc_y \\ acc_z \end{pmatrix} = {}^W_A \mathbf{R}^T \mathbf{g}^W = \begin{pmatrix} 2(-q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} g \quad (187)$$

状態量

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ b_{\omega_x} \\ b_{\omega_y} \\ b_{\omega_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \mathbf{b}_{\omega} \end{pmatrix} \quad (188)$$

3.1.2 中身

- \mathbf{x}_k^+
- \mathbf{P}_k^+

がすでに求まっている状態で,

- $\boldsymbol{\omega}_{k+1}$
- \mathbf{acc}_{k+1}

を取得したところから始まる.

謎だけど入力 \mathbf{u} をジャイロだと考えて, Predicted state estimate は

$$\mathbf{x}_{k+1}^- = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}^- \\ \mathbf{b}_{\omega_{k+1}}^- \end{pmatrix} = f(\mathbf{x}_k^+, \mathbf{u}_{k+1}) \quad (189)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{k+1} - \mathbf{b}_{\omega_k}^+) \tilde{\mathbf{q}}_k^+ \Delta t + \tilde{\mathbf{q}}_k^+ \\ \mathbf{b}_{\omega_k}^+ \end{pmatrix} \quad (190)$$

$$\begin{pmatrix} q_0^+ - \frac{\omega_{k+1x} - b_{\omega_{kx}}^+ \Delta t q_1^+ - \frac{\omega_{k+1y} - b_{\omega_{ky}}^+ \Delta t q_2^+ - \frac{\omega_{k+1z} - b_{\omega_{kz}}^+ \Delta t q_3^+}{2}}{2} \\ \frac{\omega_{k+1x} - b_{\omega_{kx}}^+ \Delta t q_0^+ + q_1^+ + \frac{\omega_{k+1z} - b_{\omega_{kz}}^+ \Delta t q_2^+ - \frac{\omega_{k+1y} - b_{\omega_{ky}}^+ \Delta t q_3^+}{2}}{2} \\ \frac{\omega_{k+1y} - b_{\omega_{ky}}^+ \Delta t q_0^+ - \frac{\omega_{k+1z} - b_{\omega_{kz}}^+ \Delta t q_1^+ + q_2^+ + \frac{\omega_{k+1x} - b_{\omega_{kx}}^+ \Delta t q_3^+}{2}}{2} \\ \frac{\omega_{k+1z} - b_{\omega_{kz}}^+ \Delta t q_0^+ + \frac{\omega_{k+1y} - b_{\omega_{ky}}^+ \Delta t q_1^+ - \frac{\omega_{k+1x} - b_{\omega_{kx}}^+ \Delta t q_2^+ + q_3^+}{2}}{2} \\ b_{\omega_{kx}}^+ \\ b_{\omega_{ky}}^+ \\ b_{\omega_{kz}}^+ \end{pmatrix} \quad (191)$$

となるので,

$$\mathbf{F}_k = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_k^+, \mathbf{u}_{k+1}} \quad (192)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\omega_{k+1x} - b_{\omega_{kx}}^+ \Delta t}{2} & -\frac{\omega_{k+1y} - b_{\omega_{ky}}^+ \Delta t}{2} & -\frac{\omega_{k+1z} - b_{\omega_{kz}}^+ \Delta t}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega_{k+1x} - b_{\omega_{kx}}^+ \Delta t}{2} & 1 & \frac{\omega_{k+1z} - b_{\omega_{kz}}^+ \Delta t}{2} & -\frac{\omega_{k+1y} - b_{\omega_{ky}}^+ \Delta t}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega_{k+1y} - b_{\omega_{ky}}^+ \Delta t}{2} & -\frac{\omega_{k+1z} - b_{\omega_{kz}}^+ \Delta t}{2} & 1 & \frac{\omega_{k+1x} - b_{\omega_{kx}}^+ \Delta t}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega_{k+1z} - b_{\omega_{kz}}^+ \Delta t}{2} & \frac{\omega_{k+1y} - b_{\omega_{ky}}^+ \Delta t}{2} & -\frac{\omega_{k+1x} - b_{\omega_{kx}}^+ \Delta t}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (193)$$

$$= \begin{pmatrix} \square & \triangle \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \quad (194)$$

よって Predicted covariance estimate は

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (195)$$

$$= \begin{pmatrix} \square & \triangle \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \clubsuit & \heartsuit \\ \diamond & \spadesuit \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square^T & \mathbf{O} \\ \triangle^T & \mathbf{E} \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (196)$$

$$= \begin{pmatrix} (\square\clubsuit + \triangle\diamond) \square^T + (\square\heartsuit + \triangle\spadesuit) \triangle^T & \square\heartsuit + \triangle\spadesuit \\ \diamond\square^T + \spadesuit\triangle^T & \spadesuit + \mathbf{Q}_{k+1}^{lower} \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (197)$$

$$= \begin{pmatrix} (\square\clubsuit + \triangle\diamond) \square^T + (\square\heartsuit + \triangle\spadesuit) \triangle^T + \mathbf{Q}_{k+1}^{upper} & \square\heartsuit + \triangle\spadesuit \\ \diamond\square^T + \spadesuit\triangle^T & \spadesuit + \mathbf{Q}_{k+1}^{lower} \end{pmatrix} \quad (198)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit' & \heartsuit' \\ \diamond' & \spadesuit' \end{pmatrix} \quad (199)$$

注目は $\mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k+1}^+ \mathbf{F}_k^T$ の右下 \spadesuit が単調増加になってしまっているところ. これで予測の部分は終わり. ちなみに, \mathbf{x}_{k+1}^- はクォータニオンの要件である大きさ 1 を満たしていない可能性があるため, 正規化する.

次に, 修正の部分.

$$h(\mathbf{x}_{k+1}^-) = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}^{*-} \mathbf{g}^W \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}^- = \begin{pmatrix} 2(-q_0^- q_2^- + q_1^- q_3^-) \\ 2(q_0^- q_1^- + q_2^- q_3^-) \\ q_0^{-2} - q_1^{-2} - q_2^{-2} + q_3^{-2} \end{pmatrix} g \quad (200)$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_{k+1}^-} \quad (201)$$

$$= 2g \begin{pmatrix} -q_2^- & q_3^- & -q_0^- & q_1^- & 0 & 0 & 0 \\ q_1^- & q_0^- & q_3^- & q_2^- & 0 & 0 & 0 \\ q_0^- & -q_1^- & -q_2^- & q_3^- & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (202)$$

$$= \begin{pmatrix} \$ & \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (203)$$

となる. よって

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{a}cc_{k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1}^-) \quad (204)$$

$$\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} \quad (205)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{S}_{k+1}^{-1} \quad (206)$$

となって

$$\mathbf{x}_{k+1}^+ = \mathbf{x}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1} \quad (207)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^+ = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1}^- \quad (208)$$

となる. \mathbf{R}_{k+1} が一定であれば, \mathbf{P}_{k+1}^+ は今回の観測による影響は受けないことに注意. \mathbf{H}_{k+1} 経由で次のサイクルから入る.

また,

$$\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} \quad (209)$$

$$= \begin{pmatrix} \$ & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \clubsuit' & \heartsuit' \\ \diamondsuit' & \spadesuit' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \$ & \mathbf{O} \end{pmatrix}^T + \mathbf{R}_{k+1} \quad (210)$$

$$= \$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \quad (211)$$

より

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{S}_{k+1}^{-1} \quad (212)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit' & \heartsuit' \\ \diamondsuit' & \spadesuit' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \$ & \mathbf{O} \end{pmatrix}^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \quad (213)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit' \$^T \\ \diamondsuit' \$^T \end{pmatrix} \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \quad (214)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \\ \diamondsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \end{pmatrix} \quad (215)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^+ = \mathbf{x}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1} \quad (216)$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}^+ \\ \mathbf{b}_{\omega_{k+1}}^+ \end{pmatrix} \quad (217)$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}^- \\ \mathbf{b}_{\omega_{k+1}}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \clubsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{y}_{k+1} \\ \diamondsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{y}_{k+1} \end{pmatrix} \quad (218)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^+ = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1}^- \quad (219)$$

$$= \left(\mathbf{E} - \begin{pmatrix} \clubsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$ & \mathbf{O} \\ \diamondsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$ & \mathbf{O} \end{pmatrix} \right) \mathbf{P}_{k+1}^- \quad (220)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{E} - \clubsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$ & \mathbf{O} \\ -\diamondsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$ & \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{P}_{k+1}^- \quad (221)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{E} - \clubsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$ & \mathbf{O} \\ -\diamondsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$ & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \clubsuit' & \heartsuit' \\ \diamondsuit' & \spadesuit' \end{pmatrix} \quad (222)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit' - \clubsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$\clubsuit' & \heartsuit' - \clubsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$\heartsuit' \\ \diamondsuit' - \diamondsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$\clubsuit' & \spadesuit' - \diamondsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$\heartsuit' \end{pmatrix} \quad (223)$$

さらに, 更新の時と同様に \mathbf{x}_{k+1}^+ はクォータニオンの要件である大きさ 1 を満たしていない可能性があるので, 正規化する.

ところで \mathbf{P}^+ が対角行列だとすると

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k+1}^+ \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (224)$$

$$= \begin{pmatrix} \square\clubsuit\square^T + \triangle\spadesuit\triangle^T + \mathbf{Q}_{k+1}^{upper} & \triangle\spadesuit \\ \spadesuit\triangle^T & \spadesuit + \mathbf{Q}_{k+1}^{lower} \end{pmatrix} \quad (225)$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit' & \triangle\spadesuit \\ \spadesuit\triangle^T & \spadesuit + \mathbf{Q}_{k+1}^{lower} \end{pmatrix} \quad (226)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^+ = \begin{pmatrix} \clubsuit' - \clubsuit' \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$\clubsuit' & \triangle\spadesuit \\ \spadesuit\triangle^T - \spadesuit\triangle^T \$^T \left(\$\clubsuit' \$^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \$\clubsuit' & \spadesuit + \mathbf{Q}_{k+1}^{lower} \end{pmatrix} \quad (227)$$

となるので, 対角行列ではないっぽい.

ところで, \mathbf{Q} と \mathbf{R} の決め方としては, やはりセンサの信頼度を入れるのが正解っぽい. \mathbf{R} はそのままセンサの分散

を入れれば良いが, \mathbf{Q} が問題. 一説によると

$$\mathbf{V}_{k+1} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_{k+1}} \quad (228)$$

$$\mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{V}_{k+1} \begin{pmatrix} \sigma_{\omega_x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\omega_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\omega_z}^2 \end{pmatrix} \mathbf{V}_{k+1}^T \quad (229)$$

$$\mathbf{R}_{k+1} = \begin{pmatrix} \sigma_{acc_x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{acc_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{acc_z}^2 \end{pmatrix} \quad (230)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & 0 & \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \\ p & 0 & 0 & -q & -\frac{q_0}{2} & \frac{q_3}{2} \\ q & 0 & 0 & p & -\frac{q_3}{2} & -\frac{q_0}{2} \\ 0 & q & -p & 0 & \frac{q_2}{2} & -\frac{q_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (236)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.01^2 & & & & & \\ & 0.01^2 & & & & \\ & & 0.01^2 & & & \\ & & & 0.01^2 & & \\ & & & & 0.03 & \\ & & & & & 0.03 \end{pmatrix} \quad (237)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{P}_k^+ + \Delta t \left(\mathbf{Q} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{P}_k^+ + \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_{k+1}^T \right) \quad (238)$$

とするのが良い? こうすると, \mathbf{Q} の右下は \mathbf{O} になる.

$$\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}^- = \tilde{\mathbf{q}}_k^+ + \Delta t \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & 0 \\ p & 0 & 0 & -q \\ q & 0 & 0 & p \\ 0 & q & -p & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_k^+ \quad (239)$$

3.3 Discrete-time extended Kalman filter

https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_Kalman_filter#Discrete-time_extended_Kalman_filter によると, わざわざ自分で離散系に直さなくても良いらしい.

$$\mathbf{V}_{k+1} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_{k+1}} \quad (231)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\Delta t q_1^+}{2} & -\frac{\Delta t q_2^+}{2} & -\frac{\Delta t q_3^+}{2} \\ \frac{\Delta t q_0^+}{2} & -\frac{\Delta t q_3^+}{2} & \frac{\Delta t q_2^+}{2} \\ \frac{\Delta t q_3^+}{2} & \frac{\Delta t q_0^+}{2} & -\frac{\Delta t q_1^+}{2} \\ -\frac{\Delta t q_2^+}{2} & \frac{\Delta t q_1^+}{2} & \frac{\Delta t q_0^+}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (232)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{k+1}^{upper} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (233)$$

$$\mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{V}_{k+1} \Sigma_{\omega} \mathbf{V}_{k+1}^T \quad (234)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{k+1}^{upper} \Sigma_{\omega} \mathbf{V}_{k+1}^{upperT} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (235)$$

3.2 autopilot の実装

<http://autopilot.sourceforge.net/kalman.html> が web ページでは紹介されているけど, 実装はもっと別のことをしているっぽい. ジャイロが 2 つしかついていないっぽいのと, C の計算が謎い.

$$\dot{\mathbf{x}}_t = f(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) \quad (240)$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_t \\ \dot{\mathbf{b}}_{\omega_t} \end{pmatrix} \quad (241)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Omega(\omega_t - \mathbf{b}_{\omega_t}) \tilde{\mathbf{q}}_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (242)$$

より

$$\mathbf{F}_t = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t} \quad (243)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Omega(\omega_t - \mathbf{b}_{\omega_t}) & \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \\ -\frac{q_0}{2} & \frac{q_3}{2} & -\frac{q_2}{2} & -\frac{q_1}{2} \\ -\frac{q_3}{2} & -\frac{q_0}{2} & \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \\ \frac{q_2}{2} & -\frac{q_1}{2} & \frac{q_0}{2} & 0 \\ \mathbf{O} & & & \end{pmatrix} \quad (244)$$

となって

$$\dot{\mathbf{P}}_t = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_t + \mathbf{P}_t \mathbf{F}_t^T + \mathbf{Q}_t \quad (245)$$

これは結局普通の EKF とほぼ同じなんだけど、

- $(\Delta t)^2$ の項が消えている
- Q が微分の式にかける

なので、こちらの方が効率良さそう。