שיטות לפתרון תצריף האוהלים

איתן ספיר ואיתן ייבנין.

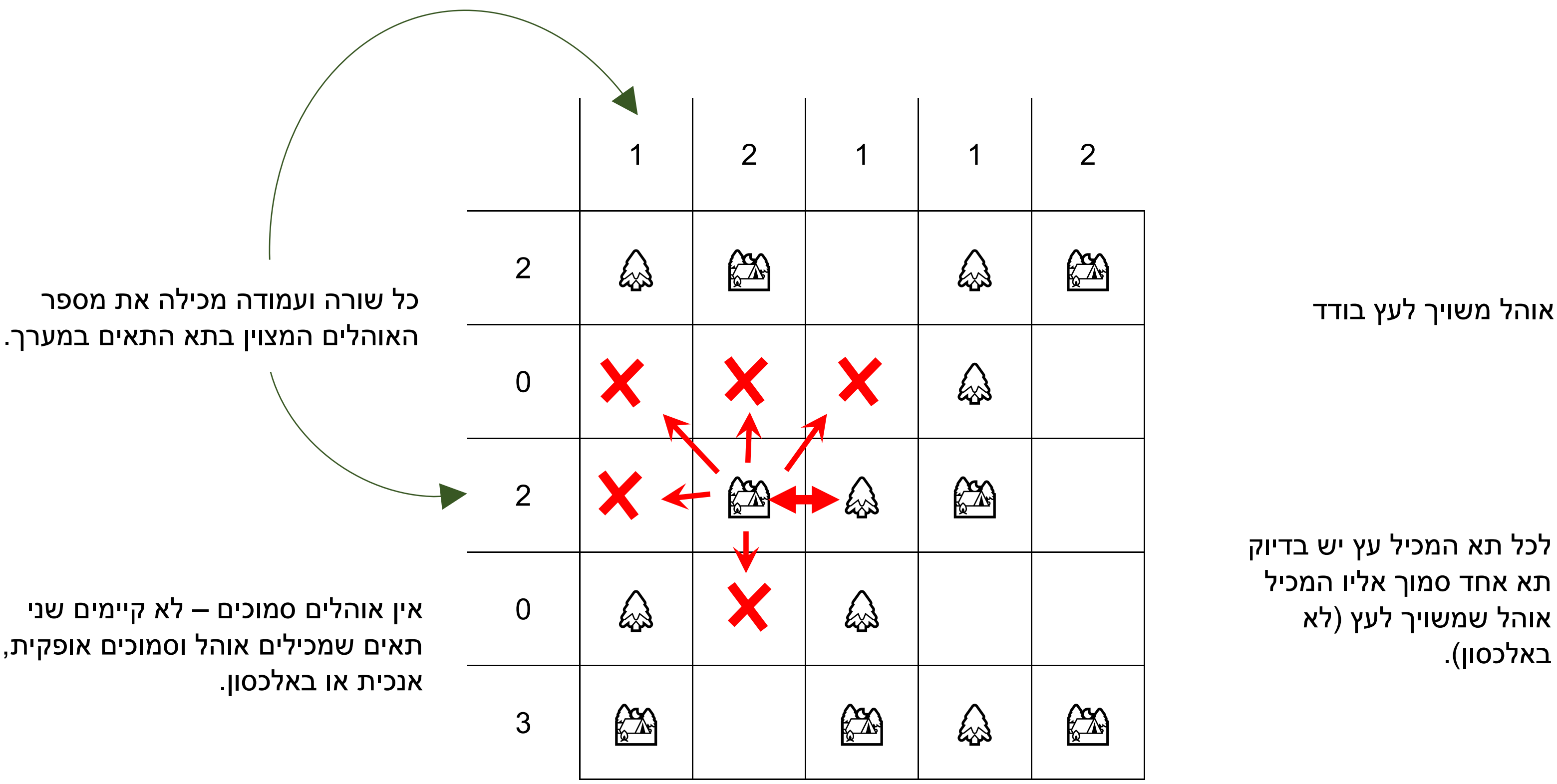
מנחה : פרופ' דניאל ברנד.

תיאור כללי

הפרויקט שלנו סובב סביב בעיית האוהלים. משחק האוהלים הוא פאזל בו מקבלים כקלט מפה מגודל $n \times n$ ובה מפוזרים סימונים מסוג ראשון (המכונים 'עצים') בתאים מסוימים ושני מערכים מגודל n המציינים את מספר הסימונים מהסוג השני (המכונים 'אוהלים') שנרצה שיופיעו בכל שורה ועמודה.
המטרה היא למקם אוהלים במפה כך שיתקיימו התנאים הבאים :

- כל שורה ועמודה מכילה את מספר האוהלים המצוין בתא התאים במערך.
- לכל תא המכיל עץ יש בדיוק תא אחד סמוך אליו המכיל אוהל שמשויך לעץ (לא באלכסון).
- כל אוהל משויך לעץ אחד בדיוק.
- אין אוהלים סמוכים – לא קיימים שני תאים שמכילים אוהל וסמוכים אופקית, אנכית או באלכסון.

דוגמה: מופע ופתרון חוקי לבעיה:



פתרנו את הבעיה באמצעות שתי גישות:

1. רדוקציה ל- SAT : הגדרנו ביטוי CNF עבור מופע של הבעיה המתאר פתרון חוקי למופע ופתרנו אותו באמצעות הפותרן $SAT4J$.
2. רדוקציה ל- ILP : הגדרנו מערכת אי שוויונים ליניארית (בשלמים) המתארת את אילוצי המופע, שפתרונה מניב פתרון חוקי למופע ופתרנו אותה ע"י שימוש בפותרן $Java\ ILP$.

רדוקציה ל- SAT

בהינתן מופע בגודל n x n לפתרון נגדיר:

- $T_{i,j}$ - יש עץ בשורה ה- i בעמודה ה- j, $1 \leq i,j \leq n$.
- $O_{i,j}$- יש אוהל בשורה ה- i בעמודה ה- j, $1 \leq i,j \leq n$ (אם התא i,j נמצא מחוץ למפה אז $O_{i,j} = False$).
- $K_{i1,j1,i2,j2}$ - האוהל ב- $(i1,j1)$ מקושר לעץ ב-$(i2,j2)$ כאשר $i1 = i2 \pm 1, j1 = j2$ או $i1 = i2, j1 = j2 \pm 1$ $0 \leq i,j \leq n+1$ (אם התא i_1,j_1 או התא i_2,j_2 נמצאים מחוץ למפה, $K_{i_1,j_1,i_2,j_2} = False$).
  i,j מייצגים עמודה ושורה בהתאמה.
- $x_{i,k}$ - בשורה ה- i יש k אוהלים.
- $y_{j,k}$ - בעמודה ה- j יש k אוהלים.

משתני עזר : (שימושם מוגדר בהמשך)

- $A_{i,g,l}, B_{i,g,l}, C_{j,g,l}, D_{j,g,l}$, $1 \leq g \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, $1 \leq i \leq n$.
- $M_{g,i,j}, N_{g,i,j}, S_{g,i,j}, R_{g,i,j}$, $1 \leq i,j \leq n$ משתנים נוספים.
- $\alpha(i,j,g,l)$, $\beta\ (i,j,g,l)$, $\gamma(i,j,g,l)$, $\delta(i,j,g,l)$, $1 \leq i,j,g \leq n$, $1 \leq l \leq$ $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5 \wedge \varphi_6$$

<u>הפסוקים ומשמעותם</u>:

- φ_0 – יש עצים במקומות שלהם, אוהלים במקומות שנתונים (אם נתונים) וגם בכל שורה ובכל עמודה נתון המספר שנתון.
  לפסוקית זו אין משמעות לוגית מיוחדת עבורנו ולכן היא לא מופיעה בקוניונקציה הנ"ל. היא נועדה לאתחול משתנים בערכים שלמים (חיוביים עבור T ושליליים עבור F) עבור פותרן SAT שבו השתמשנו בקוד המממש את הפסוק.
  קישור: http://www.sat4j.org

- φ_1 – אין תא המכיל עץ ואוהל.

$$\varphi_1 = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} (\overline{O_{i,j}} \vee \overline{T_{i,j}})$$

- φ_2 – כל עץ קשור בדיוק לאוהל אחד.

$$\varphi_2 = \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{n}\Big[\Big(\big(\overline{K_{i+1,j,i,j}} \vee \overline{K_{i-1,j,i,j}}\big) \wedge \big(\overline{K_{i+1,j,i,j}} \vee \overline{K_{i,j-1,i,j}}\big) \wedge \big(\overline{K_{i+1,j,i,j}} \vee \overline{K_{i,j+1,i,j}}\big)\Big)$$
$$\wedge \Big(\big(\overline{K_{i-1,j,i,j}} \vee \overline{K_{i,j-1,i,j}}\big) \wedge \big(\overline{K_{i-1,j,i,j}} \vee \overline{K_{i,j+1,i,j}}\big)\Big) \wedge \Big(\big(\overline{K_{i,j+1,i,j}} \vee \overline{K_{i,j-1,i,j}}\big)\Big)$$
$$\wedge \big(\overline{T_{i,j}} \vee K_{i+1,j,i,j} \vee K_{i-1,j,i,j} \vee K_{i,j+1,i,j} \vee K_{i,j-1,i,j}\big) \wedge \big(\overline{K_{i+1,j,i,j}} \vee O_{i+1,j}\big)$$
$$\wedge \big(\overline{K_{i-1,j,i,j}} \vee O_{i-1,j}\big) \wedge \big(\overline{K_{i,j+1,i,j}} \vee O_{i,j+1}\big) \wedge \big(\overline{K_{i,j-1,i,j}} \vee O_{i,j-1}\big) \wedge \big(\overline{K_{i+1,j,i,j}} \vee T_{i,j}\big)$$
$$\wedge \big(\overline{K_{i-1,j,i,j}} \vee T_{i,j}\big) \wedge \big(\overline{K_{i,j+1,i,j}} \vee T_{i,j}\big) \wedge \big(\overline{K_{i,j-1,i,j}} \vee T_{i,j}\big)\Big]$$

- φ_3 – אין אוהלים סמוכים (גם לא באלכסון).

$$\varphi_3 = \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{n}\bigwedge_{l=-1}^{1}\bigwedge_{\substack{m=-1 \\ except\ when\ m=l=0}}^{1}\big(\overline{O_{i,j}} \vee \overline{O_{i+l,j+m}}\big)$$

- φ_4 – כמות האוהלים בשורה היא הכמות המופיעה לצד השורה.

$$\varphi_4 = \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{n}\bigwedge_{k=0}^{n-1}\left(\begin{array}{c} \big(\overline{O_{i,j}} \vee M_{1,i,j} \vee \ldots \vee M_{k,i,j} \vee \overline{x}_{i,k}\big) \wedge \displaystyle\bigwedge_{g=1}^{k}\ \bigwedge_{l=1}^{\lfloor \log_2 n^2-1\rfloor+1}\big(\overline{M_{g,i,j}} \vee \alpha(i,j,g,l) \vee \overline{x_{i,k}}\big) \wedge \\ \big(O_{i,j} \vee N_{1,i,j} \vee \ldots \vee N_{n-k,i,j} \vee \overline{x}_{i,k}\big) \wedge \displaystyle\bigwedge_{g=1}^{\min\{n-k,n-1\}}\ \bigwedge_{l=1}^{\lfloor \log_2 n^2-1\rfloor+1}\big(\overline{N_{g,i,j}} \vee \beta(i,j,g,l) \vee \overline{x_{i,k}}\big) \end{array}\right)$$

- φ_5 – כמות האוהלים בעמודה היא הכמות המופיעה מעל העמודה.

$$\varphi_5 = \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{n}\bigwedge_{k=0}^{n-1}\left(\begin{array}{c} \big(\overline{O_{i,j}} \vee R_{1,i,j} \vee \ldots \vee R_{k,i,j} \vee \overline{y}_{j,k}\big) \wedge \displaystyle\bigwedge_{g=1}^{k}\ \bigwedge_{l=1}^{\lfloor \log_2 n^2-1\rfloor+1}\big(\overline{R_{g,i,j}} \vee \gamma(i,j,g,l) \vee \overline{y_{j,k}}\big) \wedge \\ \big(O_{i,j} \vee S_{1,i,j} \vee \ldots \vee S_{n-k,i,j} \vee \overline{y}_{j,k}\big) \wedge \displaystyle\bigwedge_{g=1}^{\min\{n-k,n-1\}}\ \bigwedge_{l=1}^{\lfloor \log_2 n^2-1\rfloor+1}\big(\overline{S_{g,i,j}} \vee \delta(i,j,g,l) \vee \overline{y_{j,k}}\big) \end{array}\right)$$

- φ_6 – אם יש אוהל בתא מסוים במפה – יש עץ אחד ויחיד סמוך שאליו הוא קשור (אין אוהל בלתי משויך).

$$\varphi_6 = \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{n}\Big(\big(\overline{O}_{i,j} \vee K_{i,j,i+1,j} \vee K_{i,j,i-1,j} \vee K_{i,j,i,j+1} \vee K_{i,j,i,j-1}\big) \wedge \big(\overline{O}_{i,j} \vee \overline{K}_{i,j,i+1,j} \vee \overline{K}_{i,j,i-1,j}\big)$$
$$\wedge \big(\overline{O}_{i,j} \vee \overline{K}_{i,j,i+1,j} \vee \overline{K}_{i,j,i,j+1}\big) \wedge \big(\overline{O}_{i,j} \vee \overline{K}_{i,j,i+1,j} \vee \overline{K}_{i,j,i,j-1}\big) \wedge \big(\overline{O}_{i,j} \vee \overline{K}_{i,j,i-1,j} \vee \overline{K}_{i,j,i,j+1}\big)$$
$$\wedge \big(\overline{O}_{i,j} \vee \overline{K}_{i,j,i-1,j} \vee \overline{K}_{i,j,i,j-1}\big) \wedge \big(\overline{O}_{i,j} \vee \overline{K}_{i,j,i,j+1} \vee \overline{K}_{i,j,i,j-1}\big)\Big)$$

הגדרת משתני העזר:

ב - SAT4J כל משתנה מיוצג על ידי אינקדס יחודי. להלן השמת הערכים לכל המשתנים:

$$T_{i,j} = (i-1)\cdot n + j$$

$$O_{i,j} = n^2 + (i-1)\cdot n + j$$

$$K_{i+1,j,i,j} = 2\cdot n^2 + (i-1)\cdot n + j$$

$$K_{i-1,j,i,j} = 3\cdot n^2 + (i-1)\cdot n + j$$

$$K_{i,j+1,i,j} = 4\cdot n^2 + (i-1)\cdot n + j$$

$$K_{i,j-1,i,j} = 5\cdot n^2 + (i-1)\cdot n + j$$

$$x_{i,k} = 6\cdot n^2 + (i-1)\cdot n + k + 1$$

$$y_{j,k} = 7\cdot n^2 + (j-1)\cdot n + k + 1$$

$$R_{g,i,j} = 8\cdot n^2 + (g-1)\cdot n^2 + (i-1)\cdot n + j$$

$$S_{g,i,j} = n^3 + 8\cdot n^2 + (g-1)\cdot n^2 + (i-1)\cdot n + j$$

$$M_{g,i,j} = 2\cdot n^3 + 8\cdot n^2 + (g-1)\cdot n^2 + (i-1)\cdot n + j$$

$$N_{g,i,j} = 3\cdot n^3 + 8\cdot n^2 + (g-1)\cdot n^2 + (i-1)\cdot n + j$$

$$A_{i,g,l} = 4\cdot n^3 + 8\cdot n^2 + (g-1)\cdot(\lfloor \log_2 n^2 - 1\rfloor + 1) + l$$

$$B_{i,g,l} = 4\cdot n^3 + n\cdot(\lfloor \log_2 n^2 - 1\rfloor + 1) + 8\cdot n^2 + (g-1)\cdot(\lfloor \log_2 n^2 - 1\rfloor + 1) + l$$

$$C_{j,g,l} = 4\cdot n^3 + 2\cdot n\cdot(\lfloor \log_2 n^2 - 1\rfloor + 1) + 8\cdot n^2 + (g-1)\cdot(\lfloor \log_2 n^2 - 1\rfloor + 1) + l$$

$$D_{j,g,l} = 4\cdot n^3 + 3\cdot n\cdot(\lfloor \log_2 n^2 - 1\rfloor + 1) + 8\cdot n^2 + (g-1)\cdot(\lfloor \log_2 n^2 - 1\rfloor + 1) + l$$

$$\alpha(i,j,g,l) = \begin{cases} A_{i,g,l} & \text{אם הביט ה} - l - \text{י של } s_{i,j} \text{ הוא 1} \\ \overline{A_{i,g,l}} & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\beta(i,j,g,l) = \begin{cases} B_{i,g,l} & \text{אם הביט ה} - l - \text{י של } s_{i,j} \text{ הוא 1} \\ \overline{B_{i,g,l}} & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\gamma(i,j,g,l) = \begin{cases} C_{j,g,l} & \text{אם הביט ה} - l - \text{י של } s_{i,j} \text{ הוא 1} \\ \overline{C_{j,g,l}} & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\delta(i,j,g,l) = \begin{cases} D_{j,g,l} & \text{אם הביט ה} - l - \text{י של } s_{i,j} \text{ הוא 1} \\ \overline{D_{j,g,l}} & \text{אחרת} \end{cases}$$

נספח עבור הגדרת ϕ_4 ו-ϕ_5:

על מנת להגדיר את הפסוקיות הללו השתמשנו במאמר:

Frisch, Alan M. and Paul A. Giannaros. "SAT Encodings of the At-Most-k Constraint Some Old , Some New, Some Fast , Some Slow." (2010).

SAT Encodings of the At-Most-k Constraint, (1-4). Artificial Intelligence Group, Department of Computer Science University of York, United Kingdom. frisch@cs.york.ac.uk

http://www.cs.toronto.edu/~fbacchus/csc2512/at_most_k.pdf

מטרת השימוש במאמר הייתה להבין כיצד להגדיר ביעילות פסוק CNF המסתפק בהשמה בה לכל היותר k משתנים בוליאניים מתוך $(X_1, \dots, X_n)$ מקבלים את הערך T. נסביר כיצד לעשות זאת על פי המאמר:

הקידוד בינארי של $(X_1, \dots, X_n)$ יגדיר $\lg(n)$ משתנים בוליאניים $(B_1, \dots, B_{\lg(n)})$. לכל i כך שֶ- $(1 \le i \le n)$ נקשר את X_i למחרוזת s_i כאשר $s_i \in \{0,1\}^{\lceil \lg(n) \rceil}$ היא הקידוד של $i-1$ למחרוזת בינארית באורך $\lceil \lg(n) \rceil$.

נגדיר : $\psi(i,j) = \begin{cases} B_j, & \text{הביט ה} - \text{j של } s_i \text{ הוא } 1 \\ \overline{B_j}, & \text{אחרת} \end{cases}$

עתה נגדיר פסוק המסתפק אם לכל היותר $k = 1$ משתנים מבין $(X_1, \dots, X_n)$ מקבל את הערך T:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{\lceil \lg(n) \rceil} \overline{X_i} \vee \psi(i,j)$$

נתבונן לדוגמא במצב הבא: עבור $n = 4$, $\lceil \lg(n) \rceil = 2$ יהיו לנו (X_1, X_2, X_3, X_4), (B_1, B_2) וגם $(s_1 = 00,\ s_2 = 01,\ s_3 = 10,\ s_4 = 11)$

והפסוק יהיה:

$$\bigwedge_{i=1}^{4} \bigwedge_{j=1}^{2} \overline{X_i} \vee \psi(i,j) =$$

$$= [\overline{X_1} \vee \psi(1,1)] \wedge [\overline{X_1} \vee \psi(1,2)] \wedge [\overline{X_2} \vee \psi(2,1)] \wedge [\overline{X_2} \vee \psi(2,2)] \wedge [\overline{X_3} \vee \psi(3,1)]$$

$$\wedge [\overline{X_3} \vee \psi(3,2)] \wedge [\overline{X_4} \vee \psi(4,1)] \wedge [\overline{X_4} \vee \psi(4,2)] =$$

$$= (\overline{X_1} \vee \overline{B_1}) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{B_2}) \wedge (\overline{X_2} \vee \overline{B_1}) \wedge (\overline{X_2} \vee B_2) \wedge (\overline{X_3} \vee B_1) \wedge (\overline{X_3} \vee \overline{B_2}) \wedge (\overline{X_4} \vee B_1) \wedge (\overline{X_4} \vee B_2)$$

המשמעות היא שאם הפסוקיות עבור X_i יסתפקו וגם $X_i = T$ אזי $(B_1 B_2)$ מייצג את המחרוזת s_i. לכן, אם היה משתנה נוסף $X_t = T$ כאשר $1 \le t \le n$ ו- $t \ne i$ אז אחת הפסוקיות עבורו הייתה מקבלת את הערך F ומכאן הפסוק לא היה מסתפק.

(במקרים בהם לכל i $(1 \le i \le n)$ מתקיים $X_i = F$ הפסוק תמיד ספיק - כל הפסוקית יתארו גרירה ריקה)

נכליל את הפסוק הנ"ל לפסוק אשר יסתפק אם לכל היותר $1 \le k \le n$ משתנים יקבלו את הערך T:
נשנה את הקידוד ונגדיר B_{jg} $(1 \le j \le \lceil \lg(n) \rceil,\ 1 \le g \le k)$, שהם בעצם k סדרות מהצורה של $(B_1, \dots, B_{\lg(n)})$ שהוגדרו קודם לכן. כלומר, כעת ישנה האפשרות לייצוג של k מחרוזות.

נגדיר :
$$\psi(i,g,j) = \begin{cases} B_{jg}, & \text{הביט ה} - j \text{ של } s_i \text{ הוא } 1 \\ \overline{B_{jg}}, & \text{אחרת} \end{cases}$$

הפסוק הוא:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{g=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{\lceil \lg(n) \rceil} \overline{X_i} \vee \psi(i,g,j)$$

המשמעות עתה היא שלכל היותר משתנה אחד מבין $(X_1, \dots, X_n)$ הוא T או שלכל היותר שני איברים הם T וכך הלאה עד k.

הפסוק הזה ניתן לתרגום לפסוק CNF ע"י הגדרת משתנים חדשים T_{gi} $(1 \le i \le n,\ 1 \le g \le k)$ כך שלכל X_i:

$$(\overline{X_i} \vee T_{1i} \vee \dots \vee T_{ki}) \wedge \bigwedge_{g=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{\lceil \lg(n) \rceil} \overline{T_{gi}} \vee \psi(i,g,j)$$

כלומר, על מנת שהפסוק יסתפק:

אם X_i הוא T אזי לפחות אחד מבין T_{gi} חייב לקבל את הערך T ועבור כל משתנה T_{gi} המקבל ערך זה חייבת להיות סדרה B_{ig} המייצגת מחרוזת s_i (כלומר כל תו j בסדרה ב-B_{ig} חייב להתאים לתו j במחרוזת s_i).

נשים לב כי אם הפסוק הסתפק ו- X_i הוא T אז לפחות אחד מבין ה-T_{gi}-ים קיבל את הערך T ועבור כל משתנה T_{gi} כזה חייבת להיות סדרה B_{ig} המייצגת מחרוזת s_i – אך השמה מספקת מסוג זה עדיין שומרת על הדרישה של לכל היותר k משתנים המקבלים את הערך T.

הפסוק המלא הוא:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} (\overline{X_i} \vee T_{1i} \vee \dots \vee T_{ki}) \wedge \bigwedge_{g=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{\lceil \lg(n) \rceil} \overline{T_{gi}} \vee \psi(i,g,j)$$

רדוקציה ל- ILP

בהינתן מופע של הבעיה נסמן:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{יש עץ בשורה ה } i \text{ בעמודה ה j} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נגדיר משתנים $x_{i,j,k}$ כאשר $1 \leq i,j \leq n$, $0 \leq k \leq 3$ שמשמעותם:

$x_{i,j,k} = 1$ אם ורק אם בתא ה i,j של המפה יש אוהל שקשור לעץ שמיקומו תלוי ב k, ונקבע בצורה הבאה:

$k = 0$: העץ נמצא בתא $(i, j-1)$.

$k = 1$: העץ נמצא בתא $(i-1, j)$.

$k = 2$: העץ נמצא בתא $(i, j+1)$.

$k = 3$: העץ נמצא בתא $(i+1, j)$.

נסמן את העץ הזה ב $t_{i,j,k}$.

נסמן r_i את מספר האוהלים שצריכים להופיע בשורה ה i, וב c_j את מספר האוהלים בעמודה ה j.

נשים לב שלכל משתנה x ולכל $a \leq b$ ניתן לקבוע כי $a \leq x \leq b$, בעזרת מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x \leq b \\ -x \leq a \end{cases}$$

ובפרט ניתן לקבוע כי $x = a$.

עבור כל $1 \leq i,j \leq n$, $0 \leq k \leq 3$ נגדיר את אי השוויונות:

$$0 \leq x_{i,j,k} \leq 1$$

ולמקרי הקצה:

$$\begin{cases} x_{i,1,0} = 0 \\ x_{i,n,2} = 0 \\ x_{1,j,1} = 0 \\ x_{n,j,3} = 0 \end{cases}$$

כמו כן נוסיף אי שוויונות למקרה שיוצאים מהמפה:

כאשר $0 \leq j \leq n+1$, $0 \leq i \leq n+1$, $0 \leq k \leq 3$:

$$\begin{cases} x_{i,0,k} = 0 \\ x_{i,n+1,k} = 0 \\ x_{0,j,k} = 0 \\ x_{n+1,j,k} = 0 \end{cases}$$

אי שוויונות אלו מונעים מ $x_{i,j,k}$ להיות שלילי, וכוונתם היא לשמור על כך ש $x_{i,j,k} = 1$ במידה ובפתרון יש אוהל בתא ה i,j והוא קשור לעץ $t_{i,j,k}$ ו 0 אחרת. כמו כן, לכל $1 \leq i,j \leq n$ נבנה את המשוואות מהצורה:

$$x_{i,j+1,0} + x_{i+1,j,1} + x_{i,j-1,2} + x_{i-1,j,3} = t_{i,j}$$

יחד עם אי השוויון הקודם, משוואה זו שומרת על כך שבמידה ויש עץ בתא ה i,j, בפתרון יהיה בדיוק אוהל אחד שקשור אליו, ובמידה ואין שם עץ, לא יהיו אוהלים שקשורים לתא זה.

בנוסף, לכל $1 \leq i,j \leq n$ נגדיר:

$$\sum_{m=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}\sum_{k=0}^{3} x_{i+m,j+l,k} \leq 1$$

אי השוויונות האלו עבור התאים $i-1,j-1$, $i,j-1$, $i-1,j$, i,j שומרים על כך שאם יש אוהל בתא ה i,j שקשור לעץ כלשהו אז אין אוהלים בתאים המקיפים אותו שקשורים לאיזהשהו עץ. כאשר $m = l = 0$, אי השוויון שומר על כך שכל עץ קשור לכל היותר לאוהל אחד. כמו כן לכל i נגדיר:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{3} x_{i,j,k} = r_i$$

כך נשמור שכמות האוהלים בשורה היא אכן הכמות המתבקשת מהנתון.

לכל j נגדיר את:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{3} x_{i,j,k} = c_j$$

כך נשמור שכמות האוהלים בעמודה היא אכן הכמות המתבקשת מהנתון.

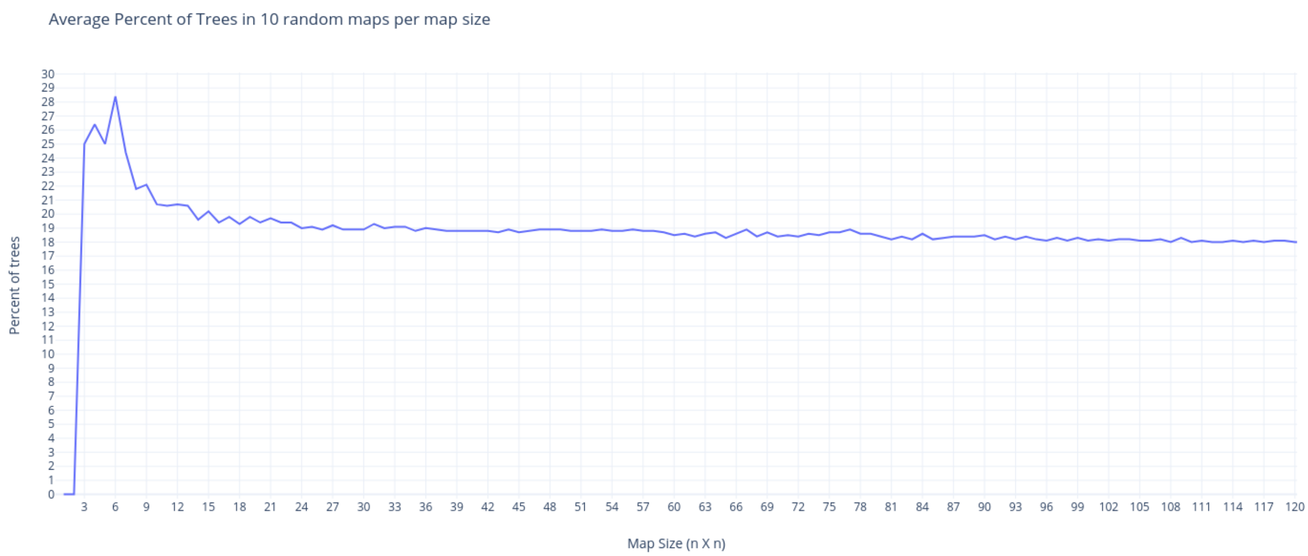
יצירת מפות

על מנת להשוות בין מופעים שונים של הפאזל כתבנו גנרטור המייצר מופעים חוקיים בזמן פולינומיאלי של $O(n^2 \ln(n))$.

הגנרטור מייצר מופע ופתרון עבורו באופן הבא:

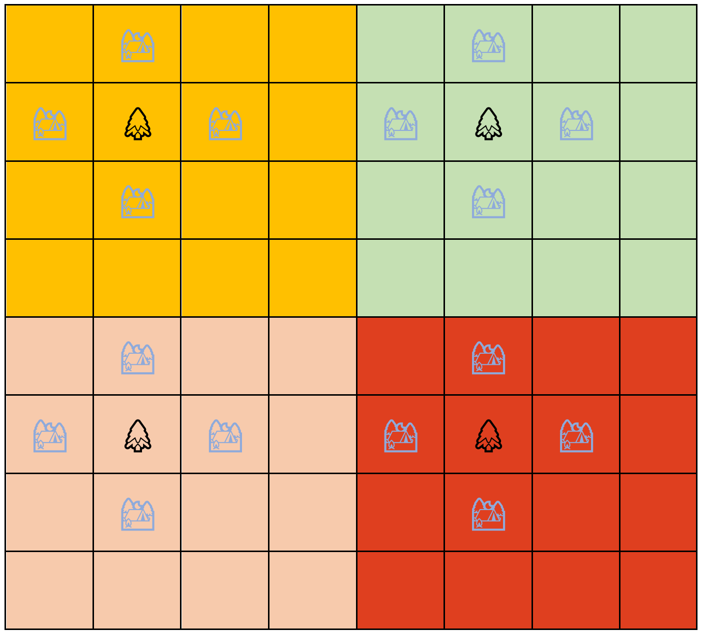
- מחזיק ברשימה של כל הזוגות האפשריים של עץ ואוהל שהוספתם בשלב הנוכחי לפתרון (למפה הנבנית) לא תפגע בחוקיותו, כלומר אילוצי הבעיה עדיין יישמרו.
- מגריל זוג אחד מן הזוגות ברשימה בהתפלגות אחידה ומוסיף אותו למפה.
- מנקה את הרשימה מכל הזוגות שעלולים כעת לפגוע בנכונות הפתרון וחוזר בלולאה לשלב הקודם עד אשר הרשימה ריקה.
- כאשר הרשימה ריקה, הגנרטור מנקה את האוהלים מהמפה ומחזיר אותה.

ייצרנו באמצעות הגנרטור מופעים בגדלים שונים ושמנו לב לכך שאחוז העצים מתייצב על 18%:



אפיון מפות עם מספר פתרונות רב

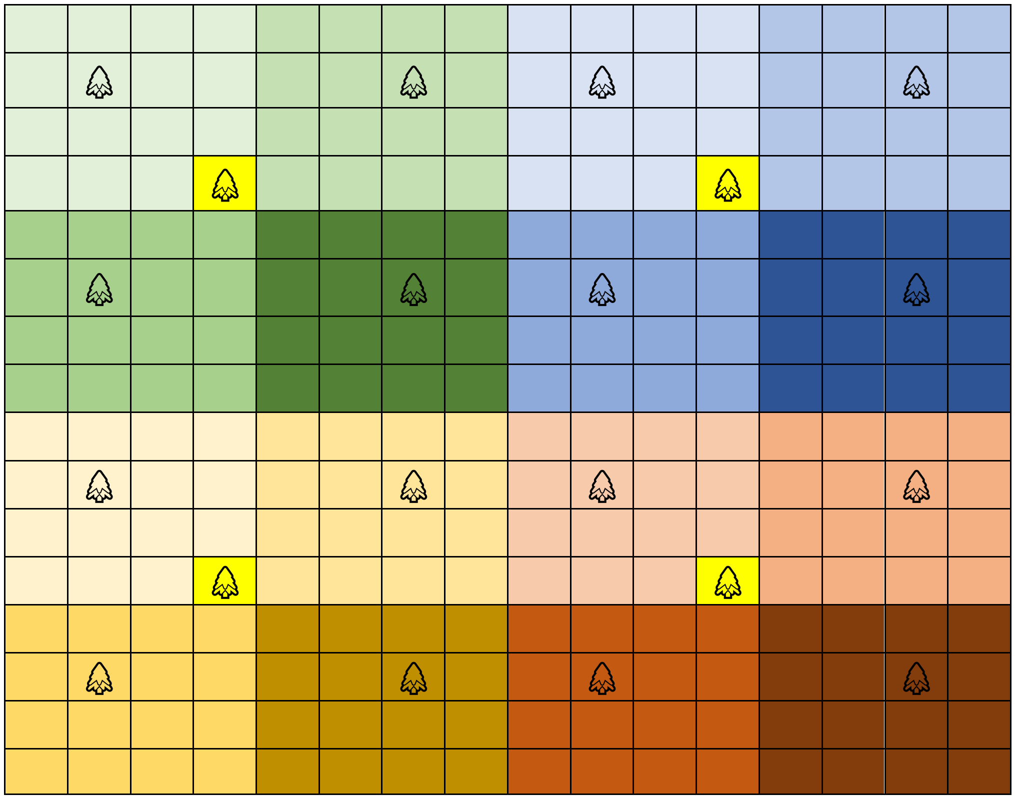
נשים לב כי עבור מפה בגודל $n\ X\ n$, שבה ניתן לכל עץ "בלוק" של $4X4$ משבצות ללא עצים אחרים מסביבו כבאיור:



במפה כזו ישנם $\frac{n^2}{16}$ עצים המסודרים בצורה שבה האוהלים של כל עץ לא תלויים במיקום של האוהלים של שאר העצים ולכן יש $4^{\frac{n^2}{16}}$ פתרונות.

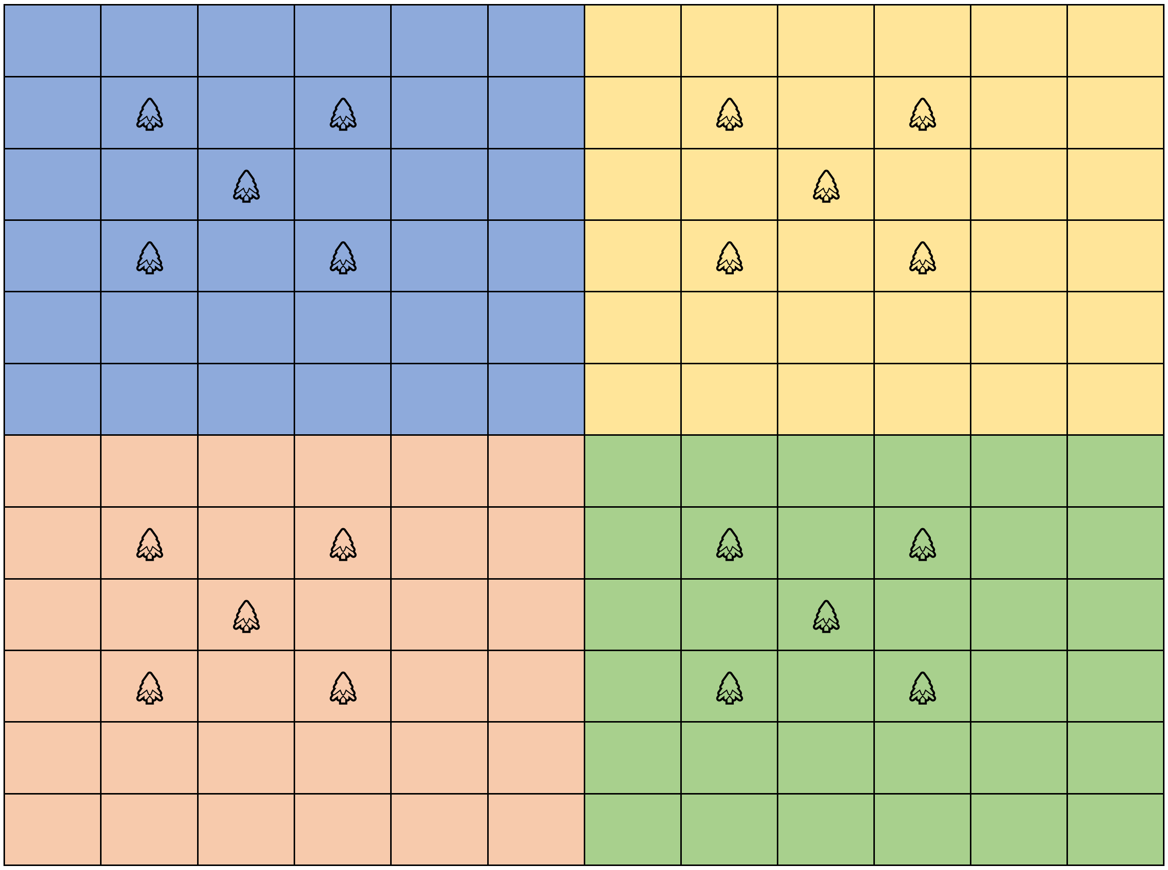
כעת נשפר את המפה בכמה צורות:

צורה 1: לכל רביעית בלוקים נוסיף עוד עץ באחד מהתאים שמחברים אותם:



בצורה זו נכפיל את כמות הפתרונות בכל רביעיה של בלוקים פי $\frac{9}{4}$. בכל בלוק יש 64 משבצות ולכן נכפיל את מספר הפתרונות הכולל פי $2.25^{\frac{n^2}{64}}$ ולכן מספר הפתרונות הוא $2.25^{\frac{n^2}{64}} \cdot 4^{\frac{n^2}{16}}$.

צורה 2: נגדיל את הבלוקים לגודל $6\ X\ 6$ ונמקם עצים בצורת איקס בגודל 3:



לכל בלוק יש 24 אפשרויות למיקום אוהלים. יש $\frac{n^2}{36}$ בלוקים ולכן כמות הפתרונות היא $24^{\frac{n^2}{36}} \approx 4.1^{\frac{n^2}{16}}$.

<u>חסמים עבור כמות עצים במפה</u>

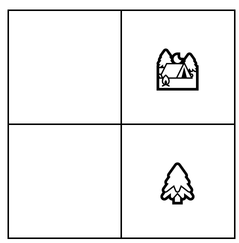
<u>חסם תחתון:</u> לכל אוהל במפה, פרט לדפנות יש 4 אפשרויות לעץ הקשור אליו. לאוהלים בדפנות, פרט לקצוות יש 3 אפשרויות לעץ הקשור אליו, ולאוהלים בקצוות יש 2.

לכן בסך הכל יש $4\cdot(n-2)^2+3\cdot4\cdot(n-2)+2\cdot4=4\cdot n^2-4\cdot n$ אפשרויות לצירופי עצים ואוהלים במפה.

הוספה של זוג של עץ ואוהל פוסלת לכל היותר 37 אפשרויות –4 אפשרויות לעץ לכל האוהלים שמקיפים אותו וארבע אפשרויות עבור עצמו, ובנוסף עוד אפשרות אחת שלא נספרה עבור העץ. ולכן במפה הדלילה ביותר יש לפחות $\frac{4n^2-4n}{37}$ עצים.

<u>חסם עליון:</u>

אפשר למקם בכל ריבוע עץ ואוהל באופן הבא:



ולמקם בלוקים סמוכים כאלה במפה.

כך נקבל כי החסם העליון הוא לפחות $\frac{n^2}{4}$ עבור n זוגי ו $\frac{(n-1)^2}{4}$ כאשר n אי זוגי.