# 2.向量

## （d4）有序向量：二分查找（改进）

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

# 版本B：改进思路

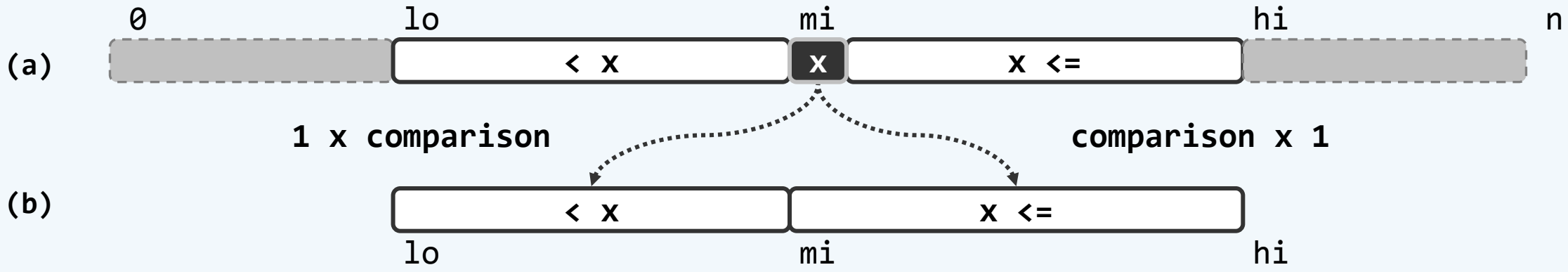
- 二分查找中左、右分支转向代价不平衡的问题，也可直接解决
- 比如，每次迭代（或每个递归实例）仅做1次关键码比较

  如此，所有分支只有2个方向，而不再是3个
- 同样地，轴点mi取作中点，则查找每深入一层，问题规模也缩减一半

  1） e < x：则e若存在必属于左侧子区间S[lo, mi)，故可递归深入

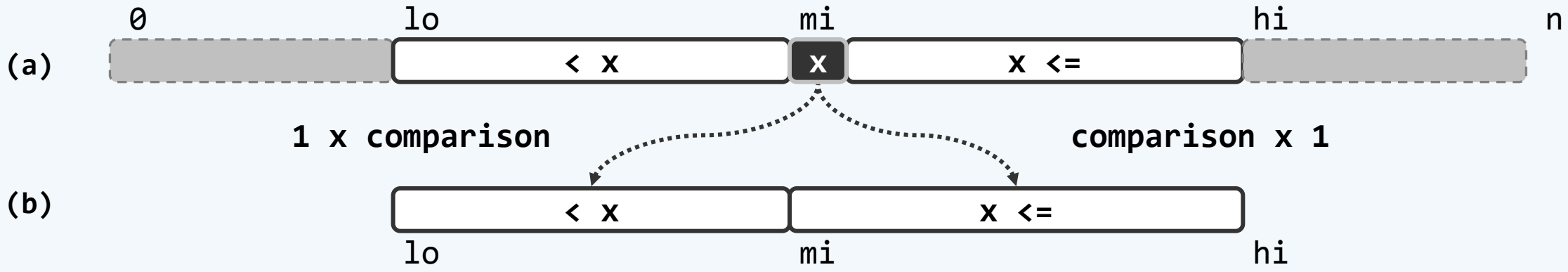
  2） x <= e：则e若存在必属于右侧子区间S[mi, hi)，亦可递归深入

  只有当元素数目hi - lo = 1时，才判断该元素是否命中



# 版本B：实现

```
❖ template <typename T> static Rank binSearch(T* A, T const & e, Rank lo, Rank hi) {
    while (1 < hi - lo) { //有效查找区间的宽度缩短至1时，算法才会终止
       Rank mi = (lo + hi) >> 1; //以中点为轴点，经比较后确定深入
       (e < A[mi]) ? hi = mi : lo = mi; //[lo, mi)或[mi, hi)
    } //出口时hi = lo + 1，查找区间仅含一个元素A[lo]
    return (e == A[lo]) ? lo : -1 ; //返回命中元素的秩或者-1
  } //相对于版本A，最好（坏）情况下更坏（好）；各种情况下的SL更加接近，整体性能更趋稳定
```



# 版本B：语义约定

❖ 以上二分查找及Fibonacci查找算法

均未严格地兑现search()接口的语义约定：返回**不大于e的最后一个**元素

❖ 只有兑现这一约定，才可有效支持相关算法，比如：V.insert(1 + V.search(e), e)

1）当有多个命中元素时，必须返回**最靠后（秩最大）者**

2）失败时，应返回**小于e的最大者（含哨兵[lo - 1]）**

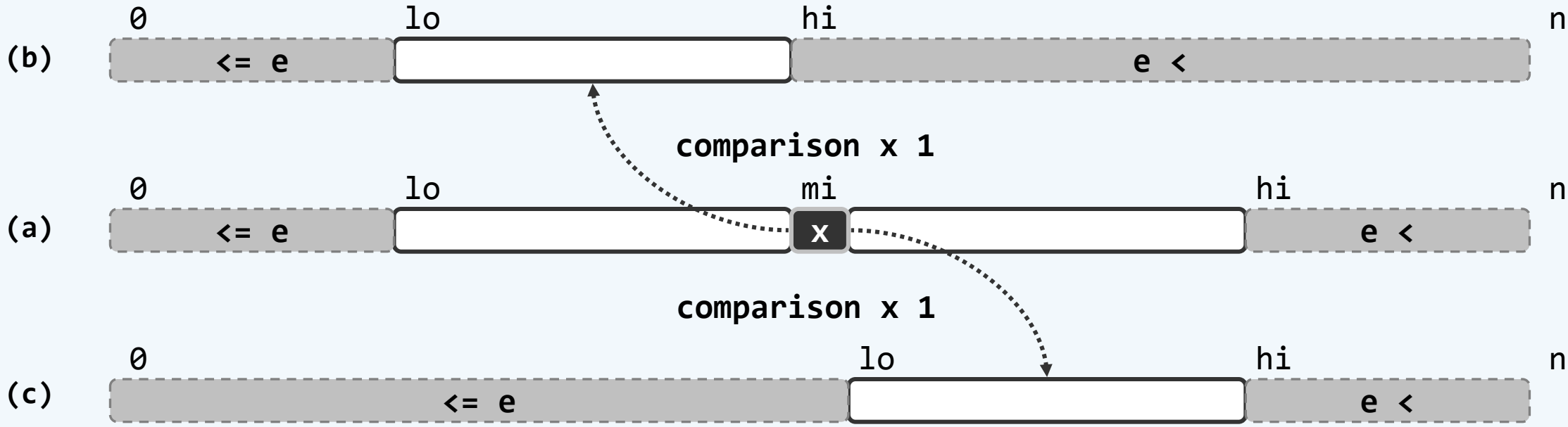
# 版本C：实现

```
template <typename T> static Rank binSearch(T* A, T const& e, Rank lo, Rank hi) {
    while (lo < hi) { //不变性：A[0, lo) <= e < A[hi, n)
        Rank mi = (lo + hi) >> 1; //以中点为轴点，经比较后确定深入
        (e < A[mi]) ? hi = mi : lo = mi + 1; //[lo, mi)或(mi, hi)
    } //出口时，A[lo = hi]为大于e的最小元素
    return --lo; //故lo - 1即不大于e的元素的最大秩
}
```

- 与版本B的差异
  1. 待查找区间宽度缩短至`0`而非`1`时，算法才结束
  2. 转入右侧子向量时，左边界取作`mi + 1`而非`mi` —— A[mi]会被遗漏？
  3. 无论成功与否，返回的秩严格符合接口的语义约定...

# 版本C：正确性

- 不变性：A[0, lo) <= e < A[hi, n)　　//A[hi]总是大于e的最小者
- 初始时，lo = 0且hi = n，A[0, lo) = A[hi, n) = ∅，自然成立
- 数学归纳：假设不变性一直保持至(a)，以下无非两种情况...
- 单调性：显而易见



# 课后

- 针对二分查找，Knuth（ACP-v3-s6.2.1-ex_23）曾指出：

  将三分支变为两分支后的改进效果

  需要到n非常大（$2^{2*(17-(-16))} = 2^{66}$）后方能体现

试阅读相关段落；这一结论，对当下的实际应用有何意义？