2.向量

（d2）有序向量：二分查找

群猴道：“自从爷爷去后，这山被二郎菩萨点上火，烧杀了大半。我们蹲在井里，钻在涧内，藏于铁板桥下，得了性命。及至火灭烟消，出来时，又没花果养赡，难以存活，别处又去了一半。我们这一半，捱苦的住在山中，这两年，又被些打猎的抢了一半去也。”

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

统一接口

```
template <typename T> //查找算法统一接口，0 <= lo < hi <= _size
Rank Vector<T>::search(T const & e, Rank lo, Rank hi) const {
    return (rand() % 2) ? //按各50%的概率随机选用
        binSearch(_elem, e, lo, hi) //二分查找算法，或者
      : fibSearch(_elem, e, lo, hi); //Fibonacci查找算法
}
```

- 如何处置特殊情况？

  比如，目标元素不存在；或者反过来，目标元素同时存在多个

语义约定

❖ 至少，应该便于有序向量自身的维护：V.insert(1 + V.search(e), e)

即便失败，也应给出新元素适当的插入位置

若允许重复元素，则每一组也需按其插入的次序排列

❖ 约定：在有序向量区间V[lo, hi)中，确定不大于e的最后一个元素

若 -∞ < e < V[lo]， 则 返回lo - 1（左侧哨兵）

若 V[hi - 1] < e < +∞， 则 返回hi - 1（末元素 = 右侧哨兵左邻）

版本A：原理

❖ 减而治之：以任一元素x = S[mi]为界，都可将待查找区间分为三部分

S[lo, mi) <= S[mi] <= S(mi, hi)　　//S[mi]称作轴点

❖ 只需将目标元素e与x做一比较，即可分三种情况进一步处理：

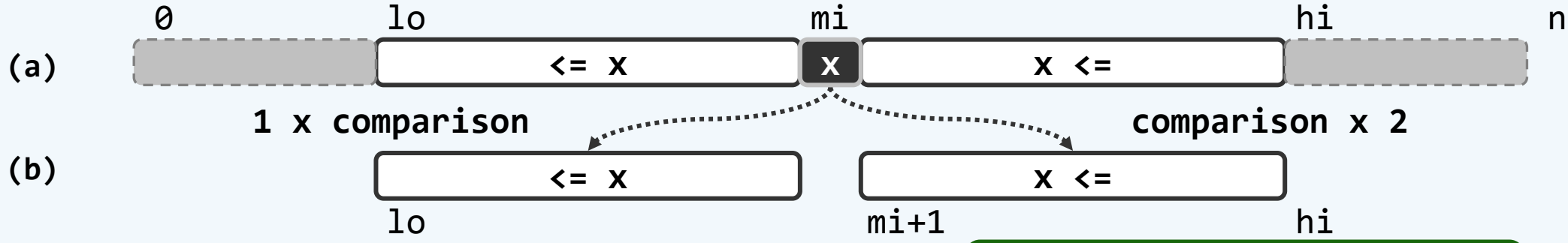
1） e < x：则e若存在必属于左侧子区间S[lo, mi)，故可递归深入

2） x < e：则e若存在必属于右侧子区间S(mi, hi)，亦可递归深入

3） e = x：已在此处命中，可随即返回　　//若有多个，返回何者？

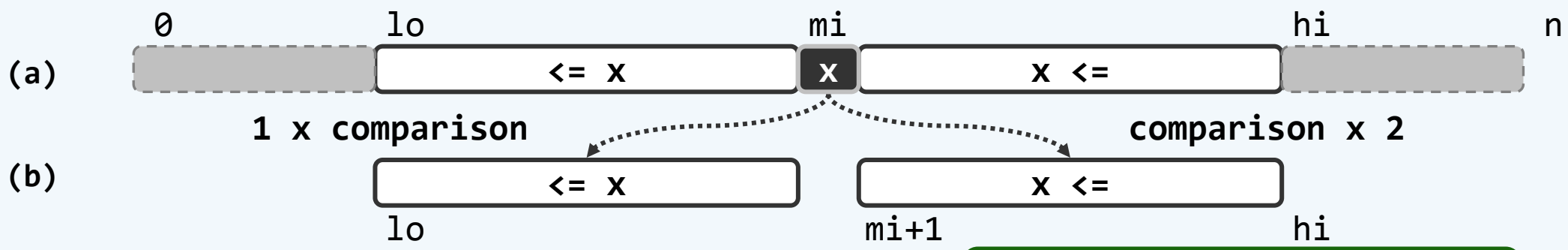
❖ 二分（折半）策略：轴点mi总是取作中点——于是

每经过至多两次比较，或者能够命中，或者将问题规模缩减一半



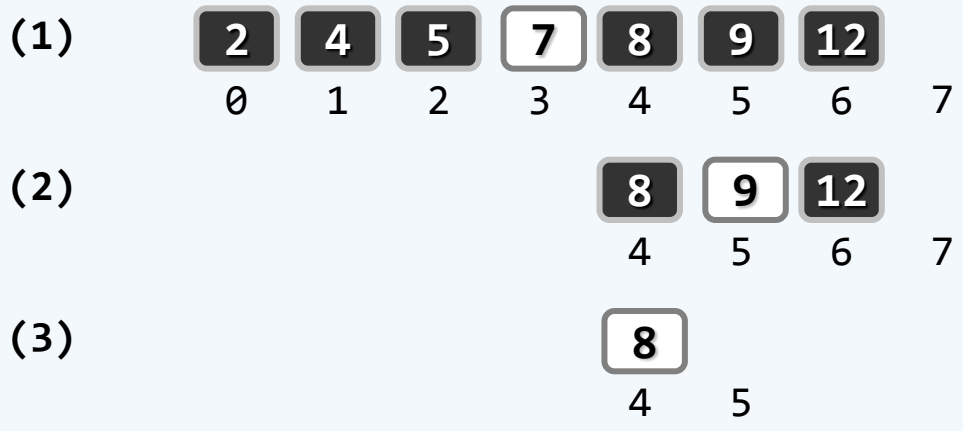
版本A：实现

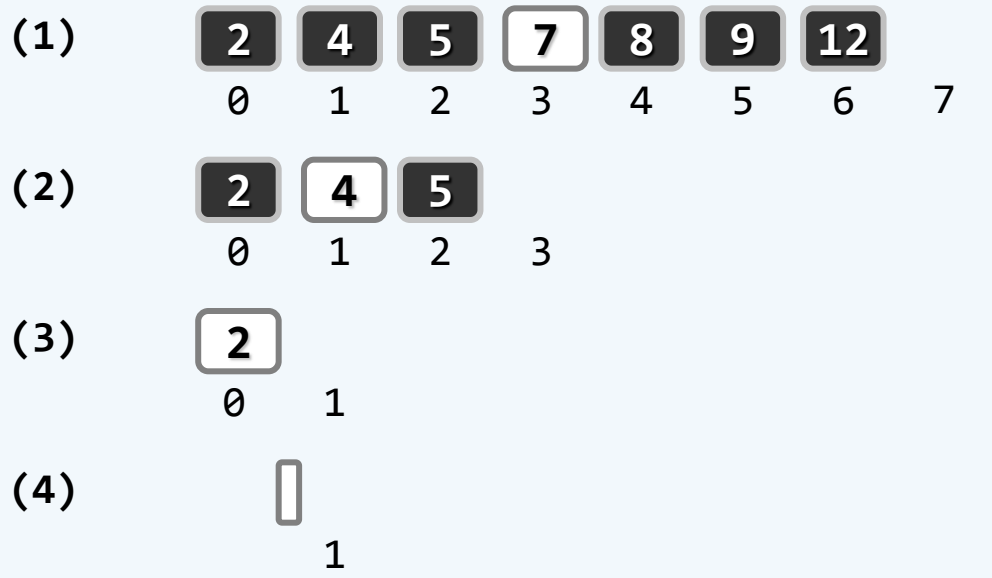
```
❖ template <typename T> //在有序向量区间[lo, hi)内查找元素e
  static Rank binSearch(T* A, T const& e, Rank lo, Rank hi) {
     while (lo < hi) { //每步迭代可能要做两次比较判断，有三个分支
        Rank mi = (lo + hi) >> 1; //以中点为轴点
        if      (e < A[mi]) hi = mi; //深入前半段[lo, mi)继续查找
        else if (A[mi] < e) lo = mi + 1; //深入后半段(mi, hi)
        else                return mi; //在mi处命中
     }
     return -1; //查找失败
  }
```



版本A：实例与复杂度

- S.search(8, 0, 7)：共经 2 + 1 + 2 = 5 次比较，在S[4]处命中
- S.search(3, 0, 7)：共经 1 + 1 + 2 = 4 次比较，在S[1]处失败





- 线性递归：T(n) = T(n/2) + O(1) = O(logn)，大大优于顺序查找

  递归跟踪：轴点总取中点，递归深度O(logn)；各递归实例均耗时O(1)

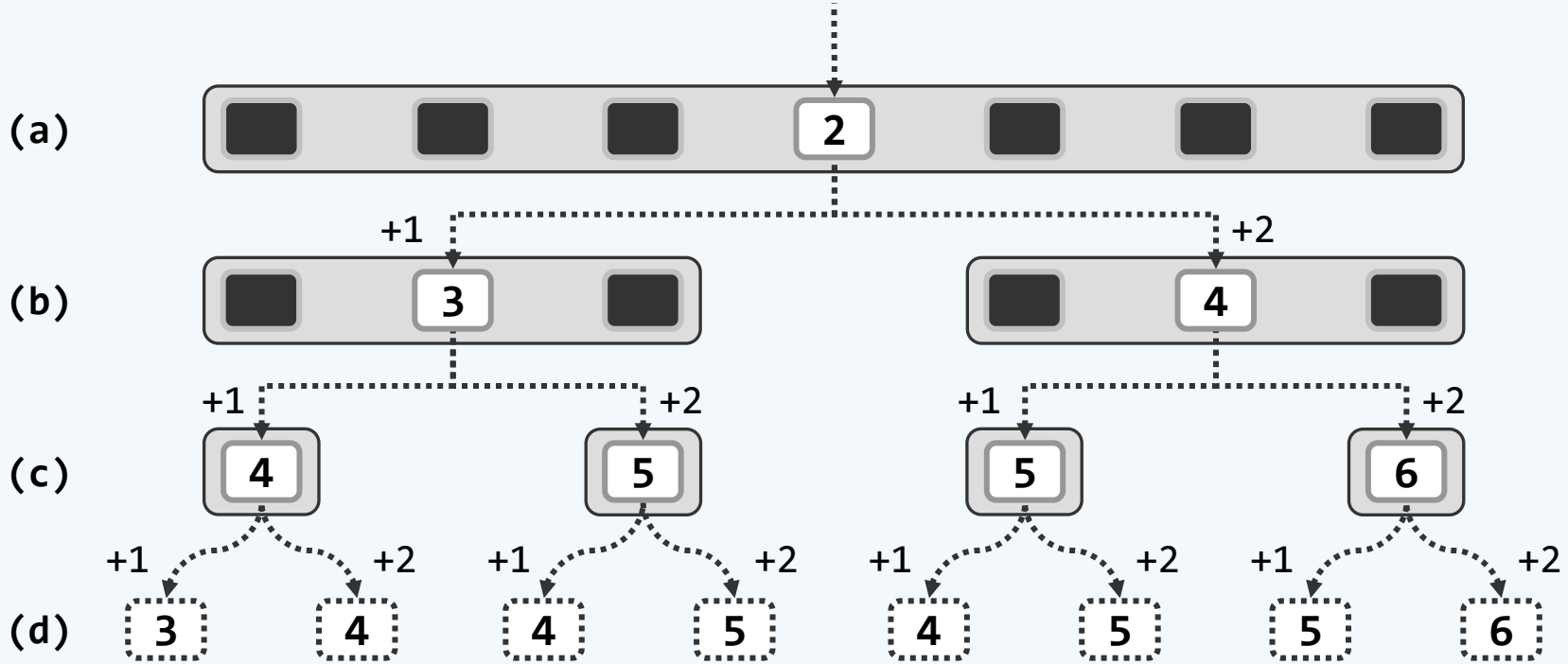
版本A：查找长度

- 如何更为精细地评估查找算法的性能？

  考查关键码的比较次数，即查找长度（search length）

- 通常，需分别针对成功与失败查找，从最好、最坏、平均等角度评估

- 比如，成功、失败时的平均查找长度均大致为$O(1.50 \cdot \log n)$ //详见教材、习题解析



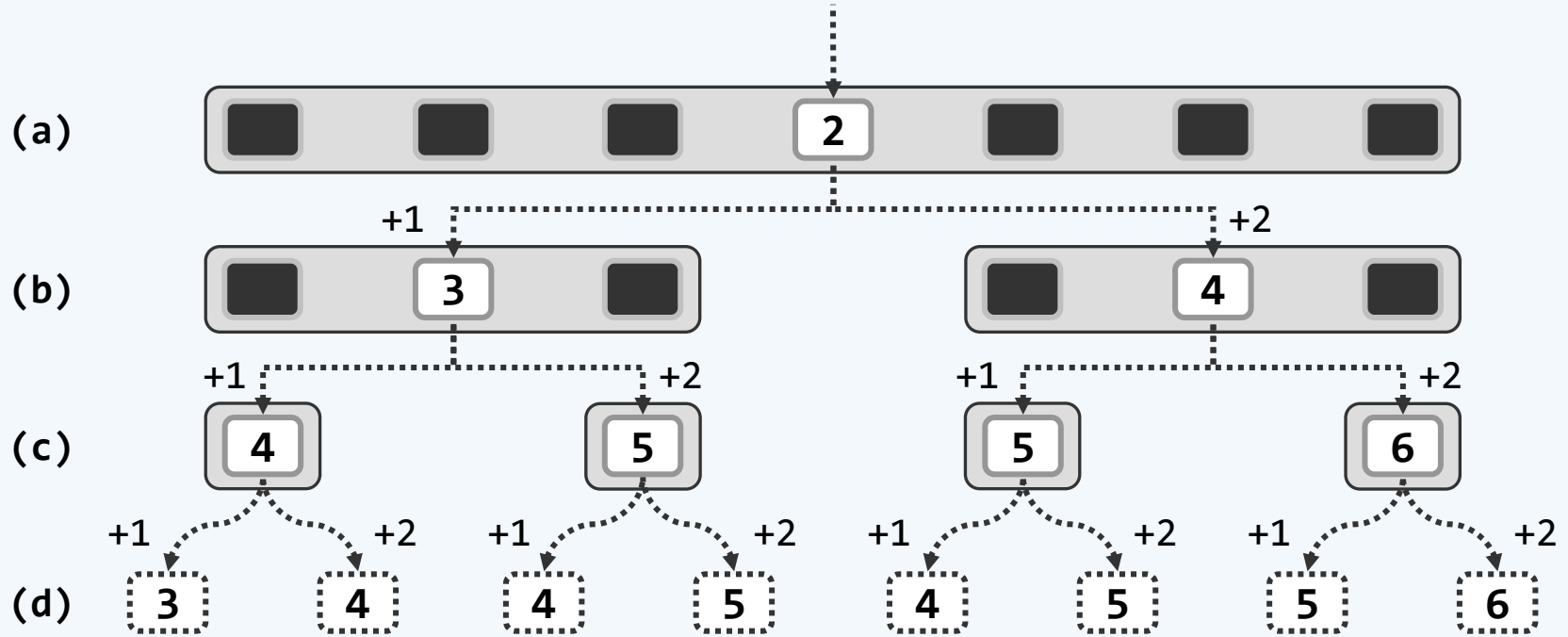
版本A：查找长度

- n = 7时，各元素对应的成功查找长度为{ 4, 3, 5, 2, 5, 4, 6 }

  在等概率情况下，平均成功查找长度 = 29 / 7 = 4.14

- 共8种失败情况，查找长度分别为{3, 4, 4, 5, 4, 5, 5, 6}

  在等概率情况下，平均失败查找长度 = 36 / 8 = 4.50



课后

- 各种查找结果出现的概率不均等时，查找长度应该如何定义和计算？