1.绪论

(c) 大O记号

Mathematics is more in need
of good notations than
of new theorems.

- Alan Turing

好读书不求甚解

每有会意，便欣然忘食

—陶渊明

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

渐进分析：大O记号

❖ 回到原先的问题：随着问题规模的增长，计算成本如何增长？

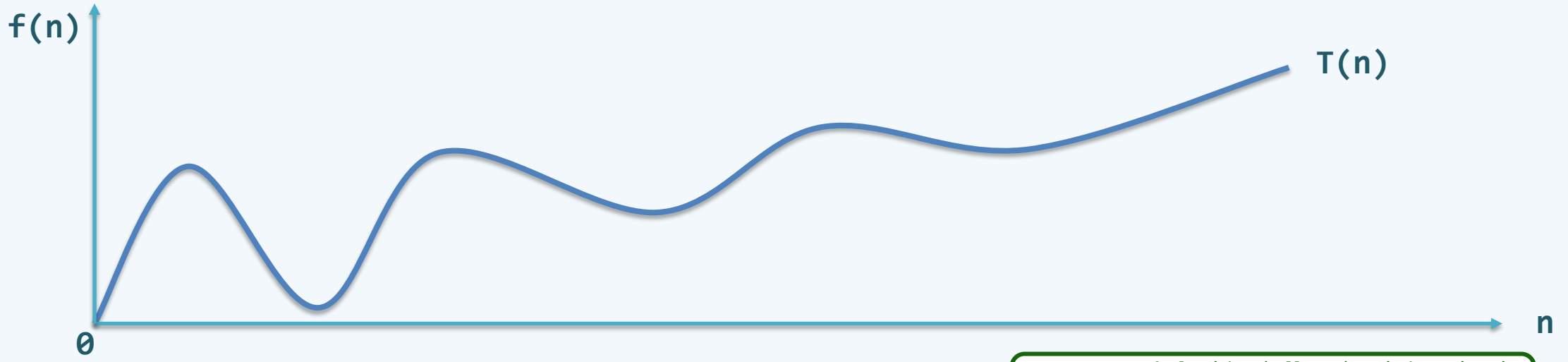
注意：这里更关心足够大的问题，注重考察成本的增长趋势

❖ 渐进分析：在问题规模足够大后，计算成本如何增长？

Asymptotic analysis：当n >> 2后，对于规模为n输入，算法

需执行的基本操作次数：T(n) = ?

需占用的存储单元数：S(n) = ?　　//通常可不考虑，为什么？



渐进分析：大O记号

❖ 大O记号（big-O notation） //Paul Bachmann, 1894

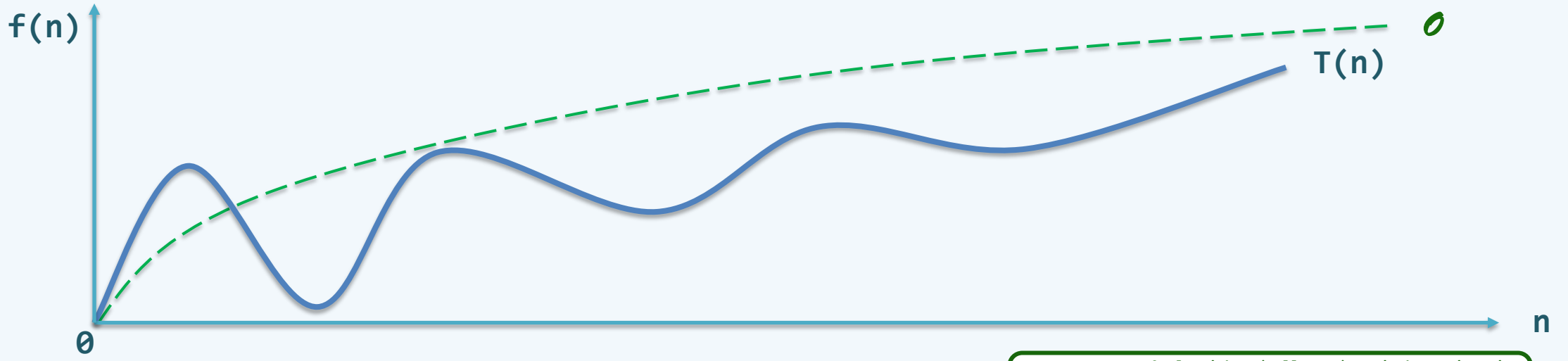
T(n) = O(f(n)) iff ∃ c > 0，当 n >> 2 后，有 T(n) < c·f(n)

$$\sqrt{5n\cdot[3n\cdot(n+2)+4]+6} < \sqrt{5n\cdot[6n^2+4]+6} < \sqrt{35n^3+6} < 6\cdot n^{1.5} = O(n^{1.5})$$

❖ 与T(n)相比，f(n)更为简洁，但依然反映前者的增长趋势

常系数可忽略：O(f(n)) = O(c × f(n))

低次项可忽略：O(nᵃ + nᵇ) = O(nᵃ)， a > b > 0



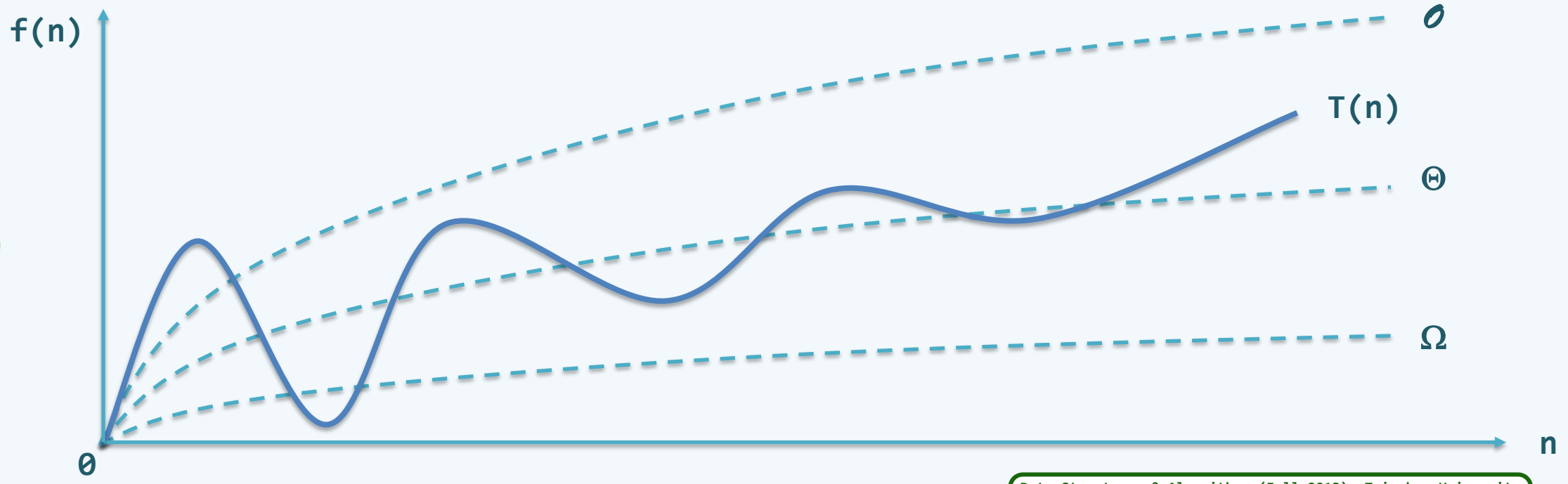
渐进分析：其它记号

- $T(n) = \Omega(f(n))$：

  $\exists c > 0$，当 $n >> 2$ 后，有 $T(n) > c \cdot f(n)$

- $T(n) = \Theta(f(n))$：

  $\exists c_1 > c_2 > 0$，当 $n >> 2$ 后，有 $c_1 \cdot f(n) > T(n) > c_2 \cdot f(n)$



O(1)

- 常数（constant function）

  $2 = 2013 = 2013 \times 2013 = O(1)$，甚至 $2013^{2013} = O(1)$ //含RAM各基本操作

- 这类算法的效率最高 //总不能奢望不劳而获吧

- 什么样的代码段对应于常数执行时间？ //应具体分析

  一定不含循环？

```
for (i = 0; i < n; i += n/2013 + 1);
```

```
for (i = 1; i < n; i = 1 << i);
```

//log*n，几乎常数

  一定不含分支转向？

```
if ((n + m) * (n + m) < 4 * n * m) goto UNREACHABLE;
```

//不考虑溢出

  一定不能有（递归）调用？

```
if (2 == (n * n) % 5) O1(n);
```

...

$O(\log^c n)$

❖ 对数 $O(\log n)$ //为何不注明底数？

$$\ln n \mid \lg n \mid \log_{100} n \mid \log_{2013} n$$

❖ 常底数无所谓

$$\forall\ a,\ b > 0,\ \log_a n = \log_a b \cdot \log_b n = \Theta(\log_b n)$$

❖ 常数次幂无所谓

$$\forall\ c > 0,\ \log n^c = c \cdot \log n = \Theta(\log n)$$

❖ 对数多项式（ploy-log function）

$$123 * \log^{321} n + \log^{105}(n^2 - n + 1) = \Theta(\log^{321} n)$$

❖ 这类算法非常有效，复杂度无限接近于常数

$$\forall\ c > 0,\ \log n = O(n^c)$$

$O(n^c)$

- 多项式（polynomial function）

  $100n + 200 = O(n)$

  $(100n - 500)(20n^2 - 300n + 2013) = O(n \times n^2) = O(n^3)$

  $(2013n^2 - 20)/(1999n - 1) = O(n^2/n) = O(n)$

  一般地：$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 = O(n^k),\ a_k > 0$

- 线性（linear function）：所有$O(n)$类函数

- 从$O(n)$到$O(n^2)$：编程习题主要覆盖的范围

- 幂：$[\ (n^{2013} - 24n^{2009})^{1/3} + 512n^{567} - 1978n^{123}\ ]^{1/11} = O(n^{61})$

- 这类算法的效率通常认为已可令人满意，然而...

  这个标准是否太低了？ //P难度！

$O(2^n)$

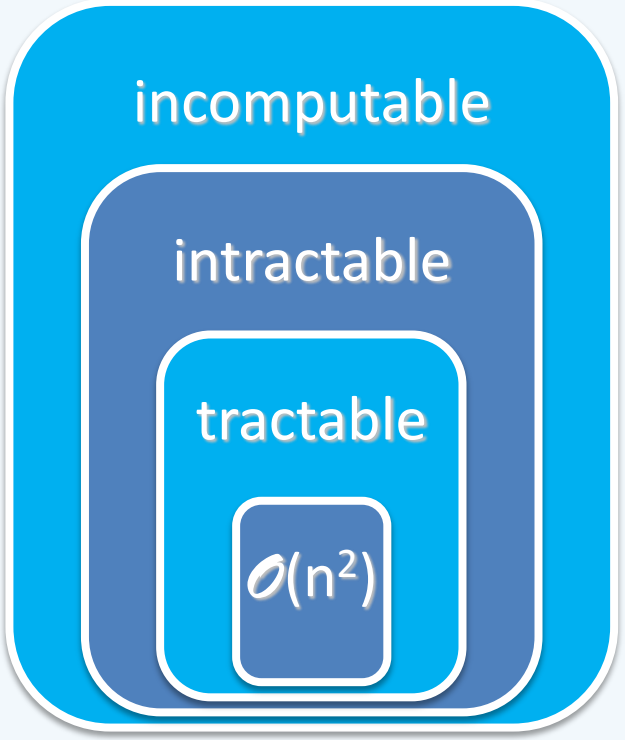
- 指数（exponential function）：$T(n) = a^n$
- $\forall\ c > 1,\ n^c = O(2^n)$ //$e^n = 1 + n + n^2/2! + n^3/3! + n^4/4! + \ldots$

  $n^{1000} = O(1.0000001^n) = O(2^n)$

  $1.0000001^n = \Omega(n^{1000})$
- 这类算法的计算成本增长极快，通常被认为不可忍受
- 从$O(n^c)$到$O(2^n)$，是从有效算法到无效算法的分水岭
- 很多问题的$O(2^n)$算法往往显而易见

  然而，设计出$O(n^c)$算法却极其不易

  甚至，有时注定地只能是徒劳无功
- 更糟糕的是，这类问题要远比我们想象的多得多...



2-Subset

- 【问题描述】

  S包含n个正整数，∑S = 2m

  S是否有子集T，满足∑T = m？

- 【选举人制】

  各州议会选出的选举人团投票

  而不是由选民直接投票

  50个州加1个特区，共538票

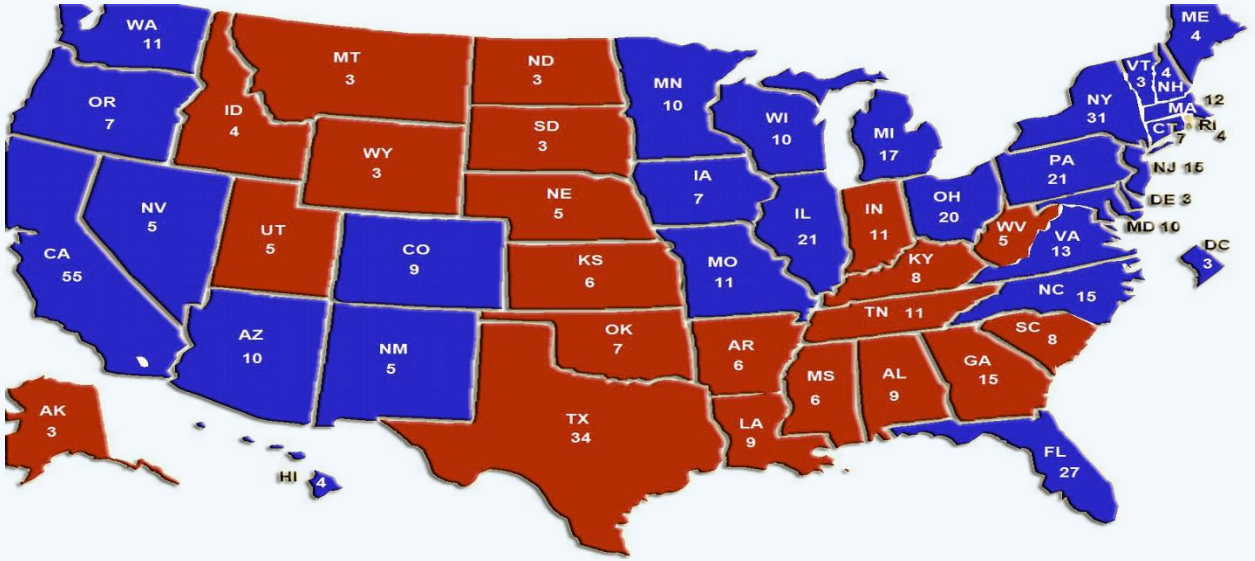
  获270张选举人票，即可当选

- 但是...

- 若共有两位候选人

  是否可能恰好各得269票？

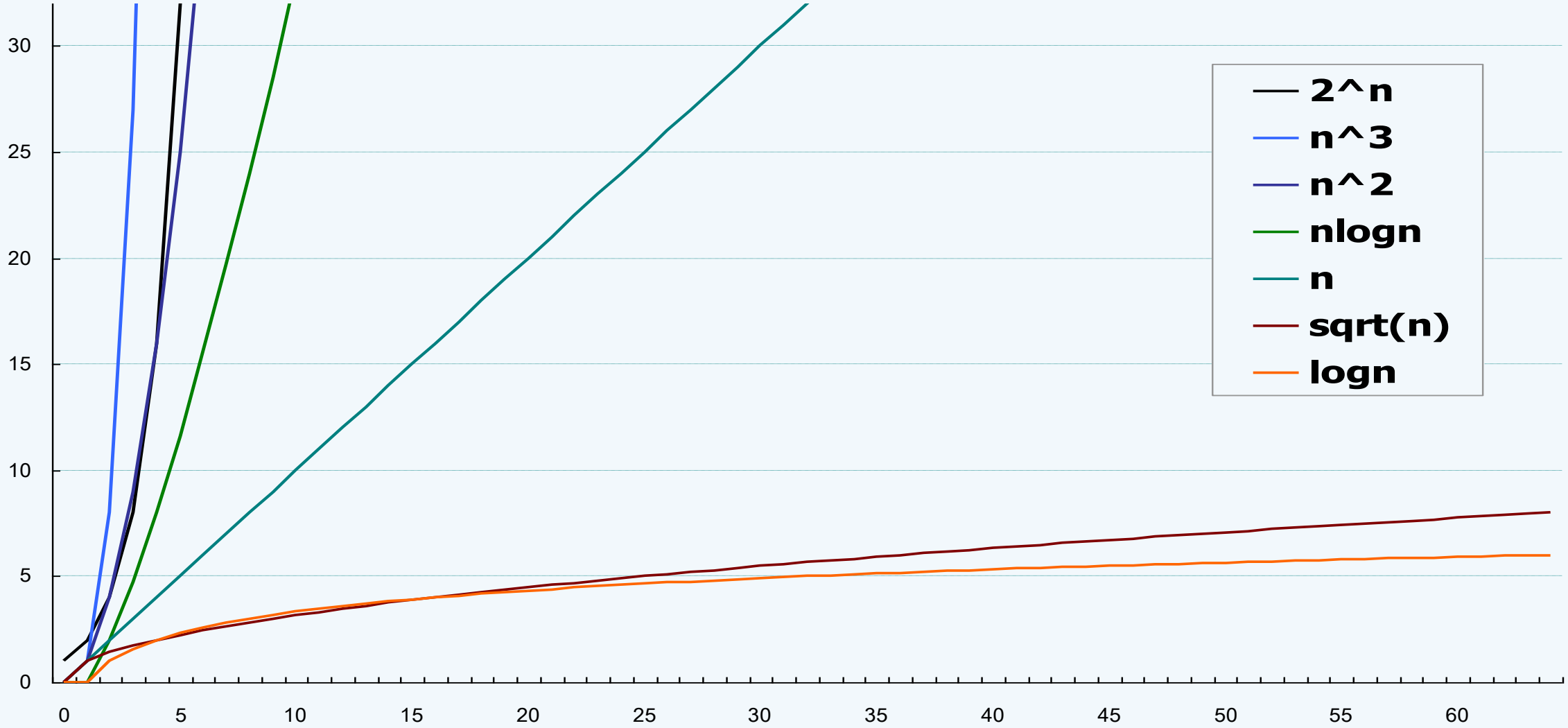
55	California	11	Indiana	7	Connecticut	4	Idaho
34	Texas	11	Missouri	7	Iowa	4	Maine
31	New York	11	Tennessee	7	Oklahoma	4	New Hampshire
27	Florida	11	Washington	7	Oregon	4	Rhode Island
21	Illinois	10	Arizona	6	Arkansas	3	Alaska
21	Pennsylvania	10	Maryland	6	Kansas	3	Delaware
20	Ohio	10	Minnesota	6	Mississippi	3	D. C.
17	Michigan	10	Wisconsin	5	Nebraska	3	Montana
15	Georgia	9	Alabama	5	Nevada	3	North Dakota
15	New Jersey	9	Colorado	5	New Mexico	3	South Dakota
15	North Carolina	9	Louisiana	5	Utah	3	Vermont
13	Virginia	8	Kentucky	5	West Virginia	3	Wyoming
12	Massachusetts	8	South Carolina	4	Hawaii	538 = ∑	



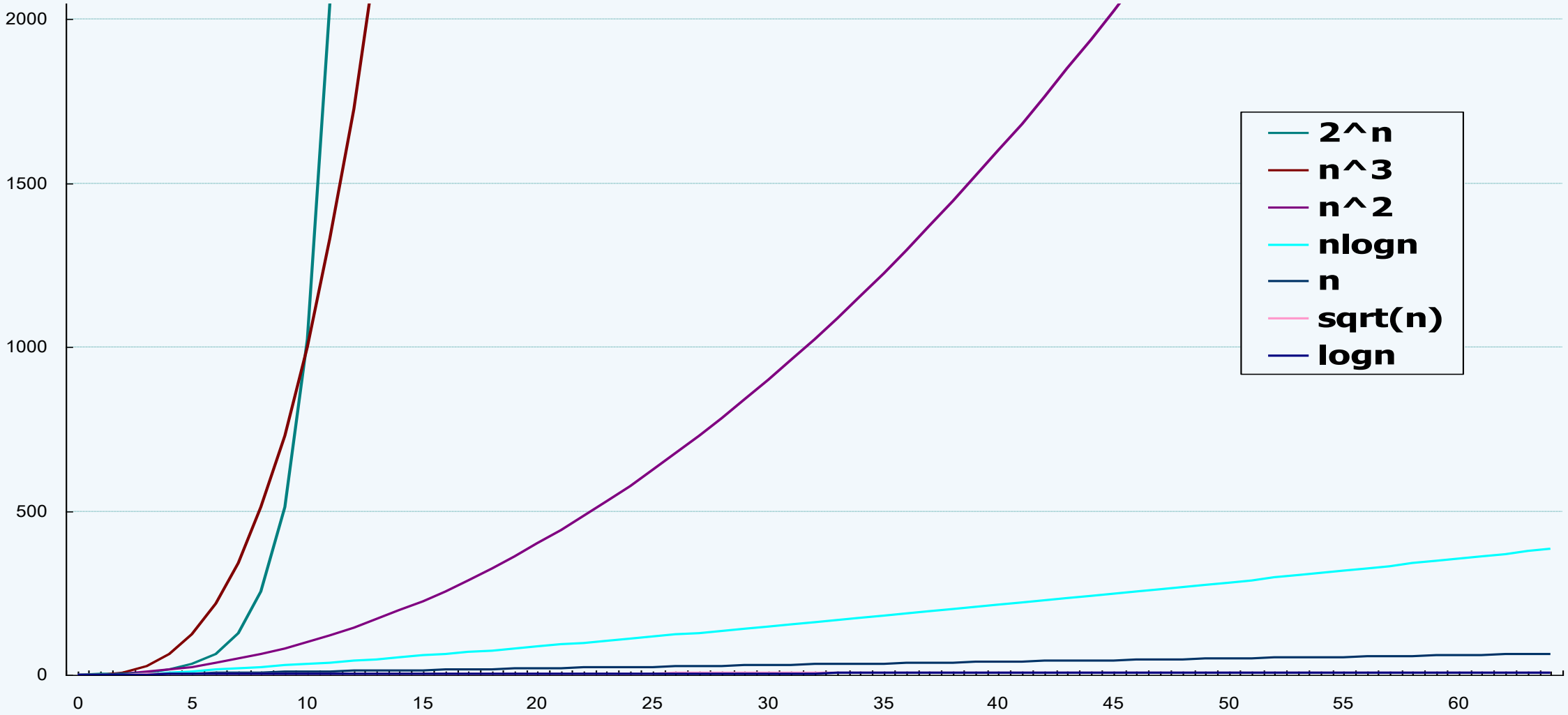
2-Subset

- 直觉算法：逐一枚举S的每一子集，并统计其中元素的总和
- 定理：$|2^S| = 2^{|S|} = 2^n$
- 亦即：直觉算法需要迭代2^n轮，并（在最坏情况下）至少需要花费这么多的时间
  - 不甚理想！
- 还是直觉：应该有更好的办法吧？
- 定理：2-Subset is NP-complete
  - 什么意思？
- 意即：就目前的计算模型而言，不存在可在多项式时间内回答此问题的算法
  - 就此意义而言，上述的直觉算法已属最优

增长速度


30
25
20
15
10
5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
2^n
n^3
n^2
nlogn
n
sqrt(n)
logn

增长速度


2000
1500
1000
500
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
2^n
n^3
n^2
nlogn
n
sqrt(n)
logn

复杂度层次

$O(1)$	常数复杂度	再好不过，但难得如此幸运	对数据结构的基本操作
$O(\log^* n)$		在这个宇宙中，几乎就是常数	
$O(\log n)$	对数复杂度	与常数无限接近，且不难遇到	有序向量的二分查找 堆、词典的查询、插入与删除
$O(n)$	线性复杂度	努力目标，经常遇到	树、图的遍历
$O(n\log^* n)$		几乎几乎几乎接近线性	某些MST算法
$O(n\log\log n)$		几乎接近线性	某些三角剖分算法
$O(n\log n)$		最常出现，但不见得最优	排序、EU、Huffman编码
$O(n^2)$	平方复杂度	所有输入对象两两组合	Dijkstra算法
$O(n^3)$	立方复杂度	不常见	矩阵乘法
$O(n^c)$，c常数	多项式复杂度	P问题 = 存在多项式算法的问题	
$O(2^n)$	指数复杂度	很多问题的平凡算法，再尽可能优化	
...		绝大多数问题，并不存在算法	

课后

- 证明、证否或计算： Fibonacci数 $fib(n) = \mathcal{O}(2^n)$

  $12n + 5 = \mathcal{O}(n\log n)$

  $\log^2(n^{1024} - 2*n^6 + 101) = \mathcal{O}(?)$

  $\log^d n = \mathcal{O}(n^c),\ \forall c > 0,\ d > 1$

  $\log^{1.001} n = \mathcal{O}(\log(n^{1001}))$

  $(n^2 + 1) / (2n + 3) = \mathcal{O}(n)$

  $n^{2013} = \mathcal{O}(n!)$

  $n! = \mathcal{O}(n^{2013})$

  $2^n = \mathcal{O}(n!)$

- k-Subset：任给整数集S，判定S可否划分为k个不交子集，其和均为(ΣS)/k

  证明或证否：(k+1)-Subset的难度不低于k-Subset

- Google: small-o notation