4.栈与队列

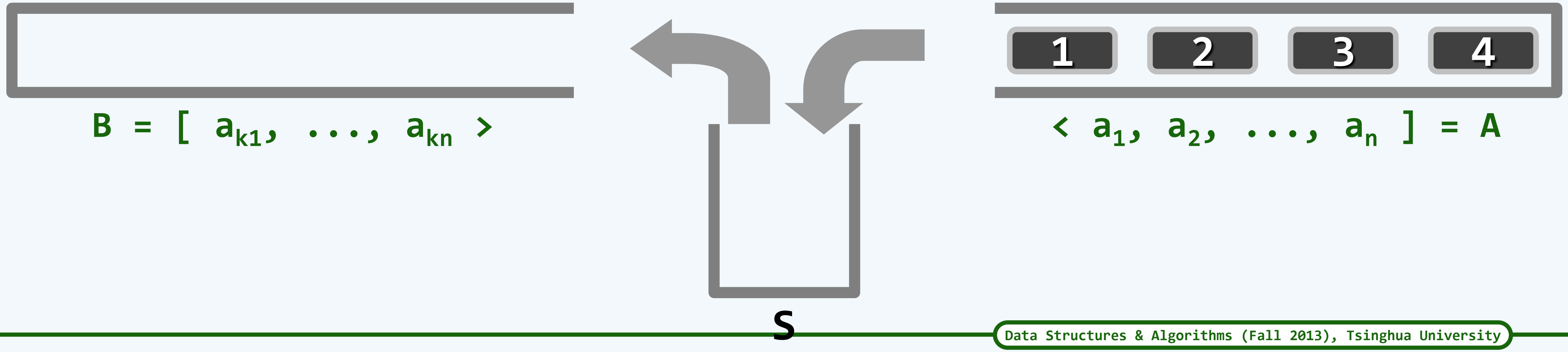
（c3）栈应用：栈混洗

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

栈混洗

- 考查栈 A = < a_1, a_2, ..., a_n] 、B = S = ∅ //左端为栈顶
- 只允许 将A的顶元素弹出并压入S，或 //S.push(A.pop())
  将S的顶元素弹出并压入B //B.push(S.pop())
- 若经过一系列以上操作后，A中元素全部转入B中
  B = [a_{k1}, ..., a_{kn} > //右端为栈顶
  则称之为A的一个栈混洗（stack permutation）

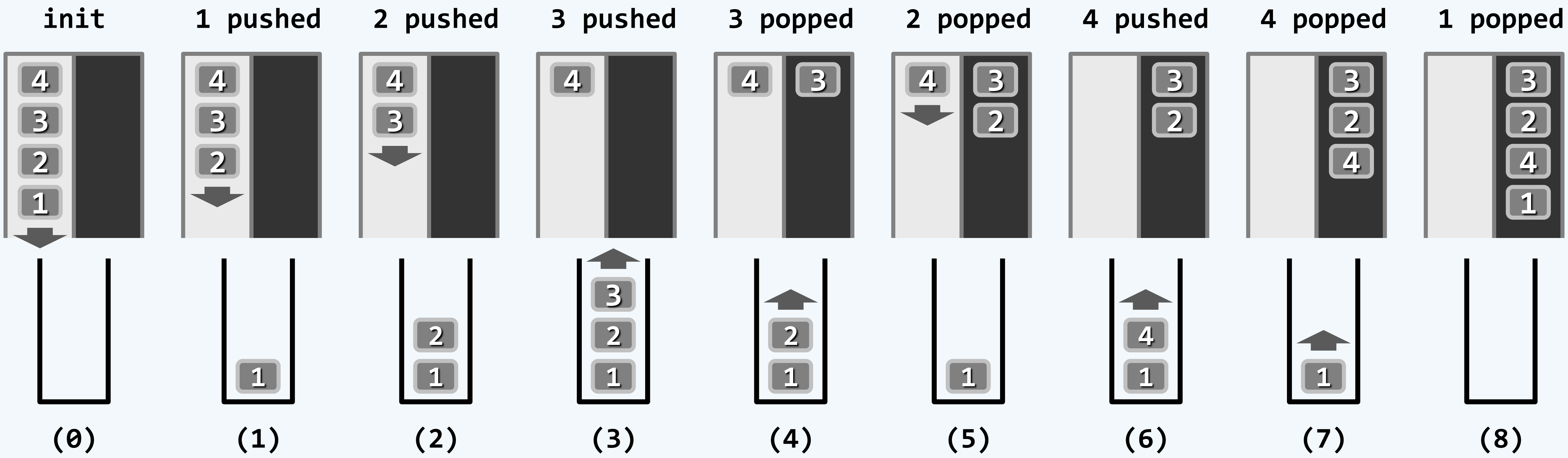


计数

❖ 同一输入序列，可有多种栈混洗

[1, 2, 3, 4 >，[4, 3, 2, 1 >，[3, 2, 4, 1 >，...

❖ 长度为n的序列，可能的混洗总数SP(n) = ?　　　　//显然，SP(n) <= n!



计数

- $SP(1) = 1$
- 设栈S在第k次pop()之后重新变空，则k无非n种情况：

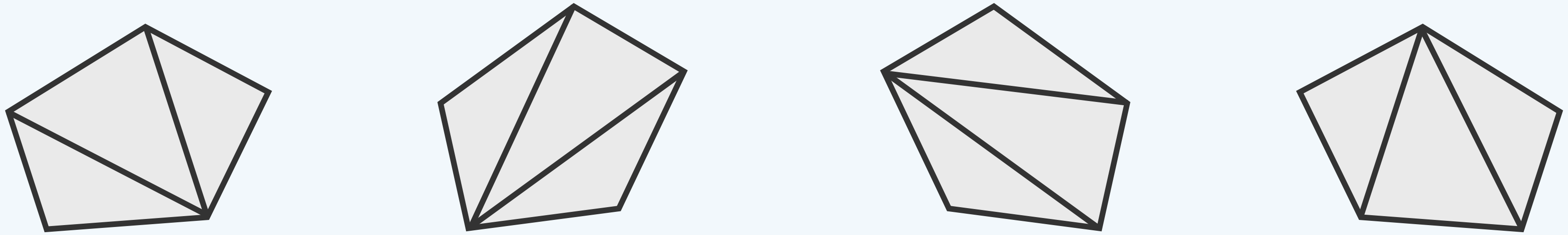
$$SP(n) = \boxed{\sum_{k=1}^{n} SP(k-1) \cdot SP(n-k)} = Catalan(n) = (2n)! \,/\, (n+1)! \,/\, n!$$

- $SP(2) = 4! \,/\, 3! \,/\, 2! = 2$

  $SP(3) = 6! \,/\, 4! \,/\, 3! = 5$

  ... ...

  $SP(6) = 12! \,/\, 7! \,/\, 6! = 132$



甄别

- 输入序列< 1, 2, 3, ..., n]的
  任一排列[p_1, p_2, p_3, ..., p_n >
  是否为栈混洗？
- 简单情况：< 1, 2, 3]，n = 3
  栈混洗共 6! / 4! / 3! = 5 种
  全排列共 3! = 6 种 //少了一种...
- [3, 1, 2 > //为什么是它？
- 观察：任意三个元素能否按某相对次序出现于混洗中，与其它元素无关 //故可推而广之...
- 对于任何1 ≤ i < j < k ≤ n，[..., $\boxed{k}$, ..., $\boxed{i}$, ..., $\boxed{j}$, ... > 必非栈混洗
- 反过来，不存在"312"模式的序列，一定是栈混洗吗？

甄别

- 充要性：　A permutation is a stack permutation **iff**
  (Knuth, 1968)　it does **NOT** involve the permutation $\boxed{312}$ 　　//习题[4-3]

- 如此，可得一个$\boxed{\mathcal{O}(n^3)}$的甄别算法 　　//进一步地...

- [p_1, p_2, p_3, ..., p_n >是< 1, 2, 3, ..., n]的栈混洗，**当且仅当**
  对于任意i < j，不含模式[..., $\boxed{j + 1}$, ..., $\boxed{i}$, ..., $\boxed{j}$, ... >

- 如此，可得一个$\boxed{\mathcal{O}(n^2)}$的甄别算法 　　//再进一步地...

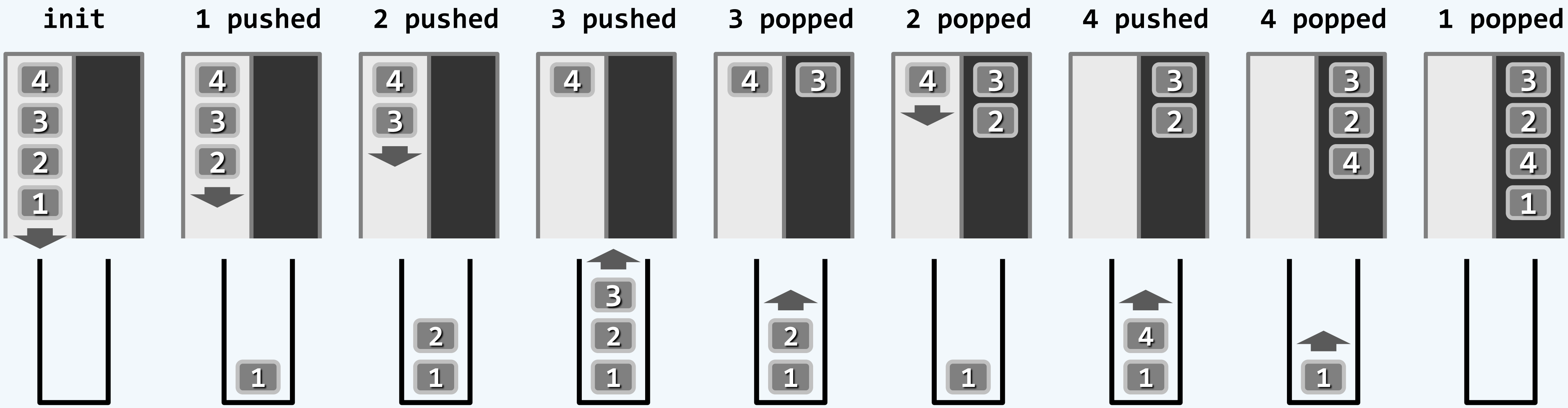
- $\boxed{\mathcal{O}(n)}$算法：直接借助栈A、B和S，模拟混洗过程 　　//为何可行？
  每次S.pop()之前，检测S是否已空；或需弹出的元素在S中，却非顶元素

括号匹配

❖ 观察：每一栈混洗，都对应于栈S的 n次push 与 n次pop 操作构成的序列

((( )) ( ))

push(1) push(2) push(3) pop(3) pop(2) push(4) pop(4) pop(1)



❖ n个元素的栈混洗，等价于n对括号的匹配