# 1.绪论

## （x1）局限

不学诗，何以言

不学礼，何以立

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

# 循环移位：蛮力版

- 将数组A[0, n)中元素向左循环移动k个单元

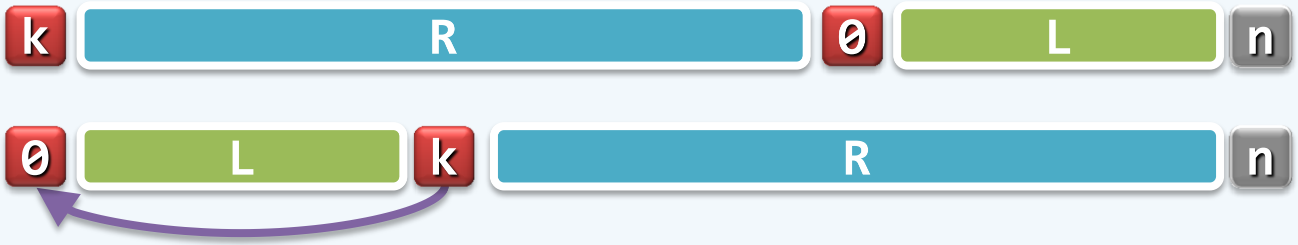
- void shift0( int * A, int $\boxed{n}$, int $\boxed{k}$ ) //反复以1为间距循环左移

  { while ( k-- ) shift( A, $\boxed{n}$, $\boxed{0}$, $\boxed{1}$ ); } //共迭代k次，$O$(nk)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 0 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

# 循环移位：迭代版

```
int shift( int * A, int n, int s, int k ) { // O( n / GCD(n, k)
   int b = A[s]; int i = s, j = (s + k) % n; int mov = 0; //mov记录移动次数
   while ( s != j ) //从A[s]出发，以k为间隔，依次左移k位
      { A[i] = A[j]; i = j; j = (j + k) % n; mov++; }
   A[i] = b; return mov + 1; //最后，起始元素转入对应位置
}
```



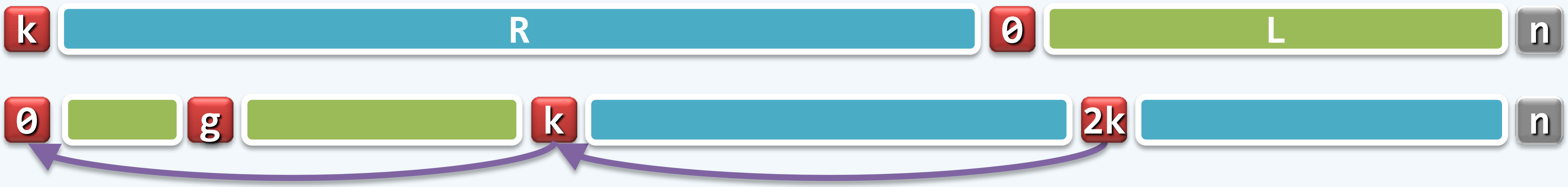

- [0, n)由关于k的g = GCD(n, k)个同余类组成 //各含n/g个元素

  shift(s, k)能够且只能够使其中之一就位 //即s所属的同余类

- 其它的同余类呢...

# 循环移位：迭代版

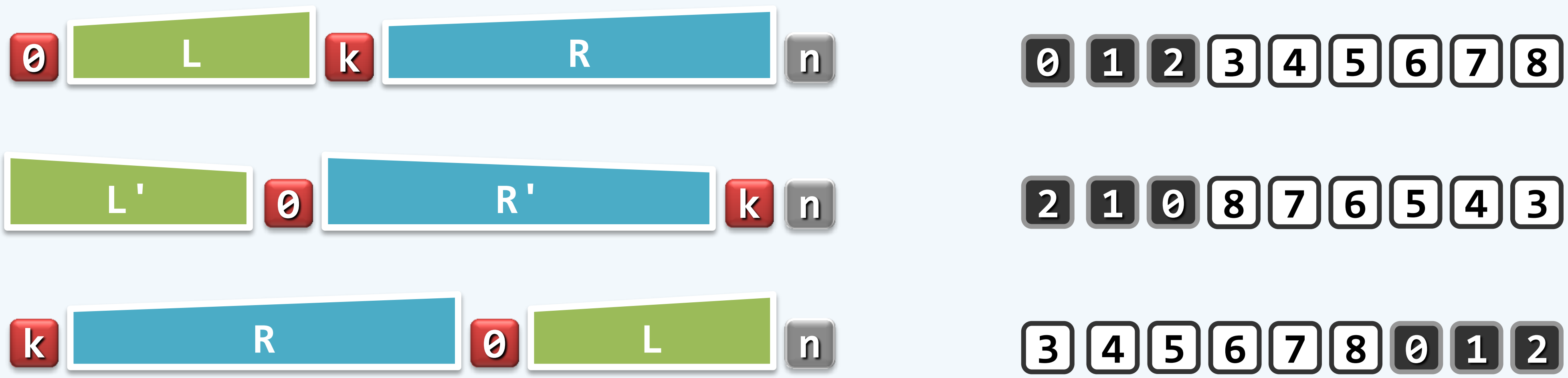
```
void shift1(int* A, int n, int k) { //经多轮迭代，实现数组循环左移k位，累计O(n)
    for (int s = 0, mov = 0; mov < n; s++) //O(GCD(n, k)) = O(n*k/LCM(n, k))
        mov += shift(A, n, s, k);
}
```




| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 6 | 1 | 2 | 9 | 4 | 5 | 12 | 7 | 8 | 15 | 10 | 11 | 18 | 13 | 14 | 0 | 16 | 17 | 3 | 19 | 20 |
| 6 | 7 | 2 | 9 | 10 | 5 | 12 | 13 | 8 | 15 | 16 | 11 | 18 | 19 | 14 | 0 | 1 | 17 | 3 | 4 | 20 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

# 循环移位：倒置版

```
void shift2( int * A, int n, int k ) { //借助倒置算法，将数组循环左移k位，O(3n)
    reverse( A, k ); //O(3k/2)
    reverse( A + k, n - k ); //O(3(n-k)/2)
    reverse( A, n ); //O(3n/2)
}
```



# 幂函数：O(2^r)

❖ 观察：同一问题的不同算法，复杂度不尽相同

❖ 问题：对任何给定的整数n > 0，计算$a^n$（a为常数）

❖ 平凡实现：

```
pow = 1; //O(1)
while ( 0 < n ) { //O(n)
  { pow *= a; n--; } //O(1) + O(1)
```

❖ 复杂度与n成正比，T(n) = 1 + n*2 = $\mathcal{O}(n)$

线性？伪线性！

❖ 所谓输入规模，准确地应定义为用以描述输入所需的空间的规模

对于此类数值计算，即是n的二进制位数r = $\log_2(n + 1)$

❖ 复杂度与r成指数关系，T(r) = $\mathcal{O}(2^r)$ //太高了

## $a^{98765}$

$= a \wedge [9 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 5 \times 10^0]$

$= (a \wedge 10^4) \wedge 9 \times (a \wedge 10^3) \wedge 8 \times (a \wedge 10^2) \wedge 7 \times (a \wedge 10^1) \wedge 6 \times (a \wedge 10^0) \wedge 5$

```
=   pow(pow(a, 10^4), 9)   =   pow(pow(pow(a, 10^3), 10), 9)
  × pow(pow(a, 10^3), 8)     × pow(pow(pow(a, 10^2), 10), 8)
  × pow(pow(a, 10^2), 7)     × pow(pow(pow(a, 10^1), 10), 7)
  × pow(pow(a, 10^1), 6)     × pow(pow(pow(a, 10^0), 10), 6)
  × pow(pow(a, 10^0), 5)     × pow(     pow(a, 10^0)      , 5)
```

❖ 若能在$\mathcal{O}(1)$时间内得到pow(x, n)，$0 \le n \le 10$

则自右（低）向左（高），每个数位只需$\mathcal{O}(1)$时间

## $a^{10110b}$

$= a \,\hat{}\, [1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0]$

$= (a \hat{} 2^4) \hat{} 1 \times (a \hat{} 2^3) \hat{} 0 \times (a \hat{} 2^2) \hat{} 1 \times (a \hat{} 2^1) \hat{} 1 \times (a \hat{} 2^0) \hat{} 0$

| | |
|---|---|
| = pow(pow(a, $2^4$), 1) | = pow(sqr(pow(a, $2^3$)), 1) |
| × pow(pow(a, $2^3$), 0) | × pow(sqr(pow(a, $2^2$)), 0) |
| × pow(pow(a, $2^2$), 1) | × pow(sqr(pow(a, $2^1$)), 1) |
| × pow(pow(a, $2^1$), 1) | × pow(sqr(pow(a, $2^0$)), 1) |
| × pow(pow(a, $2^0$), 0) | × pow( pow(a, $2^0$) , 0) |

❖ pow(x, 0) = 1、pow(x, 1) = x、pow(x, 2) = sqr(x)

都可在$O(1)$时间内得到

❖ 故对应于每个数位，只需$O(1)$时间！

# 幂函数：O(r)

❖ 算法

```
pow = 1; //O(1)
p = a; //O(1)
while (0 < n) { //O(logn)
  if (n & 1) //O(1)
    pow *= p; //O(1)
  n >>= 1; //O(1)
  p *= p; //O(1)
}
return pow; //O(1)
```

❖ 复杂度

循环次数

= n的二进制位数

= r

= $\lceil \log_2(n+1) \rceil$

T(r)

= 1 + 1 + 4×r + 1

= $\mathcal{O}(r)$

❖ 从$\mathcal{O}(2^r)$到$\mathcal{O}(r)$的改进

实际效果如何？

# 幂函数：悖论

❖ 观察：power(n) = a^n的二进制展开宽度，可以度量为$\Theta(n)$

❖ 根据以上算法，可在$\mathcal{O}(r = \log n)$时间内计算出power(n)

❖ 然而，即便是直接打印power(n)，也至少需要$\Omega(n)$时间

...哪里错了？

❖ RAM模型

常数代价准则（uniform cost criterion）

对数代价准则（logarithmic cost criterion）

# 随机置乱

- 任给一个数组A[0, n)，理想地将其中元素的次序**随机**打乱

- //[R. Fisher & F. Yates, 1938], [R. Durstenfeld, 1964], [D. E. Knuth, 1969]

```
void shuffle(int A[], int n)
   { while (1 < n) swap(A[rand() % n], A[--n]); }
```


- 策略：自后向前，依次将各元素与随机选取的某一前驱（含自身）交换

- 的确可以等概率地生成所有n!种排列？