1.绪论

(d) 算法分析

He calculated just as men breathe,

as eagles sustain themselves in the air.

- Francois Arago

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

算法分析

- 两个主要任务　=　正确性（不变性 × 单调性）　+　复杂度

- 为确定后者，真地需要将算法描述为RAM的基本指令，再统计累计的执行次数？

  不必！

- C++等高级语言的**基本指令**，均等效于常数条RAM的**基本指令**；在渐进意义下，二者大体相当

  分支转向：goto　//算法的灵魂；出于结构化考虑，被隐藏了

  迭代循环：for()、while()、...　//本质上就是“if + goto”

  调用 + 递归（自我调用）　//本质上也是goto

- 复杂度分析的主要方法

  迭代：级数求和

  递归：递归跟踪 + 递推方程

  猜测 + 验证

级数

❖ 算数级数：与末项平方同阶

$$T(n) = 1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2 = \mathcal{O}(n^2)$$

❖ 幂方级数：比幂次高出一阶：

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^d \approx \int_0^n x^d\, dx = \frac{1}{d+1} x^{d+1} \Big|_0^n = \frac{1}{d+1} n^{d+1} = O(n^{d+1})}$$

$$T_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6 = \mathcal{O}(n^3)$$

$$T_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4 = \mathcal{O}(n^4)$$

$$T_4(n) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30 = \mathcal{O}(n^5)$$

...

❖ 几何级数（a > 1）：与末项同阶

$$T_a(n) = a^0 + a^1 + \ldots + a^n = (a^{n+1} - 1)/(a - 1) = \mathcal{O}(a^n)$$

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1 = \mathcal{O}(2^{n+1}) = \mathcal{O}(2^n)$$

级数

❖ 收敛级数

$$1/1/2 + 1/2/3 + 1/3/4 + \ldots + 1/(n-1)/n = 1 - 1/n = \mathcal{O}(1)$$

$$1 + 1/2^2 + \ldots + 1/n^2 < 1 + 1/2^2 + \ldots = \pi^2/6 = \mathcal{O}(1)$$

$$1/3 + 1/7 + 1/8 + 1/15 + 1/24 + 1/26 + 1/31 + 1/35 + \ldots = 1 = \mathcal{O}(1)$$

❖ 有必要讨论这类级数吗？

难道，基本操作次数、存储单元数可能是分数？某种意义上！

$$(1-\lambda)\cdot[1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + 4\lambda^3 + \ldots] = 1/(1-\lambda) = \mathcal{O}(1), \quad 0 < \lambda < 1$$ //几何分布

❖ 可能未必收敛，然而长度有限

$$h(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n = \Theta(\log n)$$ //调和级数

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log n = \log(n!) = \Theta(n \log n)$$ //对数级数

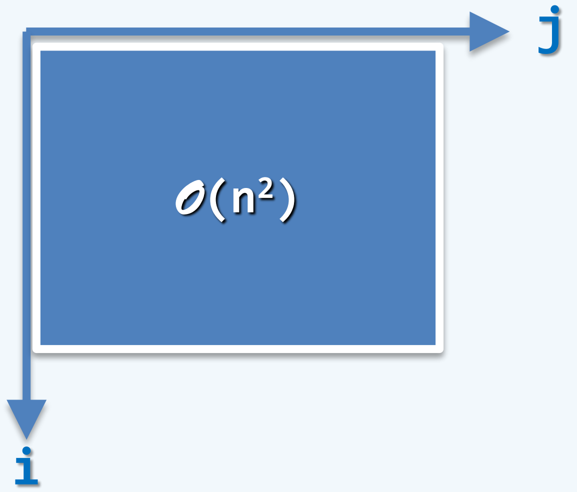
❖ 如有兴趣，不妨读读：Concrete Mathematics //ex-2.35, Goldbach Theorem

循环 vs. 级数

❖
```
for (int i = 0; i < n; i++)
  for (int j = 0; j < n; j++)
    O1Operation(i, j);
```

算术级数：

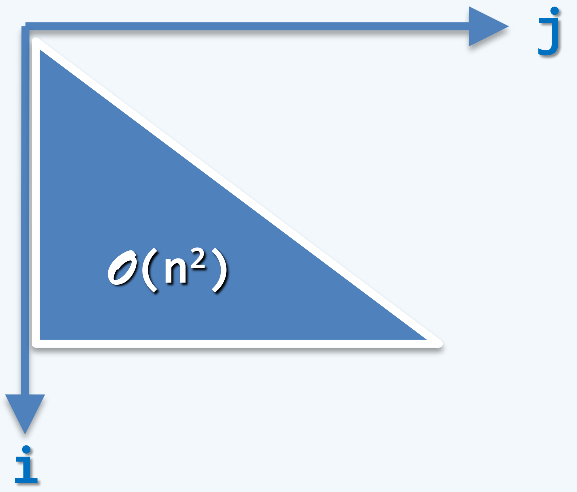
$$\sum_{i=0}^{n-1} n = n + n + \ \ldots + n = n * n = O(n^2)$$



❖
```
for (int i = 0; i < n; i++)
  for (int j = 0; j < i; j++)
    O1Operation(i, j);
```

算术级数：

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = 0 + 1 + \ \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$



循环 vs. 级数

```
for (int i = 0; i < n; i++)
  for (int j = 0; j < i; j += 2013)
    O1Operation(i, j);
```

算术级数： ...

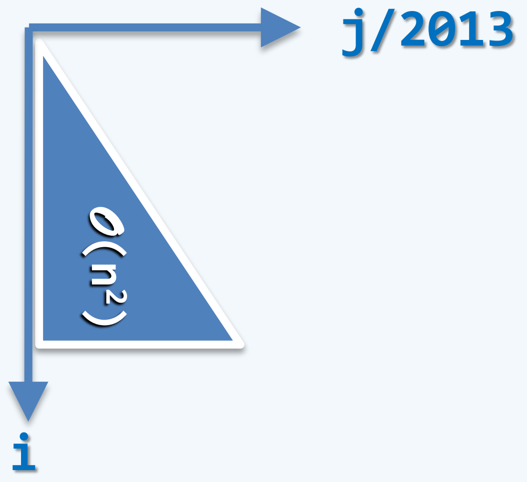
```
for (int i = 1; i < n; i <<= 1)
  for (int j = 0; j < i; j++)
    O1Operation(i, j);
```

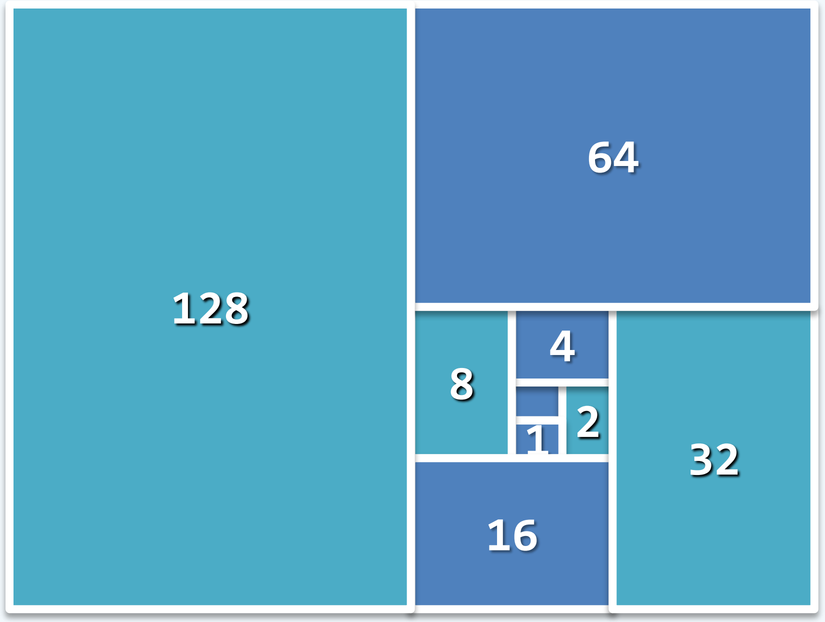
几何级数：

$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{\lfloor \log_2(n-1) \rfloor}$

$= \sum_{k=0}^{\lfloor log_2(n-1) \rfloor} 2^k \qquad (\text{let } k = \log_2 i)$

$= 2^{\lceil log_2 n \rceil} - 1 = \mathcal{O}(n)$





循环 vs. 级数

```
❖ for (int i = 0; i <= n; i++)
    for (int j = 1; j < i; j += j)
       O1Operation(i, j);
```

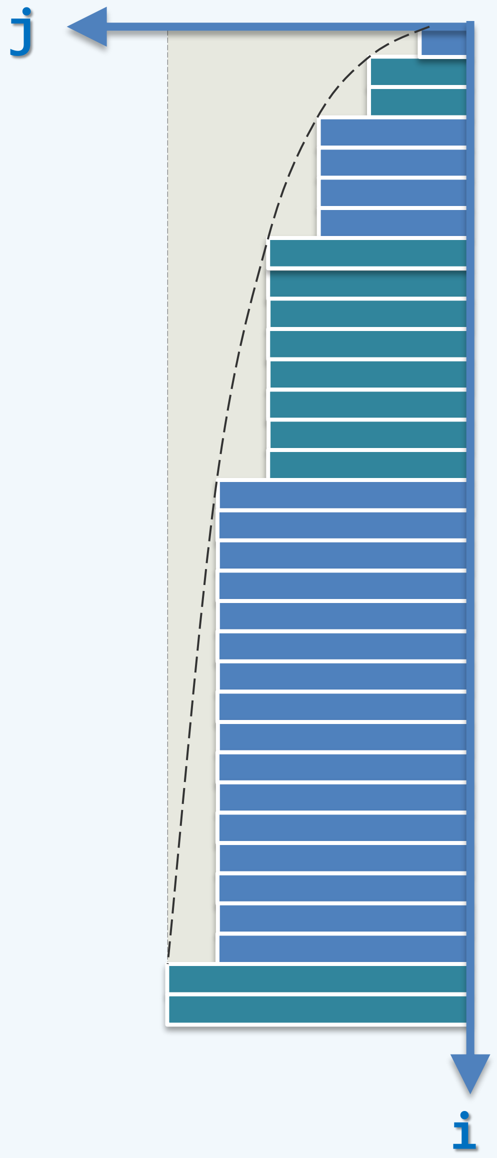
几何级数：$\sum_{k=0}^{n} \lceil \log_2 i \rceil \quad = \quad \mathcal{O}(n\log n)$

$(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3\sim4,\ 5\sim8,\ 9\sim16,\ \ldots)$

$= 0 + 0 + 1 + 2*2 + 3*4 + 4*8 + \ldots$

$= \Sigma_{k=0..\log n}(k * 2^{k-1})$

$= \mathcal{O}(\log n * 2^{\log n})$ (CM page#33)



取非极端元素

❖ 问题： 给定整数子集S， $|S| = n \geq 3$

找出元素 $a \in S$， $a \neq \max(S)$ 且 $a \neq \min(S)$

❖ 算法： 从S中任取三个元素{x, y, z}

//若S以数组形式给出，不妨取前三个

//由于S是集合，这三个元素必互异

确定并排除其中的最小、最大者

//不妨设 $x = \max\{x, y, z\}$, $y = \min\{x, y, z\}$

输出剩下的元素z

❖ 无论输入规模n多大，上述算法需要的执行时间都不变

$T(n)$ = 常数 $= \mathcal{O}(1) = \Omega(1) = \Theta(1)$

起泡排序

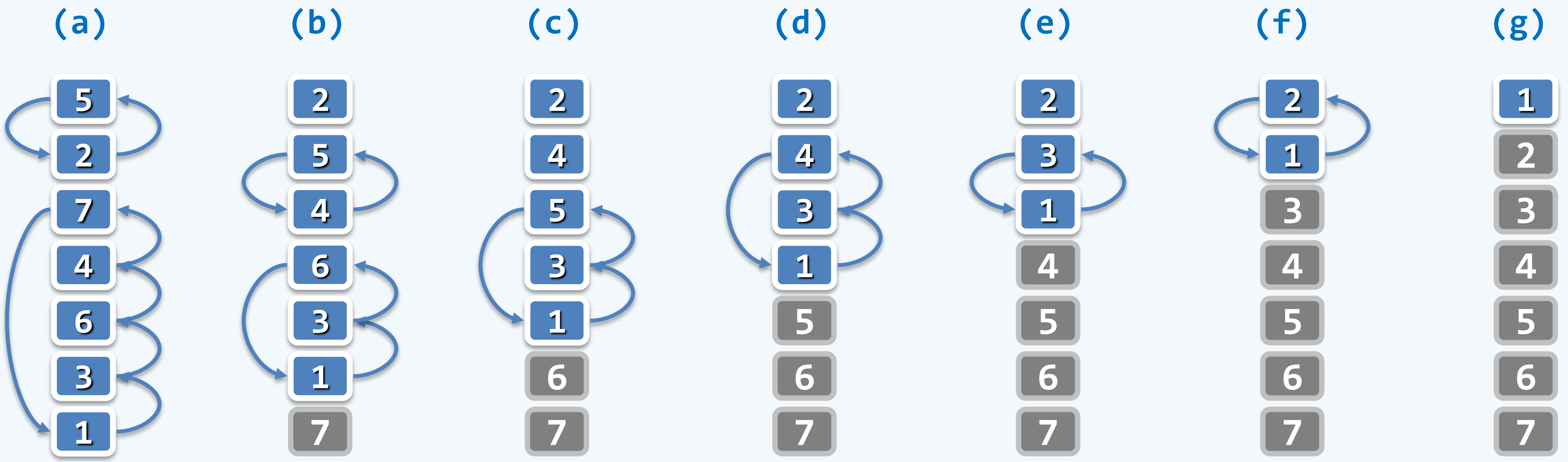
- ❖ 问题：给定n个整数，将它们按（非降）序排列
- ❖ 观察：有序/无序序列中，任意/总有一对相邻元素顺序/逆序
- ❖ 扫描交换：依次比较每一对相邻元素，如有必要，交换之

  若整趟扫描都没有进行交换，则排序完成；否则，再做一趟扫描交换

❖
```
void bubblesort(int A[], int n) { //第二章将进一步改进
   for (bool sorted = false; sorted = !sorted; n--) //逐趟扫描交换，直至完全有序
      for (int i = 1; i < n; i++) //自左向右，逐对检查A[0, n)内各相邻元素
         if (A[i-1] > A[i]) { //若逆序，则
            swap(A[i-1], A[i]); //令其互换，同时
            sorted = false; //清除（全局）有序标志
         }
}
```

起泡排序

- ❖ 问题： 该算法必然会结束？至多需迭代多少趟？
- ❖ **不变性**：经k轮扫描交换后，最大的k个元素必然就位
- ❖ **单调性**：经k轮扫描交换后，问题规模缩减至n-k
- ❖ **正确性**：经至多n趟扫描后，算法必然终止，且能给出正确解答



起泡排序

❖ 最坏情况：输入数据反序排列

共n-1趟扫描交换

每趟的效果，都等同于当前有效区间循环左移一位

第k趟中，需做n-k次比较和3(n-k)次移动，$0 < k < n$

累计：$\#KMP = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n(n-1)/2$

$\#MOV = 3 \times n(n-1)/2$

$T(n) = 4 \times n(n-1)/2 = \mathcal{O}(n^2)$

❖ 最好情况：所有输入元素已经完全（或接近）有序

外循环仅1次，做n-1次比较和0次元素交换

累计：$T(n) = n-1 = \Omega(n)$

Back-Of-The-Envelope Calculation

❖ 地球（赤道）周长 ≈ 787 x 360/7.2

= 787 x 50

= 39,350 km

❖ 1天 = 24hr x 60min x 60sec

≈ 25 x 4000 = 10^5 sec

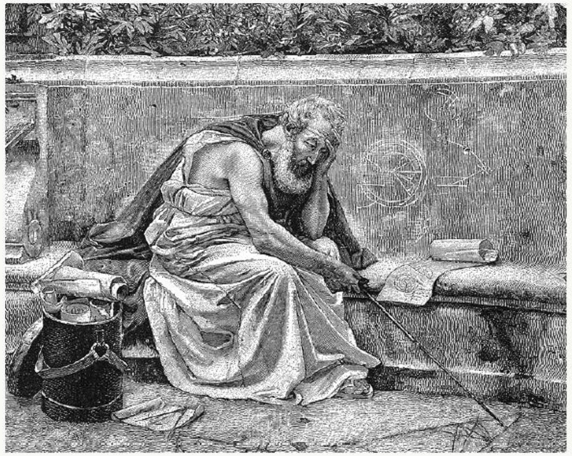
❖ 1生 ≈ 1世纪

= 100yr x 365 = 3 x 10^4 day = 3 x 10^9 sec

❖ “为祖国健康工作五十年” ≈ 1.6 x 10^9 sec

❖ “三生三世” ≈ 300 yr = 10^10 = (1 googel)^(1/10) sec

❖ 宇宙大爆炸至今 = 10^21 = 10 x (10^10)^2 sec



Eratosthenes
(276 ~ 194 B.C.)

Enrico Fermi
(1901 - 1954)

Back-Of-The-Envelope Calculation

❖ 考察对全国人口普查数据的排序

$n = 10^9 \ldots$

算法 \ 硬件	普通PC 1GHz 10^9 flops	天河1A 千万亿次 = 1P 10^15 flops
Bubblesort (10^9)^2 10^18	10^9 sec 30 yr	10^3 sec 20 min
Mergesort (10^9) x log(10^9) 30 x 10^9	30 sec	0.03 ms

课后

- ❖ 试按照“不变性+单调性”的模式，归纳证明本章各算法的正确性
- ❖ 试举例说明，O1Operation()对循环体的复杂度也可能有实质影响
- ❖ 学习不同开发环境提供的Profiler工具，并藉此优化你的程序性能
- ❖ 习题[1-32]