

## 4. 栈与队列

### (c4) 栈应用：中缀表达式求值

邓俊辉

知实而不知名，知名而不知实，皆不知也

deng@tsinghua.edu.cn

## 表达式求值

❖ 给定语法正确的算术表达式s，计算与之对应的数值

❖ `$ echo $(( 0 + ( 1 + 23 ) / 4 * 5 * 67 - 8 + 9 ))`

❖ `\> set /a ( !0 ^<^< ( 1 - 2 + 3 * 4 ) ) - 5 * ( 6 ^| 7 ) / ( 8 ^^ 9 )`

❖ PostScript

`GS> 0 1 23 add 4 div 5 mul 67 mul add 8 sub 9 add =`

❖ Excel: `= COS(0) + 1 - ( 2 - POWER( ( FACT(3) - 4 ), 5) ) * 67 - 8 + 9`

❖ Word: `= NOT(0) + 12 + 34 * 56 + 7 + 89`

❖ calc: `0 ! + 12 + 34 * 56 + 7 + 89 =`

❖ calc: `0 ! + 1 - ( 2 - ( 3 ! - 4 ) ^ 5 ) * 67 - 8 + 9 =`

y

## 表达式求值

❖ 表达式的求值，可视为字符串与对应数值交替转换的过程

❖  $\text{str}(v)$ ：数值 $v$ 对应的（十进制）字符串（名）

$\text{val}(S)$ ：符号串 $S$ 对应的（十进制）数值（实）

❖ 设表达式： $S = S_L + S_0 + S_R$

1)  $S_0$ 可优先计算，且

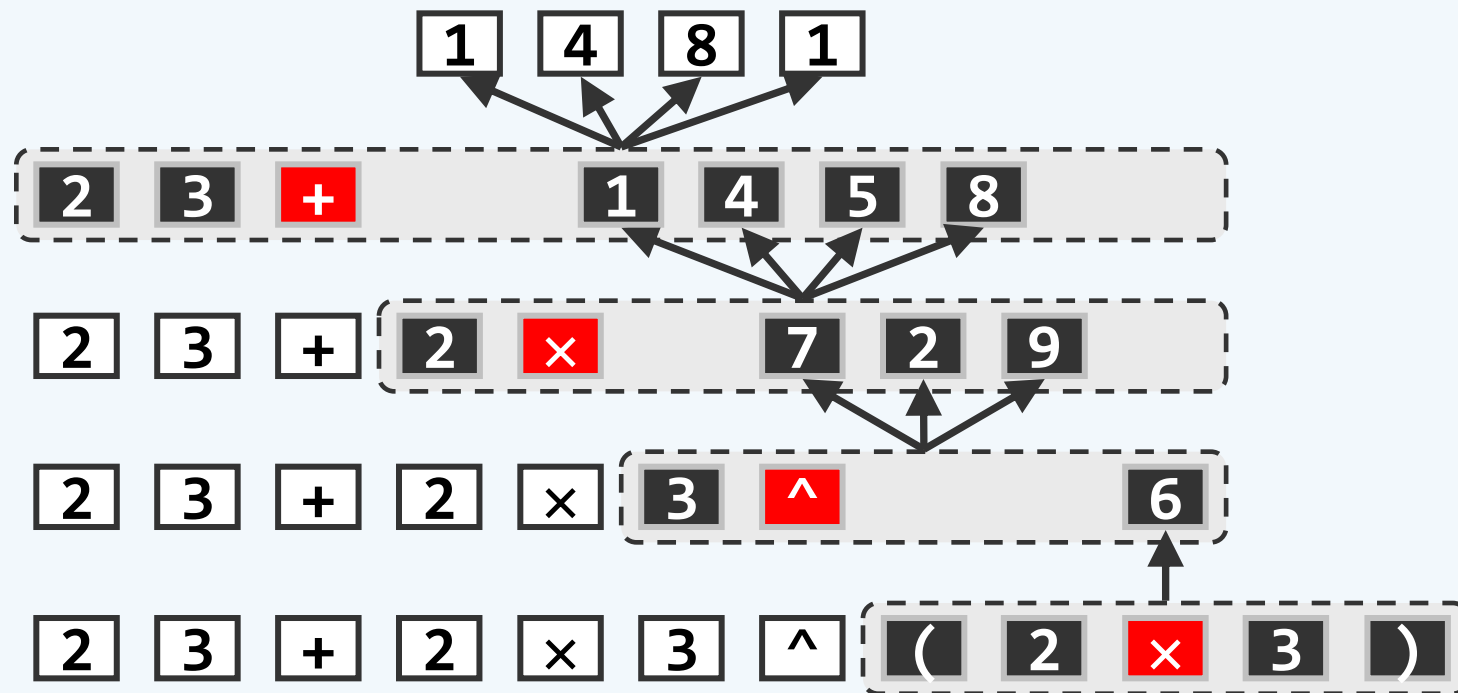
2)  $\text{val}(S_0) = v_0$

❖ 则有递推化简关系

$\text{val}(S)$

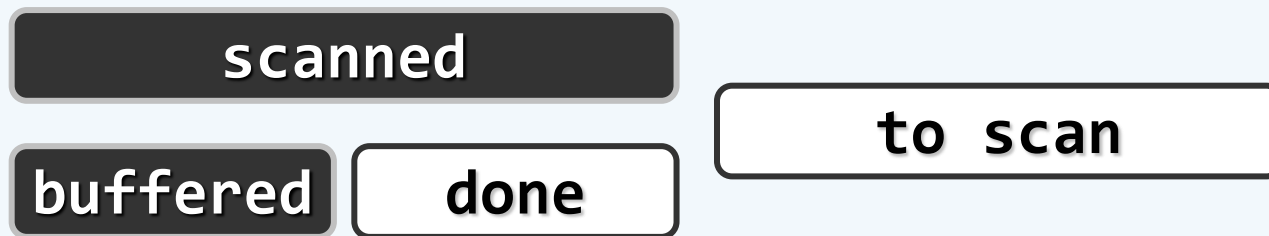
=

$\text{val}(S_L + \text{str}(v_0) + S_R)$



## 延迟缓冲

- ❖ 难点：如何高效地找到可优先计算的 $s_0$ （亦即，其对应的运算符）？
- ❖ 与括号匹配等应用不同，不能简单地按“左先右后”次序处理各运算符
- ❖ 此时，需要考虑更多因素（约定俗成的）**优先级**： $1 + 2 * 3 ^ 4 !$   
可强行改变次序的**括号**： $(( ( 1 + 2 ) * 3 ) ^ 4 ) !$
- ❖ 仅根据表达式的前缀，不足以确定各运算符的计算次序  
只有在获得足够的后续信息之后，才能确定其中哪些运算符可以执行



- ❖ 体现在求值算法的流程上  
为处理某一前缀，必须提前预读并分析更长的前缀
- ❖ 为此，需借助某种支持延迟缓冲的机制...

## 求值算法 = 栈 + 线性扫描

❖ 自左向右扫描表达式，用栈记录已扫描的部分（含已执行运算的结果）

在每一字符处

while（栈的顶部存在可优先计算的子表达式）

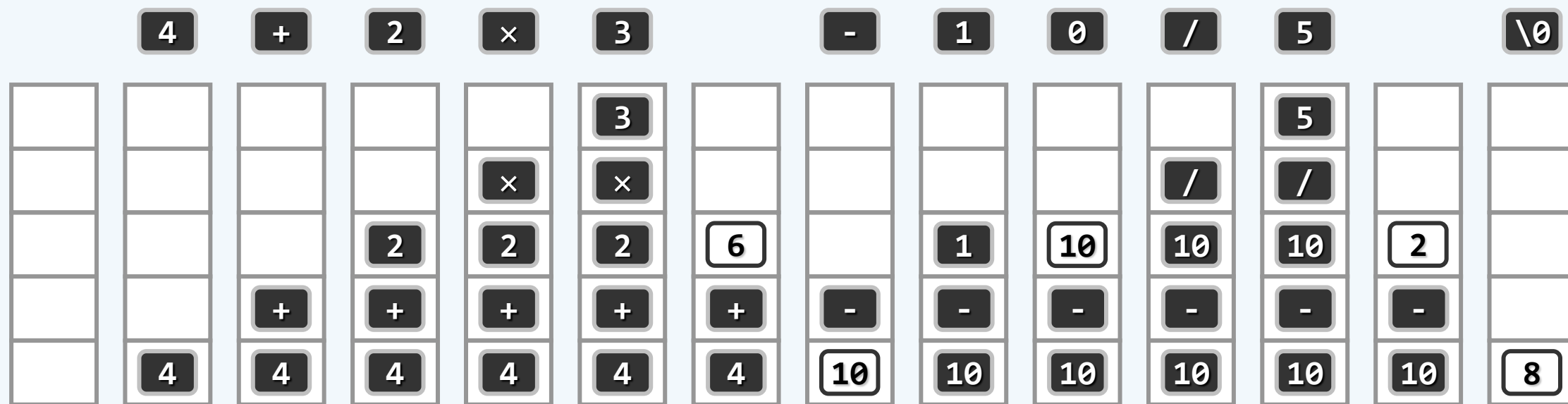
//如何判断？

该子表达式退栈；计算其数值；计算结果进栈

当前字符进栈，转入下一字符

❖ 只要语法正确，则栈内最终应只剩一个元素

//即表达式对应的数值



## 实现：主算法

```
❖ float evaluate( char* S, char* & RPN ) { //中缀表达式求值

    Stack<float> opnd; Stack<char> optr; //运算数栈、运算符栈

    optr.push(' \0' ); //尾哨兵 '\0' 也作为头哨兵首先入栈

    while ( !optr.empty() ) { //逐个处理各字符，直至运算符栈空

        if ( isdigit( *S ) ) //若当前字符为操作数，则

            readNumber( S, opnd ); //读入（可能多位的）操作数

        else //若当前字符为运算符，则视其与栈顶运算符之间优先级的高低

            switch( orderBetween( optr.top(), *S ) ) { /* 分别处理 */ }

    } //while

    return opnd.pop(); //弹出并返回最后的计算结果
```

## 实现：优先级表

```
const char pri[N_OPTR][N_OPTR] = { //运算符优先等级 [栈顶][当前]
```

```
//      |----- 当前运算符 -----|
//      +   -   *   /   ^   !   (   )   \0
/* -- + */ '>', '>', '<', '<', '<', '<', '<', '>', '>',
/* | - */ '>', '>', '<', '<', '<', '<', '<', '>', '>',
/* 栈 * */ '>', '>', '>', '>', '<', '<', '<', '>', '>',
/* 顶 / */ '>', '>', '>', '>', '<', '<', '<', '>', '>',
/* 运 ^ */ '>', '>', '>', '>', '>', '>', '>', '>', '>',
/* 算 ! */ '>', '>', '>', '>', '>', '>', '>', '>', '>',
/* 符 ( */ '<', '<', '<', '<', '<', '<', '<', '=', ' ',
/* | ) */ ' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ',
/* -- \0 */ '<', '<', '<', '<', '<', '<', '<', ' ', '=',
```

```
};
```



## 实现：不同优先级处理方法

```
❖ switch( orderBetween( optr.top(), *S ) ) {  
    case '<': //栈顶运算符优先级更低  
        optr.push( *S ); S++; break; //计算推迟，当前运算符进栈  
    case '=': //优先级相等（当前运算符为右括号，或尾部哨兵'\0'）  
        optr.pop(); S++; break; //脱括号并接收下一个字符  
    case '>': { //栈顶运算符优先级更高，实施相应的计算，结果入栈  
        char op = optr.pop(); //栈顶运算符出栈，执行对应的运算  
        if ( '!' == op ) opnd.push( calcu( op, opnd.pop() ) ); //一元运算符  
        else { float p0pnd2 = opnd.pop(), p0pnd1 = opnd.pop(); //二元运算符  
                opnd.push( calcu( p0pnd1, op, p0pnd2 ) ); //实施计算，结果入栈  
            } //为何不直接：opnd.push( calcu( opnd.pop(), op, opnd.pop() ) ) ?  
        break;  
    } //case '>'  
}  
} //switch
```



## 实现：优先级表（理解）

const char pri[N\_OPTR][N\_OPTR] = { //运算符优先等级 [栈顶][当前]

//		----- 当前运算符 -----								
//		+	-	*	/	^	!	(	)	\0
/* -- + */		'>'	'>'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'>'	'>'
/*   - */		'>'	'>'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'>'	'>'
/* 栈 * */		'>'	'>'	'>'	'>'	'<'	'<'	'<'	'>'	'>'
/* 顶 / */		'>'	'>'	'>'	'>'	'<'	'<'	'<'	'>'	'>'
/* 运 ^ */		'>'	'>'	'>'	'>'	'>'	'<'	'<'	'>'	'>'
/* 算 ! */		'>'	'>'	'>'	'>'	'>'	'>'	'>'	'>'	'>'
/* 符 ( */		'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'='	'>'
/*   ) */		'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'
/* -- \0 */		'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'<'	'='

# 实例

表达式	运算符栈	操作数栈	注解
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$		表达式起始标识入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ (		左括号入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ (	0	操作数0入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ ( !	0	运算符'!'入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ (	1	运算符'!'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ ( +	1	运算符'+'入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ ( +	1 1	操作数1入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ (	2	运算符'+'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$	2	左括号出栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ *	2	运算符'*'入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ *	2 2	操作数2入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ * ^	2 2	运算符'^'入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ * ^ (	2 2	左括号入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ * ^ (	2 2 3	操作数3入栈

# 实例

表达式	运算符栈	操作数栈	注解
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ * ^ ( !	2 2 3	运算符'!'入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ * ^ (	2 2 6	运算符'!'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ * ^ ( +	2 2 6	运算符'+'入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ * ^ ( +	2 2 6 4	操作数4入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ * ^ (	2 2 10	运算符'+'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ * ^	2 2 10	左括号出栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ *	2 1024	运算符'^'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$	2048	运算符'*'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ -	2048	运算符'-'入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - (	2048	左括号入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - (	2048 5	操作数5入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - ( !	2048 5	运算符'!'入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - (	2048 120	运算符'!'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - ( -	2048 120	运算符'-'入栈

# 实例

表达式	运算符栈	操作数栈	注解
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - ( -	2048 120 67	操作数67入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - (	2048 53	运算符'-'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - ( -	2048 53	运算符'-'入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - ( - (	2048 53	左括号入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - ( - (	2048 53 8	操作数8入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - ( - ( +	2048 53 8	运算符'+'入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - ( - ( +	2048 53 8 9	操作数9入栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - ( - (	2048 53 17	运算符'+'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - ( -	2048 53 17	左括号出栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - (	2048 36	运算符'-'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ -	2048 36	左括号出栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$	2012	运算符'-'出栈执行
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$		2012	表达式起始标识出栈
$(0!+1)*2^{\wedge}(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$			返回唯一的元素2012