Un matemático y un psicólogo de paseo por Hanoi

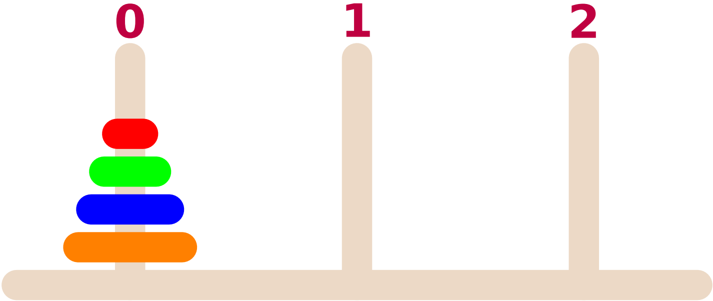
Erik Amézquita [1]
erik.amezquita@cimat.mx

[1] DEMAT, UGto

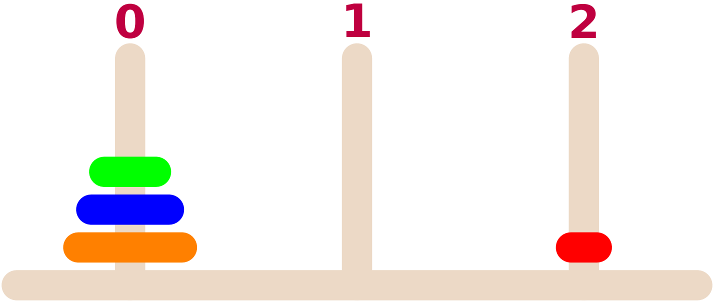
21 de noviembre de 2017

El Problema de la Torre de Hanoi Clásico

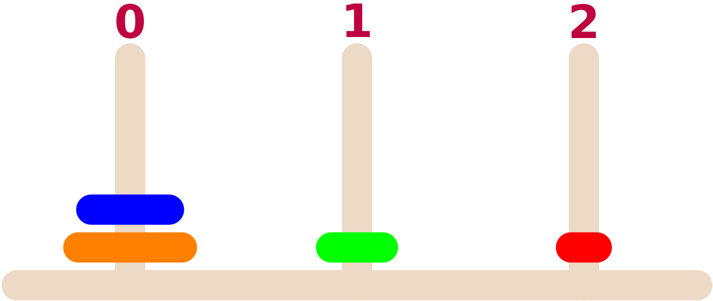
Édouard Lucas (1842-1891) alias *N. Claus de Siam* [1889] anagrama de Lucas d'Amiens.



[0,0,0,0]

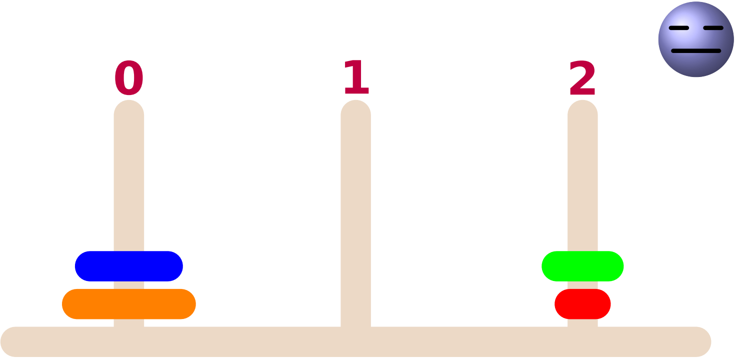


[2,0,0,0]

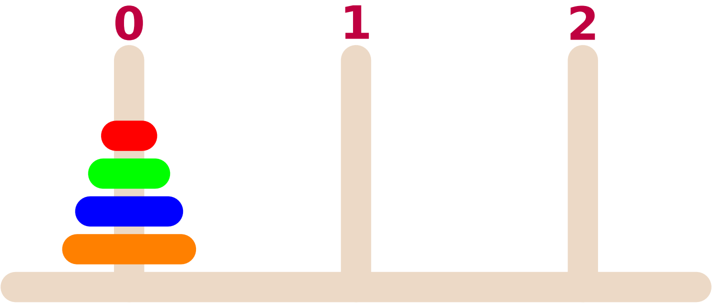


[2,1,0,0]

No vale

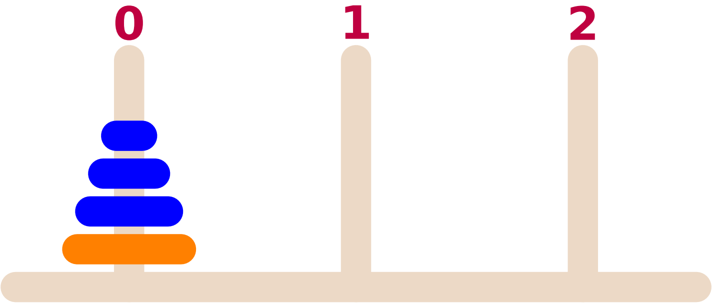


Resolviendo para $n = 4$



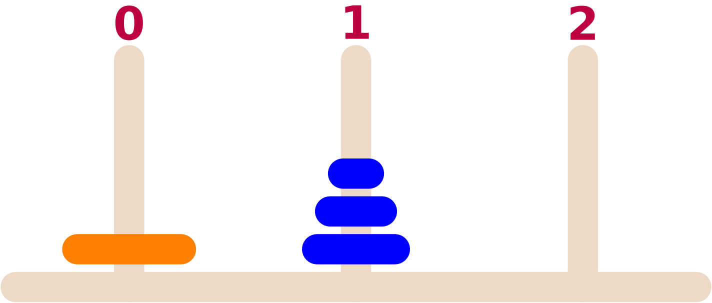
[0,0,0,0]

Mover el naranja



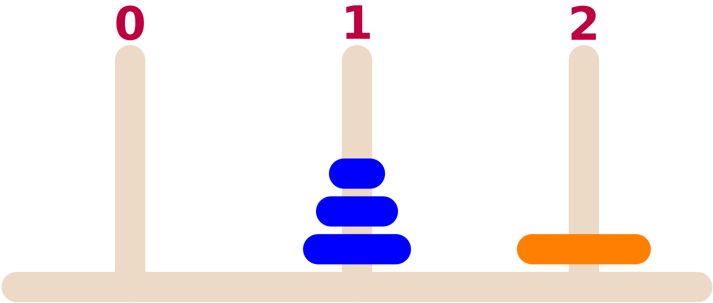
[0,0,0,0]

Ahora sí se puede



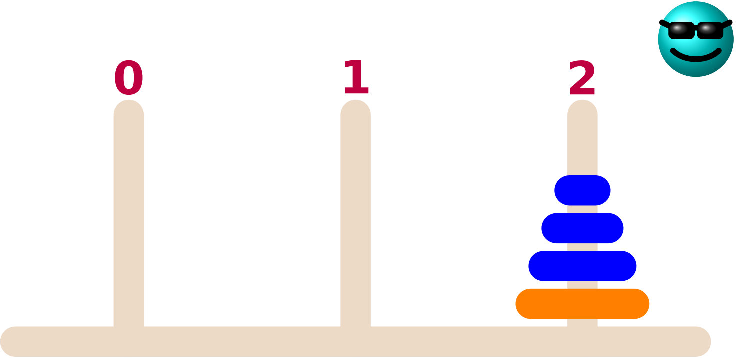
[1,1,1,0]

Ahora sí se puede



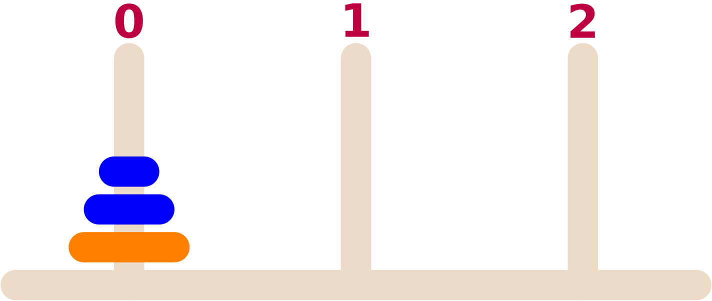
[1,1,1,2]

Listo



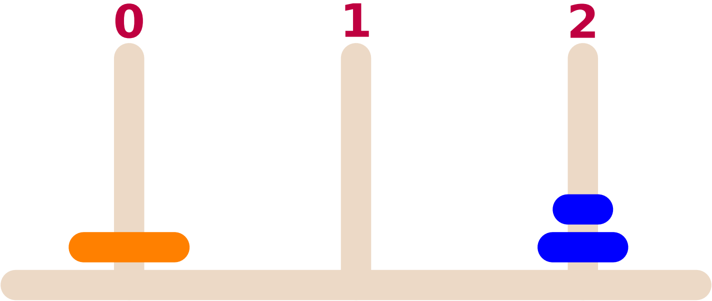
[2,2,2,2]

Mover el naranja en $n = 3$



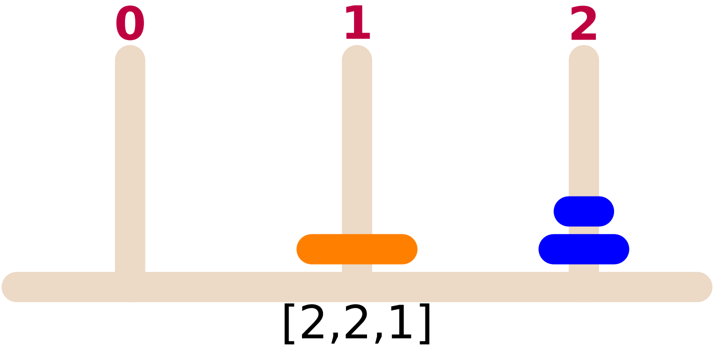
[0,0,0]

Mover el naranja en $n = 3$

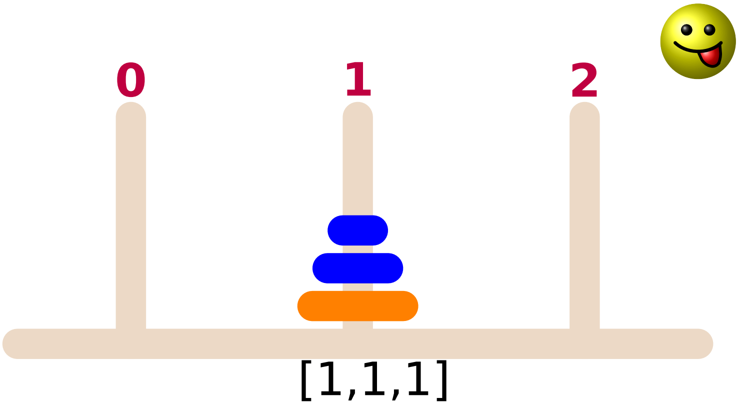


[2,2,0]

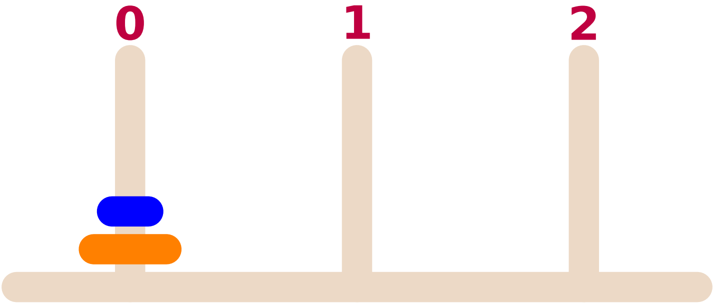
Mover el naranja en $n = 3$



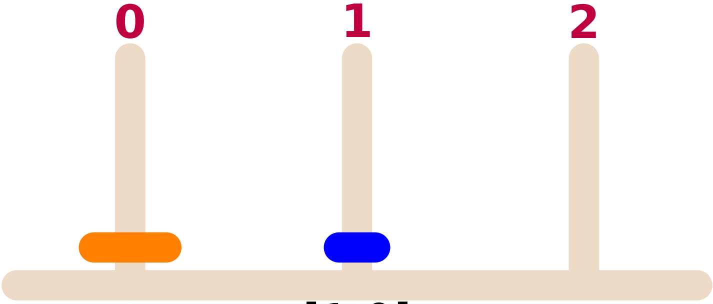
Listo



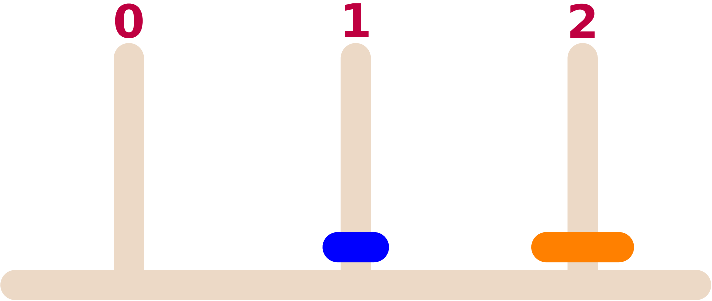
Resolvemos entonces para $n = 2$



[0,0]

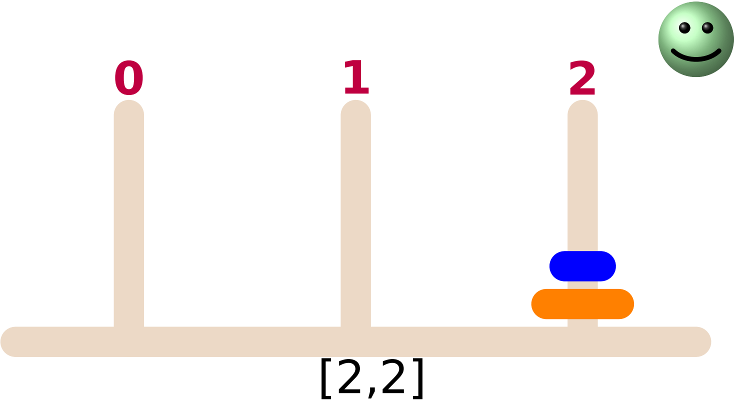


[1,0]

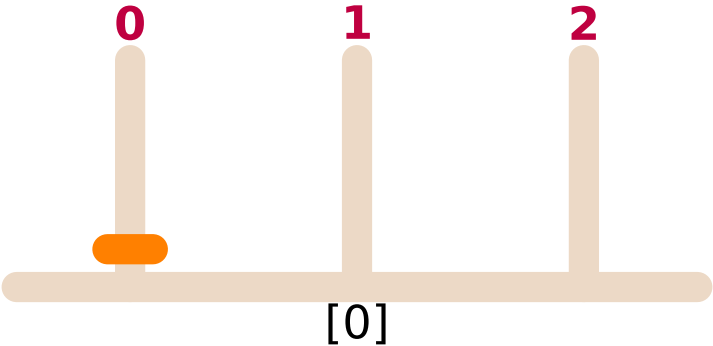


[1,2]

Terminamos nuevamente



¡Primero se resuelve para $n = 1$!



Recursión y patrones

$M(n)$: no. de movimientos para resolver la torre de n discos.

$$M(1) = 1$$

$$\begin{aligned}
M(2) &\leq & M(1) + 1 + M(1) &= & 2M(1) + 1 &= 3 \\
M(3) &\leq & M(2) + 1 + M(2) &= & 2M(2) + 1 &= 7 \\
M(4) &\leq & M(3) + 1 + M(3) &= & 2M(3) + 1 &= 15 \\
M(5) &\leq & M(4) + 1 + M(4) &= & 2M(4) + 1 &= 31
\end{aligned}$$

Inducción matemática

$M(n)$: no. de movimientos para resolver la torre de n discos.

$$M(1) = 1$$

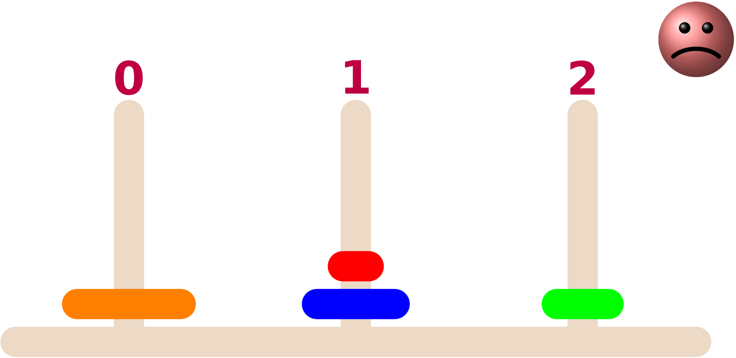
$$M(n+1) \leq M(n) + 1 + M(n) = 2M(n) + 1$$

Resolvemos la relación de recurrencia

$$M(n+1) \leq 2^{n+1} - 1$$

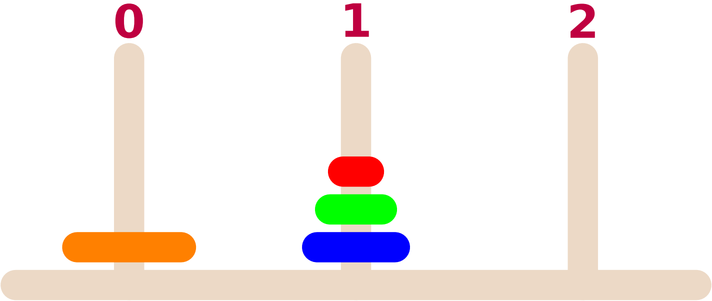
¿Es ésta la mejor manera de resolver el problema?

El disco naranja es difícil de mover



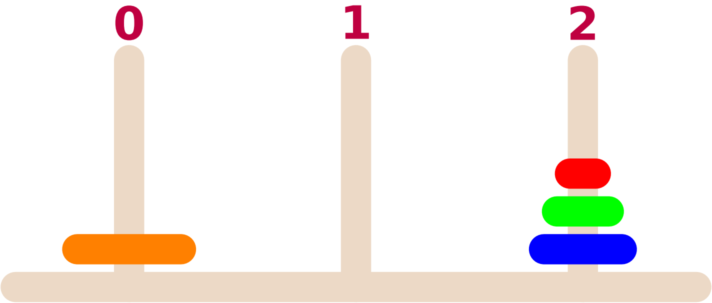
[1,2,1,0]

Uno de dos escenarios posibles



[1,1,1,0]

El otro



[2,2,2,0]

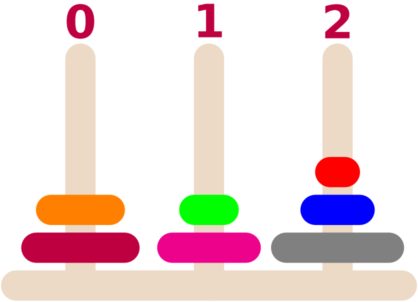
Inducción matemática (nuevamente)

- Sabemos que $M(1) = 1$. Supongamos que para n discos $M(n) \geq 2^n - 1$.
- Para mover el último disco de 0 a i, hay que efectuar al menos $2^n - 1$ movimientos previos.
- Después de mover el último disco de j a 2, hay que hacer al menos $2^n - 1$ movimientos más.
- En total hay que hacer al menos $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ movimientos.
- Es decir $M(n+1) \geq 2^{n+1} - 1$.

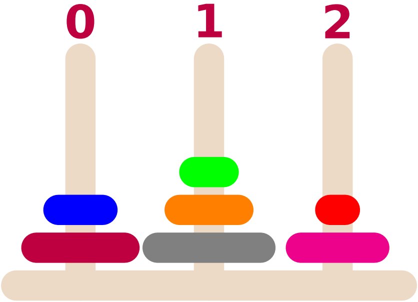
¿Y los monjes?

- $M(64) = 2^{64} - 1 \approx 1.8 \times 10^{19}$ movimientos.
- 1 movimiento por segundo: 570,000 millones de años ≈ 38 veces la edad del universo.
- 10^9 movimientos por segundo: 570 años.

Caminos mín y máx entre configuraciones

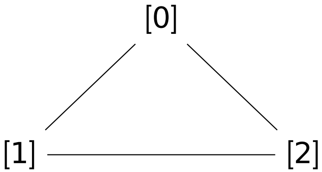


[2,1,2,0,1,0,2]

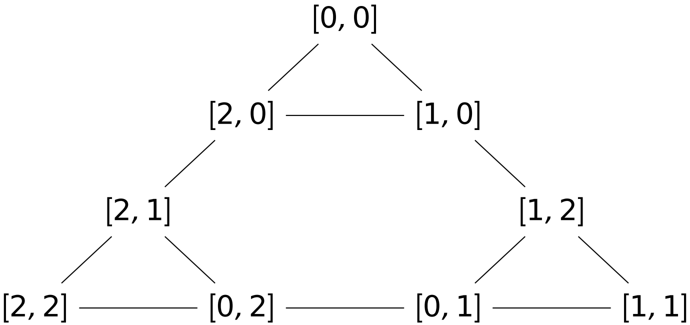


[2,1,0,1,2,0,1]

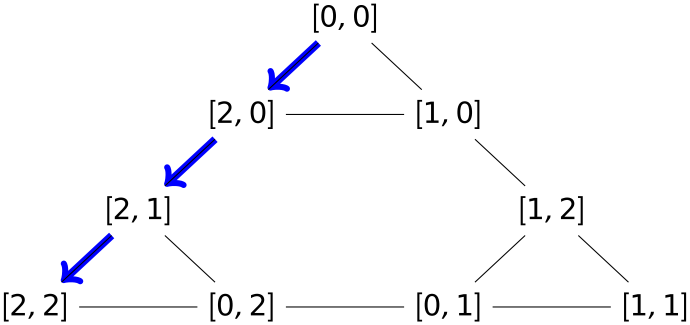
Grafos $n = 1$



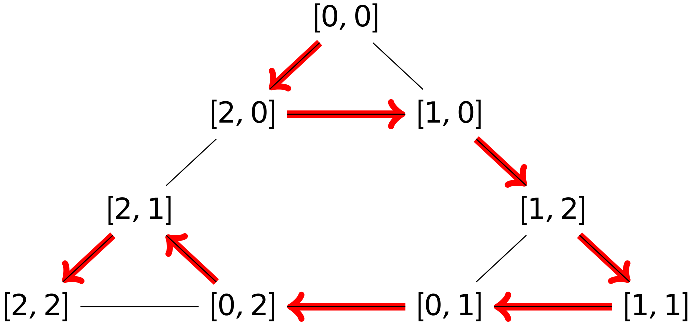
Grafos $n = 2$



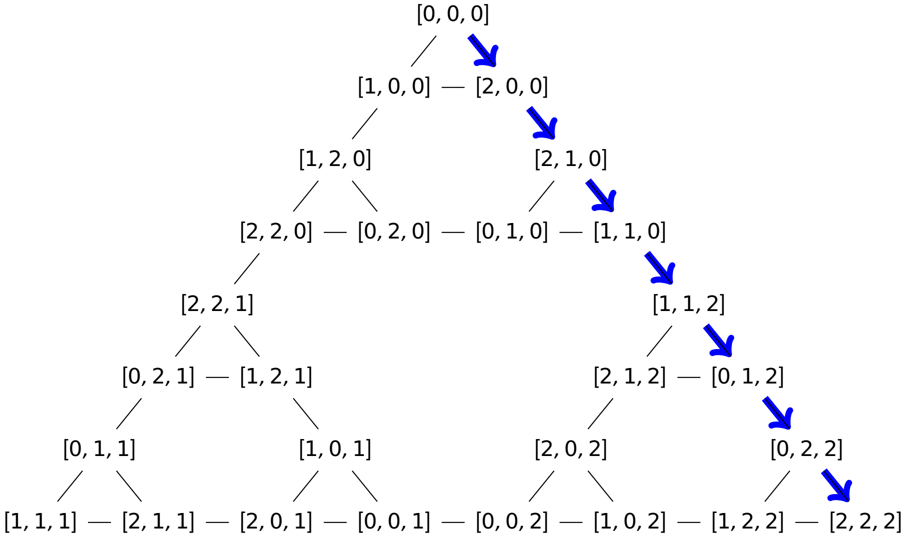
Grafos $n = 2$: mínimo $= 2^n - 1$



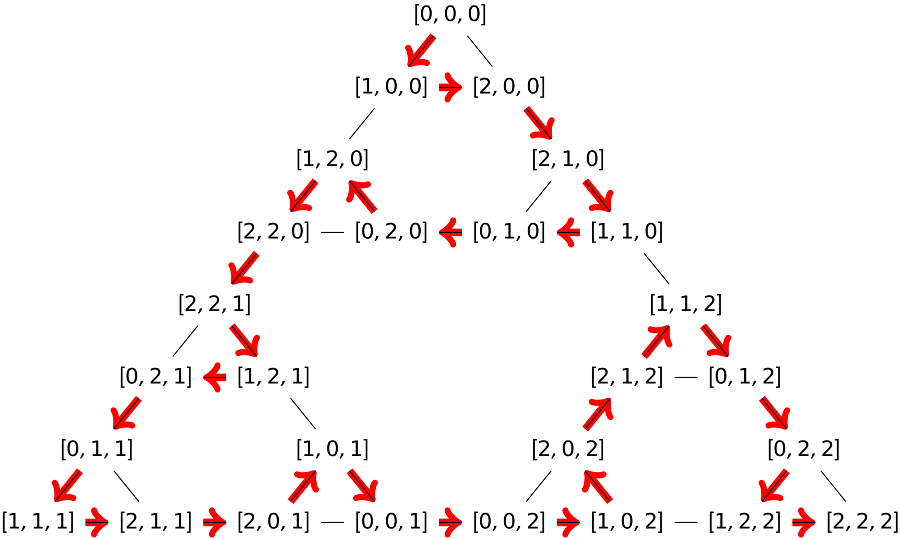
Grafos $n = 2$: máximo $= 3^n$



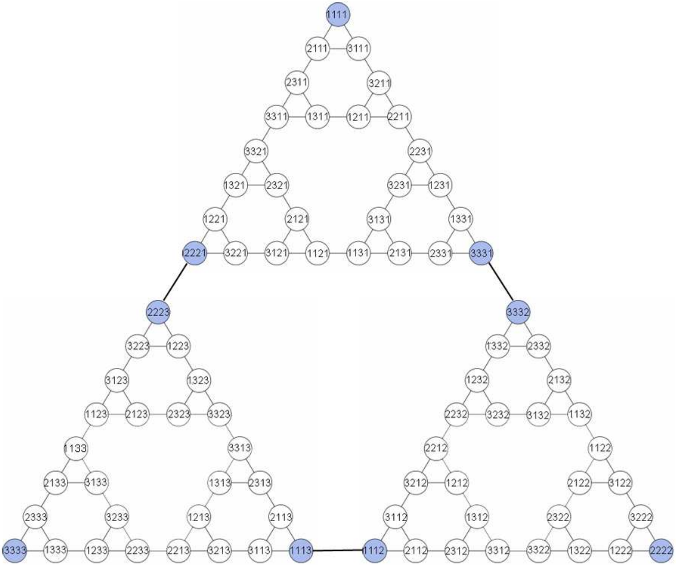
Grafos $n = 3$, mín



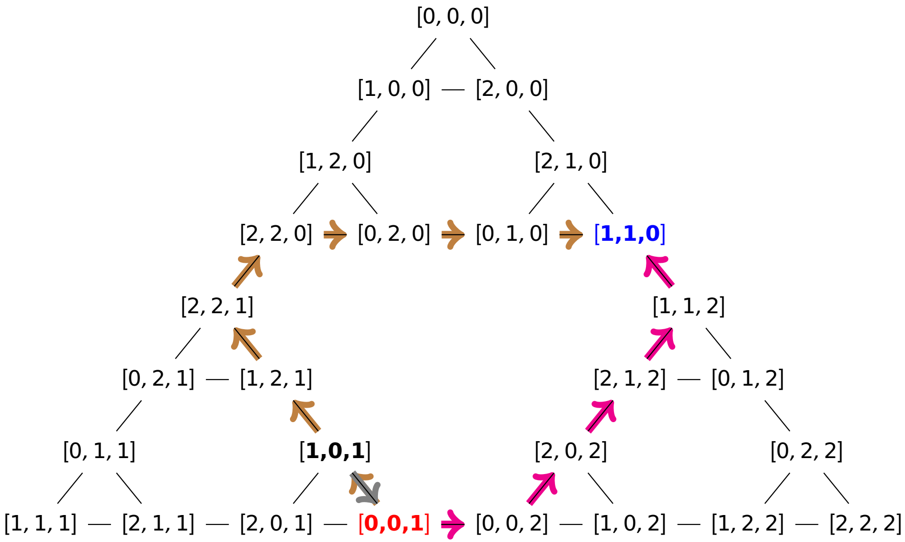
Grafos $n = 3$, máx



$n = 4$


1111
2111
3111
2311
3211
3311
1311
1211
2211
3321
2231
1321
2321
3231
1231
1221
2121
3131
1331
2221
3221
3121
1121
1131
2131
2331
3331
2223
3332
3223
1223
1332
2332
3123
1323
1232
2132
1123
2123
2323
3323
2232
3232
3132
1132
1133
3313
2212
1122
2133
3133
1313
2313
3212
1212
2122
3122
2333
3233
1213
2113
3112
1312
2322
3222
3333
1333
1233
2233
2213
3213
3113
1113
1112
2112
2312
3312
3322
1322
1222
2222

El camino óptimo no siempre es obvio ni único



Probabilidad y combinatoria al rescate

Theorem

Para n muy grande, dadas dos configuraciones al azar, el disco más grande se mueve

- 0 *veces en* $\frac{1}{3}$ *de las ocasiones* (34 %),
- *exactamente una vez en* $\frac{13}{21}$ *de las ocasiones* (62 %),
- *exactamente dos veces en* $\frac{1}{21}$ *de las ocasiones* (4 %),

si se sigue el camino óptimo.

Otra más

Theorem

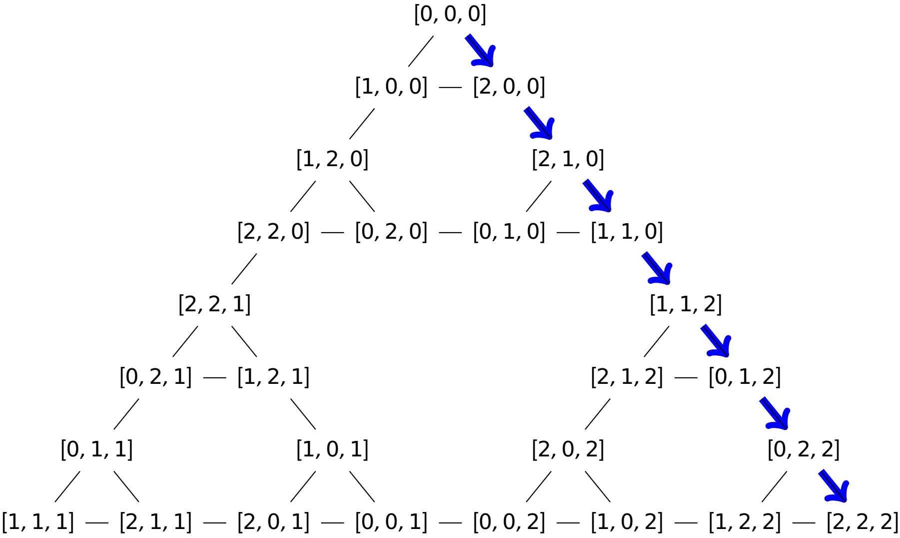
Para n muy grande, dadas dos configuraciones al azar, el camino óptimo es $\frac{466}{885} \approx 0.53$ veces la longitud máxima. De manera más general, para n discos, el camino óptimo entre dos configuraciones es en promedio

$$\frac{466}{885} \cdot 2^n - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{12}{59} + \frac{18}{1003}\sqrt{17}\right)\Theta_+^n + \left(\frac{12}{59} - \frac{18}{1003}\sqrt{17}\right)\Theta_-^n$$

donde

$$\Theta_\pm = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{18}$$

Grafos $n = 3$, mín

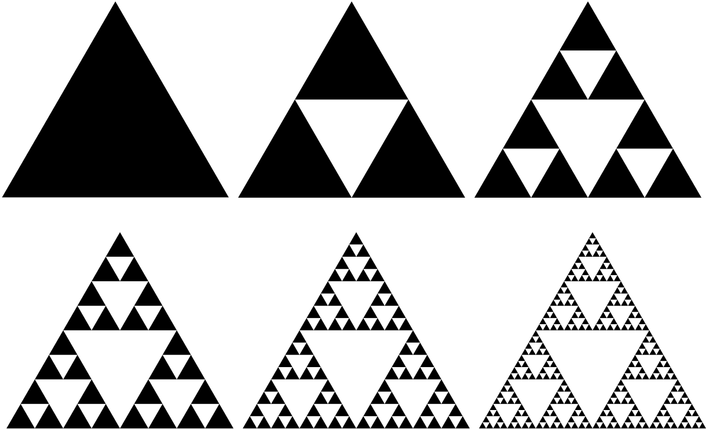


¡En Hanoi hay fractales!

Los fractales son figuras autosimilares: se puede hacer zoom de manera eterna.

El triángulo de Sierpiński

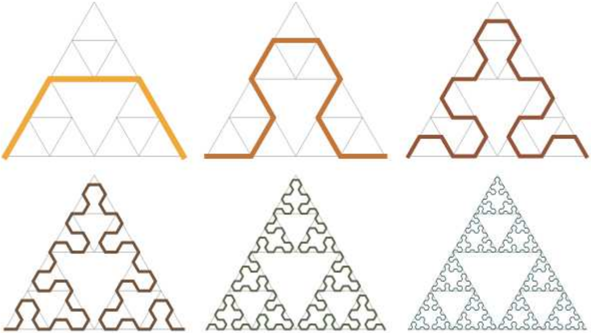
Wacław Sierpiński (1882-1969) lo presentó en 1915. ¡Área 0 pero perímetro infinito!



Una curva muy particular

Sierpiński también la vio como una curva cantoriana y jordaniana tal que cada punto es de ramificación.

- Un sólo trozo delimitado muy delgado.
- Se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.
- La curva se corta a si misma en todo momento.



Hanoi salva el día

Andreas M. Hinz resuelve en 1990 el problema de la distancia promedio entre dos puntos elegidos al azar en el triángulo de Sierpiński:

$$\text{Si el lado inicial mide 1, la distancia promedio es } \frac{466}{885}$$

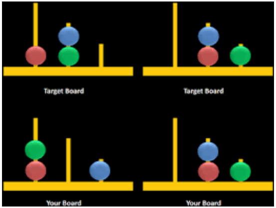
(a) Wacław Sierpiński (1927)

(b) A.M. Hinz en el Congreso Europeo de Matemáticas, 2012.

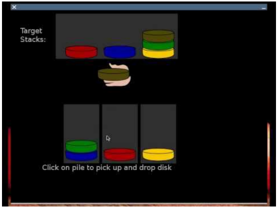
¿Y dónde quedaron los psicólogos?

- El problema de las Torres de Hanoi ha sido usado desde inicios del siglo XX para el diagnóstico de habilidades cognitivas, planeación y aprendizaje.
- Se han propuesto variantes: Las Torres de Londres, de Oxford, de Toronto, etc.
- Diferencias de reglas, número de discos y número de palos.
- Tarea: ir de un estado regular a otro estado regular.
- ¿Camino óptimo? ¿Todos los caminos posibles?

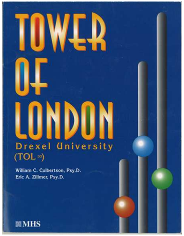
Variantes de las Torres



(a) T. de Londres



(b) T. de Oxford



(c) T. de Toronto

Figura: ¿Cuál es más difícil? ¿En qué sentido? ¿Y con más palos?

Los grafos salvan el día

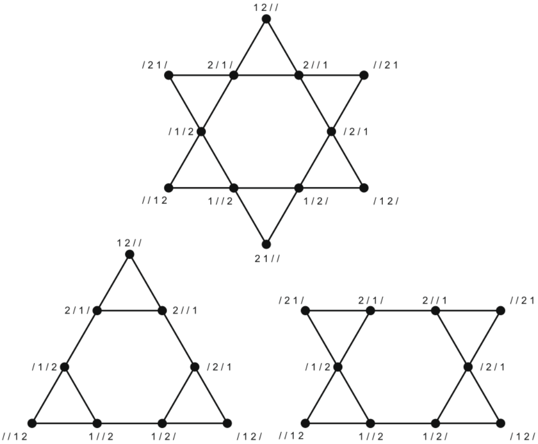


Figura: Grafos de configuraciones de Oxford, Hanoi y Londres para 2 discos.

Algo más exótico

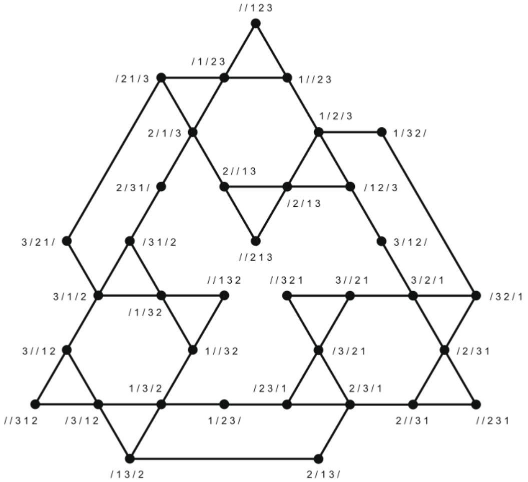


Figura: Grafos de configuraciones de Londres para 3 discos.

Se puede cuantificar la dificultad de tareas

G	$\lvert G\rvert$	$\lVert G\rVert$	d	Δ	μ	diam$G$
O_3^2	12	18	3.0	4	2.14	4
O_3^3	60	108	3.6	6	3.7	7
O_3^4	360	720	4.0	6	5.6	10
H_3^2	9	12	2.7	3	2.0	3
H_3^3	27	39	2.9	3	4.0	7
H_3^4	81	120	2.9	3	8.2	15
L_3^2	10	14	2.8	4	2.0	4
L_3^3	36	54	3.0	4	4.3	8

Cuadro: Con tres palos

Con cuatro palos

G	$\lvert G\rvert$	$\lVert G\rVert$	d	Δ	μ	diam$G$
O_4^2	20	48	4.8	6	2.0	4
O_4^3	120	360	6.0	9	3.3	6
O_4^4	840	2880	6.9	12	4.8	9
H_4^2	16	36	4.5	5	1.9	3
H_4^3	64	168	5.2	6	3.1	5
H_4^4	256	720	5.6	6	4.7	9
L_4^4	480	1464	6.1	9	4.7	9
L_4^5	2640	8280	6.3	9	6.8	12

Cuadro: ¿Y cuántas tareas son equivalentes?

Conclusiones

- La Torre de Hanoi clásica presenta inducción matemática y recursión.
- Grafos y combinatoria permiten entender mejor sus configuraciones regulares.
- Conecta después con el triángulo de Sierpiński, un fractal fabuloso.
- Sus fundamentos matemáticos caracterizan la dificultad de éste y sus variantes en experimentos psicológicos.

Referencias

- Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. *Concrete Mathematics* Addison-Wesley 1989. Cap 1.
- Hinz, A. M. “The Tower of Hanoi”. *L’Enseignement Mathematique* 35 (1989) pp.289-321.
- Hinz, A. M. et. al., “A mathematical model and a computer tool for the Tower of Hanoi and Tower of London puzzles”. *Information Sciences* 179 (2009), pp.2934-2947.
- Stewart I. “Four Encounters with Sierpiński’s Gasket”. *The Mathematical Intelligencer* 17 (1995), pp.52-64.