Infinitos GRANDES

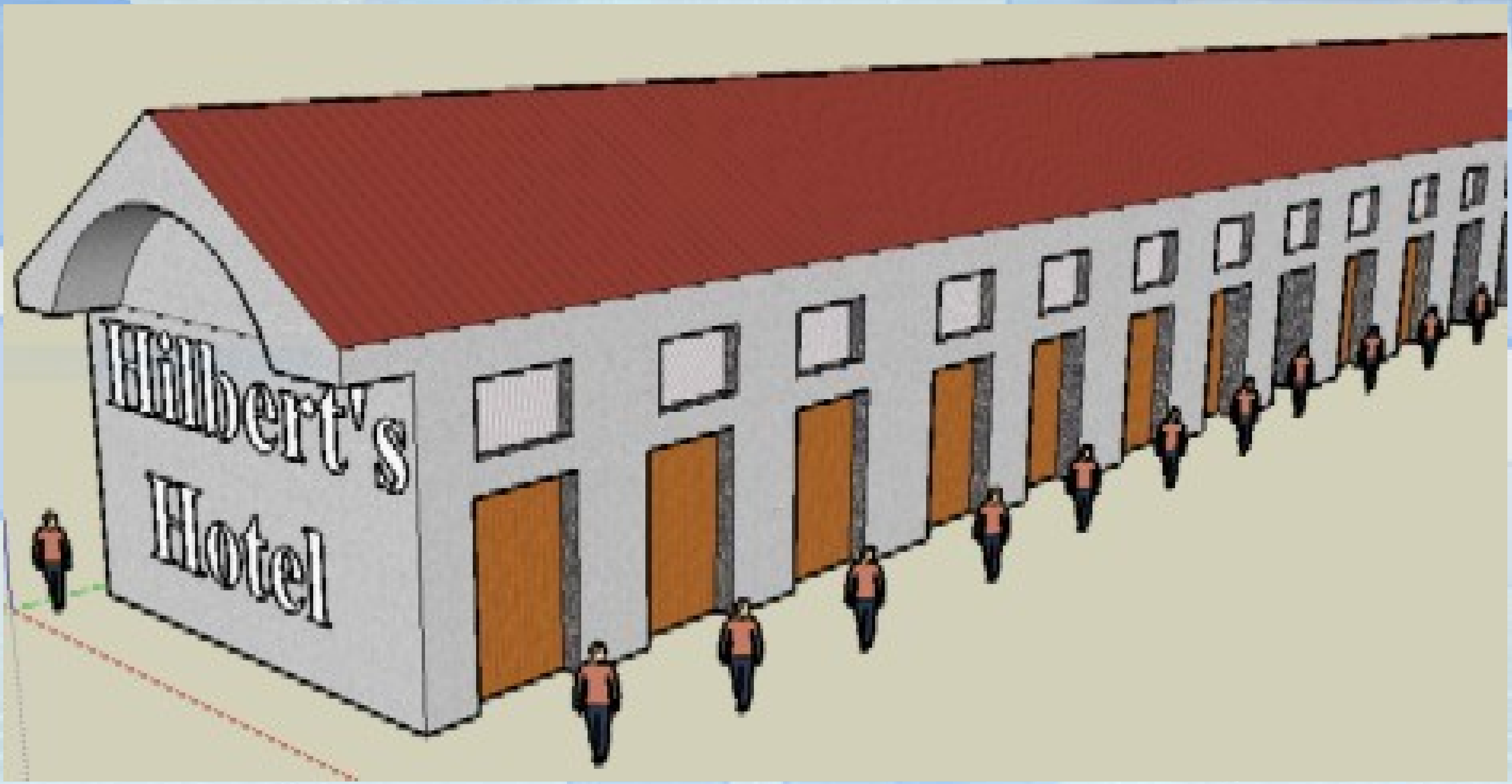
Infinitos pequeños

Erik Amézquita Morataya

Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato

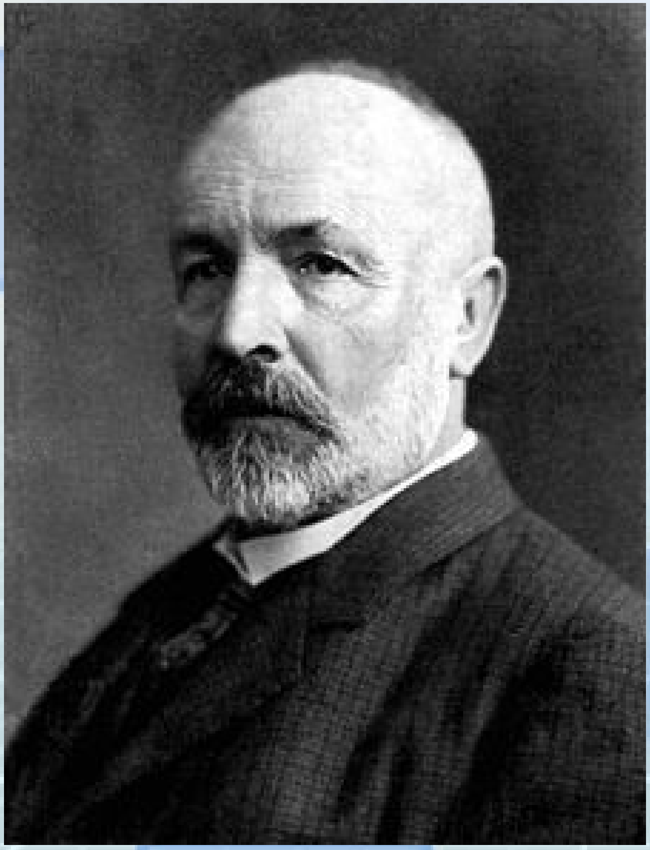
Marzo 2017

El Hotel Paradójico de Hilbert



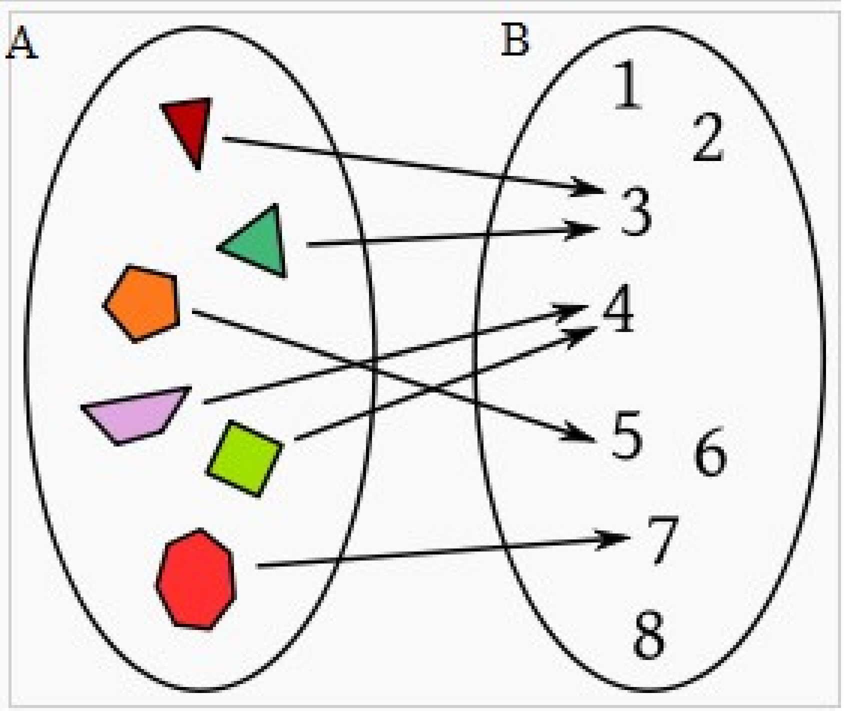
Teoría de Conjuntos

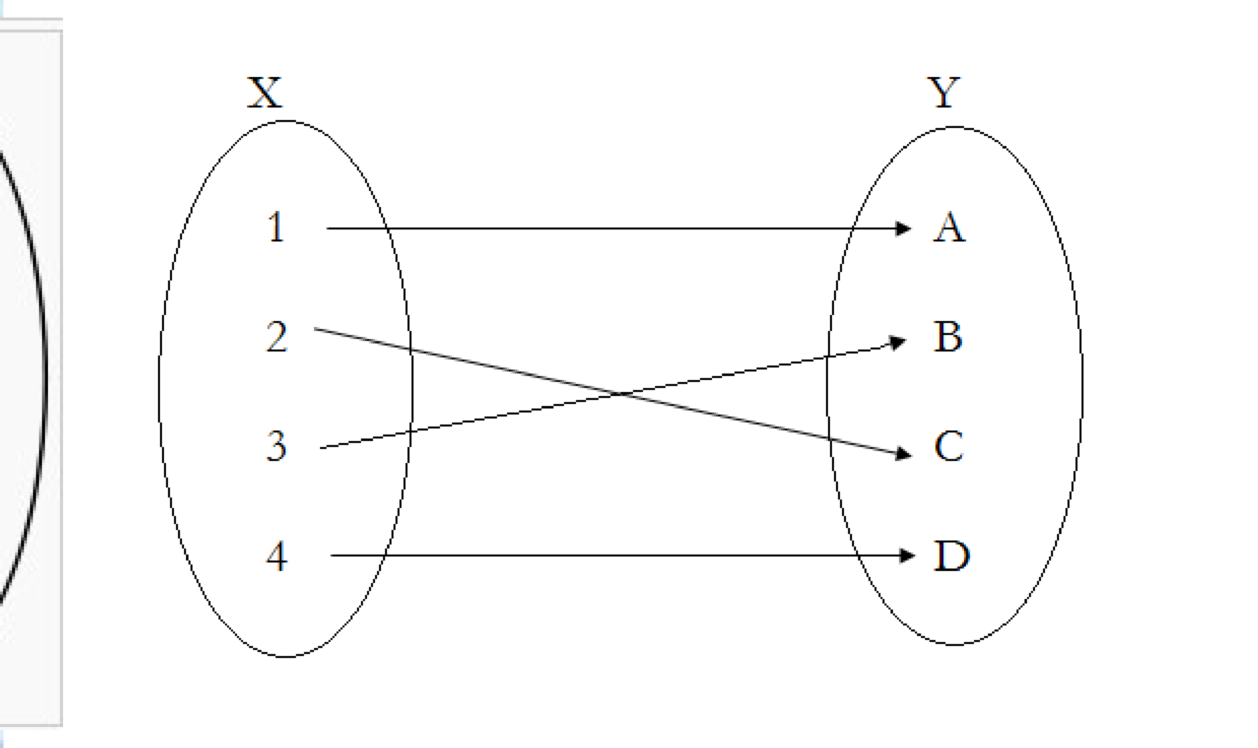
- Georg Cantor
- (1845 - 1910)



- David Hilbert
- (1862 - 1943)

Relación Biyectiva





- Dos conjuntos relacionados: dominio *X* y contradominio *Y*.
- La relación es biyectiva si cada elemento en *X* está relacionado con un único elemento en *Y* y viceversa

Relación biyectiva: países y ciudades

- Francia
- Colombia
- España
- India
- Cuba

- La Habana
- París
- Madrid
- Bogotá
- Delhi
-

Relación NO biyectiva

- Francia
- Colombia
- España
- India
- Cuba

- La Habana
- París
- Madrid
- Bogotá
- Delhi
- México DF
- Moscú

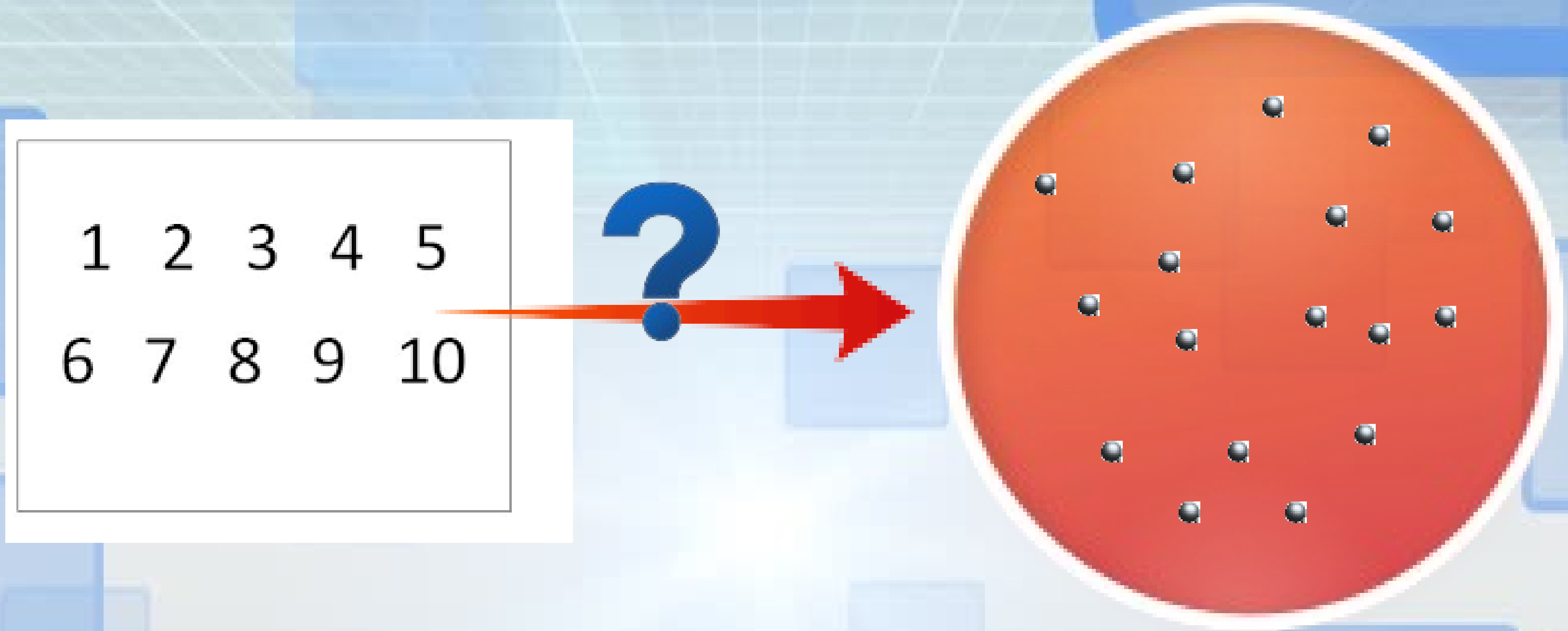
Relación NO biyectiva

- Francia
- Colombia
- España
- India
- Cuba

- La Habana
- París
- Madrid
- Barcelona
- Bogotá
- Delhi
- Medellín

¿ Por qué es importante ?

Númerabilidad



- Un conjunto es numerable si existe una biyección entre éste y los números naturales

¿Cuántos hay más?

¿Naturales o pares?

- **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...**
- **2, 4, 6, 8, 10,12...**

¡Ambos conjuntos

son igual de gordos !

- **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...**

- **2, 4, 6, 8, 10,12...**

¿Cuántos hay más?
¿Enteros o naturales?

- **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …**

- **…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …**

Impar: no negativo

Par: negativo

- **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …**
- **…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …**

Seguimos el patrón...

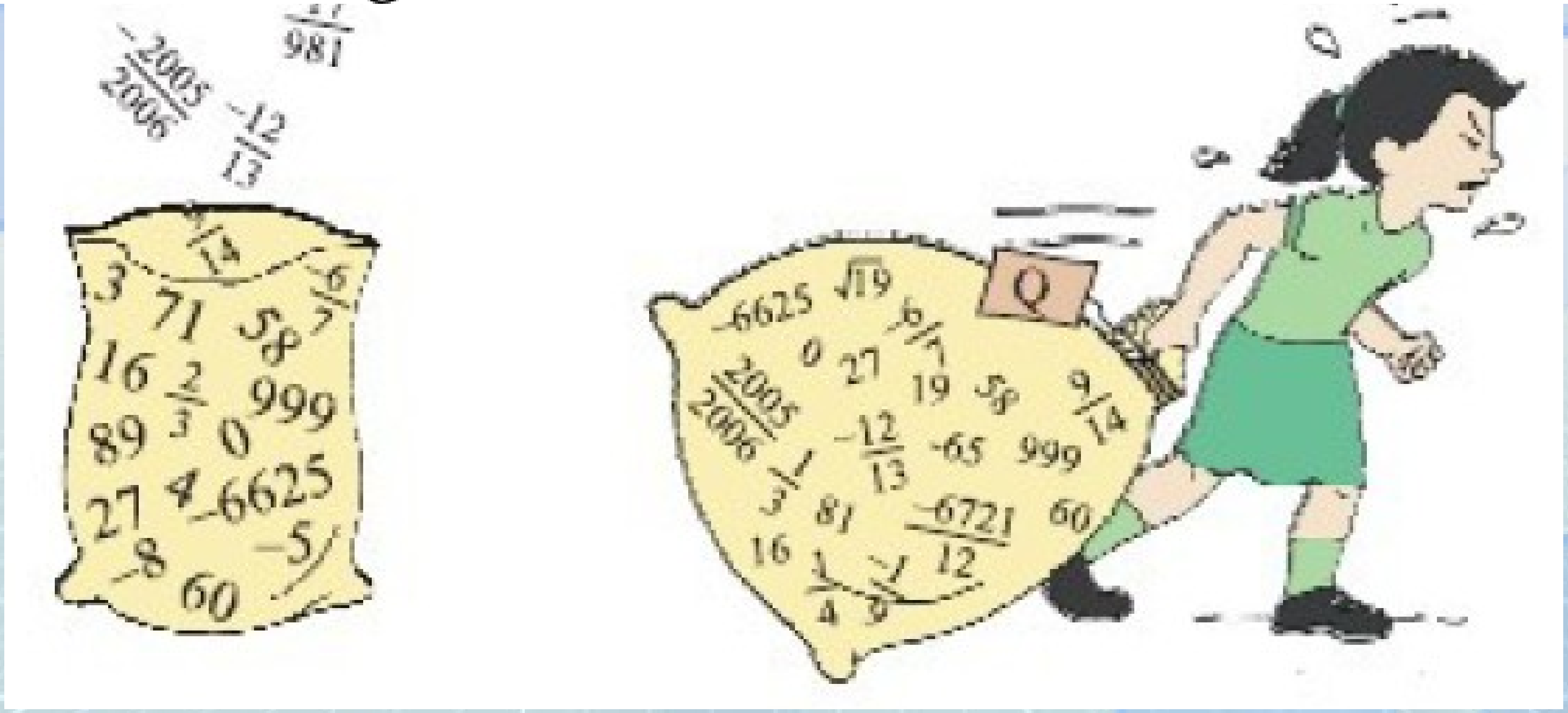
- **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …**
- **…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …**

¡ Son del mismo tamaño !

- **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …**
- **…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …**

¿Y los racionales?

$$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b > 0\}$$



Q

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	...
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	...
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	...
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	...
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	...
⋮						

Primer intento

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	...
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	...
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	...
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	...
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	...
⋮						

¡ Nunca acabaremos si únicamente vamos en una fila !

- **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...**

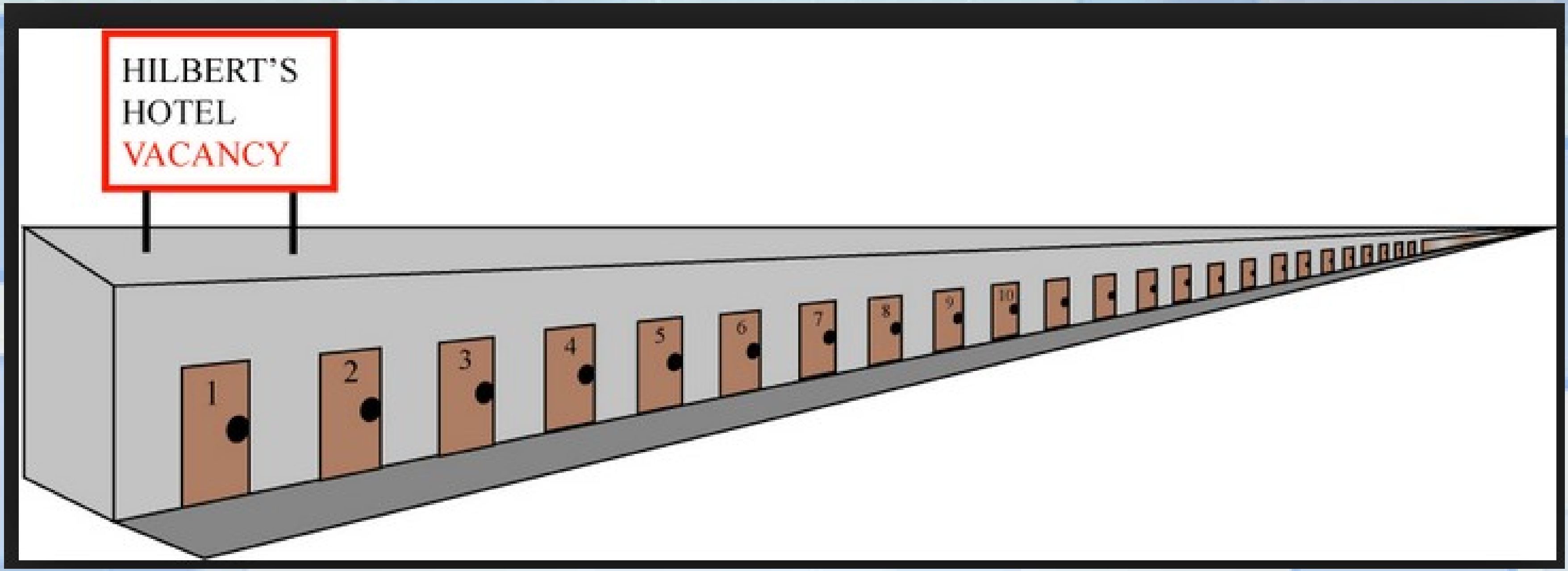
~~1/1~~	~~2/1~~	~~3/1~~	~~4/1~~	~~5/1~~	~~6/1~~	~~...~~
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	...
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	...
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	...
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	...
⋮						

Jugaremos mejor a la serpiente

	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	...
2	$\frac{2}{1}$	$\cancel{\frac{2}{2}}$	$\frac{2}{3}$	$\cancel{\frac{2}{4}}$	$\frac{2}{5}$	$\cancel{\frac{2}{6}}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\cancel{\frac{3}{3}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	...
4	$\frac{4}{1}$	$\cancel{\frac{4}{2}}$	$\frac{4}{3}$	$\cancel{\frac{4}{4}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	...
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	...
6	$\frac{6}{1}$	$\cancel{\frac{6}{2}}$	$\cancel{\frac{6}{3}}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	...
7	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	...
8	$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	...
⋮	⋮								

! Existe la misma cantidad de números naturales que de números enteros y números racionales !

De vuelta al Hotel de Hilbert



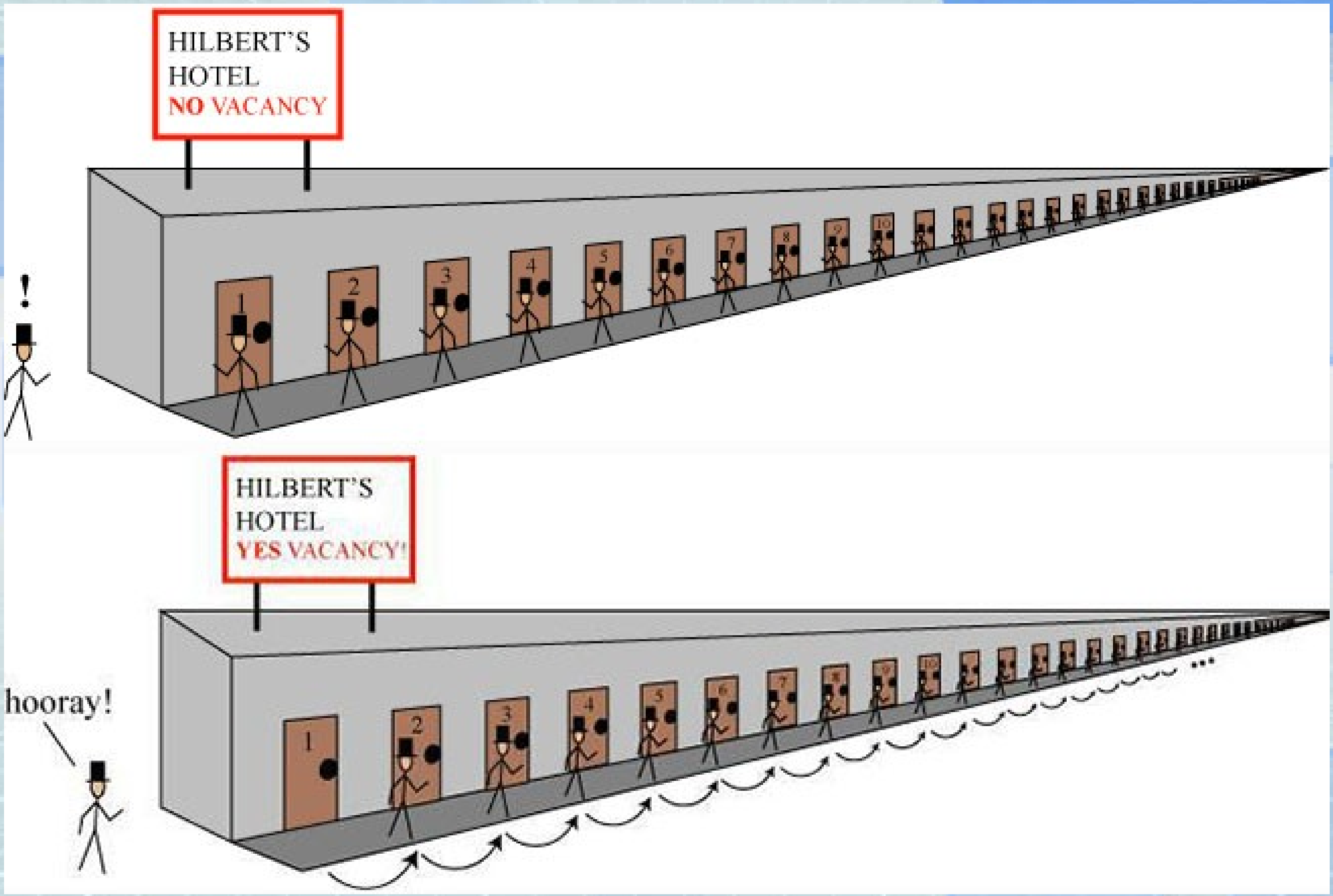
- ¿Qué hacemos con el huesped nuevo?

¡ Biyecciones !
¡ Debemos hallar una !

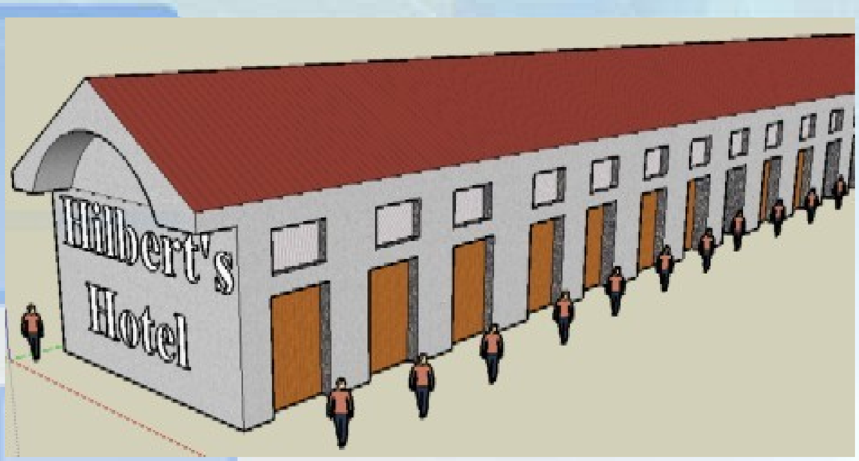
- Huéspedes en este momento
- *, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …
-
- Habitaciones

No estaba tan difícil...



Ahora más difícil



- ¿Biyección?

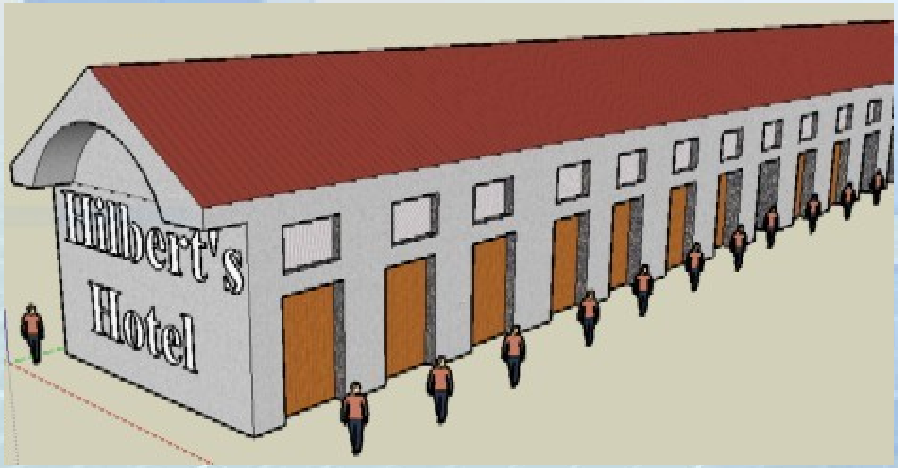
¿A que se parece?

- Habitaciones
- **1,2,3,4,5,6.**
- **1,-1,2,-2,3,-3,**
- Huéspedes

¡ Listo !

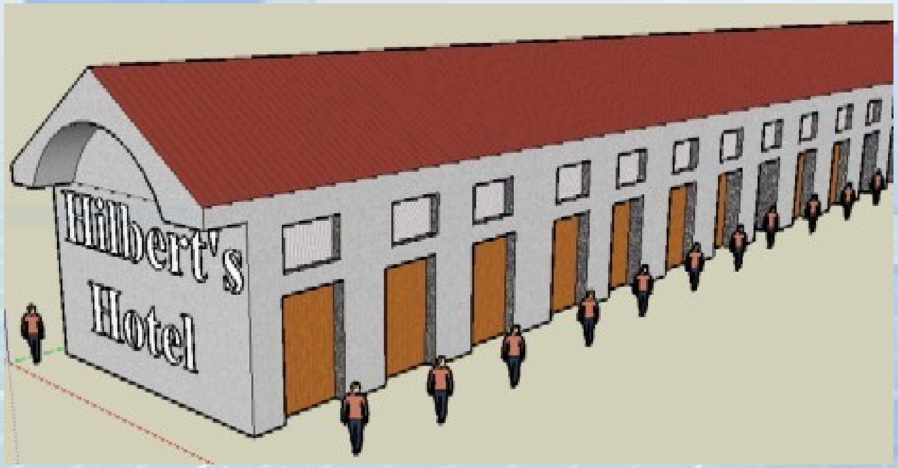
- Habitaciones
- **1,2,3,4,5,6...**
- **1,-1,2,-2,3,-3,**
- Huéspedes

Ahora con infinitos buses infinitos



- ¿?

Ahora con infinitos buses infinitos



- A cada visitante le damos una id. dependiendo de su número de asiento *a* y su número de bus *b.*
- Si es huésped orig os *b* = *0*

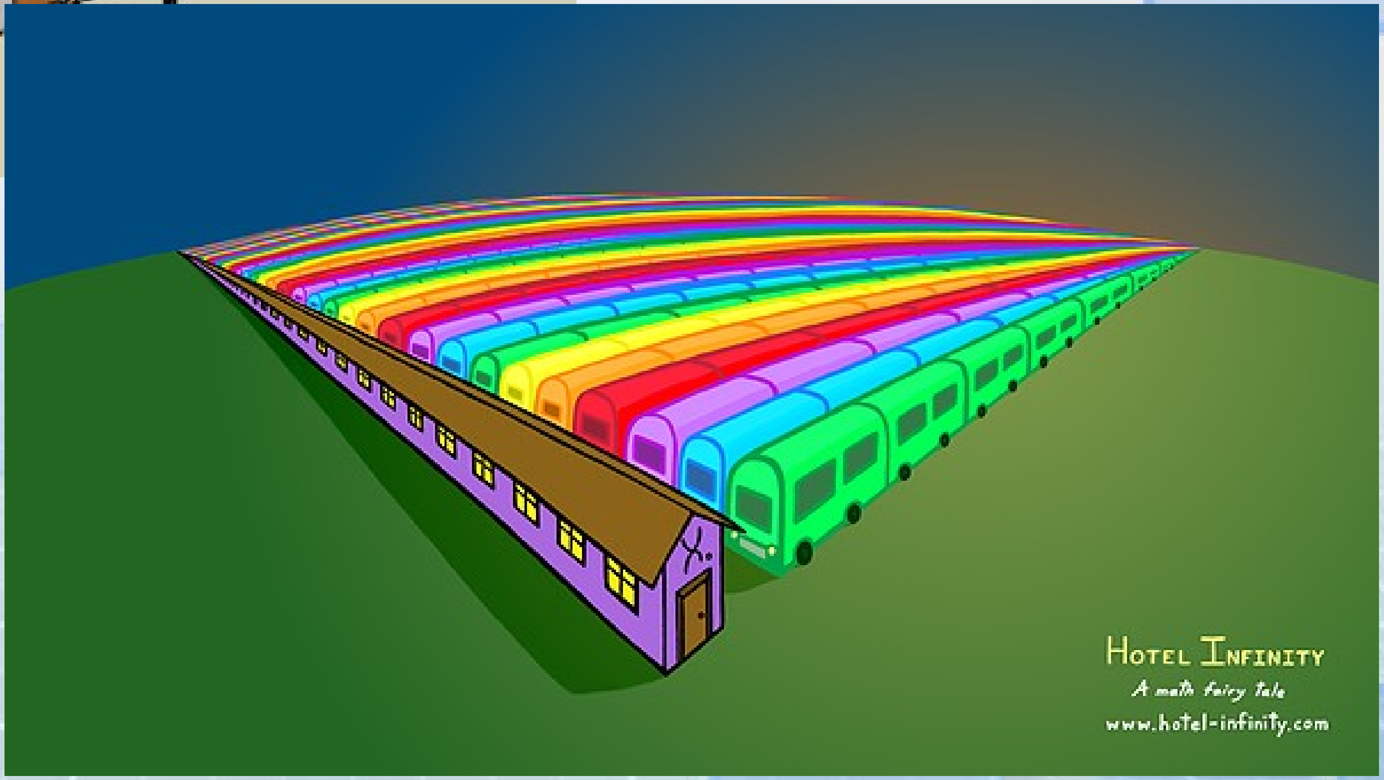
$$2^a3^b$$

Correspondencia buena

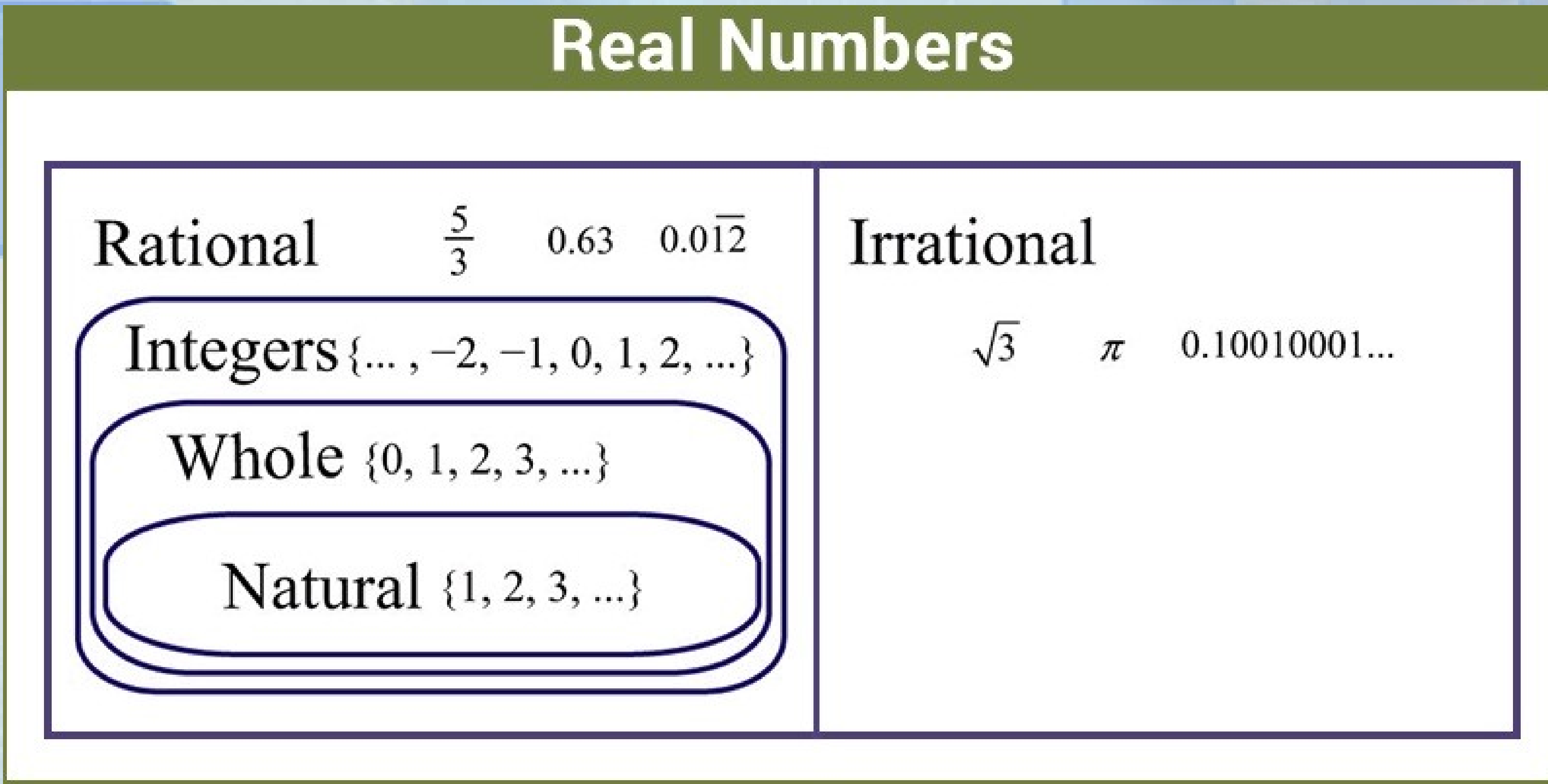
(1,0)	2
(6,0)	64
(1,1)	6
(1,2)	18
(2,4)	324
(2,5)	972
...	...

Infinitos infinitos buses infinitos

$$2^{a}3^{b}5^{f}$$



Pero no podemos hospedar a los reales, ni siquiera al (0,1)



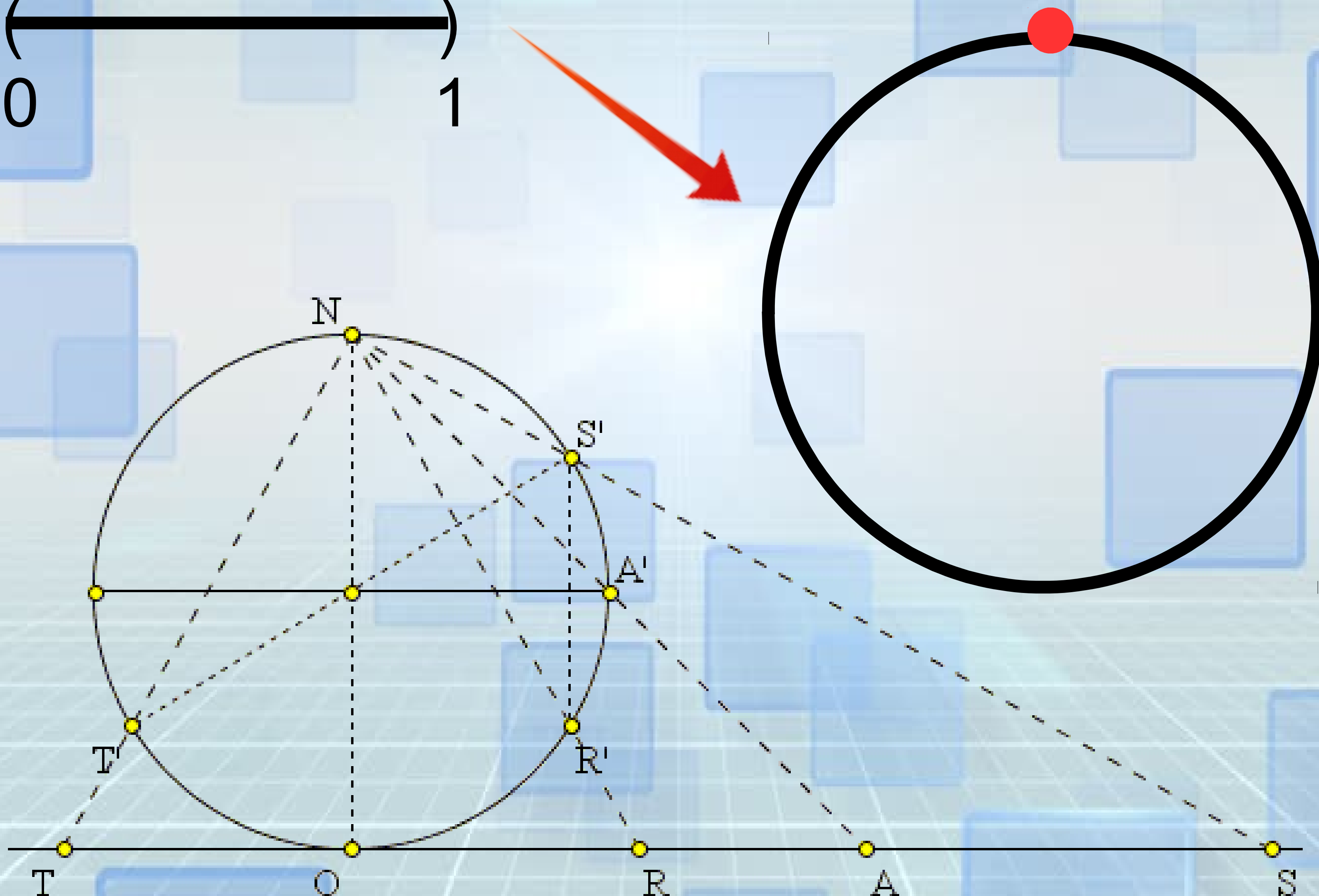
$$(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$$

Diagonalización de Cantor

Natural	Real
0	0.236436775676...
1	0.098473294543...
2	0.193214042202...
3	0.843279242093...
4	0.012934812343...
5	0.639423412934...
6	0.017773923845...
7	0.238920090909...
8	0.123984732999...
9	0.646329878122...
10	0.000123943437...
11	0.981298312892...
⋮	⋮
	0.293233992132...
	0.746894310875...

¿ Hay más reales que (0,1) ?
Proyección estereográfica

- ( )
- 0 1



Los reales son más gordos

- Los naturales están en un infinito numerable.
- Los reales están en un infinito **no** numerable.
- Existe una biyección del conjunto potencia

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$$

reales.

- Los naturales viven en un infinito pequeño.
- Los reales, en uno menos pequeño.
- Se supone que no existe un infinito intermedio.

NO existe el “infinito”

- El *conjunto potencia de X* siempre será un infinito más grande que *X*.

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to \mathbb{Y}$$

- Podemos proceder infinitamente
- No importa en que infinito piensen, siempre habrá uno más grande.
-

La idea del infinito es infinita