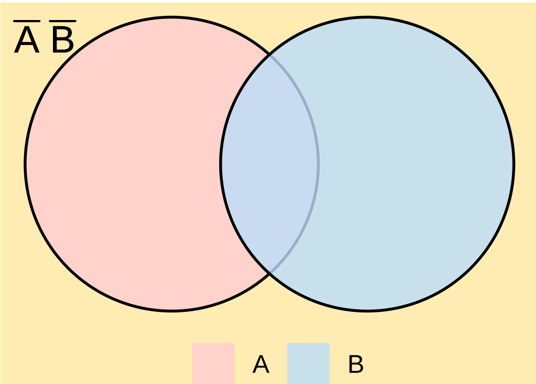
Теория вероятностей, ДЗ №1

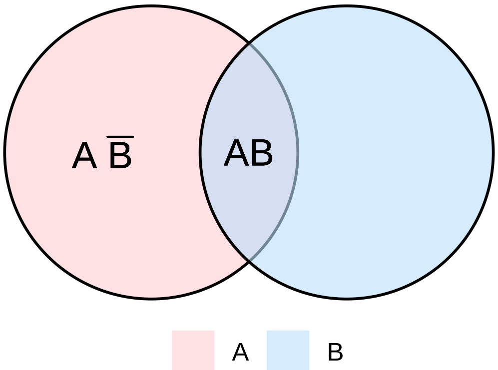
Мироненко Ольга

Задание 1

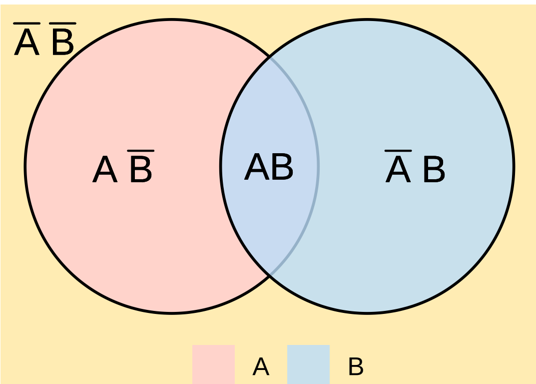
а) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = \overline{(\Omega\backslash A)(\Omega\backslash B)} = \overline{\Omega\backslash(A+B)} = \Omega\backslash(\Omega\backslash(A+B)) = A+B$



б) $A\overline{B} + AB = A$



в) $AB + \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B} = (AB + \bar{A}B) + (A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}) = B + \bar{B} = \Omega$



Задание 2

Пример гипотетический. Допустим, мы рассматриваем множество элементарных событий, состоящее из пациентов с симптомами некоторого инфекционного заболевания. Пусть у нас есть 3 признака, по которым мы можем разбить эту совокупность:

- Результат теста на наличие соответствующего заболевания: А - положительный (75% пациентов, т.е. $P(A) = 0.75$), неА - отрицательный (25% пациентов, т.е. $P(\bar{A}) = 0.25$),
- Пол: В - мужчины (50%, т.е. $P(B) = 0.5$), неВ - женщины (50%, т.е. $P(\bar{B}) = 0.5$),
- Госпитализация: С - госпитализированы (1/6 $\approx$ 17%, т.е. $P(C) = 0.17$), неС - госпитализация не потребовалась (5/6 $\approx$ 83%, т.е. $P(\bar{C}) = 0.83$).

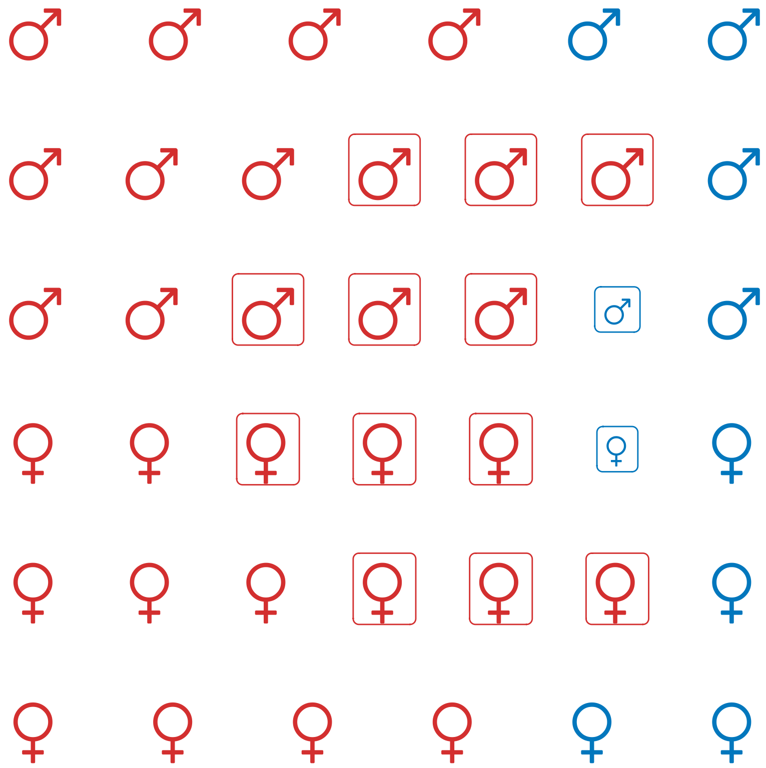
Предположим, что результат теста и пол являются взаимно независимыми признаками, тогда $P(AB) = P(A) * P(B) = 0.75 * 0.5 = 0.375$ - это вероятность события ``мужчина с положительным тестом" в общем множестве элементарных событий (пациентов с симптомами изучаемого заболевания).

Также пусть необходимость госпитализации и пол являются независимыми признаками, тогда $P(AB) = P(A) * P(B) = 0.75 * 0.17 = 0.125$ - это вероятность события ``госпитализированный мужчина" в общем множестве элементарных событий (пациентов с симптомами изучаемого заболевания).

Предположим, что результат теста и необходимость госпитализации являются зависимыми признаками, а именно: вероятность госпитализации при наличии положительного теста выше, чем при наличии отрицательного: в случае положительного теста: $P(C|A) = 0.4$, в случае отрицательного - $P(C|\bar{A}) = 0.01$. Тогда вероятность события ``госпитализирован с положительным тестом" в общем множестве элементарных событий (пациентов с симптомами изучаемого заболевания) составит $P(AC) = P(C|A) * P(A) = 0.4 * 0.75 = 0.3$.

Таким образом, в анализируемом множестве элементарных событий более вероятно встретить мужчину с положительным тестом, чем госпитализированного с положительным тестом, а вероятность последнего выше, чем вероятность встретить госпитализированного мужчину: $P(AB) > P(AC) > P(BC)$, хотя не вижу особого смысла сравнивать эти вероятности, поскольку в данном примере они могут пересекаться (госпитализированные мужчины с положительным тестом).

Изобразим это в виде условной диаграммы, где женщины и мужчины показаны значками (♀ и ♂, соответственно), положительные тесты - красным, отрицательные - синим, в рамочках показаны случаи, потребовавшие госпитализации, без рамочек - не потребовавшие. Количества здесь подобраны в соответствии с приведёнными выше цифрами, иконки для госпитализированных мужчин и женщин с отрицательными тестами приведены в меньшем размере, чтобы показать, что для 40 иконок, показанных на графике, из которых 10 - для отрицательных тестов, при 1%-ной вероятности госпитализации пациентов с отрицательным тестом, мы должны были бы изобразить 0,1 иконки, чтобы соблюсти соотношение между частотами событий, скрывающихся за ``обычными" и маленькими иконками.



Задание 3

В этой задаче необходимо предложить множество элементарных событий, такое что, связанные с ним события A, B и C могут случаться попарно одновременно, но не могут произойти все три разом.

Допустим, в качестве множества элементарных событий мы рассматриваем семейные пары, ожидающие ребёнка. Пусть у нас есть 3 признака, по которым мы можем разбить эту совокупность (все вероятности условные):

- Группа крови матери: A - I (40%, т.е. $P(A) = 0.4$), неA - II/III/IV (60%, т.е. $P(\bar{A}) = 0.6$),
- Группа крови отца: B - II (40%, т.е. $P(B) = 0.4$), неB - I/III/IV (40%, т.е. $P(\bar{B}) = 0.6$),
- Группа крови будущего ребёнка: C - III (15%, т.е. $P(C) = 0.15$), неC - I/II/IV (85%, т.е. $P(\bar{C}) = 0.85$).

Тогда события и их вероятности будут следующими:

- Событие AB - это пара, где у матери I группа крови, у отца - II, его вероятность (поскольку A и B тут явно независимые) составит $P(AB) = P(A) * P(B) = 0.4 * 0.4 = 0.16$
- Событие AC - пара, где у матери I группа крови, у будущего ребёнка - III (это возможно, если у отца III или IV группа крови). События A и C являются взаимозависмыми, поскольку вероятность рождения ребёнка с III группой крови будет разной в зависимости от группы крови матери. Пусть вероятность рождения ребёнка с III группой крови у матери с I группой крови составит $P(C|A) = 0.3$, а у матери с II/III/IV группами $P(C|\bar{A}) = 0.175$, тогда $P(AC) = P(A) * P(C|A) = 0.4 * 0.3 = 0.12$

- BC - пара, где у отца II группа крови, у будущего ребёнка - III (это возможно, если у матери III или IV группа крови). События B и C являются взаимозависмыми, поскольку вероятность рождения ребёнка с III группой крови будет разной в зависимости от группы крови отца. Пусть вероятность рождения ребёнка с III группой крови у отца с II группой крови составит $P(C|B) = 0.05$, а у отца с I/III/IV группами $P(C|\bar{B}) = 0.2$, тогда $P(BC) = P(B) * P(C|B) = 0.4 * 0.05 = 0.02$

- ABC - пара, где у матери с I группой крови и отца с II группой родится ребёнок с III группой крови, - генетически такое невозможно (практически - это уже сюжет для бразильского сериала и прочих детективов), т.е. события A, B, C, являясь попарно совместными, не являются совместными все разом, т.е. $P(ABC) = 0$.

Изобразим рассматриваемое множество элементарных исходов в виде следующей диаграммы: