Probabilidad y Estadística para Inteligencia Artificial

Dr. Ing. Pablo Briff

Laboratorio de Sistemas Embebidos - FIUBA

pbriff@fi.uba.ar

1 de Agosto de 2020

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Tabla de Contenidos I

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Tabla de Contenidos II

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- La estimación puntual estima un parámetro θ

Estimación de Intervalo

- La estimación puntual estima un parámetro θ
- En la estimación por intervalo queremos estimar el intervalo en el cual está θ con un cierto grado de confianza

- La estimación puntual estima un parámetro θ
- En la estimación por intervalo queremos estimar el intervalo en el cual está θ con un cierto grado de confianza
- A esto se lo denomina Intervalo de Confianza

Estimación de Intervalo

- La estimación puntual estima un parámetro θ
- En la estimación por intervalo queremos estimar el intervalo en el cual está θ con un cierto grado de confianza
- A esto se lo denomina Intervalo de Confianza
- Llamaremos α al nivel de significación

Estimación de Intervalo

- La estimación puntual estima un parámetro θ
- En la estimación por intervalo queremos estimar el intervalo en el cual está θ con un cierto grado de confianza
- A esto se lo denomina Intervalo de Confianza
- Llamaremos α al nivel de significación
- Llamaremos a $1-\alpha$ el nivel de confianza

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- La estimación puntual estima un parámetro θ
- En la estimación por intervalo queremos estimar el intervalo en el cual está θ con un cierto grado de confianza
- A esto se lo denomina Intervalo de Confianza
- Llamaremos α al nivel de significación
- Llamaremos a $1 - \alpha$ el nivel de confianza
- Para estimar el intervalo, vamos a usar la pdf del estimador puntual

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- Sea $X = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ una muestra de N puntos de una v.a. normal con media μ (desconocida) y varianza σ^2 (conocida)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- Sea $X = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ una muestra de N puntos de una v.a. normal con media μ (desconocida) y varianza σ^2 (conocida)
- Queremos estimar la media μ con la media muestral $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- Sea $X = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ una muestra de N puntos de una v.a. normal con media μ (desconocida) y varianza σ^2 (conocida)
- Queremos estimar la media μ con la media muestral $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- $\hat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{N})$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- Sea $X = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ una muestra de N puntos de una v.a. normal con media μ (desconocida) y varianza σ^2 (conocida)
- Queremos estimar la media μ con la media muestral $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- $\hat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{N})$
- Definimos la siguiente estadística:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- Sea $X = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ una muestra de N puntos de una v.a. normal con media μ (desconocida) y varianza σ^2 (conocida)
- Queremos estimar la media μ con la media muestral $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- $\hat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{N})$
- Definimos la siguiente estadística:
- $Z = \frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

- Sea $X = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ una muestra de N puntos de una v.a. normal con media μ (desconocida) y varianza σ^2 (conocida)
- Queremos estimar la media μ con la media muestral $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- $\hat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{N})$
- Definimos la siguiente estadística:
- $Z = \frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- Sea $X = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ una muestra de N puntos de una v.a. normal con media μ (desconocida) y varianza σ^2 (conocida)
- Queremos estimar la media μ con la media muestral $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- $\hat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{N})$
- Definimos la siguiente estadística:
- $Z = \frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$
- En otras palabras, Z está en ese intervalo con una confianza del 95%

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- Reemplazando queda:

- Reemplazando queda:
- $P(-1.96 < \sqrt{N}\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma} < 1.96) = 0.95$

- Reemplazando queda:
- $P(-1.96 < \sqrt{N}\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma} < 1.96) = 0.95$
- Despejando μ:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- Reemplazando queda:
- $P(-1.96 < \sqrt{N}\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma} < 1.96) = 0.95$
- Despejando μ:
- $P(\hat{\mu} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 0.95$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- Reemplazando queda:
- $P(-1.96 < \sqrt{N}\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma} < 1.96) = 0.95$
- Despejando μ:
- $P(\hat{\mu} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 0.95$
- Este es un intervalo de confianza de dos lados (colas de la normal por exceso y por defecto)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo

- Reemplazando queda:
- $P(-1.96 < \sqrt{N}\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma} < 1.96) = 0.95$
- Despejando μ:
- $P(\hat{\mu} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 0.95$
- Este es un intervalo de confianza de dos lados (colas de la normal por exceso y por defecto)
- Se puede calcular el intervalo de confianza para un valor arbitrario dado

Estimación de Intervalo

- Reemplazando queda:
- $P(-1.96 < \sqrt{N}\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma} < 1.96) = 0.95$
- Despejando μ:
- $P(\hat{\mu} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 0.95$
- Este es un intervalo de confianza de dos lados (colas de la normal por exceso y por defecto)
- Se puede calcular el intervalo de confianza para un valor arbitrario dado
- A medida que aumenta la confianza, el intervalo se hace más grande

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Bilateral

- $P(Z < -z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$

Intervalo de Confianza Bilateral

- $P(Z < -z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$
- Dado que Z es simétrica alrededor de la media, se cumple

Intervalo de Confianza Bilateral

- $P(Z < -z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$
- Dado que Z es simétrica alrededor de la media, se cumple
- $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$

Intervalo de Confianza Bilateral

- $P(Z < -z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$
- Dado que Z es simétrica alrededor de la media, se cumple
- $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Bilateral

- $P(Z < -z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$
- Dado que Z es simétrica alrededor de la media, se cumple
- $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$
- Para $\alpha = 0.05$, $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(-1.96) = 0.025 = \alpha/2$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- $P(Z < -z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$
- Dado que Z es simétrica alrededor de la media, se cumple
- $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$
- Para $\alpha = 0.05$, $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(-1.96) = 0.025 = \alpha/2$
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(1.96) = 0.975 = 1 - \alpha/2$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Bilateral

- $P(Z < -z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$
- Dado que Z es simétrica alrededor de la media, se cumple
- $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$
- Para $\alpha = 0.05$, $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(-1.96) = 0.025 = \alpha/2$
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(1.96) = 0.975 = 1 - \alpha/2$
- Para un intervalo de confianza $1 - \alpha$ se cumple:

Intervalo de Confianza Bilateral

- $P(Z < -z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$
- Dado que Z es simétrica alrededor de la media, se cumple
- $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$
- Para $\alpha = 0.05$, $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(-1.96) = 0.025 = \alpha/2$
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(1.96) = 0.975 = 1 - \alpha/2$
- Para un intervalo de confianza $1 - \alpha$ se cumple:
- $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Bilateral

- $P(Z < -z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$
- Dado que Z es simétrica alrededor de la media, se cumple
- $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$
- Para $\alpha = 0.05$, $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(-1.96) = 0.025 = \alpha/2$
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(1.96) = 0.975 = 1 - \alpha/2$
- Para un intervalo de confianza $1 - \alpha$ se cumple:
- $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(\hat{\mu} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Bilateral

- $P(Z < -z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$
- Dado que Z es simétrica alrededor de la media, se cumple
- $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$
- Para $\alpha = 0.05$, $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(-1.96) = 0.025 = \alpha/2$
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \texttt{normcdf}(1.96) = 0.975 = 1 - \alpha/2$
- Para un intervalo de confianza $1 - \alpha$ se cumple:
- $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(\hat{\mu} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha$
- Entonces al intervalo $\mu \in (\hat{\mu} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \hat{\mu} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}})$ se lo llama *intervalo de confianza de 95% bilateral*

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Unilateral

- $P(\hat{\mu} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < Z < \hat{\mu} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Unilateral

- $P(\hat{\mu} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < Z < \hat{\mu} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha$
- El intervalo de confianza porcentual $100 \times (1 - \alpha)$ está dentro de $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ unidades de la media muestral $\hat{\mu}$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Unilateral

- $P(\hat{\mu} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < Z < \hat{\mu} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha$
- El intervalo de confianza porcentual $100 \times (1 - \alpha)$ está dentro de $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ unidades de la media muestral $\hat{\mu}$
- Dado que $P(Z < 1.64) = 0.95$, tenemos

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Unilateral

- $P(\hat{\mu} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < Z < \hat{\mu} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha$
- El intervalo de confianza porcentual $100 \times (1 - \alpha)$ está dentro de $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ unidades de la media muestral $\hat{\mu}$
- Dado que $P(Z < 1.64) = 0.95$, tenemos
- $P(\hat{\mu} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu) = 0.95$

Intervalo de Confianza Unilateral

- $P(\hat{\mu} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < Z < \hat{\mu} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha$
- El intervalo de confianza porcentual $100 \times (1 - \alpha)$ está dentro de $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ unidades de la media muestral $\hat{\mu}$
- Dado que $P(Z < 1.64) = 0.95$, tenemos
- $P(\hat{\mu} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu) = 0.95$
- Entonces al intervalo $(\hat{\mu} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \infty)$ se lo llama *intervalo de confianza de 95% superior unilateral*

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Unilateral

- $P(\hat{\mu} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < Z < \hat{\mu} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha$
- El intervalo de confianza porcentual $100 \times (1 - \alpha)$ está dentro de $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ unidades de la media muestral $\hat{\mu}$
- Dado que $P(Z < 1.64) = 0.95$, tenemos
- $P(\hat{\mu} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu) = 0.95$
- Entonces al intervalo $(\hat{\mu} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \infty)$ se lo llama *intervalo de confianza de 95% superior unilateral*
- Podemos definir análogamente el intervalo de confianza de 95% inferior unilateral como $\mu \in (-\infty, \hat{\mu} + 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}})$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Unilateral

- $P(\hat{\mu} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < Z < \hat{\mu} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha$
- El intervalo de confianza porcentual $100 \times (1 - \alpha)$ está dentro de $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ unidades de la media muestral $\hat{\mu}$
- Dado que $P(Z < 1.64) = 0.95$, tenemos
- $P(\hat{\mu} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu) = 0.95$
- Entonces al intervalo $(\hat{\mu} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \infty)$ se lo llama *intervalo de confianza de 95% superior unilateral*
- Podemos definir análogamente el intervalo de confianza de 95% inferior unilateral como $\mu \in (-\infty, \hat{\mu} + 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}})$
- El intervalo de confianza no nos dice nada acerca de la distribución de μ !

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Intervalo de Confianza Unilateral

- $P(\hat{\mu} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < Z < \hat{\mu} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha$
- El intervalo de confianza porcentual $100 \times (1 - \alpha)$ está dentro de $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ unidades de la media muestral $\hat{\mu}$
- Dado que $P(Z < 1.64) = 0.95$, tenemos
- $P(\hat{\mu} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu) = 0.95$
- Entonces al intervalo $(\hat{\mu} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \infty)$ se lo llama *intervalo de confianza de 95% superior unilateral*
- Podemos definir análogamente el intervalo de confianza de 95% inferior unilateral como $\mu \in (-\infty, \hat{\mu} + 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{N}})$
- El intervalo de confianza no nos dice nada acerca de la distribución de μ !
- De hecho μ puede ser una constante desconocida

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Distribución Chi-Cuadrado

- Cuando la varianza es desconocida, vamos a tener que usar una estimación de la varianza

Distribución Chi-Cuadrado

- Cuando la varianza es desconocida, vamos a tener que usar una estimación de la varianza
- Si Z_i son v.a. i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$, la distribución de la suma de los cuadrados $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$ es:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Distribución Chi-Cuadrado

- Cuando la varianza es desconocida, vamos a tener que usar una estimación de la varianza
- Si Z_i son v.a. i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$, la distribución de la suma de los cuadrados $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$ es:
- $X \sim \chi_n^2$, donde χ_n^2 es una distribución chi-cuadrado de orden n

Distribución Chi-Cuadrado

- Cuando la varianza es desconocida, vamos a tener que usar una estimación de la varianza
- Si Z_i son v.a. i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$, la distribución de la suma de los cuadrados $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$ es:
- $X \sim \chi_n^2$, donde χ_n^2 es una distribución chi-cuadrado de orden n
- La pdf es:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Distribución Chi-Cuadrado

- Cuando la varianza es desconocida, vamos a tener que usar una estimación de la varianza
- Si Z_i son v.a. i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$, la distribución de la suma de los cuadrados $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$ es:
- $X \sim \chi_n^2$, donde χ_n^2 es una distribución chi-cuadrado de orden n
- La pdf es:
- $f_X(x,n) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ si $x > 0$, o $f_X(x,n) = 0$ si no

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Distribución Chi-Cuadrado

- Cuando la varianza es desconocida, vamos a tener que usar una estimación de la varianza
- Si Z_i son v.a. i.i.d $\mathcal{N}(0, 1)$, la distribución de la suma de los cuadrados $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$ es:
- $X \sim \chi_n^2$, donde χ_n^2 es una distribución chi-cuadrado de orden n
- La pdf es:
- $f_X(x, n) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ si $x > 0$, o $f_X(x, n) = 0$ si no
- $E[X] = n$, $\text{var}[X] = 2n$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Distribución Chi-Cuadrado

- Cuando la varianza es desconocida, vamos a tener que usar una estimación de la varianza
- Si Z_i son v.a. i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$, la distribución de la suma de los cuadrados $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$ es:
- $X \sim \chi_n^2$, donde χ_n^2 es una distribución chi-cuadrado de orden n
- La pdf es:
- $f_X(x,n) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ si $x > 0$, o $f_X(x,n) = 0$ si no
- $E[X] = n$, $\text{var}[X] = 2n$
- La suma de cuadrados de $\sum_{i=1}^{n} \left(Z_i - \bar{Z}\right)^2$ es una χ_{n-1}^2, donde $\bar{Z} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} Z_i$ es la media muestral

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Distribución t de Student

- Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $X \sim \mathcal{X}_n^2$ son v.a. independientes entonces el cociente $T_n = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$ tiene distribución t con n grados de libertad, t_n

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Distribución t de Student

- Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $X \sim \mathcal{X}_n^2$ son v.a. independientes entonces el cociente $T_n = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$ tiene distribución t con n grados de libertad, t_n
- La pdf es

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Distribución t de Student

- Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $X \sim \mathcal{X}_n^2$ son v.a. independientes entonces el cociente $T_n = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$ tiene distribución t con n grados de libertad, t_n
- La pdf es
- $f_T(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

- Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $X \sim \mathcal{X}_n^2$ son v.a. independientes entonces el cociente $T_n = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$ tiene distribución t con n grados de libertad, t_n
- La pdf es
- $f_T(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$
- $E[T_n] = 0,\ n > 1$

Distribución t de Student

- Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $X \sim \mathcal{X}_n^2$ son v.a. independientes entonces el cociente $T_n = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$ tiene distribución t con n grados de libertad, t_n
- La pdf es
- $f_T(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$
- $E[T_n] = 0,\ n > 1$
- $\text{var}[T_n] = \frac{n}{n-2}$ para$n > 2$

Distribución t de Student

- Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $X \sim \mathcal{X}_n^2$ son v.a. independientes entonces el cociente $T_n = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$ tiene distribución t con n grados de libertad, t_n
- La pdf es
- $f_T(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$
- $E[T_n] = 0, \; n > 1$
- $\mathrm{var}[T_n] = \frac{n}{n-2}$ para$n > 2$
- T_n se parece a $\mathcal{N}(0,1)$ cuando $n \to \infty$ pero con colas más notorias (mayor variabilidad que la normal cero-uno)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- Hasta ahora, hemos asumido que conocemos exactamente la varianza σ^2 de las v.a.

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Hasta ahora, hemos asumido que conocemos exactamente la varianza σ^2 de las v.a.
- En general, la varianza es desconocida

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Hasta ahora, hemos asumido que conocemos exactamente la varianza σ^2 de las v.a.
- En general, la varianza es desconocida
- Podemos estimar la varianza con el estimador insesgado:

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Hasta ahora, hemos asumido que conocemos exactamente la varianza σ^2 de las v.a.
- En general, la varianza es desconocida
- Podemos estimar la varianza con el estimador insesgado:
- $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{\mu})^2$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Hasta ahora, hemos asumido que conocemos exactamente la varianza σ^2 de las v.a.
- En general, la varianza es desconocida
- Podemos estimar la varianza con el estimador insesgado:
- $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{\mu})^2$
- La variable $(N-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Hasta ahora, hemos asumido que conocemos exactamente la varianza σ^2 de las v.a.
- En general, la varianza es desconocida
- Podemos estimar la varianza con el estimador insesgado:
- $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{\mu})^2$
- La variable $(N-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$
- Además, $\hat{\mu}, S^2$ son independientes

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Hasta ahora, hemos asumido que conocemos exactamente la varianza σ^2 de las v.a.
- En general, la varianza es desconocida
- Podemos estimar la varianza con el estimador insesgado:
- $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{\mu})^2$
- La variable $(N-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$
- Además, $\hat{\mu}, S^2$ son independientes
- Entonces, la variable $\sqrt{N}(\hat{\mu} - \mu)/S \sim t_{N-1}$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Entonces, ahora podemos estimar el intervalo de confianza con varianza desconocida usando la distribución t en lugar de la normal cero-uno

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Entonces, ahora podemos estimar el intervalo de confianza con varianza desconocida usando la distribución t en lugar de la normal cero-uno
- $P(t_{1-\alpha/2,N-1} < \sqrt{N}\frac{(\hat{\mu}-\mu)}{S} < t_{\alpha/2,N-1}) = 1 - \alpha$

- Entonces, ahora podemos estimar el intervalo de confianza con varianza desconocida usando la distribución t en lugar de la normal cero-uno
- $P(t_{1-\alpha/2,N-1} < \sqrt{N}\frac{(\hat{\mu}-\mu)}{S} < t_{\alpha/2,N-1}) = 1-\alpha$
- Usando $t_{1-\alpha/2,N-1} = -t_{\alpha/2,N-1}$, y despejando μ obtenemos

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Entonces, ahora podemos estimar el intervalo de confianza con varianza desconocida usando la distribución t en lugar de la normal cero-uno
- $P(t_{1-\alpha/2,N-1} < \sqrt{N}\frac{(\hat{\mu}-\mu)}{S} < t_{\alpha/2,N-1}) = 1-\alpha$
- Usando $t_{1-\alpha/2,N-1} = -t_{\alpha/2,N-1}$, y despejando μ obtenemos
- $P(\hat{\mu} - t_{\alpha/2,N-1}\frac{S}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu} + t_{\alpha/2,N-1}\frac{S}{\sqrt{N}}) = 1-\alpha$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Entonces, ahora podemos estimar el intervalo de confianza con varianza desconocida usando la distribución t en lugar de la normal cero-uno
- $P(t_{1-\alpha/2,N-1} < \sqrt{N}\frac{(\hat{\mu}-\mu)}{S} < t_{\alpha/2,N-1}) = 1-\alpha$
- Usando $t_{1-\alpha/2,N-1} = -t_{\alpha/2,N-1}$, y despejando μ obtenemos
- $P(\hat{\mu} - t_{\alpha/2,N-1}\frac{S}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu} + t_{\alpha/2,N-1}\frac{S}{\sqrt{N}}) = 1-\alpha$
- Nota: para N grande, podemos usar la normal cero-uno Z en lugar de la T

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Estimación de Intervalo con Varianza Desconocida

- Entonces, ahora podemos estimar el intervalo de confianza con varianza desconocida usando la distribución t en lugar de la normal cero-uno
- $P(t_{1-\alpha/2,N-1} < \sqrt{N}\frac{(\hat{\mu}-\mu)}{S} < t_{\alpha/2,N-1}) = 1-\alpha$
- Usando $t_{1-\alpha/2,N-1} = -t_{\alpha/2,N-1}$, y despejando μ obtenemos
- $P(\hat{\mu} - t_{\alpha/2,N-1}\frac{S}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu} + t_{\alpha/2,N-1}\frac{S}{\sqrt{N}}) = 1-\alpha$
- Nota: para N grande, podemos usar la normal cero-uno Z en lugar de la T
- Cuando el número de muestras es chico, usamos la t de Student y *pagamos* el precio de usar un intervalo más grande para el mismo nivel de confianza

Ejemplo de Intervalo de Confianza

- De una muestra de 200 puntos de una v.a. obtenemos que su media muestral es 2.49 y su desviación estándar muestral es 0.674.

Ejemplo de Intervalo de Confianza

- De una muestra de 200 puntos de una v.a. obtenemos que su media muestral es 2.49 y su desviación estándar muestral es 0.674.
- Encontrar un intervalo de confianza del 96% de la media

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejemplo de Intervalo de Confianza

- De una muestra de 200 puntos de una v.a. obtenemos que su media muestral es 2.49 y su desviación estándar muestral es 0.674.
- Encontrar un intervalo de confianza del 96% de la media
- Solución:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejemplo de Intervalo de Confianza

- De una muestra de 200 puntos de una v.a. obtenemos que su media muestral es 2.49 y su desviación estándar muestral es 0.674.
- Encontrar un intervalo de confianza del 96% de la media
- Solución:
- Estamos lidiando con una varianza estimada, entonces usamos la t de Student

Ejemplo de Intervalo de Confianza

- De una muestra de 200 puntos de una v.a. obtenemos que su media muestral es 2.49 y su desviación estándar muestral es 0.674.
- Encontrar un intervalo de confianza del 96% de la media
- Solución:
- Estamos lidiando con una varianza estimada, entonces usamos la t de Student
- Primero buscamos el valor $t_{1-\alpha/2,N-1} = -t_{\alpha/2,N-1}$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejemplo de Intervalo de Confianza

- De una muestra de 200 puntos de una v.a. obtenemos que su media muestral es 2.49 y su desviación estándar muestral es 0.674.
- Encontrar un intervalo de confianza del 96% de la media
- Solución:
- Estamos lidiando con una varianza estimada, entonces usamos la t de Student
- Primero buscamos el valor $t_{1-\alpha/2,N-1} = -t_{\alpha/2,N-1}$
- Vemos que $\alpha = 1 - 0.96 = 0.04$, y que $N = 200$, entonces nos interesa encontrar $t_{1-(0.04/2),(200-1)} = t_{0.98,199}$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejemplo de Intervalo de Confianza

- De una muestra de 200 puntos de una v.a. obtenemos que su media muestral es 2.49 y su desviación estándar muestral es 0.674.
- Encontrar un intervalo de confianza del 96% de la media
- Solución:
- Estamos lidiando con una varianza estimada, entonces usamos la t de Student
- Primero buscamos el valor $t_{1-\alpha/2,N-1} = -t_{\alpha/2,N-1}$
- Vemos que $\alpha = 1 - 0.96 = 0.04$, y que $N = 200$, entonces nos interesa encontrar $t_{1-(0.04/2),(200-1)} = t_{0.98,199}$
- En Octave, usamos la función `tinv` para encontrar el cuantil

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejemplo de Intervalo de Confianza

- De una muestra de 200 puntos de una v.a. obtenemos que su media muestral es 2.49 y su desviación estándar muestral es 0.674.
- Encontrar un intervalo de confianza del 96% de la media
- Solución:
- Estamos lidiando con una varianza estimada, entonces usamos la t de Student
- Primero buscamos el valor $t_{1-\alpha/2,N-1} = -t_{\alpha/2,N-1}$
- Vemos que $\alpha = 1 - 0.96 = 0.04$, y que $N = 200$, entonces nos interesa encontrar $t_{1-(0.04/2),(200-1)} = t_{0.98,199}$
- En Octave, usamos la función `tinv` para encontrar el cuantil
- Esto nos da $t_{0.98,199} = 2.0673$

Ejemplo de Intervalo de Confianza

- De una muestra de 200 puntos de una v.a. obtenemos que su media muestral es 2.49 y su desviación estándar muestral es 0.674.
- Encontrar un intervalo de confianza del 96% de la media
- Solución:
- Estamos lidiando con una varianza estimada, entonces usamos la t de Student
- Primero buscamos el valor $t_{1-\alpha/2,N-1} = -t_{\alpha/2,N-1}$
- Vemos que $\alpha = 1 - 0.96 = 0.04$, y que $N = 200$, entonces nos interesa encontrar $t_{1-(0.04/2),(200-1)} = t_{0.98,199}$
- En Octave, usamos la función `tinv` para encontrar el cuantil
- Esto nos da $t_{0.98,199} = 2.0673$
- El intervalo de confianza del 96% de μ es $\mu \in (2.49 \pm 2.0673 \times \frac{0.674}{\sqrt{200}}) = (2.49 \pm 0.099)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- A veces vamos a querer ensayar una hipótesis

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- A veces vamos a querer ensayar una hipótesis
- Por ejemplo si la media es mayor o distinta de un valor

Test de Hipótesis

- A veces vamos a querer ensayar una hipótesis
- Por ejemplo si la media es mayor o distinta de un valor
- Una hipótesis es el planteo de una pregunta científica en términos de un valor propuesto de un parámetro en un modelo probabilístico

Test de Hipótesis

- A veces vamos a querer ensayar una hipótesis
- Por ejemplo si la media es mayor o distinta de un valor
- Una hipótesis es el planteo de una pregunta científica en términos de un valor propuesto de un parámetro en un modelo probabilístico
- Si las muestras aleatorias son consistentes con la hipótesis, aceptamos la hipótesis

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- A veces vamos a querer ensayar una hipótesis
- Por ejemplo si la media es mayor o distinta de un valor
- Una hipótesis es el planteo de una pregunta científica en términos de un valor propuesto de un parámetro en un modelo probabilístico
- Si las muestras aleatorias son consistentes con la hipótesis, aceptamos la hipótesis
- N.B.: varios textos hablan de *no rechazar* en lugar de *aceptar* la hipótesis

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- A veces vamos a querer ensayar una hipótesis
- Por ejemplo si la media es mayor o distinta de un valor
- Una hipótesis es el planteo de una pregunta científica en términos de un valor propuesto de un parámetro en un modelo probabilístico
- Si las muestras aleatorias son consistentes con la hipótesis, aceptamos la hipótesis
- N.B.: varios textos hablan de *no rechazar* en lugar de *aceptar* la hipótesis
- En caso contrario, rechazamos la hipótesis

Test de Hipótesis

- A veces vamos a querer ensayar una hipótesis
- Por ejemplo si la media es mayor o distinta de un valor
- Una hipótesis es el planteo de una pregunta científica en términos de un valor propuesto de un parámetro en un modelo probabilístico
- Si las muestras aleatorias son consistentes con la hipótesis, aceptamos la hipótesis
- N.B.: varios textos hablan de *no rechazar* en lugar de *aceptar* la hipótesis
- En caso contrario, rechazamos la hipótesis
- De todas formas, nunca decimos que la hipótesis es verdadera o falsa, sino que los datos la avalan o no con un cierto nivel de confianza

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- En un test de hipótesis definimos una estadística que debe obedecer cierta distribución si la hipótesis es correcta

Test de Hipótesis

- En un test de hipótesis definimos una estadística que debe obedecer cierta distribución si la hipótesis es correcta
- Si la estadística calculada tiene muy baja probabilidad de ocurrir bajo esa hipótesis, rechazamos la hipótesis

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- En un test de hipótesis definimos una estadística que debe obedecer cierta distribución si la hipótesis es correcta
- Si la estadística calculada tiene muy baja probabilidad de ocurrir bajo esa hipótesis, rechazamos la hipótesis
- Caso contrario, la aceptamos

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- En un test de hipótesis definimos una estadística que debe obedecer cierta distribución si la hipótesis es correcta
- Si la estadística calculada tiene muy baja probabilidad de ocurrir bajo esa hipótesis, rechazamos la hipótesis
- Caso contrario, la aceptamos
- Por ejemplo, tenemos muestras de una distribución de la que desconocemos la media μ pero conocemos la varianza σ^2

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- En un test de hipótesis definimos una estadística que debe obedecer cierta distribución si la hipótesis es correcta
- Si la estadística calculada tiene muy baja probabilidad de ocurrir bajo esa hipótesis, rechazamos la hipótesis
- Caso contrario, la aceptamos
- Por ejemplo, tenemos muestras de una distribución de la que desconocemos la media μ pero conocemos la varianza σ^2
- Queremos ensayar la hipótesis que $\mu = \mu_0$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- En un test de hipótesis definimos una estadística que debe obedecer cierta distribución si la hipótesis es correcta
- Si la estadística calculada tiene muy baja probabilidad de ocurrir bajo esa hipótesis, rechazamos la hipótesis
- Caso contrario, la aceptamos
- Por ejemplo, tenemos muestras de una distribución de la que desconocemos la media μ pero conocemos la varianza σ^2
- Queremos ensayar la hipótesis que $\mu = \mu_0$
- La hipótesis nula es $\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- En un test de hipótesis definimos una estadística que debe obedecer cierta distribución si la hipótesis es correcta
- Si la estadística calculada tiene muy baja probabilidad de ocurrir bajo esa hipótesis, rechazamos la hipótesis
- Caso contrario, la aceptamos
- Por ejemplo, tenemos muestras de una distribución de la que desconocemos la media μ pero conocemos la varianza σ^2
- Queremos ensayar la hipótesis que $\mu = \mu_0$
- La hipótesis nula es $\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$
- La hipótesis alternativa es $\mathcal{H}_1 : \mu = \mu_1 \neq \mu_0$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- Vamos a comparar la media muestral con la hipótesis

Test de Hipótesis

- Vamos a comparar la media muestral con la hipótesis
- Si la media muestral cae fuera de un intervalo de confianza $100 \times (1 - \alpha)$ rechazamos la hipótesis nula

Test de Hipótesis

- Vamos a comparar la media muestral con la hipótesis
- Si la media muestral cae fuera de un intervalo de confianza $100 \times (1 - \alpha)$ rechazamos la hipótesis nula
- Es decir:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- Vamos a comparar la media muestral con la hipótesis
- Si la media muestral cae fuera de un intervalo de confianza $100 \times (1 - \alpha)$ rechazamos la hipótesis nula
- Es decir:
- Aceptamos la hipótesis si $\frac{\sqrt{N}(\hat{\mu} - \mu)}{\sigma} \in (-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis

- Vamos a comparar la media muestral con la hipótesis
- Si la media muestral cae fuera de un intervalo de confianza $100 \times (1 - \alpha)$ rechazamos la hipótesis nula
- Es decir:
- Aceptamos la hipótesis si $\frac{\sqrt{N}(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma} \in (-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$
- Este es un test bilateral (rechazamos la hipótesis si μ cae fuera del intervalo)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Tipos de Errores

- Error de tipo I: ocurre cuando rechazamos la hipótesis cuando es correcta, es decir es una *falsa alarma*

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Tipos de Errores

- Error de tipo I: ocurre cuando rechazamos la hipótesis cuando es correcta, es decir es una *falsa alarma*
- Formalmente, $\alpha = P(\text{Tipo I}|\mathcal{H}_0)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Tipos de Errores

- Error de tipo I: ocurre cuando rechazamos la hipótesis cuando es correcta, es decir es una *falsa alarma*
- Formalmente, $\alpha = P(\text{Tipo I}|\mathcal{H}_0)$
- La p. de error tipo I es α, típicamente se elige 0.1, 0.05, 0.01

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Tipos de Errores

- Error de tipo I: ocurre cuando rechazamos la hipótesis cuando es correcta, es decir es una *falsa alarma*
- Formalmente, $\alpha = P(\text{Tipo I}|\mathcal{H}_0)$
- La p. de error tipo I es α, típicamente se elige 0.1, 0.05, 0.01
- Error de tipo II: ocurre cuando aceptamos la hipótesis cuando es incorrecta, es decir *no activar la alarma*

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Tipos de Errores

- Error de tipo I: ocurre cuando rechazamos la hipótesis cuando es correcta, es decir es una *falsa alarma*
- Formalmente, $\alpha = P(\text{Tipo I}|\mathcal{H}_0)$
- La p. de error tipo I es α, típicamente se elige 0.1, 0.05, 0.01
- Error de tipo II: ocurre cuando aceptamos la hipótesis cuando es incorrecta, es decir *no activar la alarma*
- $\beta = P(\text{Tipo II}|\mathcal{H}_1)$

Tipos de Errores

- Error de tipo I: ocurre cuando rechazamos la hipótesis cuando es correcta, es decir es una *falsa alarma*
- Formalmente, $\alpha = P(\text{Tipo I}|\mathcal{H}_0)$
- La p. de error tipo I es α, típicamente se elige 0.1, 0.05, 0.01
- Error de tipo II: ocurre cuando aceptamos la hipótesis cuando es incorrecta, es decir *no activar la alarma*
- $\beta = P(\text{Tipo II}|\mathcal{H}_1)$
- $\beta(\mu) = P_\mu\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\sqrt{N}(\hat{\mu}-\mu_0)}{\sigma} < z_{\alpha/2}\right)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Tipos de Errores

- Error de tipo I: ocurre cuando rechazamos la hipótesis cuando es correcta, es decir es una *falsa alarma*
- Formalmente, $\alpha = P(\text{Tipo I}|\mathcal{H}_0)$
- La p. de error tipo I es α, típicamente se elige 0.1, 0.05, 0.01
- Error de tipo II: ocurre cuando aceptamos la hipótesis cuando es incorrecta, es decir *no activar la alarma*
- $\beta = P(\text{Tipo II}|\mathcal{H}_1)$
- $\beta(\mu) = P_\mu\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\sqrt{N}(\hat{\mu}-\mu_0)}{\sigma} < z_{\alpha/2}\right)$
- Esta p. aumenta a medida que μ se acerca a μ_0

Poder del Ensayo

- Se define a $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu)$ como la función de poder del ensayo, es decir la p. de rechazar cuando el valor real es distinto de μ_0 (ensayo bilateral)

Poder del Ensayo

- Se define a $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu)$ como la función de poder del ensayo, es decir la p. de rechazar cuando el valor real es distinto de μ_0 (ensayo bilateral)
- Podemos elegir el tamaño de la muestra N de manera de controlar el poder del ensayo $1 - \beta(\mu)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Poder del Ensayo

- Se define a $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu)$ como la función de poder del ensayo, es decir la p. de rechazar cuando el valor real es distinto de μ_0 (ensayo bilateral)
- Podemos elegir el tamaño de la muestra N de manera de controlar el poder del ensayo $1 - \beta(\mu)$
- $Poder(\mu) = P_\mu(\hat{\mu} > \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N}) + P_\mu(\hat{\mu} < \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N})$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Poder del Ensayo

- Se define a $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu)$ como la función de poder del ensayo, es decir la p. de rechazar cuando el valor real es distinto de μ_0 (ensayo bilateral)
- Podemos elegir el tamaño de la muestra N de manera de controlar el poder del ensayo $1 - \beta(\mu)$
- $Poder(\mu) = P_\mu(\hat{\mu} > \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N}) + P_\mu(\hat{\mu} < \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N})$
- $Poder(\mu) = P(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} > \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} + z_{1-\alpha/2}) + P(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} - z_{1-\alpha/2})$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Poder del Ensayo

- Se define a $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu)$ como la función de poder del ensayo, es decir la p. de rechazar cuando el valor real es distinto de μ_0 (ensayo bilateral)
- Podemos elegir el tamaño de la muestra N de manera de controlar el poder del ensayo $1 - \beta(\mu)$
- $Poder(\mu) = P_\mu(\hat{\mu} > \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N}) + P_\mu(\hat{\mu} < \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N})$
- $Poder(\mu) = P(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} > \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} + z_{1-\alpha/2}) + P(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} - z_{1-\alpha/2})$
- Definimos $\Delta \triangleq \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}$, y $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Poder del Ensayo

- Se define a $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu)$ como la función de poder del ensayo, es decir la p. de rechazar cuando el valor real es distinto de μ_0 (ensayo bilateral)
- Podemos elegir el tamaño de la muestra N de manera de controlar el poder del ensayo $1 - \beta(\mu)$
- $Poder(\mu) = P_\mu(\hat{\mu} > \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N}) + P_\mu(\hat{\mu} < \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N})$
- $Poder(\mu) = P(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} > \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} + z_{1-\alpha/2}) + P(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} - z_{1-\alpha/2})$
- Definimos $\Delta \triangleq \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}$, y $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $Poder(\mu) = \Phi(\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2}) + \Phi(-\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2})$

Poder del Ensayo

- Se define a $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu)$ como la función de poder del ensayo, es decir la p. de rechazar cuando el valor real es distinto de μ_0 (ensayo bilateral)
- Podemos elegir el tamaño de la muestra N de manera de controlar el poder del ensayo $1 - \beta(\mu)$
- $Poder(\mu) = P_\mu(\hat{\mu} > \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N}) + P_\mu(\hat{\mu} < \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N})$
- $Poder(\mu) = P(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} > \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} + z_{1-\alpha/2}) + P(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} - z_{1-\alpha/2})$
- Definimos $\Delta \triangleq \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}$, y $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $Poder(\mu) = \Phi(\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2}) + \Phi(-\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2})$
- Se aproxima $\Phi(-\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2}) \approx 0$ si $\sqrt{N}\Delta > 1$, entonces:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Poder del Ensayo

- Se define a $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu)$ como la función de poder del ensayo, es decir la p. de rechazar cuando el valor real es distinto de μ_0 (ensayo bilateral)
- Podemos elegir el tamaño de la muestra N de manera de controlar el poder del ensayo $1 - \beta(\mu)$
- $Poder(\mu) = P_\mu(\hat{\mu} > \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N}) + P_\mu(\hat{\mu} < \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{N})$
- $Poder(\mu) = P(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} > \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} + z_{1-\alpha/2}) + P(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} - z_{1-\alpha/2})$
- Definimos $\Delta \triangleq \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}$, y $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $Poder(\mu) = \Phi(\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2}) + \Phi(-\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2})$
- Se aproxima $\Phi(-\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2}) \approx 0$ si $\sqrt{N}\Delta > 1$, entonces:
- $Poder(\mu) = \Phi(\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2})$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Poder del Ensayo y Tamaño de la Muestra

- Si queremos configurar o prescribir $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu) = 0.9$ (por ej.), podemos elegir N

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Poder del Ensayo y Tamaño de la Muestra

- Si queremos configurar o prescribir $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu) = 0.9$ (por ej.), podemos elegir N
- Tenemos que resolver la siguiente ecuación:

Poder del Ensayo y Tamaño de la Muestra

- Si queremos configurar o prescribir $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu) = 0.9$ (por ej.), podemos elegir N
- Tenemos que resolver la siguiente ecuación:
- $\Phi(\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2}) = 1 - \beta$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Poder del Ensayo y Tamaño de la Muestra

- Si queremos configurar o prescribir $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu) = 0.9$ (por ej.), podemos elegir N
- Tenemos que resolver la siguiente ecuación:
- $\Phi(\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2}) = 1 - \beta$
- Entonces, N es

Poder del Ensayo y Tamaño de la Muestra

- Si queremos configurar o prescribir $Poder(\mu) \triangleq 1 - \beta(\mu) = 0.9$ (por ej.), podemos elegir N
- Tenemos que resolver la siguiente ecuación:
- $\Phi(\sqrt{N}\Delta - z_{1-\alpha/2}) = 1 - \beta$
- Entonces, N es
- $N = (z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})^2 \frac{1}{\Delta^2}$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ensayo Unilateral

- Para un ensayo unilateral, tenemos:

Ensayo Unilateral

- Para un ensayo unilateral, tenemos:
- $\mathcal{H}_0 : \mu \leq \mu_0$

Ensayo Unilateral

- Para un ensayo unilateral, tenemos:
- $\mathcal{H}_0 : \mu \leq \mu_0$
- $\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$

Ensayo Unilateral

- Para un ensayo unilateral, tenemos:
- $\mathcal{H}_0 : \mu \leq \mu_0$
- $\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$
- El intervalo de confianza de nivel $100 \times (1 - \alpha)$ ahora se define en base a un solo lado donde $\hat{\mu}$ debe caer para no rechazar $\mathcal{H}_0$

Ensayo Unilateral

- Para un ensayo unilateral, tenemos:
- $\mathcal{H}_0 : \mu \leq \mu_0$
- $\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$
- El intervalo de confianza de nivel $100 \times (1 - \alpha)$ ahora se define en base a un solo lado donde $\hat{\mu}$ debe caer para no rechazar $\mathcal{H}_0$
- Aceptamos $\mathcal{H}_0$ si:

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Ensayo Unilateral

- Para un ensayo unilateral, tenemos:
- $\mathcal{H}_0 : \mu \leq \mu_0$
- $\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$
- El intervalo de confianza de nivel $100 \times (1 - \alpha)$ ahora se define en base a un solo lado donde $\hat{\mu}$ debe caer para no rechazar $\mathcal{H}_0$
- Aceptamos $\mathcal{H}_0$ si:
- $\frac{\sqrt{N}(\hat{\mu} - \mu_0)}{\sigma} \in (-\infty, z_\alpha)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis con Varianza Desconocida

- Si la varianza es desconocida, usamos la distribución t de Student

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis con Varianza Desconocida

- Si la varianza es desconocida, usamos la distribución t de Student
- $\frac{\sqrt{N}(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma} \sim t_{N-1}$

Test de Hipótesis con Varianza Desconocida

- Si la varianza es desconocida, usamos la distribución t de Student
- $\frac{\sqrt{N}(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma} \sim t_{N-1}$
- Para el caso anterior de ensayo bilateral de medias, aceptamos $\mathcal{H}_0$ si

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis con Varianza Desconocida

- Si la varianza es desconocida, usamos la distribución t de Student
- $\frac{\sqrt{N}(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma} \sim t_{N-1}$
- Para el caso anterior de ensayo bilateral de medias, aceptamos $\mathcal{H}_0$ si
- $\frac{\sqrt{N}(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma} \in \left(-t_{\alpha/2,(N-1)}, t_{\alpha/2,(N-1)}\right)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Test de Hipótesis con Varianza Desconocida

- Si la varianza es desconocida, usamos la distribución t de Student
- $\frac{\sqrt{N}(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma} \sim t_{N-1}$
- Para el caso anterior de ensayo bilateral de medias, aceptamos $\mathcal{H}_0$ si
- $\frac{\sqrt{N}(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma} \in (-t_{\alpha/2,(N-1)}, t_{\alpha/2,(N-1)})$
- Es decir, este es un ensayo bilateral t

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 1

a) Se toma una muestra aleatoria de la altura de 100 personas y se obtiene que la altura promedio es 1.8m. La varianza de la población es $\sigma^2 = 49\text{cm}^2$.
b) Encontrar un intervalo de confianza de 95% para la altura media de la población, μ.
c) ¿Cómo cambiaría el desarrollo si se usara la varianza muestral?
d) Simular el ejercicio en Octave

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 2

a. Un estudio hecho en 10 lamparitas muestra que el tiempo medio de duración en horas es 998.9 hs. Las lamparitas tienen un desvío estándar típico de $\sigma = 80$ hs.
b. Encontrar el intervalo de confianza de 95% del tiempo medio de vida de estas lamparitas
c. Encontrar el porcentaje del intervalo de confianza que tiene un rango total de horas de 80 hs. (Ayuda: desplazarse un $\pm\Delta z$ a partir del valor medio $\hat{\mu}$ de maner a que $80 = 2\Delta z$).

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 3

a. En un concurso con 10 participantes, cada participante prueba una muestra de 3 vasos de bebida. Dos de los 3 vasos contienen la misma bebida marca X, mientras que el vaso restante contiene la bebida marca Y.
b. Queremos determinar si la gente realmente puede discriminar la bebida Y con un nivel de significancia de 5%.
c. ¿Cuál es la mínima cantidad de personas que deben identificar la bebida Y para concluir que, en general, la bebida Y es *claramente identificable* con respecto a la bebida X?

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 4

(a) Un aviso publicitario asegura que 8 de cada 10 personas prefieren la pasta dental marca Z.

(b) ¿Hay suficiente evidencia para fundamentar esta hipótesis con un 5% de significación? (N.B.: En términos estadísticos, la pregunta correcta sería si el aviso es *significativo*.)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Bibliografía I

E. Alpaydin, *Introduction to machine learning*.
MIT press, 2020.

"MIT, Brain and Cognitive Sciences, Statistics." https://ocw.mit.edu/courses/brain-and-cognitive-sciences/9-07-statistics-for-brain-and-cognitive-science-fall-2016/lecture-notes/MIT9_07F16_lec12.pdf.
Accessed: 2020-05-15.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires