Probabilidad y Estadística para Inteligencia Artificial

Dr. Ing. Pablo Briff

Laboratorio de Sistemas Embebidos - FIUBA

pbriff@fi.uba.ar

4 de Julio de 2020

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Tabla de Contenidos I

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Tabla de Contenidos II

- Sea un evento A con probabilidad (p.) no nula $P(A)$

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad (p.) no nula $P(A)$
- La p. condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad (p.) no nula $P(A)$
- La p. condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad (p.) no nula $P(A)$
- La p. condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$
- Dado que $P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A)$ se verifica que

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad (p.) no nula $P(A)$
- La p. condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$
- Dado que $P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A)$ se verifica que
- $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad (p.) no nula $P(A)$
- La p. condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\}\cap A)}{P(A)}$
- Dado que $P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A)$ se verifica que
- $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$
- Ejemplo: ¿Cuál es la función de p. de masa condicional $p_{X|A}(x)$ de un dado, donde X modela el valor del dado en cada tirada, siendo A el evento que el número que sale en la tirada es par?

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad (p.) no nula $P(A)$
- La p. condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$
- Dado que $P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A)$ se verifica que
- $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$
- Ejemplo: ¿Cuál es la función de p. de masa condicional $p_{X|A}(x)$ de un dado, donde X modela el valor del dado en cada tirada, siendo A el evento que el número que sale en la tirada es par?
- ¿Cómo se compara con la distribucion de p. incondicional $p_X(x)$ del mismo dado?

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x,y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x,y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$
- Naturalmente $\sum_x p_{XY}(x|y) = 1$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x,y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$
- Naturalmente $\sum_x p_{XY}(x|y) = 1$
- Por Bayes se cumple:

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x, y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$
- Naturalmente $\sum_x p_{XY}(x|y) = 1$
- Por Bayes se cumple:
- $p_{XY}(x, y) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x,y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$
- Naturalmente $\sum_x p_{XY}(x|y) = 1$
- Por Bayes se cumple:
- $p_{XY}(x,y) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$
- Si sumamos sobre todos los y la $p_{X|Y}(x|y)$ obtenemos la p. marginal de X, es decir

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x, y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$
- Naturalmente $\sum_x p_{XY}(x|y) = 1$
- Por Bayes se cumple:
- $p_{XY}(x, y) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$
- Si sumamos sobre todos los y la $p_{X|Y}(x|y)$ obtenemos la p. marginal de X, es decir
- $p_X(x) = \sum_y p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A, entonces

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A, entonces
- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A, entonces
- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$
- Para funciones:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A, entonces
- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x|A)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A, entonces
- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x|A)$
- Para dos v.a. discretas:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A, entonces
- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x|A)$
- Para dos v.a. discretas:
- $E[X|Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y) E[X|Y = y]$

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y) E[X|Y = y]$
- Ley de esperanzas iteradas:

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y)E[X|Y = y]$
- Ley de esperanzas iteradas:
- $E[E[X|Y]] = E[X]$

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y) E[X|Y = y]$
- Ley de esperanzas iteradas:
- $E[E[X|Y]] = E[X]$
- ¿Demostración?

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y)E[X|Y = y]$
- Ley de esperanzas iteradas:
- $E[E[X|Y]] = E[X]$
- ¿Demostración?
- En términos simples, la esperanza incondicional se obtiene promediando las esperanzas condicionales

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y) E[X|Y = y]$
- Ley de esperanzas iteradas:
- $E[E[X|Y]] = E[X]$
- ¿Demostración?
- En términos simples, la esperanza incondicional se obtiene promediando las esperanzas condicionales
- El teorema de la esperanza total es análogo al teorema de la probabilidad total

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Continua

- La pdf condicional de una v.a. continua condicionada a un evento A con $P(A) > 0$ es una función $f_{X|A}$ tal que:

Condicionamiento de una V.A Continua

- La pdf condicional de una v.a. continua condicionada a un evento A con $P(A) > 0$ es una función $f_{X|A}$ tal que:
- $P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Continua

- La pdf condicional de una v.a. continua condicionada a un evento A con $P(A) > 0$ es una función $f_{X|A}$ tal que:
- $P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$
- Si A es un subconjunto de la recta real con $P(X \in A) > 0$, se tiene:

Condicionamiento de una V.A Continua

- La pdf condicional de una v.a. continua condicionada a un evento A con $P(A) > 0$ es una función $f_{X|A}$ tal que:
- $P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$
- Si A es un subconjunto de la recta real con $P(X \in A) > 0$, se tiene:
- $f_{X|X \in A} = \frac{f_X(x)}{P(X \in A)}$, si $x \in A$, o $f_{X|A} = 0$ si no. ¿Por qué?

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Continua

- La pdf condicional de una v.a. continua condicionada a un evento A con $P(A) > 0$ es una función $f_{X|A}$ tal que:
- $P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$
- Si A es un subconjunto de la recta real con $P(X \in A) > 0$, se tiene:
- $f_{X|X \in A} = \frac{f_X(x)}{P(X \in A)}$, si $x \in A$, o $f_{X|A} = 0$ si no. ¿Por qué?
- Nuevamente vemos cómo la p. condicional escala la p. a priori de acuerdo al evento de condicionamiento

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x)dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x)dx$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:
- $f_X(x) = \sum_i P(A_i) f_{X|A_i}(x)$

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x)dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x)dx$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:
- $f_X(x) = \sum_i P(A_i) f_{X|A_i}(x)$
- El teorema de la esperanza total queda:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:
- $f_X(x) = \sum_i P(A_i) f_{X|A_i}(x)$
- El teorema de la esperanza total queda:
- $E[X] = \sum_i P(A_i) E[X|A_i]$

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:
- $f_X(x) = \sum_i P(A_i) f_{X|A_i}(x)$
- El teorema de la esperanza total queda:
- $E[X] = \sum_i P(A_i) E[X|A_i]$
- Para funciones:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x)dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x)dx$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:
- $f_X(x) = \sum_i P(A_i) f_{X|A_i}(x)$
- El teorema de la esperanza total queda:
- $E[X] = \sum_i P(A_i) E[X|A_i]$
- Para funciones:
- $E[g(X)] = \sum_i P(A_i) E[g(X)|A_i]$

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y=y]$ es una función de y

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y=y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)
- Como toda v.a. se puede definir la esperanza y la varianza

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)
- Como toda v.a. se puede definir la esperanza y la varianza
- $E[E[X|Y]] = E[X]$ por la ley de esperanzas iteradas

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y=y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)
- Como toda v.a. se puede definir la esperanza y la varianza
- $E[E[X|Y]] = E[X]$ por la ley de esperanzas iteradas
- $\text{var}[E[X|Y]] = \text{var}[X] - E[\text{var}[X|Y]]$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y=y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)
- Como toda v.a. se puede definir la esperanza y la varianza
- $E[E[X|Y]] = E[X]$ por la ley de esperanzas iteradas
- $\mathrm{var}[E[X|Y]] = \mathrm{var}[X] - E[\mathrm{var}[X|Y]]$
- Ley de varianza condicional

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y=y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)
- Como toda v.a. se puede definir la esperanza y la varianza
- $E[E[X|Y]] = E[X]$ por la ley de esperanzas iteradas
- $\mathrm{var}[E[X|Y]] = \mathrm{var}[X] - E[\mathrm{var}[X|Y]]$
- Ley de varianza condicional
- $\mathrm{var}[X] = \mathrm{var}[E[X|Y]] + E[\mathrm{var}[X|Y]]$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo

Procesos Estocásticos

- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo
- La salida del proceso estocástico es una secuencia de valores numéricos

Procesos Estocásticos

- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo
- La salida del proceso estocástico es una secuencia de valores numéricos
- Ejemplos:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo
- La salida del proceso estocástico es una secuencia de valores numéricos
- Ejemplos:
- Precio de las acciones de la bolsa de valores

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo
- La salida del proceso estocástico es una secuencia de valores numéricos
- Ejemplos:
- Precio de las acciones de la bolsa de valores
- Tiempo entre fallas en una máquina

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo
- La salida del proceso estocástico es una secuencia de valores numéricos
- Ejemplos:
- Precio de las acciones de la bolsa de valores
- Tiempo entre fallas en una máquina
- La medición de una tensión en un circuito contaminado por ruido

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso
- Nos interesa conocer el *promedio a largo plazo* de la secuencia

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso
- Nos interesa conocer el *promedio a largo plazo* de la secuencia
- Hay procesos de tipo de *llegada o arribo*

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso
- Nos interesa conocer el *promedio a largo plazo* de la secuencia
- Hay procesos de tipo de *llegada o arribo*
- Proceso Bernoulli: arribos a intervalos discretos y con distribución geométrica entre arribos

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso
- Nos interesa conocer el *promedio a largo plazo* de la secuencia
- Hay procesos de tipo de *llegada o arribo*
- Proceso Bernoulli: arribos a intervalos discretos y con distribución geométrica entre arribos
- Proceso Poisson: arribos a intervalos continuos y con distribución exponencial entre arribos

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso
- Nos interesa conocer el *promedio a largo plazo* de la secuencia
- Hay procesos de tipo de *llegada o arribo*
- Proceso Bernoulli: arribos a intervalos discretos y con distribución geométrica entre arribos
- Proceso Poisson: arribos a intervalos continuos y con distribución exponencial entre arribos
- Procesos Markov: procesos cuya dependencia futura depende solo del estado actual

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- $E[X] = \mathrm{var}[X] = \lambda$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- $E[X] = \text{var}[X] = \lambda$
- En general, definimos $\lambda = rt$, donde r es la tasa de eventos

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- $E[X] = \text{var}[X] = \lambda$
- En general, definimos $\lambda = rt$, donde r es la tasa de eventos
- Ejemplo: en un río ocurre en promedio 1 inundación cada 100 años. Calcular la p. de que hayan 2 inundaciones en los próximos 100 años.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- $E[X] = \mathrm{var}[X] = \lambda$
- En general, definimos $\lambda = rt$, donde r es la tasa de eventos
- Ejemplo: en un río ocurre en promedio 1 inundación cada 100 años. Calcular la p. de que hayan 2 inundaciones en los próximos 100 años.
- Vemos que $\lambda = 1$, $r = 1/100$ inundaciones/año.

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- $E[X] = \mathrm{var}[X] = \lambda$
- En general, definimos $\lambda = rt$, donde r es la tasa de eventos
- Ejemplo: en un río ocurre en promedio 1 inundación cada 100 años. Calcular la p. de que hayan 2 inundaciones en los próximos 100 años.
- Vemos que $\lambda = 1$, $r = 1/100$ inundaciones/año.
- $P(k = 2 \text{ inundaciones en } 100 \text{ años}) = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} \approx 0.184$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso Markov

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales

Proceso Markov

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales
- Los procesos Markov describen procesos *con memoria*

Proceso Markov

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales
- Los procesos Markov describen procesos *con memoria*
- Un proceso estocástico $X(t)$ es proceso de Markov si para cada n y $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ tenemos

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso Markov

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales
- Los procesos Markov describen procesos *con memoria*
- Un proceso estocástico $X(t)$ es proceso de Markov si para cada n y $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ tenemos
- $P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}), \ldots, X(t_1)) = P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}))$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso Markov

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales
- Los procesos Markov describen procesos *con memoria*
- Un proceso estocástico $X(t)$ es proceso de Markov si para cada n y $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ tenemos
- $P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}), \ldots, X(t_1)) = P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}))$
- Se define el concepto de *estado* del proceso, el cual cambia dependiendo de las probabilidades

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales
- Los procesos Markov describen procesos *con memoria*
- Un proceso estocástico $X(t)$ es proceso de Markov si para cada n y $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ tenemos
- $P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}), \ldots, X(t_1)) = P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}))$
- Se define el concepto de *estado* del proceso, el cual cambia dependiendo de las probabilidades
- Las *Cadenas de Markov Discretas* se limitan a sistemas con estados finitos que cambian a instantes discretos de tiempo

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Cadenas de Markov

- El espacio de es estados $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$

- El espacio de es estados $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:

- El espacio de es estados $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad i, j \in S$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Cadenas de Markov

- El espacio de es estados $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad i, j \in S$
- La principal hipótesis de un proceso de Markov es que la p. p_{ij} se aplica cada vez que el estado i se visita, independientemente del pasado y de cómo se llegó ahí

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Cadenas de Markov

- El espacio de es estados $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad i, j \in S$
- La principal hipótesis de un proceso de Markov es que la p. p_{ij} se aplica cada vez que el estado i se visita, independientemente del pasado y de cómo se llegó ahí
- La propiedad de Markov dice que:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Cadenas de Markov

- El espacio de es estados $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad i, j \in S$
- La principal hipótesis de un proceso de Markov es que la p. p_{ij} se aplica cada vez que el estado i se visita, independientemente del pasado y de cómo se llegó ahí
- La propiedad de Markov dice que:
- $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$

Cadenas de Markov

- El espacio de es estados $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad i, j \in S$
- La principal hipótesis de un proceso de Markov es que la p. p_{ij} se aplica cada vez que el estado i se visita, independientemente del pasado y de cómo se llegó ahí
- La propiedad de Markov dice que:
- $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$
- Se cumple que $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \quad \forall i$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Transición n Pasos Adelante

- Para calcular la p. de transición a n estados futuros dado el estado actual, planteamos

Transición n Pasos Adelante

- Para calcular la p. de transición a n estados futuros dado el estado actual, planteamos
- $r_{ij}(n) = P(X_n = j | X_0 = i)$

Transición n Pasos Adelante

- Para calcular la p. de transición a n estados futuros dado el estado actual, planteamos
- $r_{ij}(n) = P(X_n = j | X_0 = i)$
- La ecuación de Chapman-Kolmogorov da la recursión para calcular $r_{ij}(n)$

Transición n Pasos Adelante

- Para calcular la p. de transición a n estados futuros dado el estado actual, planteamos
- $r_{ij}(n) = P(X_n = j | X_0 = i)$
- La ecuación de Chapman-Kolmogorov da la recursión para calcular $r_{ij}(n)$
- $r_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}(n-1)p_{kj}, \quad n > 1, \forall i, j$ y con valor inicial $r_{ij}(1) = p_{ij}$

- Los elemenos de una cadena de Markov se pueden arreglar en una matriz llamada *matriz de transición de probabilidad*

Matriz y Grafo de Probabilidad de Transición

- Los elemenos de una cadena de Markov se pueden arreglar en una matriz llamada *matriz de transición de probabilidad*
- $$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Matriz y Grafo de Probabilidad de Transición

- Los elemenos de una cadena de Markov se pueden arreglar en una matriz llamada *matriz de transición de probabilidad*
- $$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$
- Es útil arreglar la transición en un grafo donde los nodos son los estados y los arcos denotan las probabilidades de transición

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)
- La densidad espectral de potencia P_f la definimos como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)
- La densidad espectral de potencia P_f la definimos como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación
- $P_f = \mathcal{F}(R_W(\tau))$

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)
- La densidad espectral de potencia P_f la definimos como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación
- $P_f = \mathcal{F}(R_W(\tau))$
- La potencia es $P = \int_{-\infty}^{+\infty} P_f df \to \infty$

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)
- La densidad espectral de potencia P_f la definimos como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación
- $P_f = \mathcal{F}(R_W(\tau))$
- La potencia es $P = \int_{-\infty}^{+\infty} P_f df \to \infty$
- Un proceso con potencia infinita no existe físicamente

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)
- La densidad espectral de potencia P_f la definimos como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación
- $P_f = \mathcal{F}(R_W(\tau))$
- La potencia es $P = \int_{-\infty}^{+\infty} P_f df \rightarrow \infty$
- Un proceso con potencia infinita no existe físicamente
- Pero varios procesos tienen P_f const. en un rango

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n-1]$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n-1]$
- $E[w[n]w[n-k]] = \delta(n-k)\sigma_N^2$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n-1]$
- $E[w[n]w[n-k]] = \delta(n-k)\sigma_N^2$
- Ejemplo: medición de variable de control contaminada por ruido blanco Gaussiano aditivo

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n-1]$
- $E[w[n]w[n-k]] = \delta(n-k)\sigma_N^2$
- Ejemplo: medición de variable de control contaminada por ruido blanco Gaussiano aditivo
- $y[n] = A[n] + w[n]$, donde $A[n]$ es la variable de interés

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n-1]$
- $E[w[n]w[n-k]] = \delta(n-k)\sigma_N^2$
- Ejemplo: medición de variable de control contaminada por ruido blanco Gaussiano aditivo
- $y[n] = A[n] + w[n]$, donde $A[n]$ es la variable de interés
- ¿Cuál es la distribución de $y[n]$?

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n-1]$
- $E[w[n]w[n-k]] = \delta(n-k)\sigma_N^2$
- Ejemplo: medición de variable de control contaminada por ruido blanco Gaussiano aditivo
- $y[n] = A[n] + w[n]$, donde $A[n]$ es la variable de interés
- ¿Cuál es la distribución de $y[n]$?
- ¿Cuál es la distribución de $y = [y[n-k] \dots y[n-1]\, y[n]]$?

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}\mathcal{N}(0, 1)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}\mathcal{N}(0,1)$
- Se dice que el proceso es Gaussiano porque $W(t) - W(s)$ lo es

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}\mathcal{N}(0, 1)$
- Se dice que el proceso es Gaussiano porque $W(t) - W(s)$ lo es
- Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$, se cumple que $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}\mathcal{N}(0, 1)$
- Se dice que el proceso es Gaussiano porque $W(t) - W(s)$ lo es
- Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$, se cumple que $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes
- El proceso de Wiener discretizado es $dW \sim \sqrt{dt}\mathcal{N}(0, 1)$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}\mathcal{N}(0, 1)$
- Se dice que el proceso es Gaussiano porque $W(t) - W(s)$ lo es
- Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$, se cumple que $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes
- El proceso de Wiener discretizado es $dW \sim \sqrt{dt}\mathcal{N}(0, 1)$
- Aplicaciones: finanzas (modelo de Black-Scholes), ec. diferenciales estocásticas, etc.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}\mathcal{N}(0,1)$
- Se dice que el proceso es Gaussiano porque $W(t) - W(s)$ lo es
- Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$, se cumple que $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes
- El proceso de Wiener discretizado es $dW \sim \sqrt{dt}\mathcal{N}(0,1)$
- Aplicaciones: finanzas (modelo de Black-Scholes), ec. diferenciales estocásticas, etc.
- Ejemplo de implementación en Octave

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 1

(a) Juan y Pedro juegan un juego de dados en el cual el que tira el dado más alto gana. Si ambos tiran el mismo número, tiran de nuevo hasta que uno gane. Juan ganó. Encontrar la probabilidad de que haya ganado con un 5. (Pista: listar todos los pares de tiradas de Juan y Pedro en las que Juan gana, y encontrar en cuáles gana con un 5)

(b) Simular un dado y encontrar una estimación de la probabilidad anterior.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 2

a. Sea la longitud de una vara L. Supongamos que optamos por cortar la vara en un lugar elegido uniformemente al azar Y. Nos quedamos con la parte de vara de longitud entre $[0, Y]$. Luego nuevamente decidimos partir la porción restante en un lugar aleatoriamente elegido uniformemente, y llamamos a la longitud resultante X (Pista: usar la ley de esperanzas iteradas).
b. Encontrar la expresión de $E[X]$ en función de L.
c. Encontrar la expresión de $\text{var}[X]$ en función de L.
d. Simular el proceso con $N = 1000$ ensayos y encontrar la media y varianza muestral de X.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 3

1. Sean X, Y v.a. $\mathcal{U}[0,1]$ independientes. Definamos $Z = X + Y$. Encontrar $E[Z|X], E[X|Z], E[XZ|X], E[XZ|Z]$.
2. Simular y estimar dichas esperanzas.

Ejercicio 4

1. Sea un proceso AWGN $y(n) = 2 + w(n)$ donde $w(n) \sim \mathcal{N}(0,1)$
2. Estimar la media y varianza de $y(n)$ usando los siguientes estimadores:
3. $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y(i)$
4. $s_n = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(y(i) - \bar{y})^2$
5. $s_{n-1} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}(y(i) - \bar{y})^2$
6. Calcular la esperanza de cada estimador
7. Simular con $N = 10$ y $N = 10000$
8. Interpretar los valores de s_n, s_{n-1} en cada caso. ¿Cuál es mejor de los dos?

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Bibliografía I

E. Alpaydin, *Introduction to machine learning*.
MIT press, 2020.

"MIT - Lecture Notes Course 6.041-6.431, Fall 2000."
https://vfu.bg/en/e-Learning/Math--Bertsekas_Tsitsiklis_Introduction_to_probability.pdf.
Accessed: 2020-05-15.

"Universidad de Pensilvania - Lecture Notes Course 303."
https://www.seas.upenn.edu/~ese303/homework/week_11/week_11_white_gaussian_noise.pdf.
Accessed: 2020-05-15.

"Universidad de Arizona, departamento de Matemática."
https://www.math.arizona.edu/~tgk/464_07/cond_exp.pdf.
Accessed: 2020-05-15.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Bibliografía II

"UC Santa Barbara, Mechanical Engineering, A standard Wiener process." https://sites.me.ucsb.edu/~moehlis/APC591/tutorials/tutorial7/node2.html.
Accessed: 2020-05-15.