

Probabilidad y Estadística para Inteligencia Artificial

Dr. Ing. Pablo Briff

Laboratorio de Sistemas Embebidos - FIUBA

pbriff@fi.uba.ar

4 de Julio de 2020



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Tabla de Contenidos I

- 1 **Condicionamiento de una V.A**
 - Condicionamiento de una V.A Discreta
 - Condicionamiento de una V.A Continua
- 2 **Esperanza Condicional Como V.A.**
 - Esperanza Condicional Como V.A.
- 3 **Procesos Estocásticos**
 - Procesos Estocásticos
 - Proceso Poisson
- 4 **Ejercicios Práctico-Teóricos**
 - Ejercicio 1
 - Ejercicio 2
 - Ejercicio 3
 - Ejercicio 4
- 5 **Bibliografía**



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad (p .) no nula $P(A)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad ($p.$) no nula $P(A)$
- La p. condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad ($p.$) no nula $P(A)$
- La $p.$ condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad ($p.$) no nula $P(A)$
- La $p.$ condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$
- Dado que $P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A)$ se verifica que



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad ($p.$) no nula $P(A)$
- La $p.$ condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$
- Dado que $P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A)$ se verifica que
- $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad (p.) no nula $P(A)$
- La p. condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$
- Dado que $P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A)$ se verifica que
- $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$
- Ejemplo: ¿Cuál es la función de p. de masa condicional $p_{X|A}(x)$ de un dado, donde X modela el valor del dado en cada tirada, siendo A el evento que el número que sale en la tirada es par?



Condicionamiento de una V.A Discreta con Evento

- Sea un evento A con probabilidad (p.) no nula $P(A)$
- La p. condicional de una v.a. discreta X dado que ocurrió el evento A es
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$
- Dado que $P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A)$ se verifica que
- $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$
- Ejemplo: ¿Cuál es la función de p. de masa condicional $p_{X|A}(x)$ de un dado, donde X modela el valor del dado en cada tirada, siendo A el evento que el número que sale en la tirada es par?
- ¿Cómo se compara con la distribución de p. incondicional $p_X(x)$ del mismo dado?



Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x, y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x,y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$
- Naturalmente $\sum_x p_{XY}(x|y) = 1$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x,y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$
- Naturalmente $\sum_x p_{XY}(x|y) = 1$
- Por Bayes se cumple:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x,y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$
- Naturalmente $\sum_x p_{XY}(x|y) = 1$
- Por Bayes se cumple:
- $p_{XY}(x,y) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x,y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$
- Naturalmente $\sum_x p_{XY}(x|y) = 1$
- Por Bayes se cumple:
- $p_{XY}(x,y) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$
- Si sumamos sobre todos los y la $p_{X|Y}(x|y)$ obtenemos la p. marginal de X , es decir



Condicionamiento de una V.A Discreta con Otra V.A

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $p_{XY}(x, y)$ pero normalizada a $p_Y(y)$
- Naturalmente $\sum_x p_{XY}(x|y) = 1$
- Por Bayes se cumple:
- $p_{XY}(x, y) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$
- Si sumamos sobre todos los y la $p_{X|Y}(x|y)$ obtenemos la p. marginal de X , es decir
- $p_X(x) = \sum_y p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)$



Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p . condicional



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p . condicional
- Sea un evento A , entonces



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A , entonces
- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A , entonces
- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$
- Para funciones:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A , entonces
- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x|A)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A , entonces
- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x|A)$
- Para dos v.a. discretas:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Discreta

- La esperanza condicional es similar a la esperanza ordinaria, pero usando la distribución de p. condicional
- Sea un evento A , entonces
- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x|A)$
- Para dos v.a. discretas:
- $E[X|Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y)E[X|Y = y]$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y)E[X|Y = y]$
- Ley de esperanzas iteradas:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y)E[X|Y = y]$
- Ley de esperanzas iteradas:
- $E[E[X|Y]] = E[X]$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y)E[X|Y = y]$
- Ley de esperanzas iteradas:
 - $E[E[X|Y]] = E[X]$
- ¿Demostración?



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y)E[X|Y = y]$
- Ley de esperanzas iteradas:
 - $E[E[X|Y]] = E[X]$
 - ¿Demostración?
- En términos simples, la esperanza incondicional se obtiene promediando las esperanzas condicionales



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Teorema de la Esperanza Total

- El teorema de la esperanza total se desprende de la ley de p. total
- $E[X] = \sum_y p_Y(y)E[X|Y = y]$
- Ley de esperanzas iteradas:
 - $E[E[X|Y]] = E[X]$
 - ¿Demostración?
- En términos simples, la esperanza incondicional se obtiene promediando las esperanzas condicionales
- El teorema de la esperanza total es análogo al teorema de la probabilidad total



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Continua

- La pdf condicional de una v.a. continua condicionada a un evento A con $P(A) > 0$ es una función $f_{X|A}$ tal que:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Continua

- La pdf condicional de una v.a. continua condicionada a un evento A con $P(A) > 0$ es una función $f_{X|A}$ tal que:
- $P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Continua

- La pdf condicional de una v.a. continua condicionada a un evento A con $P(A) > 0$ es una función $f_{X|A}$ tal que:
- $P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$
- Notemos que si $X \in A$ entonces



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Continua

- La pdf condicional de una v.a. continua condicionada a un evento A con $P(A) > 0$ es una función $f_{X|A}$ tal que:
- $P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$
- Notemos que si $X \in A$ entonces
- $f_{X|A} = \frac{f_X(x)}{P(X \in A)}$, si $X \in A$, o $f_{X|A} = 0$ si no. ¿Por qué?



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Condicionamiento de una V.A Continua

- La pdf condicional de una v.a. continua condicionada a un evento A con $P(A) > 0$ es una función $f_{X|A}$ tal que:
- $P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$
- Notemos que si $X \in A$ entonces
- $f_{X|A} = \frac{f_X(x)}{P(X \in A)}$, si $X \in A$, o $f_{X|A} = 0$ si no. ¿Por qué?
- Nuevamente vemos cómo la p. condicional escala la p. a priori de acuerdo al evento de condicionamiento



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$
- Si A_1, \dots, A_n son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup \dots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$
- Si A_1, \dots, A_n son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup \dots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:
- $f_X(x) = \sum_i P(A_i) f_{X|A_i}(x)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$
- Si A_1, \dots, A_n son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup \dots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:
- $f_X(x) = \sum_i P(A_i) f_{X|A_i}(x)$
- El teorema de la esperanza total queda:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$
- Si A_1, \dots, A_n son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup \dots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:
- $f_X(x) = \sum_i P(A_i) f_{X|A_i}(x)$
- El teorema de la esperanza total queda:
- $E[X] = \sum_i P(A_i) E[X|A_i]$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$
- Si A_1, \dots, A_n son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup \dots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:
- $f_X(x) = \sum_i P(A_i) f_{X|A_i}(x)$
- El teorema de la esperanza total queda:
- $E[X] = \sum_i P(A_i) E[X|A_i]$
- Para funciones:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional de una V.A Continua

- Como es esperable $E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$
- Para funciones:
- $E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$
- Si A_1, \dots, A_n son particiones disjuntas del espacio muestral S y $A_1 \cup \dots \cup A_n = S$, el teorema de p. total aplicado a la pdf es:
- $f_X(x) = \sum_i P(A_i) f_{X|A_i}(x)$
- El teorema de la esperanza total queda:
- $E[X] = \sum_i P(A_i) E[X|A_i]$
- Para funciones:
- $E[g(X)] = \sum_i P(A_i) E[g(X)|A_i]$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)
- Como toda v.a. se puede definir la esperanza y la varianza



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)
- Como toda v.a. se puede definir la esperanza y la varianza
- $E[E[X|Y]] = E[X]$ por la ley de esperanzas iteradas



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)
- Como toda v.a. se puede definir la esperanza y la varianza
- $E[E[X|Y]] = E[X]$ por la ley de esperanzas iteradas
- $\text{var}[E[X|Y]] = \text{var}[X] - E[\text{var}[X|Y]]$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)
- Como toda v.a. se puede definir la esperanza y la varianza
- $E[E[X|Y]] = E[X]$ por la ley de esperanzas iteradas
- $\text{var}[E[X|Y]] = \text{var}[X] - E[\text{var}[X|Y]]$
- Ley de varianza condicional



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Esperanza Condicional Como V.A.

- La esperanza $E[X|Y = y]$ es una función de y
- El valor de y surge del valor experimental de una v.a. Y
- Entonces se puede decir que la esperanza condicional $E[X|Y]$ es una v.a. (es función de la v.a. Y)
- Como toda v.a. se puede definir la esperanza y la varianza
- $E[E[X|Y]] = E[X]$ por la ley de esperanzas iteradas
- $\text{var}[E[X|Y]] = \text{var}[X] - E[\text{var}[X|Y]]$
- Ley de varianza condicional
- $\text{var}[X] = \text{var}[E[X|Y]] + E[\text{var}[X|Y]]$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo



- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo
- La salida del proceso estocástico es una secuencia de valores numéricos



- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo
- La salida del proceso estocástico es una secuencia de valores numéricos
- Ejemplos:



Procesos Estocásticos

- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo
- La salida del proceso estocástico es una secuencia de valores numéricos
- Ejemplos:
- Precio de las acciones de la bolsa de valores



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo
- La salida del proceso estocástico es una secuencia de valores numéricos
- Ejemplos:
- Precio de las acciones de la bolsa de valores
- Tiempo entre fallas en una máquina



- Proceso estocástico: modelo matemático de un experimento probabilístico que evoluciona con el tiempo
- La salida del proceso estocástico es una secuencia de valores numéricos
- Ejemplos:
 - Precio de las acciones de la bolsa de valores
 - Tiempo entre fallas en una máquina
 - La medición de una tensión en un circuito contaminado por ruido



- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.



Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso
- Nos interesa conocer el *promedio a largo plazo* de la secuencia



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso
- Nos interesa conocer el *promedio a largo plazo* de la secuencia
- Hay procesos de tipo de *llegada o arribo*



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso
- Nos interesa conocer el *promedio a largo plazo* de la secuencia
- Hay procesos de tipo de *llegada o arribo*
- Proceso Bernoulli: arribos a intervalos discretos y con distribución geométrica entre arribos



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso
- Nos interesa conocer el *promedio a largo plazo* de la secuencia
- Hay procesos de tipo de *llegada o arribo*
- Proceso Bernoulli: arribos a intervalos discretos y con distribución geométrica entre arribos
- Proceso Poisson: arribos a intervalos continuos y con distribución exponencial entre arribos



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Procesos Estocásticos

- Cada valor de la secuencia se modela como una v.a.
- Un proceso estocástico es una secuencia finita o infinita de v.a.
- El foco se pone en la dependencia en la secuencia de valores generada por el proceso
- Nos interesa conocer el *promedio a largo plazo* de la secuencia
- Hay procesos de tipo de *llegada o arribo*
- Proceso Bernoulli: arribos a intervalos discretos y con distribución geométrica entre arribos
- Proceso Poisson: arribos a intervalos continuos y con distribución exponencial entre arribos
- Procesos Markov: procesos cuya dependencia futura depende solo del estado actual



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- $E[X] = \text{var}[X] = \lambda$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- $E[X] = \text{var}[X] = \lambda$
- En general, definimos $\lambda = rt$, donde r es la tasa de eventos



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
 - $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
 - $E[X] = \text{var}[X] = \lambda$
 - En general, definimos $\lambda = rt$, donde r es la tasa de eventos
- Ejemplo: en un río ocurre en promedio 1 inundación cada 100 años. Calcular la p. de que hayan 2 inundaciones en los próximos 100 años.



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
 - $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
 - $E[X] = \text{var}[X] = \lambda$
- En general, definimos $\lambda = rt$, donde r es la tasa de eventos
- Ejemplo: en un río ocurre en promedio 1 inundación cada 100 años. Calcular la p. de que hayan 2 inundaciones en los próximos 100 años.
- Vemos que $\lambda = 1$, $r = 1/100$ inundaciones/año.



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Poisson

- Para algunos procesos Bayesianos vamos a necesitar modelar el proceso de los datos como una distribución Poisson
- El proceso Poisson modela la cantidad de arribos o llegadas en un dado intervalo de tiempo
- Sea X un modelo Poisson. Si asumimos que el periodo de observación es $t = [0, 1]$ tenemos:
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- $E[X] = \text{var}[X] = \lambda$
- En general, definimos $\lambda = rt$, donde r es la tasa de eventos
- Ejemplo: en un río ocurre en promedio 1 inundación cada 100 años. Calcular la p. de que hayan 2 inundaciones en los próximos 100 años.
- Vemos que $\lambda = 1$, $r = 1/100$ inundaciones/año.
- $P(k = 2 \text{ inundaciones en } 100 \text{ años}) = \frac{1^2 e^{-1}}{2!}$
 ≈ 0.184



- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales



Proceso Markov

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales
- Los procesos Markov describen procesos *con memoria*



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Markov

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales
- Los procesos Markov describen procesos *con memoria*
- Un proceso estocástico $X(t)$ es proceso de Markov si para cada n y $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tenemos



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

Proceso Markov

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales
- Los procesos Markov describen procesos *con memoria*
- Un proceso estocástico $X(t)$ es proceso de Markov si para cada n y $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tenemos
- $P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}), \dots, X(t_1)) = P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}))$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Markov

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales
- Los procesos Markov describen procesos *con memoria*
- Un proceso estocástico $X(t)$ es proceso de Markov si para cada n y $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tenemos
- $P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}), \dots, X(t_1)) = P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}))$
- Se define el concepto de *estado* del proceso, el cual cambia dependiendo de las probabilidades



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso Markov

- Un proceso de Markov es un proceso aleatorio cuyas probabilidades futuras dependen de sus valores más actuales
- Los procesos Markov describen procesos *con memoria*
- Un proceso estocástico $X(t)$ es proceso de Markov si para cada n y $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tenemos
- $P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}), \dots, X(t_1)) = P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}))$
- Se define el concepto de *estado* del proceso, el cual cambia dependiendo de las probabilidades
- Las *Cadenas de Markov Discretas* se limitan a sistemas con estados finitos que cambian a instantes discretos de tiempo



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

- El espacio de es estados $S = \{s_1, \dots, s_m\}$



- El espacio de estados $S = \{s_1, \dots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:



Cadenas de Markov

- El espacio de es estados $S = \{s_1, \dots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad i, j \in S$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Cadenas de Markov

- El espacio de estados $S = \{s_1, \dots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad i, j \in S$
- La principal hipótesis de un proceso de Markov es que la p. p_{ij} se aplica cada vez que el estado i se visita, independientemente del pasado y de cómo se llegó ahí



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Cadenas de Markov

- El espacio de estados $S = \{s_1, \dots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad i, j \in S$
- La principal hipótesis de un proceso de Markov es que la p. p_{ij} se aplica cada vez que el estado i se visita, independientemente del pasado y de cómo se llegó ahí
- La propiedad de Markov dice que:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Cadenas de Markov

- El espacio de estados $S = \{s_1, \dots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad i, j \in S$
- La principal hipótesis de un proceso de Markov es que la p. p_{ij} se aplica cada vez que el estado i se visita, independientemente del pasado y de cómo se llegó ahí
- La propiedad de Markov dice que:
- $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Cadenas de Markov

- El espacio de estados $S = \{s_1, \dots, s_m\}$
- La p. de transición entre estados i, j es:
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad i, j \in S$
- La principal hipótesis de un proceso de Markov es que la p. p_{ij} se aplica cada vez que el estado i se visita, independientemente del pasado y de cómo se llegó ahí
- La propiedad de Markov dice que:
- $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$
- Se cumple que $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1 \quad \forall i$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Transición n Pasos Adelante

- Para calcular la p. de transición a n estados futuros dado el estado actual, planteamos



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Transición n Pasos Adelante

- Para calcular la p. de transición a n estados futuros dado el estado actual, planteamos
- $r_{ij}(n) = P(X_n = j | X_0 = i)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Transición n Pasos Adelante

- Para calcular la p. de transición a n estados futuros dado el estado actual, planteamos
- $r_{ij}(n) = P(X_n = j | X_0 = i)$
- La ecuación de Chapman-Kolmogorov da la recursión para calcular $r_{ij}(n)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Transición n Pasos Adelante

- Para calcular la p. de transición a n estados futuros dado el estado actual, planteamos
- $r_{ij}(n) = P(X_n = j | X_0 = i)$
- La ecuación de Chapman-Kolmogorov da la recursión para calcular $r_{ij}(n)$
- $r_{ij}(n) = \sum_{k=1}^m r_{ik}(n-1)p_{kj}, \quad n > 1, \forall i, j$ y con valor inicial $r_{ij}(1) = p_{ij}$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Matriz y Grafo de Probabilidad de Transición

- Los elementos de una cadena de Markov se pueden arreglar en una matriz llamada *matriz de transición de probabilidad*



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Matriz y Grafo de Probabilidad de Transición

- Los elementos de una cadena de Markov se pueden arreglar en una matriz llamada *matriz de transición de probabilidad*

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix}$$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Matriz y Grafo de Probabilidad de Transición

- Los elementos de una cadena de Markov se pueden arreglar en una matriz llamada *matriz de transición de probabilidad*

- $$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

- Es útil arreglar la transición en un grafo donde los nodos son los estados y los arcos denotan las probabilidades de transición



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

- Recordemos la definición de la delta de Dirac



Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)
- La densidad espectral de potencia P_f la definimos como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)
- La densidad espectral de potencia P_f la definimos como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación
- $P_f = \mathcal{F}(R_W(\tau))$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)
- La densidad espectral de potencia P_f la definimos como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación
- $P_f = \mathcal{F}(R_W(\tau))$
- La potencia es $P = \int_{-\infty}^{+\infty} P_f df \rightarrow \infty$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)
- La densidad espectral de potencia P_f la definimos como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación
- $P_f = \mathcal{F}(R_W(\tau))$
- La potencia es $P = \int_{-\infty}^{+\infty} P_f df \rightarrow \infty$
- Un proceso con potencia infinita no existe físicamente



Proceso de Ruido Blanco Gaussiano

- Recordemos la definición de la delta de Dirac
- $\int_a^b f(t)\delta(t) = f(0)$ para $a < 0 < b$, o cero si no
- Para un proceso de ruido blanco Gaussiano, definimos:
- $\mu_W = 0$ para todo t
- $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) = R_W(\tau)$
- Entonces en el ruido blanco la varianza es la delta de Dirac (muestras completamente descorrelacionadas)
- La densidad espectral de potencia P_f la definimos como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación
- $P_f = \mathcal{F}(R_W(\tau))$
- La potencia es $P = \int_{-\infty}^{+\infty} P_f df \rightarrow \infty$
- Un proceso con potencia infinita no existe físicamente
- Pero varios procesos tienen P_f const. en un rango



- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:



Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t - s}\mathcal{N}(0, 1)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t - s}\mathcal{N}(0, 1)$
- Se dice que el proceso es Gaussiano porque $W(t) - W(s)$ lo es



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}\mathcal{N}(0, 1)$
- Se dice que el proceso es Gaussiano porque $W(t) - W(s)$ lo es
- Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$, se cumple que $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}\mathcal{N}(0, 1)$
- Se dice que el proceso es Gaussiano porque $W(t) - W(s)$ lo es
- Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$, se cumple que $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes
- El proceso de Wiener discretizado es $dW \sim \sqrt{dt}\mathcal{N}(0, 1)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

- Un proceso de Wiener estándar en el intervalo $t \in [0, T]$ es una v.a. $W(t)$ que depende continuamente de t y satisface:
- $W(0) = 0$
- Para $0 \leq s < t \leq T$, se cumple $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}\mathcal{N}(0, 1)$
- Se dice que el proceso es Gaussiano porque $W(t) - W(s)$ lo es
- Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$, se cumple que $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes
- El proceso de Wiener discretizado es $dW \sim \sqrt{dt}\mathcal{N}(0, 1)$
- Ejemplo de implementación en Octave



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n - 1]$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n - 1]$
- $E[w[n]w[n - k]] = \delta(n - k)\sigma_N^2$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n-1]$
- $E[w[n]w[n-k]] = \delta(n-k)\sigma_N^2$
- Ejemplo: medición de variable de control contaminada por ruido blanco Gaussiano aditivo



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n - 1]$
- $E[w[n]w[n - k]] = \delta(n - k)\sigma_N^2$
- Ejemplo: medición de variable de control contaminada por ruido blanco Gaussiano aditivo
- $y[n] = A[n] + w[n]$, donde $A[n]$ es la variable de interés



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n - 1]$
- $E[w[n]w[n - k]] = \delta(n - k)\sigma_N^2$
- Ejemplo: medición de variable de control contaminada por ruido blanco Gaussiano aditivo
- $y[n] = A[n] + w[n]$, donde $A[n]$ es la variable de interés
- ¿Cuál es la distribución de $y[n]$?



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proceso de Ruido Blanco Gaussiano Discreto

- Consideremos $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$
- El proceso $w[n]$ es una secuencia de v.a. con la distribución de w
- En un proceso estocástico, es interesante conocer la correlación entre diversos valores de la v.a.
- Por ej., la correlación entre $w[n]$ y $w[n - 1]$
- $E[w[n]w[n - k]] = \delta(n - k)\sigma_N^2$
- Ejemplo: medición de variable de control contaminada por ruido blanco Gaussiano aditivo
- $y[n] = A[n] + w[n]$, donde $A[n]$ es la variable de interés
- ¿Cuál es la distribución de $y[n]$?
- ¿Cuál es la distribución de $y = [y[n - k] \dots y[n - 1] y[n]]$?



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 1

- a) Juan y Pedro juegan un juego de dados en el cual el que tira el dado más alto gana. Si ambos tiran el mismo número, tiran de nuevo hasta que uno gane. Juan ganó. Encontrar la probabilidad de que haya ganado con un 5. (Pista: listar todos los pares de tiradas de Juan y Pedro en las que Juan gana, y encontrar en cuáles gana con un 5)
- b) Simular un dado y encontrar una estimación de la probabilidad anterior.



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 2

- a) Sea la longitud de una vara L . Supongamos que optamos por cortar la vara en un lugar elegido uniformemente al azar Y . Nos quedamos con la parte de vara de longitud entre $[0, Y]$. Luego nuevamente decidimos partir la porción restante en un lugar aleatoriamente elegido uniformemente, y llamamos a la longitud resultante X (Pista: usar la ley de esperanzas iteradas).
- b) Encontrar la expresión de $E[X]$ en función de L .
- c) Encontrar la expresión de $\text{var}[X]$ en función de L .
- d) Simular el proceso con $N = 1000$ ensayos y encontrar la media y varianza muestral de X .



Ejercicio 3

- a Sean X, Y v.a. $\mathcal{U}[0, 1]$ independientes. Definamos $Z = X + Y$. Encontrar $E[Z|X]$, $E[X|Z]$, $E[XZ|X]$, $E[XZ|Z]$.
- b Simular y estimar dichas esperanzas.




**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires


Ejercicio 4


- (a) Sea un proceso AWGN $y(n) = 2 + w(n)$ donde $w(n) \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- (b) Estimar la media y varianza de $y(n)$ usando los siguientes estimadores:
- (c) $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i)$
- (d) $s_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (y(i) - \bar{y})^2$
- (e) $s_{n-1} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (y(i) - \bar{y})^2$
- (f) Calcular la esperanza de cada estimador
- (g) Simular con $N = 10$ y $N = 10000$
- (h) Interpretar los valores de s_n, s_{n-1} en cada caso. ¿Cuál es mejor de los dos?



 E. Alpaydin, *Introduction to machine learning*.
MIT press, 2020.

 “MIT - Lecture Notes Course 6.041-6.431, Fall 2000.”
https://vfubg/en/e-Learning/Math--Bertsekas_Tsitsiklis_Introduction_to_probability.pdf.
Accessed: 2020-05-15.

 “Universidad de Pensilvania - Lecture Notes Course 303.”
https://www.seas.upenn.edu/~ese303/homework/week_11/week_11_white_gaussian_noise.pdf.
Accessed: 2020-05-15.

 “Universidad de Arizona, departamento de Matemática.”
https://www.math.arizona.edu/~tgk/464_07/cond_exp.pdf.
Accessed: 2020-05-15.



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires



“UC Santa Barbara, Mechanical Engineering, A standard Wiener process.” <https://sites.me.ucsb.edu/~moehlis/APC591/tutorials/tutorial7/node2.html>.

Accessed: 2020-05-15.



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires