

Probabilidad y Estadística para Inteligencia Artificial

Dr. Ing. Pablo Briff

Laboratorio de Sistemas Embebidos - FIUBA

pbriff@fi.uba.ar

4 de Julio de 2020



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Tabla de Contenidos I

1 Repaso de Octave

- Repaso de Octave

2 Transformaciones y Funciones de Variables Aleatorias

- Suma de V. A.
- Funciones de una V.A.
- Cuadrado de una V. A.
- Método de la Transformada Inversa



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

3 Modelos Multivariantes

- Distribución Gaussiana Bivariable
- Distribución Gaussiana Multivariable



- Vectores y matrices, producto y exponenciación



Repaso de Octave

- Vectores y matrices, producto y exponenciación
- Funciones



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Repaso de Octave

- Vectores y matrices, producto y exponenciación
- Funciones
- Operaciones matriciales, producto y exponenciación



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Repaso de Octave

- Vectores y matrices, producto y exponenciación
- Funciones
- Operaciones matriciales, producto y exponenciación
- Operaciones básicas de programación, for, while, if



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Repaso de Octave

- Vectores y matrices, producto y exponenciación
- Funciones
- Operaciones matriciales, producto y exponenciación
- Operaciones básicas de programación, for, while, if
- Funciones recursivas



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Repaso de Octave

- Vectores y matrices, producto y exponenciación
- Funciones
- Operaciones matriciales, producto y exponenciación
- Operaciones básicas de programación, for, while, if
- Funciones recursivas
- **Histograma**



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Repaso de Octave

- Vectores y matrices, producto y exponenciación
- Funciones
- Operaciones matriciales, producto y exponenciación
- Operaciones básicas de programación, for, while, if
- Funciones recursivas
- Histograma
- Pdf y cdf



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Repaso de Octave

- Vectores y matrices, producto y exponenciación
- Funciones
- Operaciones matriciales, producto y exponenciación
- Operaciones básicas de programación, for, while, if
- Funciones recursivas
- Histograma
- Pdf y cdf
- Gráficos



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Repaso de Octave

- Vectores y matrices, producto y exponenciación
- Funciones
- Operaciones matriciales, producto y exponenciación
- Operaciones básicas de programación, for, while, if
- Funciones recursivas
- Histograma
- Pdf y cdf
- Gráficos
- Guardar y recuperar datos



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Sean $f(t), g(t)$ dos funciones reales



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Sean $f(t), g(t)$ dos funciones reales
- Sea $y(t)$ el producto de convolución de f, g definido por



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Sean $f(t), g(t)$ dos funciones reales
- Sea $y(t)$ el producto de convolución de f, g definido por
- $y(t) \triangleq (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Sean $f(t), g(t)$ dos funciones reales
- Sea $y(t)$ el producto de convolución de f, g definido por
- $y(t) \triangleq (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$
- Para funciones que son cero para argumentos negativos, la integral se reduce a:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Sean $f(t), g(t)$ dos funciones reales
- Sea $y(t)$ el producto de convolución de f, g definido por
- $y(t) \triangleq (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$
- Para funciones que son cero para argumentos negativos, la integral se reduce a:
- $y(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Sean $f(t), g(t)$ dos funciones reales
- Sea $y(t)$ el producto de convolución de f, g definido por
- $y(t) \triangleq (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$
- Para funciones que son cero para argumentos negativos, la integral se reduce a:
- $y(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$
- Este se denomina producto de convolución unilateral



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Sean $f(t), g(t)$ dos funciones reales
- Sea $y(t)$ el producto de convolución de f, g definido por
- $y(t) \triangleq (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$
- Para funciones que son cero para argumentos negativos, la integral se reduce a:
- $y(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$
- Este se denomina producto de convolución unilateral
- El producto de convolución es lineal, asociativo y conmutativo



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Para funciones discretas $f(n)$, $g(n)$ el producto de convolución es una suma dada por:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Para funciones discretas $f(n), g(n)$ el producto de convolución es una suma dada por:
- $y(n) \triangleq (f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n - k)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Para funciones discretas $f(n), g(n)$ el producto de convolución es una suma dada por:
- $y(n) \triangleq (f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n - k)$
- Se reduce a $y(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n - k)$ si $f(n) = g(n) = 0$ para $n < 0$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Para funciones discretas $f(n), g(n)$ el producto de convolución es una suma dada por:
- $y(n) \triangleq (f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$
- Se reduce a $y(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k)$ si $f(n) = g(n) = 0$ para $n < 0$
- Ejemplo: calcular el producto de convolución de dos vectores $X = [1\ 2\ 3\ 4]^T$, $Y = X$ usando la función conv. ¿Cuál es la longitud del vector resultante?



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Producto de Convolución

- Para funciones discretas $f(n), g(n)$ el producto de convolución es una suma dada por:
- $y(n) \triangleq (f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$
- Se reduce a $y(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k)$ si $f(n) = g(n) = 0$ para $n < 0$
- Ejemplo: calcular el producto de convolución de dos vectores $X = [1\ 2\ 3\ 4]^T, Y = X$ usando la función conv. ¿Cuál es la longitud del vector resultante?
- Repetir para $X = [1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3]^T, Y = [(1/3)\ (1/3)\ (1/3)]^T$. Explicar el resultado. ¿Qué función cumple Y ?



Suma de V.A. Uniformes Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $U[0, 1]$ independientes



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Uniformes Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $U[0, 1]$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Uniformes Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $U[0, 1]$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Uniformes Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $U[0, 1]$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- La función de densidad de Z es:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Uniformes Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $U[0, 1]$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- La función de densidad de Z es:
- $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Uniformes Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $U[0, 1]$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- La función de densidad de Z es:
- $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy$
- $f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_0^1 f_X(z - y)f_Y(y)dy$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Uniformes Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $U[0, 1]$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- La función de densidad de Z es:
- $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy$
- $f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_0^1 f_X(z - y)f_Y(y)dy$
- Tomando la integral para $0 \leq z - y \leq 1$ queda



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Uniformes Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $U[0, 1]$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- La función de densidad de Z es:
- $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy$
- $f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_0^1 f_X(z - y)f_Y(y)dy$
- Tomando la integral para $0 \leq z - y \leq 1$ queda
- $f_Z(z) = \begin{cases} z, & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 2 - z, & \text{si } 1 \leq z \leq 2 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$



Suma de V.A. Uniformes Independientes

- Simular la distribución de Z en Octave usando la función `conv`



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Uniformes Independientes

- Simular la distribución de Z en Octave usando la función `conv`
- Extender a $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
con $X_i \sim U[0, 1]$ (agrupar de a pares) y simular



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Gaussianas Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Gaussianas Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Gaussianas Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-z^2/4}$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Gaussianas Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-z^2/4}$
- $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y = 0$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Gaussianas Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-z^2/4}$
- $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y = 0$
- Se puede demostrar la $f_Z(z)$ a partir del producto de convolución



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Gaussianas Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-z^2/4}$
- $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y = 0$
- Se puede demostrar la $f_Z(z)$ a partir del producto de convolución
- $\text{var}[Z] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] = 2$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Suma de V.A. Gaussianas Independientes

- Sean X, Y dos V.A. $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes
- ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$?
- $f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-z^2/4}$
- $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y = 0$
- Se puede demostrar la $f_Z(z)$ a partir del producto de convolución
- $\text{var}[Z] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] = 2$
- Simular en Octave usando dos alternativas: i) la función `conv` y ii) la función `hist`



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

- Sea $Y = g(X)$ una función de una v.a. continua



Funciones de una V.A.

- Sea $Y = g(X)$ una función de una v.a. continua
- La esperanza de Y se puede encontrar sin calcular $f_Y(y)$, como
$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Sea $Y = g(X)$ una función de una v.a. continua
- La esperanza de Y se puede encontrar sin calcular $f_Y(y)$, como
$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$
- En general, $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = \int_{\{x|g(x) \leq y\}} f_X(x)dx$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Sea $Y = g(X)$ una función de una v.a. continua
- La esperanza de Y se puede encontrar sin calcular $f_Y(y)$, como
$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$
- En general, $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = \int_{\{x|g(x) \leq y\}} f_X(x)dx$
- La derivada de la cdf es la pdf, entonces:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Sea $Y = g(X)$ una función de una v.a. continua
- La esperanza de Y se puede encontrar sin calcular $f_Y(y)$, como
$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$
- En general, $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = \int_{\{x|g(x) \leq y\}} f_X(x)dx$
- La derivada de la cdf es la pdf, entonces:
- $f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Consideremos ahora el caso de funciones monótonas



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Consideremos ahora el caso de funciones monótonas
- $g(t)$ es monótona y $h(t)$ es su inversa, asumamos que existe dh/dt



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Consideremos ahora el caso de funciones monótonas
- $g(t)$ es monótona y $h(t)$ es su inversa, asumamos que existe dh/dt
- Sea X una variable aleatoria contenida en un intervalo I (es decir, $f_X(x) = 0$ fuera de I)



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Consideremos ahora el caso de funciones monótonas
- $g(t)$ es monótona y $h(t)$ es su inversa, asumamos que existe dh/dt
- Sea X una variable aleatoria contenida en un intervalo I (es decir, $f_X(x) = 0$ fuera de I)
- Consideremos $Y = g(X), X = h(Y)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Consideremos ahora el caso de funciones monótonas
- $g(t)$ es monótona y $h(t)$ es su inversa, asumamos que existe dh/dt
- Sea X una variable aleatoria contenida en un intervalo I (es decir, $f_X(x) = 0$ fuera de I)
- Consideremos $Y = g(X)$, $X = h(Y)$
- $f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Consideremos ahora el caso de funciones monótonas
- $g(t)$ es monótona y $h(t)$ es su inversa, asumamos que existe dh/dt
- Sea X una variable aleatoria contenida en un intervalo I (es decir, $f_X(x) = 0$ fuera de I)
- Consideremos $Y = g(X)$, $X = h(Y)$
- $f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$
- La expresión anterior se verifica a partir de la definición de cdf de Y , y diferenciando usando la regla de la cadena



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Consideremos ahora el caso de funciones monótonas
- $g(t)$ es monótona y $h(t)$ es su inversa, asumamos que existe dh/dt
- Sea X una variable aleatoria contenida en un intervalo I (es decir, $f_X(x) = 0$ fuera de I)
- Consideremos $Y = g(X)$, $X = h(Y)$
- $f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$
- La expresión anterior se verifica a partir de la definición de cdf de Y , y diferenciando usando la regla de la cadena
- Para funciones monótonamente crecientes $g(x)$, planteamos



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Consideremos ahora el caso de funciones monótonas
- $g(t)$ es monótona y $h(t)$ es su inversa, asumamos que existe dh/dt
- Sea X una variable aleatoria contenida en un intervalo I (es decir, $f_X(x) = 0$ fuera de I)
- Consideremos $Y = g(X)$, $X = h(Y)$
- $f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$
- La expresión anterior se verifica a partir de la definición de cdf de Y , y diferenciando usando la regla de la cadena
- Para funciones monótonamente crecientes $g(x)$, planteamos
- $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq h(y)) = F_X(h(y))$



Funciones de una V.A.

- Consideremos ahora el caso de funciones monótonas
- $g(t)$ es monótona y $h(t)$ es su inversa, asumamos que existe dh/dt
- Sea X una variable aleatoria contenida en un intervalo I (es decir, $f_X(x) = 0$ fuera de I)
- Consideremos $Y = g(X)$, $X = h(Y)$
- $f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$
- La expresión anterior se verifica a partir de la definición de cdf de Y , y diferenciando usando la regla de la cadena
- Para funciones monótonamente crecientes $g(x)$, planteamos
- $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq h(y)) = F_X(h(y))$
- Para funciones monótonamente decrecientes planteamos:
 $F_Y(y) = P(X \geq h(y)) = 1 - F_X(h(y))$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Funciones de una V.A.

- Consideremos ahora el caso de funciones monótonas
- $g(t)$ es monótona y $h(t)$ es su inversa, asumamos que existe dh/dt
- Sea X una variable aleatoria contenida en un intervalo I (es decir, $f_X(x) = 0$ fuera de I)
- Consideremos $Y = g(X)$, $X = h(Y)$
- $f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$
- La expresión anterior se verifica a partir de la definición de cdf de Y , y diferenciando usando la regla de la cadena
- Para funciones monótonamente crecientes $g(x)$, planteamos
- $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq h(y)) = F_X(h(y))$
- Para funciones monótonamente decrecientes planteamos:
 $F_Y(y) = P(X \geq h(y)) = 1 - F_X(h(y))$
- $f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Cuadrado de una V. A.

- Sea $X \sim U[0, 1]$, encontrar la pdf de $Y = X^2$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Método de la Transformada Inversa

- El objetivo es generar una cdf a partir de una variable uniforme cero-uno



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Método de la Transformada Inversa

- El objetivo es generar una cdf a partir de una variable uniforme cero-uno
- Sea $X \sim U[0, 1]$. Sea $F(y)$ una función monótona biyectiva, la cual usaremos como cdf objetivo



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Método de la Transformada Inversa

- El objetivo es generar una cdf a partir de una variable uniforme cero-uno
- Sea $X \sim U[0, 1]$. Sea $F(y)$ una función monótona biyectiva, la cual usaremos como cdf objetivo
- $F^{-1}(x) = \inf\{y | F(y) \geq x\} \quad (0 < x < 1)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Método de la Transformada Inversa

- El objetivo es generar una cdf a partir de una variable uniforme cero-uno
- Sea $X \sim U[0, 1]$. Sea $F(y)$ una función monótona biyectiva, la cual usaremos como cdf objetivo
- $F^{-1}(x) = \inf\{y | F(y) \geq x\} \quad (0 < x < 1)$
- Si $Y = F^{-1}(X)$, entonces la cdf de Y es $F(y)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Método de la Transformada Inversa

- El objetivo es generar una cdf a partir de una variable uniforme cero-uno
- Sea $X \sim U[0, 1]$. Sea $F(y)$ una función monótona biyectiva, la cual usaremos como cdf objetivo
- $F^{-1}(x) = \inf\{y | F(y) \geq x\} \quad (0 < x < 1)$
- Si $Y = F^{-1}(X)$, entonces la cdf de Y es $F(y)$
- Demostración:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F^{-1}(X) \leq y) = P(X \leq F(y)) = F(y)$$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Método de la Transformada Inversa

- El objetivo es generar una cdf a partir de una variable uniforme cero-uno
- Sea $X \sim U[0, 1]$. Sea $F(y)$ una función monótona biyectiva, la cual usaremos como cdf objetivo
- $F^{-1}(x) = \inf\{y | F(y) \geq x\} \quad (0 < x < 1)$
- Si $Y = F^{-1}(X)$, entonces la cdf de Y es $F(y)$
- Demostración:
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F^{-1}(X) \leq y) = P(X \leq F(y)) = F(y)$$
- También se puede demostrar lo anterior usando la regla de la cadena:
$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$$



Distribución Gaussiana Bivariable

- Sean U, V dos v.a. normales independientes



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Bivariable

- Sean U, V dos v.a. normales independientes
- Sean $X = aU + bV, Y = cU + dV$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Bivariable

- Sean U, V dos v.a. normales independientes
- Sean $X = aU + bV, Y = cU + dV$
- Entonces, la distribución conjunta de X, Y es una distribución normal bivariable



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Bivariable

- Sean U, V dos v.a. normales independientes
- Sean $X = aU + bV, Y = cU + dV$
- Entonces, la distribución conjunta de X, Y es una distribución normal bivariable
- Agrupamos las v.a. en el vector $x = [X \ Y]^T$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Bivariable

- Sean U, V dos v.a. normales independientes
- Sean $X = aU + bV, Y = cU + dV$
- Entonces, la distribución conjunta de X, Y es una distribución normal bivariable
- Agrupamos las v.a. en el vector $x = [X \ Y]^T$
- El vector de medias es $\mu = [\mu_X \ \mu_Y]^T$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Bivariable

- Sean U, V dos v.a. normales independientes
- Sean $X = aU + bV, Y = cU + dV$
- Entonces, la distribución conjunta de X, Y es una distribución normal bivariable
- Agrupamos las v.a. en el vector $x = [X \ Y]^T$
- El vector de medias es $\mu = [\mu_X \ \mu_Y]^T$
- La matriz de covarianza es $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$



Distribución Gaussiana Bivariable

- Sean U, V dos v.a. normales independientes
- Sean $X = aU + bV, Y = cU + dV$
- Entonces, la distribución conjunta de X, Y es una distribución normal bivariable
- Agrupamos las v.a. en el vector $x = [X \ Y]^T$
- El vector de medias es $\mu = [\mu_X \ \mu_Y]^T$
- La matriz de covarianza es $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$
- $f_{XY}(x) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu) \right]$



Distribución Gaussiana Bivariable

- Sean U, V dos v.a. normales independientes
- Sean $X = aU + bV, Y = cU + dV$
- Entonces, la distribución conjunta de X, Y es una distribución normal bivariable
- Agrupamos las v.a. en el vector $x = [X \ Y]^T$
- El vector de medias es $\mu = [\mu_X \ \mu_Y]^T$
- La matriz de covarianza es $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$
- $f_{XY}(x) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu) \right]$
- Si σ_X^2, σ_Y^2 son no nulas y $|\rho_{XY}| < 1$ entonces Σ es no-singular, simétrica y definida positiva



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Bivariable

- Sean U, V dos v.a. normales independientes
- Sean $X = aU + bV, Y = cU + dV$
- Entonces, la distribución conjunta de X, Y es una distribución normal bivariable
- Agrupamos las v.a. en el vector $x = [X \ Y]^T$
- El vector de medias es $\mu = [\mu_X \ \mu_Y]^T$
- La matriz de covarianza es $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$
- $f_{XY}(x) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu) \right]$
- Si σ_X^2, σ_Y^2 son no nulas y $|\rho_{XY}| < 1$ entonces Σ es no-singular, simétrica y definida positiva
- Es decir, $x^T \Sigma x > 0, \text{eig}(\Sigma) > 0$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Bivariable

- La pdf conjunta de la distribución normal bivariable se puede expresar como:



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Bivariable

- La pdf conjunta de la distribución normal bivariable se puede expresar como:

- $$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)} (z_X^2 - 2\rho_{XY}x_Xz_Y + z_Y^2) \right]$$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Bivariable

- La pdf conjunta de la distribución normal bivariable se puede expresar como:
- $$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)} (z_X^2 - 2\rho_{XY}z_Xz_Y + z_Y^2) \right]$$
- $z_X = (x - \mu_X)/\sigma_X$, $z_Y = (y - \mu_Y)/\sigma_Y$ son variables normalizadas



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Bivariable

- La pdf conjunta de la distribución normal bivariable se puede expresar como:
- $$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)} (z_X^2 - 2\rho_{XY}z_Xz_Y + z_Y^2) \right]$$
- $z_X = (x - \mu_X)/\sigma_X$, $z_Y = (y - \mu_Y)/\sigma_Y$ son variables normalizadas
- Sea el conjunto de nivel $z_X^2 - 2\rho_{XY}z_Xz_Y + z_Y^2 \leq \text{const.}$ ¿Qué forma toma en el plano z_Xz_Y esta ecuación?



Distribución Gaussiana Bivariable

- La pdf conjunta de la distribución normal bivariable se puede expresar como:
- $$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)} (z_X^2 - 2\rho_{XY}z_Xz_Y + z_Y^2) \right]$$
- $z_X = (x - \mu_X)/\sigma_X$, $z_Y = (y - \mu_Y)/\sigma_Y$ son variables normalizadas
- Sea el conjunto de nivel $z_X^2 - 2\rho_{XY}z_Xz_Y + z_Y^2 \leq \text{const.}$ ¿Qué forma toma en el plano z_Xz_Y esta ecuación?
- ¿Cómo varía la elipse anterior en función de $|\rho_{XY}|$?



Distribución Gaussiana Bivariable

- La pdf conjunta de la distribución normal bivariable se puede expresar como:
- $$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)} (z_X^2 - 2\rho_{XY}z_Xz_Y + z_Y^2) \right]$$
- $z_X = (x - \mu_X)/\sigma_X$, $z_Y = (y - \mu_Y)/\sigma_Y$ son variables normalizadas
- Sea el conjunto de nivel $zz_X^2 - 2\rho_{XY}z_Xz_Y + z_Y^2 \leq \text{const.}$ ¿Qué forma toma en el plano z_Xz_Y esta ecuación?
- ¿Cómo varía la elipse anterior en función de $|\rho_{XY}|$?
- ¿Qué significa que $|\rho_{XY}| = 1$?



Distribución Gaussiana Multivariable

- En general, para un vector $\mathbf{x} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$ de v.a. multivariable normal de dimensión n tiene una pdf conjunta dada por



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Multivariable

- En general, para un vector $x = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$ de v.a. multivariable normal de dimensión n tiene una pdf conjunta dada por
- $$f_{XY}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu) \right]$$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Multivariable

- En general, para un vector $x = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$ de v.a. multivariable normal de dimensión n tiene una pdf conjunta dada por
- $f_{XY}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu) \right]$
- El vector de medias es ahora $\mu = [\mu_{X1} \ \mu_{X2} \ \dots \ \mu_{Xn}]^T$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Multivariable

- En general, para un vector $x = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$ de v.a. multivariable normal de dimensión n tiene una pdf conjunta dada por
- $f_{XY}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu) \right]$
- El vector de medias es ahora $\mu = [\mu_{X1} \ \mu_{X2} \ \dots \ \mu_{Xn}]^T$
- La matriz de covarianza es $\Sigma = \begin{bmatrix} \text{cov}[X_1, X_1] & \dots & \text{cov}[X_1, X_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[X_n, X_1] & \dots & \text{cov}[X_n, X_n] \end{bmatrix}$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Distribución Gaussiana Multivariable

- En general, para un vector $x = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$ de v.a. multivariable normal de dimensión n tiene una pdf conjunta dada por
- $f_{XY}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu) \right]$
- El vector de medias es ahora $\mu = [\mu_{X1} \ \mu_{X2} \ \dots \ \mu_{Xn}]^T$
- La matriz de covarianza es $\Sigma = \begin{bmatrix} \text{cov}[X_1, X_1] & \dots & \text{cov}[X_1, X_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[X_n, X_1] & \dots & \text{cov}[X_n, X_n] \end{bmatrix}$
- ¿Cómo queda la expresión de $f_{XY}(x)$ cuando todas las variables son independientes?



Proyección de una V.A. Gaussiana Multivariable

- Sea $x = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$ un vector de v.a. multivariable normal de dimensión n



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proyección de una V.A. Gaussiana Multivariable

- Sea $x = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$ un vector de v.a. multivariable normal de dimensión n
- Sea $w \in \mathcal{R}^n$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proyección de una V.A. Gaussiana Multivariable

- Sea $x = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$ un vector de v.a. multivariable normal de dimensión n
- Sea $w \in \mathcal{R}^n$
- $z = w^T \cdot x$ es la proyección de x sobre w



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Proyección de una V.A. Gaussiana Multivariable

- Sea $x = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$ un vector de v.a. multivariable normal de dimensión n
- Sea $w \in \mathcal{R}^n$
- $z = w^T \cdot x$ es la proyección de x sobre w
- La pdf de z es $\mathcal{N}(w^T \cdot \mu, w^T \cdot \Sigma \cdot w)$



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

- Dada $X = aU + bV$, $Y = cU + dV$, con $U, V \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ generar diferentes valores (en particular $b = 0, c = 0$ y $a = d = 1$) para variar $|\rho_{XY}|$ en Octave



Ejercicios de Correlación

- Dada $X = aU + bV$, $Y = cU + dV$, con $U, V \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ generar diferentes valores (en particular $b = 0, c = 0$ y $a = d = 1$) para variar $|\rho_{XY}|$ en Octave
- Graficar X vs. Y y analizar



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 1

- Sean X, Y dos v.a. distribuidas normalmente, con distribución conjunta normal bivariable f_{XY} . Demostrar que X, Y son independientes si y sólo si son v.a. descorrelacionadas (pista: usar $\rho = 0$ en f_{XY})



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 2

- a) Sean X, Y dos v.a. normales de media cero correlacionadas con $\rho_{XY} = 0.5$. Se tiene que $\text{var}[X] = 2\text{var}[Y] = 1$.
- b) Encontrar la expresión de la pdf conjunta de X, Y
- c) Proyectar $x = [X \ Y]^T$ sobre $w = [1 \ 1]^T$ y encontrar la pdf de la proyección.



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 3

- a) Usando el método de la transformada inversa, calcular la pdf de la distribución exponencial $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ para $y \geq 0$, o $f_Y(y) = 0$ si $y < 0$. Usar un valor arbitrario de $\lambda > 0$
- b) Simular en Octave



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 4

- (a) Sea $x = (X_1, X_2) \in \mathcal{R}^2$ un vector de v.a.
- (b) Definamos $y = T(x)$, con $T = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) \in \mathcal{R}^2$, con g_1, g_2 diferenciables
- (c) Encontrar la expresión de la pdf del vector transformado y en función de $f_{X_1 X_2}$
- (d) Resolver la pdf de y para el caso del vector x del Ejercicio 2 con $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y simular en Octave



Bibliografía I



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires