3. ALGEBRE DES LIMITES

3.1. Tableaux des résultats:

$u+v$		v : ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
u	ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
	$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

uv		v : 0	$\ell'\neq 0$	∞
u	0	0	0	
	$\ell\neq 0$	0	$\ell\ell'$	∞
	∞		∞	∞

$\frac{u}{v}$		v : 0	$\ell'\neq 0$	∞
u	0		0	0
	$\ell\neq 0$		$\frac{\ell}{\ell'}$	0
	∞		∞	

λu		u : ℓ	∞
λ	0	0	0
	$\neq 0$	$\lambda\ell$	∞

Ces tableaux regroupent les différents théorèmes qu'il serait possible d'énoncer. Donnons tout de même quelques explications:

(i) Sur la présence du symbole « ∞ » : Celui-ci désigne ici l'un quelconque des deux symboles $+\infty, -\infty$. Le lecteur est alors invité à utiliser la règle des signes pour choisir parmi ces deux symboles celui qui convient dans chaque cas.

(ii) Sur la présence des cases vides: Elles représentent ce qu'il est convenu d'appeler des «formes indéterminées». Ainsi si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$, on ne peut énoncer de résultat général concernant $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

Par exemple:

$u_n = 2^n$, $v_n = 3^n \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

$u_n = n$, $v_n = \operatorname{Log} n \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

$u_n = n^2$, $v_n = n^2 + n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

$u_n = n^2(3+\sin n)$, $v_n = n^2 \Rightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \neq 0$ (ou $+\infty, -\infty$) et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = +\infty$, mais en général la divergence de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de seconde espèce, sauf si v_n a un signe fixe à partir d'un certain rang, auquel cas la divergence est de première espèce et obtenue par la règle des signes.

(iii) Indiquons enfin un résultat utile pour démontrer le théorème concernant le produit mais qui a également un intérêt propre:

3.2. Lemme:

Soient u *une suite bornée et* v *une suite convergente de limite nulle, alors* uv *est convergente de limite nulle.*

Preuve:

Puisque u est une suite bornée il existe deux nombres réels non nuls m, M tels que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. Par conséquent on a également $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \max(|m|, |M|)$.

Posons $A = \max(|m|, |M|)$, comme v est convergente de limite nulle on a:

$\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $|v_n| < \frac{\epsilon}{A}$ et alors:

$$\forall n \geqslant n_0 \ |u_n v_n| = |u_n| \,.\, |v_n| < A \,.\, \frac{\epsilon}{A} = \epsilon$$

Ce qui montre bien que la suite uv converge vers 0 .

4. LIMITE ET ORDRE

4.1. Proposition:

Soit u *une suite réelle telle que, à partir d'un certain rang, on ait* $u_n \geqslant 0$. *Alors si cette suite est convergente, on a nécessairement* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \geqslant 0$.

Preuve:

Notons ℓ la limite de cette suite, il s'agit de montrer que l'on ne peut avoir $\ell < 0$. En effet si tel était le cas, posons $\epsilon = -\frac{\ell}{2} > 0$. La suite étant convergente, on a:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geqslant n_0 \ , \ |u_n - \ell| < -\frac{\ell}{2}, \text{ d'où } u_n < \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} < 0$$

la contradiction est alors claire, ce qui achève la preuve.

4.2. Remarque:

Soit u une suite telle que, à partir d'un certain rang, on ait $u_n > 0$. Alors si cette suite est convergente, la proposition 4.1. prouve que sa limite est positive ou nulle, mais il peut se faire que sa limite soit nulle:

Considérons par exemple la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$. Il est clair que u est une suite à termes strictement positifs, alors que sa limite est nulle.

La proposition 4.1. n'admet donc pas de correspondant strict.

4.3. Conséquence: Prolongement des inégalités:

Soient u *et* v *deux suites réelles convergentes telles que, à partir d'un certain rang, on ait* $u_n \leqslant v_n$. *Alors* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} v_n$.

Preuve:

Considérons la suite v – u . Cette suite est positive ou nulle, à partir d'un certain rang, et d'après limite et algèbre on a:

$$\lim_{n \to \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to \infty} v_n - \lim_{n \to \infty} u_n$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat 4.1. à la suite v – u . De même 4.3. n'admet pas de correspondant strict.

4.4. Théorème: Le squeeze:

Soient u, v, w *trois suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait* $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. *Alors, si* u *et* w *sont convergentes de* **même** *limite* ℓ *, la suite* v *est convergente de limite* ℓ .

On dit dans ce cas que la convergence et la limite de la suite v *sont obtenues par encadrement ou «squeeze».*

Preuve:

On pourrait être tenté d'utiliser deux fois le prolongement des inégalités, mais ceci n'aurait aucune valeur puisque l'on ne sait pas, a priori, que la suite v est convergente! Il nous faut donc revenir aux définitions:

La suite u est convergente de limite ℓ :

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geqslant n_0 \ , \ |u_n - \ell| < \epsilon \quad \text{, d'où} \quad \ell - \epsilon < u_n$$

La suite w est convergente de limite ℓ :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geqslant n_1 \ , \ |w_n - \ell| < \epsilon \quad \text{, d'où } w_n < \ell + \epsilon$$

Soit n_2 le rang à partir duquel on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$ on peut écrire $\ell - \epsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \ell + \epsilon$ et par conséquent:
$\ell - \epsilon < v_n < \ell + \epsilon$, i.e. $|v_n - \ell| < \epsilon$. Ce qui montre que la suite v est convergente de limite ℓ .

4.5. Remarque:

Soit une suite u , la définition de la convergence montre que u est convergente de limite ℓ si et seulement si $(|u_n - \ell|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle. Or cette dernière suite est bien évidemment minorée par la suite nulle, ce qui fournit déjà la moitié d'un squeeze. Pour montrer $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$, on cherchera donc en général à majorer $(|u_n - \ell|)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite convergeant encore vers 0 , ce qui fournira l'autre moitié du squeeze.

Jusqu'à maintenant, pour démontrer qu'une suite est convergente, il est indispensable d'avoir l'intuition de sa limite. Ce cas étant en fait assez rare, il est intéressant de disposer de critères intrinsèques de convergence. C'est le but des deux paragraphes suivants.

5. LE CAS DES SUITES MONOTONES

5.1. Théorèmes de convergences monotones:

Soit u *une suite réelle.*

(i) *Si* u *est croissante, alors* u *est convergente si et seulement si elle est majorée.*

(ii) *Si* u *est décroissante, alors* u *est convergente si et seulement si elle est minorée.*

(iii) *Si* u *est croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) alors* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = -\infty$ *).*

Preuve:

(i) On sait déjà depuis la proposition 2.6. que toute suite convergente est bornée. Il reste donc à démontrer que toute suite u croissante majorée est convergente. Soit M un majorant de la suite u . On a donc: $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n \leqslant M$. Par conséquent $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie (non vide!) de $\mathbb{R}$ majorée. D'après la propriété de la borne supérieure, elle admet une borne supérieure ℓ . Nous allons montrer que la suite u converge vers ℓ :

La caractérisation de la borne supérieure permet d'écrire:

$$\forall \epsilon > 0 \,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,,\ \ell - \epsilon < u_{n_0} \leqslant \ell$$

Mais, puisque la suite est croissante et majorée par ℓ , on en déduit:

$$\forall n \geqslant n_0 \,,\ u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \ell$$

C'est-à-dire: $\quad \forall \epsilon > 0 \,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,,\ \forall n \geqslant n_0 \,,\ \ell - \epsilon < u_n \leqslant \ell$

D'où

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \ell$$

(ii) Cette assertion se démontre de même à l'aide de la propriété de la borne inférieure. On peut également considérer la suite $-u$ qui est alors croissante et majorée si et seulement si u est minorée.

(iii) Supposons u croissante et non majorée. On a alors:

$$\forall A \in \mathbb{R} \,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,,\ u_{n_0} > A \ \text{(puisque } A \text{ n'est pas un majorant)}$$

et comme u est croissante: $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant u_{n_0} > A$.

On en déduit bien $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$.

Si u est décroissante et non minorée on conclut de même à l'aide de $-u$.

5.2. Exemple:

Considérons la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}$.

Pour tout $n > 0$ on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$.

Donc la suite u est décroissante (strictement). Cette suite étant manifestement minorée par 0 , on en déduit qu'elle est convergente. Une étude plus sophistiquée nous permettra plus tard de montrer que sa limite est $\operatorname{Log} 2$.

5.3. Définition:

On dit que deux suites u et v sont des suites **adjacentes** *si elles vérifient les trois conditions suivantes:*

(i) u *est une suite croissante*

(ii) v *est une suite décroissante*

(iii) $\lim\limits_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0$.

5.4. Propriété:

Soient u et v deux suites adjacentes, ces deux suites sont convergentes et admettent la même limite.

Preuve:

Supposons u croissante et v décroissante. Nous allons d'abord montrer que l'on a: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n$. En effet, raisonnons par contraposée et supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p > v_p$. On a alors par monotonie:

$$\forall n \geqslant p \,,\ u_n \geqslant u_p > v_p \geqslant v_n \,,\ \text{ d'où } v_n - u_n \geqslant v_p - u_p$$

ce qui contredit l'hypothèse $\lim\limits_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0$.

Par conséquent, on peut écrire: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

La suite u est croissante et majorée par v_0, elle converge donc vers un nombre ℓ. La suite v est décroissante et minorée par u_0, elle converge donc vers un nombre ℓ'. L'hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$ donne alors $\ell = \ell'$, ce qui achève la preuve.

Soient u et v deux suites vérifiant les conditions suivantes: u est une suite croissante, v est une suite décroissante, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors le même raisonnement montre que ces deux suites sont convergentes, et, pour démontrer qu'elles sont adjacentes, il suffit de démontrer que leurs limites sont égales.

(On remarquera que: $\forall n, p \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_p$, ce qui peut être utile parfois)

5.5. Exemples originaux:

(i) Considérons les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\ , \ v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Il est clair que la suite u est croissante (u_{n+1} est obtenu en ajoutant $\frac{1}{(n+1)!}$ à u_n) et que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n - u_n = \lim \frac{1}{n!} = 0$ (on a $n! \geqslant n$). Calculons alors $v_{n+1} - v_n$.

On a pour tout entier strictement positif n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0$$

Par conséquent la suite v est décroissante. Les suites u et v sont adjacentes, elles admettent donc la même limite. Nous verrons plus tard que cette limite vaut e (base des logarithmes népériens).

(ii) Soient a, b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$ et les suites u et v définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et les relations de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\ ,\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}\, v_n}$$

Ces relations permettent bien de calculer u_n et v_n pour tout entier n, puisque tous ces calculs se font dans $\mathbb{R}_+^*$.

Les hypothèses indiquent que l'on a $u_0 < v_0$. Effectuons l'hypothèse de récurrence $0 < u_n < v_n$. Alors u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n, par conséquent $u_n < u_{n+1} < v_n$. De même v_{n+1} est la moyenne géométrique de u_{n+1} et v_n, donc $u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

De l'hypothèse $u_n < v_n$ nous avons donc déduit $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$. Ceci prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus $u_0 < u_n < v_n < v_0$. Ces suites sont donc bornées et par conséquent convergentes. Notons ℓ la limite de la suite u et ℓ' celle de la suite v. De la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, on déduit alors des résultats concernant l'algèbre des limites, $\ell = \frac{\ell + \ell'}{2}$, i.e. $\ell = \ell'$. Ces deux suites sont donc bien adjacentes.

Nous allons maintenant utiliser cette notion de suites adjacentes pour découvrir deux propriétés très importantes du corps des nombres réels.

5.6. Le théorème des segments emboîtés:

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de segments (i.e. d'intervalles fermés bornés) de* $\mathbb{R}$ *vérifiant les deux conditions suivantes:*

(i) $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}\subset I_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$ *(où* $|I|$ *désigne la longueur du segment* I*).*

Alors il existe un unique point ξ *de* $\mathbb{R}$ *appartenant à tous les intervalles* I_n *. En d'autres termes:*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{\xi\}$$

Preuve:

Posons $I_n = [a_n, b_n]$. L'hypothèse (i) signifie que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. L'hypothèse (ii) peut s'écrire $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. Par conséquent les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Notons ξ leur limite commune.

(i) Par monotonie on a: $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$, ce qui montre bien que ξ appartient à tous les intervalles I_n .

(ii) Soit x un nombre réel appartenant à tous les I_n . On peut écrire: $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ et par prolongement des inégalités on en déduit $\xi \leqslant x \leqslant \xi$, i.e. $x = \xi$, ce qui achève la preuve.

5.7. Application: Théorème de Cantor:

$[0, 1]$ *est un ensemble non dénombrable.*

Nous avons déjà démontré ce théorème dans le cours d'algèbre (p.44), nous allons en donner ici une autre preuve utilisant le théorème des segments emboîtés.

Supposons que $[0, 1]$ soit dénombrable et soit r une bijection de $\mathbb{N}$ sur $[0, 1]$. Partageons $[0, 1]$ en trois segments égaux à l'aide des points $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. L'un au moins de ces segments ne contient pas le point $r(0)$, notons I_0 un tel segment. Partageons I_0 en trois segments égaux de la même façon. L'un au moins de ces trois nouveaux segments ne contient pas le point $r(1)$, notons I_1 un tel segment, etc...

On construit ainsi une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés dont la longueur tend bien vers zéro, puisque $|I_n| = \frac{1}{3^{n+1}}$. Soit ξ le point commun à tous ces intervalles. Comme $\xi\in[0, 1]$ il existe un entier i tel que $\xi = r(i)$ et ξ appartient en particulier à I_i . Or $r(i)$ n'appartenait justement pas à I_i !! ... La contradiction éclate.

5.8. Application: Le théorème de Bolzano-Weierstrass:

De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une suite convergente.

Preuve:

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. Notons m (resp. M) un minorant (resp. majorant) de cette suite et posons $I_0 = [m, M]$. Partageons I_0 en deux par son milieu. L'un au moins des deux segments ainsi définis contient une infinité de termes de la suite. Notons I_1 un tel segment et u_{n_1} un terme de la suite contenu dans I_1 . Partageons I_1 en deux par son milieu. L'un au moins des deux segments ainsi définis contient encore une infinité de termes de la suite. Notons I_2 un tel segment et u_{n_2} un terme de la suite contenu dans I_2 et tel que $n_2 > n_1$ (c'est possible puisque I_2 contient une infinité de termes, donc des termes de rang supérieur à n_1), etc... On construit ainsi une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers zéro et qui contiennent chacun une infinité de termes de la suite, on fabrique donc en même temps une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout in-ce k , $u_{n_k} \in I_k$. Il est clair, par encadrement, que la suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'unique point commun à tous les I_k . D'où la conclusion.

6. SUITES DE CAUCHY

6.1. Définition:

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels. On dit que* u *est une suite de* **Cauchy** *si l'on a:*

$$\forall \epsilon > 0 \,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,,\ \forall p, q \in \mathbb{N} \,,\ p \geqslant n_0 \text{ et } q \geqslant n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \epsilon$$

Notons la différence fondamentale entre suite convergente et suite de Cauchy: une suite est convergente si, à condition d'être assez patient, ses termes finissent par devenir aussi proches que l'on veut d'un nombre ℓ , tandis qu'une suite est de Cauchy si, dans les mêmes conditions, ses termes finissent par être aussi proches que l'on veut les uns des autres.

Mais nous allons démontrer maintenant que cette différence n'est qu'apparente!:

6.2. Théorème:

Toute suite réelle convergente est une suite de Cauchy.

Preuve:

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et notons ℓ sa limite. On peut écrire:

$$\forall \epsilon > 0 \,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,,\ \forall n \geqslant n_0 \,,\ |u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$$

Alors, pour tous p et q supérieurs ou égaux à n_0 on peut écrire:

$$|u_p - \ell| < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } |u_q - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$$

et l'inégalité triangulaire donne:

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) + (\ell - u_q)| \leqslant |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \epsilon$$

6.3. Théorème:

Toute suite de Cauchy de réels est convergente. On dit aussi: $\mathbb{R}$ *est* **complet**.

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons le lemme suivant:

6.4. Lemme:

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve du lemme:

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et choisissons par exemple $\epsilon = 1$. Il existe donc un rang n_0 tel que:

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \,,\ p \geqslant n_0 \text{ et } q \geqslant n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < 1$$

En particulier cette inégalité est vraie pour tout $p \geqslant n_0$ et pour $q = n_0$. On a donc:

$$\forall p \geqslant n_0 \,,\ |u_p - u_{n_0}| < 1 \,,\ \text{i.e. } u_{n_0} - 1 < u_p < u_{n_0} + 1$$

La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est donc bornée, puisque minorée par $u_{n_0} - 1$ et majorée par $u_{n_0} + 1$. Il en est de même de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les premiers termes pouvant influer sur les bornes supérieure et inférieure, mais pas sur le caractère borné de la suite. D'où le résultat.

Prouvons maintenant le théorème:

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On a donc, par définition:

$$\forall \epsilon>0\ ,\ \exists n_1\in\mathbb{N}\ ,\ \forall p\geqslant n_1\ ,\ \forall n\geqslant n_1\ ,\ |u_n-u_p|<\frac{\epsilon}{2}$$

D'après le lemme précédent, cette suite est bornée. On peut donc en extraire une suite convergente (théorème 5.8. de Bolzano-Weierstrass), notons ℓ la limite de cette suite extraite. Il existe un indice p supérieur ou égal à n_1 tel que u_p soit un terme de cette suite extraite vérifiant $|u_p-\ell|<\frac{\epsilon}{2}$ (puisque cette suite extraite converge vers ℓ et contient une infinité de termes!). On peut alors écrire pour cet indice p :

$$\forall n\geqslant n_1\ ,\ |u_n-\ell| = |(u_n-u_p)+(u_p-\ell)| \leqslant |u_n-u_p|+|u_p-\ell|<\epsilon$$

Ce qui montre bien que $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell$.

6.5. Remarque:

Il est indispensable de préciser dans le théorème 6.3. qu'il s'agit de suites de nombres réels. Cette propriété n'est plus vraie dans $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{Q})$. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la suite des approximations décimales par excès (ou par défaut) du nombre irrationnel $\sqrt{2}$ ou π ou e ou ... . Ces suites sont bien des suites de Cauchy de rationnels qui ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$. Cette remarque est d'ailleurs l'amorce d'une des constructions possible de $\mathbb{R}$ à l'aide de suites de Cauchy de nombres rationnels.

7. SUITES COMPLEXES

7.1. Définitions:

(i) *On appelle* **suite complexe** *toute application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{C}$.

(ii) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe. On dit que cette suite est* **convergente** *de limite* ℓ *si:*

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}^*_+\ ,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ ,\ \forall n\geqslant n_0\ \ |u_n-\ell|<\epsilon$$

où $|z|$ *désigne le module du nombre complexe* z .

(iii) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe. On dit que cette suite est de Cauchy si:*

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}^*_+\ ,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ ,\ \forall p,q\in\mathbb{N}\ ,\ p\geqslant n_0, q\geqslant n_0\ \Rightarrow\ |u_p-u_q|<\epsilon$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, on peut écrire, pour tout n , u_n sous forme algébrique: $u_n=a_n+ib_n$, ce qui définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels.

. Si $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell$, on peut également écrire $\ell=a+ib$, avec $a,b\in\mathbb{R}$ et on a $|u_n-\ell| = |(a_n-a)+i(b_n-b)| = \sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}$, d'où l'on déduit facilement $|a_n-a|\leqslant|u_n-\ell|$ et $|b_n-b|\leqslant|u_n-\ell|$. Il vient alors par encadrement $\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$ et $\lim_{n\to\infty}|b_n-b|=0$. i.e. $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ et $\lim_{n\to\infty} b_n=b$.

. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limites respectives a et b , posons $\ell=a+ib$. On a également $|u_n-\ell|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|$ et il vient de même par encadrement $\lim_{n\to\infty}|u_n-\ell|=0$, i.e. $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell$.

D'où la propriété suivante:

chapitre 3

séries

1. NOTIONS GÉNÉRALES

1.1. Définitions:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels ou complexes. On appelle* **série de terme général** u_n *, la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers le nombre* ℓ *, on note* $\ell = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *ou encore* $\ell = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ *et on dit alors que la série de terme général* u_n *est* **convergente** *de* **somme** ℓ *. Dans tous les autres cas (i.e. si* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite, ou une limite infinie) on dit que la série est* **divergente**.

1.2. Premiers exemples:

(i) Considérons la série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$, pour $n\in\mathbb{N}$. On a:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ U_n = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ \ldots\ +\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2-\frac{1}{2^n}$$

(somme des termes d'une progression géométrique)

Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$, ce que nous écrivons d'après la définition précédente:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2$$

Ou encore, en mettant de côté le terme correspondant à $k=0$:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \ldots$$

Ne pas oublier ... !!!

Ce résultat est apparu très mystérieux aux anciens qui appréhendaient peu les notions d'infini et de limite. (Voir Achille et sa tortue, Zenon et sa flèche).

(ii) Considérons la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Il n'est pas possible d'obtenir dans ce cas une expression condensée simple de U_n (ou, tout au moins, personne n'y est jamais parvenu!). Mais on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Cette écriture est constituée de n termes tous au moins égaux à $\frac{1}{2n}$. Par conséquent, $U_{2n} - U_n \geqslant \frac{1}{2}$. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut donc pas être convergente, puisque si l'on avait $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \ell$ on aurait alors $\lim\limits_{n \to \infty} (U_{2n} - U_n) = 0$. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant clairement une suite croissante, on a donc $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = +\infty$. Ce que nous écrivons $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. La série donnée est donc divergente, on l'appelle la série harmonique.

(iii) Considérons la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Il est facile de voir que l'on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (décomposition de la fraction rationnelle associée). Ceci permet d'écrire:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

puisque pour tous les termes, à part les deux extrêmes, se détruisent.

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = 1$, i.e. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

(iv) Considérons la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Laissons nous guider par l'exemple précédent et décomposons la fraction rationnelle associée, on trouve alors:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$$

Si on calcule $U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, on s'aperçoit alors que les termes se détruisent trois par trois, à part trois termes au début et trois termes à la fin. Mais on peut faire encore mieux en écrivant:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

Ce qui permet d'appliquer le principe des dominos précédent et donne:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \frac{1}{4}$, i.e. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$

Plus généralement, si l'on écrit $\frac{p}{k(k+1)\dots(k+p)} = \frac{(p+k)-k}{k(k+1)\dots(k+p)}$, on voit que:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{p}{k(k+1)\dots(k+p)} = \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)\dots(k+p)}.$$

et par des dominos évidents, il s'en déduit:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{p}{k(k+1)\dots(k+p)} = \frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)}$$

et par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)} = \frac{1}{p \cdot p!})$$

1.3. Remarques:

(i) La notion de série n'est donc pas une notion nouvelle! Il s'agit simplement de suites d'un type a priori un peu particulier, à savoir des suites dont le terme général s'obtient par accumulation de termes d'une autre suite. Bien entendu, si l'écriture de U_n est compressible (exemples 1.2.(i), (iii), (iv)) il est relativement facile d'étudier directement la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ce cas est sympathique et important pour la théorie, mais malheureusement assez rare. Le but de ce chapitre va donc être de dégager quelques méthodes permettant de déterminer le comportement de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de l'étude du comportement du terme général u_n.

(ii) Réciproquement, soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de nombres réels ou complexes et considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = U_0 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*, \; u_n = U_n - U_{n-1}$$

On a:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \; U_n = U_0 + (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \dots + (U_n - U_{n-1}) = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

L'étude de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc autre que l'étude de la série de terme général $u_n = U_n - U_{n-1}$. Ainsi, a posteriori, toute suite est une série et réciproquement.

(iii) Il faut que le lecteur se persuade dès maintenant que nous sortons du domaine de l'algèbre, bien que nous utilisions encore le symbole Σ. En effet on ne sait faire, dans un cadre algébrique, que la somme d'un nombre fini d'éléments. Pour définir la somme d'une infinité (dénombrable) de termes, il est indispensable de disposer d'un cadre topologique qui permet un passage à la limite.

Mais attention: **en sortant du cadre algébrique, on perd en même temps les propriétés algébriques classiques des sommations.**

En effet, considérons deux séries de termes généraux u_n et v_n qui ne diffèrent que par l'ordre des termes. C'est-à-dire qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que l'on ait: $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{\sigma(n)} = v_n$. *Alors il se peut que ces deux séries soient de natures différentes* (i.e. l'une converge et l'autre pas), et même si elles sont toutes deux convergentes elles peuvent ne pas avoir la même somme!

Nous savons qu'il s'agit là d'un problème extrêmement délicat, aussi, sans entrer dans les détails, nous insistons simplement sur le fait qu'il n'est pas possible (au niveau de ce cours) de définir la somme d'une famille dénombrable de nombres réels, mais qu'il est indispensable que la numérotation de ces nombres soit donnée par l'énoncé, afin d'avoir affaire à une série. Cette remarque est extrêmement importante en probabilités.

(*) Regardez par exemple ce qui se passe avec la famille suivante, cet exemple étant dû au mathématicien Caratheodory:

Considérons la famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in \mathbb{N}^2}$ définie par:

si $n>m$, $u_{n,m}=(\frac{1}{2})^{n-m}$; si $n=m$, $u_{n,m}=0$; si $n<m$, $u_{n,m}=-(\frac{1}{2})^{m-n}$

Nous pouvons représenter cette famille par le tableau à double entrée suivant:

$m \backslash n$	0	1	2	3	...
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...
1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...
2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	...
3	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	...
⋮		----			

Cette famille contient bien une infinité dénombrable de termes, puisque $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (cf. cours d'algèbre p.43).

La somme des termes de la première ligne de ce tableau vaut 1 (cf. exemple 1.2.(ii)). Celle des termes de la seconde ligne vaut donc $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$, celle des termes de la troisième ligne $-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}$, ... La somme des sommes par lignes vaut donc $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=2$.

La somme des termes de la première colonne de ce tableau vaut -1. Celle des termes de la seconde colonne vaut $\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$, celle des termes de la troisième colonne $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{4}$, ... La somme des sommes par colonnes vaut donc $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots=-2$.

La somme des termes de la première diagonale vaut 0, celle des termes de la seconde diagonale vaut 0, ... Par conséquent la somme des sommes par diagonales vaut 0.

Très curieux n'est-ce-pas?! Ainsi donc cher lecteur, beaucoup de prudence et surtout ne vous écartez pas de la notion de série sans y être formellement invité.

1.4. Remarque:

Si $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et si on pose $a_n=\mathrm{Re}\,(u_n)$, $b_n=\mathrm{Im}\,(u_n)$ on a $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n=a_n+i\,b_n$, et par conséquent $U_n=\sum_{k=0}^{n} u_k=(\sum_{k=0}^{n} a_k)+i(\sum_{k=0}^{n} b_k)$.

Ainsi $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et on a alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k=(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)+i(\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$. Ceci ramène donc l'étude des séries à termes complexes à l'étude des séries à termes réels, c'est donc le seul cas que nous envisagerons désormais.

1.5. Proposition:

Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n *et* v_n . *Si ces termes ne diffèrent que pour un nombre fini d'indices, alors les deux séries sont de même nature (i.e. elles sont toutes deux convergentes, ou toutes deux divergentes).*

Preuve:

Puisqu'il n'existe qu'un nombre fini d'indices p tels que $u_p \neq v_p$, il existe un rang n_0 tel que: $\forall n > n_0$, $u_n = v_n$. Par conséquent, on a:

$$\forall n > n_0 \ , \ U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n = U_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n$$
$$V_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n_0} + v_{n_0+1} + \dots + v_n = V_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n$$

C'est-à-dire:

$$\forall n > n_0 \ , \ U_n - V_n = U_{n_0} - V_{n_0}$$

Ce que l'on peut encore écrire $U_n = V_n + (U_{n_0} - V_{n_0})$ ou $V_n = U_n + (V_{n_0} - U_{n_0})$, ce qui montre bien que les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont simultanément convergentes ou divergentes.

Cette proposition est importante car elle montre que la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, mais uniquement de ce qui se passe au voisinage de l'infini. En particulier, tous les critères de convergence ou de divergence que nous démontrerons seront valables si la série considérée vérifie les conditions imposées «à partir d'un certain rang».

1.6. Théorème: Séries et algèbre:

Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n *et* v_n *convergentes, de sommes* U *et* V , *soit* λ *un nombre réel quelconque. Alors la série de terme général* $u_n + v_n$ *est convergente de somme* $U + V$ *et la série de terme général* λu_n *est convergente de somme* λU .

Preuve:

Elle est très simple, en revenant aux définitions:

(i) Posons $w_n = u_n + v_n$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$. On a:

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k \quad \text{(puisqu'il s'agit de sommes finies)}$$

Soit, avec des notations évidentes, $W_n = U_n + V_n$. La suite W_n est donc bien convergente de somme $U + V$.

(ii) On a de même $\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \, . \sum_{k=0}^{n} u_k$, et il suffit de passer à la limite.

1.7. Théorème:

Si une série de terme général u_n *est convergente, alors on a nécessairement* $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.
L'exemple 1.2.(ii) montre que cette condition n'est pas suffisante pour affirmer la convergence d'une série.

Preuve:

Soit $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. La série étant supposée convergente, nous savons qu'il existe U , tel que $\lim_{n \to \infty} U_n = U$. Par conséquent $\lim_{n \to \infty} U_{n-1} = U$, et comme on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = U_n - U_{n-1}$, cela démontre bien que l'on a $\lim_{n \to \infty} u_n = U - U = 0$.

L'exemple 1.2.(ii) de la série harmonique montre que le terme général d'une série peut tendre vers 0 , sans que la série soit convergente. Là aussi il convient de faire attention, car dire que l'on ajoute des termes de plus en plus petits ne prouve rien, puisque l'on en ajoute de plus en plus! Dans un tel cas, méfiez-vous de vos machines à calculer, car tout nombre inférieur à la capacité minimale de la machine sera arrondi à 0 , détruisant ainsi le processus de divergence d'une telle série.

Nous venons enfin d'obtenir le premier critère d'étude d'une série, mais malheureusement il s'agit d'un critère bien pauvre:

1.7.bis. Proposition:

Si le terme général d'une série ne tend pas vers 0 , *alors la série considérée est divergente. On dit dans ce cas qu'elle est* **trivialement divergente**.

N'oublions pas, qu'étudier la série de terme général u_n , c'est étudier la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le chapitre précédent ayant été consacré à l'étude des critères de convergence de suites nous allons donc maintenant les réécrire et les traduire dans ce cadre particulier.

Rappelons tout d'abord le critère le plus général, à savoir le critère de Cauchy:

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si:

$$\forall \epsilon>0\,,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ ,\ \forall p,q\in\mathbb{N}\ ,\ p>q>n_0 \Rightarrow |U_p-U_q|<\epsilon$$

Soit, en revenant au terme général de la série:

1.8. Théorème de Cauchy:

La série de terme général u_n *est convergente si et seulement si:*

$$\forall \epsilon>0\,,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\,,\ \forall p,q\in\mathbb{N}\ ,\ p>q>n_0 \Rightarrow |u_{q+1}+u_{q+2}+\ldots+u_p|<\epsilon$$

Pour démontrer qu'une série est convergente, il pourra donc être commode (mais ce n'est pas indispensable!) de remarquer que l'on a $|u_{q+1}+\ldots+u_p| \leqslant |u_{q+1}|+\ldots+|u_p|$ et on cherchera alors à majorer cette dernière expression. Nous voyons déjà que les séries dont le terme général est positif doivent jouer un rôle particulier, qui conduit à la notion de convergence absolue. Mais il y a mieux encore:

En effet, le critère le plus important de convergence de suites est certainement celui de la convergence monotone. Comme $u_n = U_n - U_{n-1}$, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si et seulement si le terme général de la série considérée a un signe fixe, par exemple positif.

Deux bonnes raisons d'étudier maintenant les séries dont le terme général est positif. Le lecteur futé prendra $\lambda=-1$ dans le théorème 1.6. au cas où il rencontrerait un jour une série dont le terme général serait négatif!

2. SÉRIES A TERMES POSITIFS

Soit une série de terme général u_n , positif à partir d'un certain rang n_0 . Compte tenu de la proposition 1.5. nous supposerons dans cette étude que l'on a $n_0 = 0$.

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite croissante. Par conséquent, la série donnée est convergente si et seulement si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Dans le cas contraire on a $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty$.

2.1. La règle de comparaison:

Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n *et* v_n *positifs et tels que:* $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n \leqslant v_n$. *Alors:*

(i) Si v_n *est le terme général d'une série convergente, il en est de même de* u_n .

(ii) Si u_n *est le terme général d'une série divergente, il en est de même de* v_n .

Preuve:

Posons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Si la série de terme général v_n est convergente, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n \leqslant V_n$, il en est de même de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc la série de terme général u_n est également convergente. L'assertion (ii) n'est autre que la contraposée de (i).

Bien entendu, la conclusion subsiste si l'on a $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_0 . Cette règle permet enfin de trouver de nouvelles séries convergentes. Par exemple, remarquons que pour $n \geqslant 2$, on a: $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$. Une étude analogue à celle faite en 1.2.(iii) montre que la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ (pour $n \geqslant 2$) est convergente de somme 1 . Par conséquent, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente de somme inférieure à 2 . (Nous démontrerons à la fin de ce livre que la somme de cette série est égale à $\frac{\pi^2}{6}$) . On en déduit alors que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \geqslant 2$ est également convergente, mais nous verrons que l'on peut faire mieux encore.

2.2. Corollaire (comparaison logarithmique):

Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n *et* v_n *strictement positifs et tels que:*

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. *Alors:*

(i) Si v_n *est le terme général d'une série convergente, il en est de même de* u_n .

(ii) Si u_n *est le terme général d'une série divergente, il en est de même de* v_n .

Preuve:

La relation peut s'écrire $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}$, puisque les nombres écrits sont strictement positifs. Une récurrence bénigne donne alors $\frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_0}{v_0}$. C'est-à-dire $u_n \leqslant \frac{u_0}{v_0} \cdot v_n$ et le résultat découle du théorème 2.1. et du résultat 1.6.

2.3. Critère intégral de Cauchy:

Soit f *une fonction définie, positive, décroissante et continue sur l'intervalle* $[1,+\infty]$. *Posons :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(n)$, *alors la série de terme général* u_n *est convergente, si et seulement si l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *est convergente.*

Preuve:

Nous utiliserons ici des notions de calcul intégral qui seront démontrées au chapitre 17.

Puisque f est décroissante on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [n, n+1]\ ,\ u_{n+1} \leqslant f(x) \leqslant u_n$$

et en intégrant de n à n+1, ce qui est licite puisque la fonction est continue :

$$u_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant u_n$$

La relation de Chasles donne alors:

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k$$

C'est-à-dire:
$$U_{n+1} - u_1 \leqslant \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant U_n$$

1er cas:

L'intégrale $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ est convergente. Alors puisque la fonction à intégrer est positive, on en déduit:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} \leqslant u_1 + \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant u_1 + \int_1^{\infty} f(t)\,dt$$

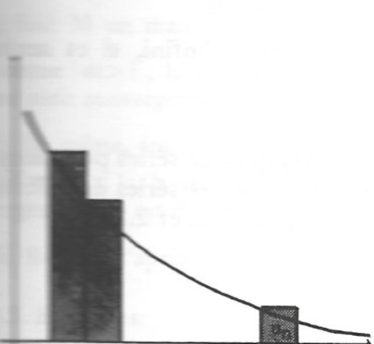
La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est croissante est donc majorée, par conséquent elle est convergente, i.e. la série de terme général f(n) est convergente.

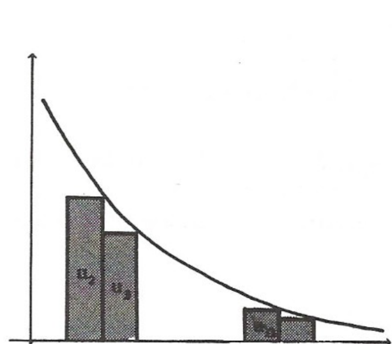
2ème cas:

La série de terme général f(n) est convergente. Alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un nombre M. On en déduit:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant M$$

Alors $F(x) = \int_1^{x} f(t)\,dt$ est une fonction croissante de x , toujours parce que f est positive, majorée par M . (Pour s'en rendre compte, il suffit de prendre $n = E(x) + 1$) . Par conséquent, F(x) admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, i.e. l'intégrale $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ est convergente.





2.4. Corollaire: Séries de Riemann:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ *, la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $(n \geqslant 1)$ *est convergente si et seulement si on a* $\alpha > 1$.

Preuve:

Si $\alpha < 0$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$, si $\alpha = 0$, on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1$. Par conséquent, la série est trivialement divergente dans ces deux cas, d'après la proposition 1.7.bis. Il suffit donc de considérer le cas $\alpha > 0$.

Considérons alors pour $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$. f_α est décroissante sur $[1, +\infty[$ et positive. En effet, f_α est dérivable sur cet intervalle et $f'_\alpha(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$. On peut donc appliquer le critère intégral de Cauchy:

$$\text{Or } \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \operatorname{Log} x \text{ si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Par conséquent } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha \leqslant 1, \\ \frac{1}{\alpha - 1} \text{ si } \alpha > 1. \end{cases}$$

et la conclusion en résulte

2.5. Séries géométriques:

Soit $q \in \mathbb{R}$, *la série de terme général* $u_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$, *est convergente si et seulement si* $|q| < 1$ *et dans ce cas on a:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

On dit que cette série est la série géométrique de raison q .

Preuve:

Si $q = 1$, le terme général de la série ne tend pas vers zéro, et donc la série est trivialement divergente. Supposons donc $q \neq 1$, on a alors:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;,\; U_n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Par conséquent U_n a une limite finie lorsque n tend vers l'infini, si et seulement si $|q| < 1$. Cette limite valant alors $\frac{1}{1-q}$.

Les résultats 2.4. et 2.5. (pour $q \geqslant 0$) fournissent des exemples de séries pour lesquelles on connaît, en fonction des paramètres, la nature. Ce sont donc des séries de référence commodes auxquelles nous allons appliquer sans tarder les critères 2.1. et 2.2.

3. LES REGLES DE COMPARAISON

3.1. Lemme:

Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n *et* v_n *strictement positifs. S'il existe deux nombres positifs* m *et* M *tels que:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 < m \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant M$$

Alors les deux séries données sont de même nature.

En particulier si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite finie non nulle, les deux séries sont de même nature. Par exemple si* $u_n \sim v_n$ *alors les deux séries sont de même nature (règle d'équivalence).*

Preuve:

La première assertion est claire puisque l'on a alors $m\,v_n \leqslant u_n \leqslant M\,v_n$ et il suffit d'appliquer les résultats 2.1. et 1.6.

Si on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$, avec $\ell > 0$, on peut écrire:

$$(\text{pour } \epsilon = \frac{\ell}{2})\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \geqslant n_0\ ,\ \left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| \leqslant \frac{\ell}{2},\ \text{i.e. } \frac{\ell}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3\ell}{2}\ .$$

On peut alors appliquer le résultat précédent à partir du rang n_0. La nature d'une série ne dépendant pas de ses premiers termes, le résultat en découle.

3.2. La règle de (Georg Friedrich Bernhard) Riemann:

Soit une série de terme général u_n *positif.*

(i) *S'il existe* α *réel,* $\alpha > 1$, *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit majorée, alors la série de terme général* u_n *est convergente.*

(ii) *S'il existe* α *réel,* $\alpha \leqslant 1$, *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit minorée par un nombre strictement positif, alors la série de terme général* u_n *est divergente.*

(iii) *En particulier, s'il existe* α *réel, tel que* $n^\alpha u_n$ *ait une limite finie non nulle lorsque* n *tend vers l'infini, la série de terme général* u_n *est divergente pour* $\alpha \leqslant 1$ *et convergente pour* $\alpha > 1$.

Preuve:

(i) Soit M un majorant de la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut donc écrire: $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \leqslant \frac{M}{n^\alpha}$.
Comme $\alpha > 1$, la série de terme général u_n est une série à termes positifs majorée par une série convergente, elle est donc elle-même convergente.

(ii) De même, soit m un minorant de la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme m est strictement positif et $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général u_n est minorée par une série à termes positifs divergente, elle est donc elle-même divergente.

(iii) Évident d'après le lemme 3.1.

3.3. Exemples:

(i) Considérons la série de terme général $u_n = \frac{\operatorname{Log} n}{n^2}$, pour $n > 0$.

On peut écrire $n^{\frac{3}{2}} u_n = \frac{\operatorname{Log} n}{\sqrt{n}} = 2\,\frac{\operatorname{Log}\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$. Et les limites classiques donnent $\lim n^{\frac{3}{2}} u_n = 0$. La règle 3.2.(i) conduit à la convergence de la série donnée...

(ii) Considérons la série de terme général $u_n = \dfrac{n+1}{n^3 + \text{Log } n}$, pour $n > 0$.

On peut écrire $u_n = \dfrac{n(1+\frac{1}{n})}{n^3(1+\frac{\text{Log } n}{n^3})}$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\text{Log } n}{n^3} = 0$, on en déduit

$u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ et par suite la série donnée est convergente.

(iii) Considérons la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \text{ Log } n}$, pour $n \geqslant 2$. Dans ce cas, il n'est pas possible de trouver α permettant de donner la nature de cette série. La règle de Riemann n'est donc pas universelle!

3.4. La règle de (Jean Baptiste le Rond de) d'Alembert:

Soit une série de terme général u_n *strictement positif.*

(i) *S'il existe* q *réel,* $q < 1$ *tel que:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$, *la série de terme général* u_n *est convergente.*

(ii) *S'il existe* q *réel,* $q \geqslant 1$ *tel que:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$, *la série de terme général* u_n *est divergente (d'ailleurs trivialement).*

(iii) *En particulier, si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *a une limite* $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *lorsque* n *tend vers l'infini, on a:*

a) si $\ell < 1$, *la série de terme général* u_n *est convergente.*
b) si $\ell > 1$, *la série de terme général* u_n *est divergente.*
c) si $\ell = 1$, *on ne peut rien conclure, sauf dans le cas où pour* n *assez grand* $u_{n+1} \geqslant u_n$, *auquel cas la série est trivialement divergente.*

Preuve:
Considérons la série de terme général $v_n = q^n$. On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$. Alors dans le cas de l'assertion (i) la série de terme général v_n est convergente et la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, permet de conclure à la convergence de la série de terme général u_n. Dans le cas de l'assertion (ii) la série de terme général v_n est divergente et la relation $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ permet encore de conclure.

Pour ce qui concerne l'assertion (iii):
a) Si $\ell < 1$, soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $\ell < q < 1$. Pour n assez grand on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$, on peut alors appliquer le résultat (i) sachant que la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

b) Si $\ell > 1$, soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leqslant q < \ell$. Pour n assez grand on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$, et on peut alors appliquer le résultat (ii). On peut d'ailleurs choisir $q = 1$, ce qui démontre en particulier l'affirmation contenue dans c) et prouve que la divergence est triviale.

c) Considérons une série de Riemann définie par $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. On a alors:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1$. Ce qui prouve que pour $\ell = 1$ il peut y avoir convergence de la série donnée $(\alpha > 1)$ ou divergence de cette série $(\alpha \leqslant 1)$.

Ce qui montre également que la règle de d'Alembert n'est pas universelle (d'autant plus qu'il existe des séries convergentes et des séries divergentes pour lesquelles $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite).

3.5. Exemples:

Le critère (ou la règle) de d'Alembert est bien adapté pour le cas où u_n s'exprime à l'aide de produits et en particulier pour le cas où u_n contient des factorielles.

(i) Considérons la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ et la série donnée est convergente. En particulier son terme général tend vers zéro, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et considérons la série de terme général $u_n = \frac{1}{x^n + \frac{1}{x^n}}$. Cette série est bien à termes strictement positifs et un calcul simple donne:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{2n+1} + x}{x^{2n+2} + 1}$$

Distinguons alors trois cas:

. si $x < 1$. On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x < 1$ et la série donnée est convergente.

. si $x > 1$. On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{x} < 1$ et la série est encore convergente.

. si $x = 1$. On a $u_n = \frac{1}{2}$ et la série est trivialement divergente.

(iii) Considérons la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$, pour $n > 0$. On a alors

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$. Or on a classiquement

$\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$ (par exemple en considérant les logarithmes), par conséquent

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$ et la série donnée est convergente. En particulier on en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\ .$$

3.6. La règle de (Augustin Louis) Cauchy:

Soit une série de terme général u_n *positif.*

(i) S'il existe q *réel,* $q < 1$ *tel que:* $\forall n \in \mathbb{N}\ , \sqrt[n]{u_n} \leqslant q$, *la série de terme général* u_n *est convergente.*

(ii) S'il existe q *réel,* $q \geqslant 1$ *tel que:* $\forall n \in \mathbb{N}\ , \sqrt[n]{u_n} \geqslant q$, *la série de terme général* u_n *est divergente (d'ailleurs trivialement).*

(iii) En particulier, si $\sqrt[n]{u_n}$ *a une limite* $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *lorsque* n *tend vers l'infini, on a:*

a) si $\ell < 1$, *la série de terme général* u_n *est convergente.*

b) si $\ell > 1$, *la série de terme général* u_n *est divergente.*

c) si $\ell = 1$, *on ne peut rien conclure, sauf dans le cas où pour* n *assez grand* $u_n \geqslant 1$, *auquel cas la série est trivialement divergente.*

Preuve:

Les assertions (i) et (ii) sont évidentes puisque, par croissance de la fonction puissance, $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q \iff u_n \leqslant q^n$ (resp. $\sqrt[n]{u_n} \geqslant q \iff u_n \geqslant q^n$). On compare donc la série donnée à une série géométrique. D'où les résultats.

La preuve de (iii) se fait comme en 3.4. en distinguant les trois cas suivants:

a) Si $\ell < 1$, soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $\ell < q < 1$. Pour n assez grand on a $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$ et on peut appliquer (i) puisque la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

b) Si $\ell > 1$, soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leqslant q < \ell$. ($q = 1$ suffit). Pour n assez grand on a $\sqrt[n]{u_n} \geqslant q$, i.e. $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$ ou encore $u_n \geqslant 1$ et la divergence de la série est triviale.

c) Considérons encore une série de Riemann, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. On a alors $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha}$. Or $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log} n} = e^0 = 1$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$. Ceci prouve que pour $\ell = 1$, il peut y avoir convergence ($\alpha > 1$) ou divergence ($\alpha \leqslant 1$). La règle de Cauchy n'est pas non plus universelle (d'autant que $\sqrt[n]{u_n}$ peut ne pas avoir de limite).

3.7. Exemples:

Le critère (ou la règle) de Cauchy est bien adapté pour l'étude des séries dont le terme général contient des puissances, mais pas de factorielles!

(i) Soit $k \in \mathbb{R}$ et considérons la série de terme général $u_n = \frac{n^k}{2^n}$. On a:

$\sqrt[n]{u_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{2}$. Or nous avons vu que l'on a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ et la série donnée est convergente.

(ii) Considérons la série de terme général $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a:

$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. On en déduit, comme nous avons déjà eu l'honneur de le faire remarquer, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{e} < 1$ et la série donnée est convergente.

(iii) Considérons la série de terme général $u_n = \frac{n^{\operatorname{Log} n}}{(\operatorname{Log} n)^n}$, pour $n > 1$. On a:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{n^{\frac{\operatorname{Log} n}{n}}}{\operatorname{Log} n} = \frac{e^{\frac{(\operatorname{Log} n)^2}{n}}}{\operatorname{Log} n}.$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\sqrt{n}} = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{(\operatorname{Log} n)^2}{n}} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$ et la série donnée est convergente.

3.8. Proposition:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Alors si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite ℓ quand n tend vers l'infini, $\sqrt[n]{u_n}$ admet la même limite ℓ quand n tend vers l'infini.

Preuve 1:

Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et supposons tout d'abord $\ell > 0$. Pour tout ϵ strictement positif et plus petit que 2ℓ, on peut trouver un rang n_0 tel que:

$$\forall n \geqslant n_0 ,\ \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ i.e. } \ell - \frac{\epsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\epsilon}{2}$$

Une induction bénigne donne alors:

$$\forall n \geqslant n_0 \,,\; \left(\ell - \frac{\epsilon}{2}\right)^{n-n_0} < \frac{u_n}{u_{n_0}} < \left(\ell + \frac{\epsilon}{2}\right)^{n-n_0}$$

Ce qui peut s'écrire:

$$u_{n_0} \left(\ell - \frac{\epsilon}{2}\right)^{n-n_0} < u_n < u_{n_0} \left(\ell + \frac{\epsilon}{2}\right)^{n-n_0}$$

Et d'après la croissance de la fonction puissance:

$$\forall n \geqslant n_0 \,,\; (u_{n_0})^{\frac{1}{n}} \left(\ell - \frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{n-n_0}{n}} < \sqrt[n]{u_n} < (u_{n_0})^{\frac{1}{n}} \left(\ell + \frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{n-n_0}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-n_0}{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, par continuité de la fonction exponentielle on en déduit: $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n_0})^{\frac{1}{n}} \left(\ell + \frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{n-n_0}{n}} = \ell + \frac{\epsilon}{2}$.

Par conséquent, on peut trouver un rang n_1 tel que pour n supérieur ou égal à n_1 on ait $(u_{n_0})^{\frac{1}{n}} \left(\ell + \frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{n-n_0}{n}} < \ell + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$.

On procède de la même façon pour l'autre expression encadrant $\sqrt[n]{u_n}$, et on en déduit que pour n assez grand, $\ell - \epsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \epsilon$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Dans le cas $\ell = 0$, on procède de la même façon en ne tenant compte que de la majoration de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour obtenir la majoration correspondante de $\sqrt[n]{u_n}$.

Preuve 2:

Supposons encore que l'on a $\ell > 0$ et posons $u'_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

Par continuité de la fonction logarithme au point ℓ on a: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ln(\ell)$, et d'après le théorème de Cesaro (chap. 2, exercice 2.11), on en déduit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u'_0 + u'_1 + \dots + u'_{n-1}}{n} = \ln(\ell)$$

Mais $\frac{u'_0 + \dots + u'_{n-1}}{n} = \frac{\ln(u_n) - \ln(u_0)}{n}$ (toujours les dominos!) et par conséquent:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{u_n}) = \ln(\ell)$$

Par continuité de la fonction exponentielle on retrouve donc:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell .$$

Ce raisonnement s'adapte au cas où $\ell = 0$, puisque le théorème de Cesaro s'applique encore au cas d'une limite infinie.

3.9. Moralité:

Si la règle de d'Alembert conduit au cas douteux $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, *il est inutile d'envisager d'essayer d'utiliser la règle de Cauchy car elle conduit nécessairement au cas douteux* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$.

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant:

Soient a, b deux nombres réels tels que $a > 1, 0 < b < 1$ avec $ab < 1$ et considérons la série de terme général u_n défini par:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ , \ u_{2k} = a^{k+1} b^k \ , \ u_{2k+1} = a^{k+1} b^{k+1}$$

Il est facile de voir que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite lorsque n tend vers l'infini, puisque cette expression prend alternativement les valeurs a et b. Par contre, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab} < 1$. Par conséquent, la règle de d'Alembert ne peut pas s'appliquer, tandis que celle de Cauchy permet de conclure à la convergence de cette série. La règle de Cauchy paraît donc être une règle un peu plus puissante que celle de d'Alembert (mais pour des cas relativement artificiels), en revanche elle est souvent d'un emploi moins commode...

4. QUELQUES NOTIONS SUR LES SÉRIES A TERMES QUELCONQUES

4.1. Sommations par paquets:

Considérons une série de terme général u_n de signe quelconque et supposons qu'elle ne soit pas trivialement divergente, c'est-à-dire supposons que l'on ait $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

Posons: $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ U_n = u_1 + \ldots + u_n$$

Regroupons dans l'expression de U_n les termes consécutifs k par k ($k \in \mathbb{N}^*$!!!). Il peut se faire que le dernier regroupement soit incomplet, car n n'est pas nécessairement un multiple de k.

Effectuons donc la division de n par k : il existe un couple unique d'entiers q et r, qui dépendent de n, tels que $n = kq + r$ avec $0 \leqslant r < k$, ce qui permet d'écrire:

$$U_n = (u_1 + \ldots + u_k) + (u_{k+1} + \ldots + u_{2k}) + \ldots + (u_{(q-1)k+1} + \ldots + u_{qk}) + (u_{qk+1} + \ldots + u_{qk+r})$$

Posons alors, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $v_i = u_{(i-1)k+1} + \ldots + u_{ik}$, on a:

$$U_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_q + (u_{qk+1} + \ldots + u_{qk+r})$$

Remarquons que l'on a $q = E\left(\frac{n}{k}\right)$ et par conséquent $\lim_{n \to \infty} q = +\infty$. Le dernier regroupement est constitué au maximum de $(k-1)$ termes, dont les indices dépassent $n-k$, et a donc pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $v_1 + v_2 + \ldots + v_q$ a une limite lorsque q tend vers l'infini et ces limites sont alors égales. Soit:

Sous les conditions et avec les notations précédentes la série de terme général u_n *est convergente si et seulement si la série de terme général* v_q *est convergente et les deux séries ont alors même somme.*

L'exemple de la série de terme général $u_n = (-1)^n$ montre que l'hypothèse $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ est fondamentale, puisque la série donnée est trivialement divergente, alors que la série de terme général $(u_{2p-1} + u_{2p})$ est trivialement convergente.

4.2. Exemple: La série harmonique alternée:

Considérons la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n > 0$. Son terme général tend bien vers zéro et on peut écrire:

$$U_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p}\right) + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Le dernier terme étant ou non isolé suivant la parité de n . La série de terme général u_n est donc de même nature (et de même somme en cas de convergence) que la série de terme général $v_p = \dfrac{1}{2p-1} - \dfrac{1}{2p}$.

Mais on peut écrire $v_p = \dfrac{1}{2p-1} - \dfrac{1}{2p} = \dfrac{1}{2p(2p-1)}$. Ainsi la série de terme général v_p est une série à termes positifs, dont le terme général est équivalent au voisinage de l'infini à $\dfrac{1}{4p^2}$. Le critère de Riemann permet alors de conclure à la convergence de la série de terme général v_p , i.e. à la convergence de la série initiale. Celle-ci s'appelle la série **harmonique alternée** et des techniques sophistiquées permettent d'obtenir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \mathrm{Log}\, 2$$

Considérons une série réelle de terme général u_n et supposons que la série de terme général $|u_n|$ soit convergente. Cette dernière vérifie alors la condition de Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall p, q \in \mathbb{N} \ , \ p > q \geqslant n_0 \Rightarrow |u_{q+1}| + |u_{q+2}| + \dots + |u_p| \leqslant \epsilon$$

Mais l'inégalité triangulaire permet de conclure que l'on a également:

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall p, q \in \mathbb{N} \ , \ p > q \geqslant n_0 \Rightarrow |u_{q+1} + u_{q+2} + \dots + u_p| \leqslant \epsilon$$

c'est-à-dire que la série de terme général u_n est convergente. D'où la définition suivante:

4.3. Définition et propriété:

Soit une série de terme général u_n *réel, si la série de terme général* $|u_n|$ *est convergente, on dit que la série initiale est* **absolument convergente**. *On a alors:*

Toute série absolument convergente est convergente.

4.4. Remarques:

(i) Le résultat est encore valable pour des séries à termes complexes, la notation $|u_n|$ désignant alors le module du nombre complexe u_n .

(ii) La propriété 4.3. n'a d'intérêt que si la série donnée n'est pas à termes de signe fixe, au moins à partir d'un certain rang, car sinon la notion de convergence absolue n'est autre que la notion de convergence classique. Puisque l'on dispose d'un certain nombre de critères de convergence d'une série à termes positifs, l'étude d'une série à termes quelconques commencera généralement par l'étude de sa convergence absolue.

(iii) L'étude de la série harmonique alternée (exemple 4.2.) montre qu'une série peut être convergente sans être absolument convergente. On dit alors qu'une telle série est **semi-convergente**.

4.5. Exercice:

Soit une série de terme général u_n réel. On pose:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n^+ = \max(u_n, 0) \ , \ u_n^- = \max(-u_n, 0)$$

(i) Montrer que u_n^+ et u_n^- définissent des séries à termes positifs ou nuls et que l'on a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ \leqslant |u_n|$, $u_n^- \leqslant |u_n|$.

(ii) En déduire que si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors les séries de termes généraux u_n^+ et u_n^- sont convergentes.

(iii) Déduire alors du résultat 1.6. (séries et algèbre) que toute série réelle absolument convergente est convergente.

Mais l'intérêt principal de la notion de convergence absolue réside dans les deux théorèmes suivants.

4.6. Théorème:

Soit une série de terme général u_n *absolument convergente. Soit* σ *une bijection quelconque de* $\mathbb{N}$ *sur lui-même. Alors la série de terme général* $u_{\sigma(n)}$ *est absolument convergente et on a:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$$

C'est-à-dire que pour une série absolument convergente on peut modifier l'ordre des termes sans changer ni la nature, ni la somme, de cette série.

Preuve:

Premier pas: Supposons que la série donnée est à termes positifs et posons:

$$v_n = u_{\sigma(n)}\ ,\quad V_n = v_0 + \dots + v_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$$

Notons $N = \max(\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n))$. On a alors, puisque la série est à termes positifs:

$$V_n = v_0 + \dots + v_n \leqslant u_0 + u_1 + \dots + u_N \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Par conséquent, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par la somme de la série de terme général u_n. La série de terme général v_n est donc convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Il suffit maintenant d'appliquer le même raisonnement en partant de la série de terme général v_n, et de la bijection σ^{-1} pour obtenir le résultat symétrique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Deuxième pas: Supposons maintenant la série de terme général u_n de signe quelconque et absolument convergente. Alors la série de terme général $|u_n|$ est convergente et, d'après le premier pas, on en déduit que la série de terme général $|u_{\sigma(n)}|$ est convergente, i.e. que la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et donc convergente. Pour aller plus loin, posons:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad u_n^+ = \max(0, u_n)\ ;\ u_n^- = \max(0, -u_n)$$

On vérifie aisément que l'on a:

$$n \in \mathbb{N}\ ,\quad u_n = u_n^+ - u_n^-\ ;\ 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|\ ;\ 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$$

Par conséquent les séries de terme général u_n^+ et u_n^- sont à termes positifs et majorés par le terme général d'une série convergente. Ces séries sont donc convergentes et le théorème 1.6. (séries et algèbre) permet d'écrire:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} u_n^-$$

Appliquons alors le résultat du premier pas aux séries de terme général $u_{\sigma(n)}^+$ et $u_{\sigma(n)}^-$: celles-ci sont convergentes et on a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}^+ = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^+\ ;\ \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^-$$

Comme $u_{\sigma(n)}^+ = u_{\sigma(n)}^- - u_{c(n)}$, le théorème 1.6. permet encore d'écrire:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{I=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^+ - \sum_{n-0}^{\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

ce qui achève la preuve.

4.7. Remarque:

Le théorème est faux pour des séries qui ne sont pas absolument convergentes comme le montre l'exemple suivant:

Considérons la série harmonique alternée définie par $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, pour $n \geqslant 1$. Nous avons dit que cette série était convergente de somme Log 2 . Groupons alors les termes de cette série de la façon suivante:

$$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+\ldots+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)}-\frac{1}{2(2k+2)}+\ldots$$

(i.e. on prend un terme positif, puis deux termes négatifs, puis un terme positif, puis deux termes négatifs, ...)

Cette nouvelle série est bien constituée des mêmes termes que la série harmonique alternée, mais placés dans un ordre différent.

On a $$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)}-\frac{1}{2(2k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=v_k$$

La série de terme général v_k n'est donc autre que la moitié de la série harmonique alternée, pour laquelle on a regroupé les termes **consécutifs** deux par deux. Le résultat 4.1. s'applique alors et donne $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k = \frac{1}{2}$ Log 2 .

Ainsi les deux séries ci-dessus sont constituées des mêmes termes, sont toutes deux convergentes, mais n'ont pas la même somme!!!

4.8. Définition et théorème:

Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n *et* v_n . *On appelle* **produit (de Cauchy)** *de ces deux séries, la série de terme général* w_n *défini par:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j$$

Alors, si les deux séries de termes généraux u_n *et* v_n *sont absolument convergentes, il en est de même de la série de terme général* w_n *et on a:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{\infty} v_n)$$

Preuve:

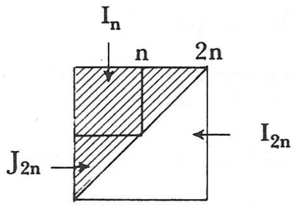
Nous nous limiterons au cas des séries à termes positifs, et un petit dessin s'impose:

		u_0	u_1	u_2	u_3	...
	v_0	$u_0 v_0$	$u_1 v_0$	$u_2 v_0$	$u_3 v_0$	
	v_1	$u_0 v_1$	$u_1 v_1$	$u_2 v_1$	$u_3 v_1$	...
w_0	v_2	$u_0 v_2$	$u_1 v_2$	$u_2 v_2$	$u_3 v_2$	
w_1	v_3	$u_0 v_3$	$u_1 v_3$	$u_2 v_3$	$u_3 v_3$	
w_2	$\vdots$			$\vdots$		

$w_0 = u_0 v_0$ est situé dans la première diagonale de ce tableau.

$w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0$ est situé dans la seconde diagonale de ce tableau.

...



Posons alors $I_n = \{(i,j) \,/\, i,j \in [\![0, n]\!]\}$

$J_n = \{(i,j) \,/\, i,j \in \mathbb{N} \text{ et } i+j \in [\![0, n]\!]\}$

On voit alors que l'on a $I_n \subset J_{2n} \subset I_{2n}$:

On en déduit alors pour tout entier n :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big)$$

Ce qui démontre déjà que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante, puisque la série correspondante est à termes positifs, est majorée par $\Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\Big) = U.V$. Par conséquent la série de terme général w_n est convergente et sa somme W vérifie $W \leqslant U.V$.

Mais on en déduit également:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} w_k \geqslant \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big)$$

Ce qui démontre, par prolongement des inégalités $\lim\limits_{n\to\infty} W_{2n} \geqslant U.V$ i.e. $W \geqslant U.V$.

La comparaison de ces deux résultats donne bien $W = U.V$.

Le lecteur ne doit pas être surpris de cette définition du produit de deux séries car celle-ci ne fait que prolonger les propriétés habituelles de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Mais l'exemple suivant montre que le théorème 4.8. est faux si les séries de termes généraux u_n et v_n ne sont pas absolument convergentes.

4.9. Exemple:

Considérons la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Cette série est convergente sans être absolument convergente. En effet:

(i) $|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, par conséquent on a au voisinage de l'infini $|u_n| \sim \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ et la règle de Riemann permet de conclure à la divergence de cette série.

(ii) La série de terme général u_n n'étant pas trivialement divergente, on peut effectuer le regroupement des termes de cette série, en considérant deux termes consécutifs. Soit donc:

$$v_k = u_{2k} + u_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \frac{1}{\sqrt{2k+2}} = \frac{\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+1}\,.\,\sqrt{2k+2}}$$

En multipliant haut et bas par l'expression conjuguée, on obtient:

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2k+1}\,.\sqrt{2k+2}\,.\,(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k+1})}$$

et donc au voisinage de l'infini $v_k \sim \dfrac{1}{4\sqrt{2}\,k^{\frac{3}{2}}}$ et la règle de Riemann permet de conclure à la convergence de cette série.

Considérons le produit de Cauchy de la série de terme général u_n, par elle-même. On a:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\,\sqrt{n+1-k}}$$

Or pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $(k+1)(n+1-k) \leqslant \left(\dfrac{n+2}{2}\right)^2$, comme on peut s'en apercevoir en étudiant le sommet de la parabole d'équation $f(x) = (x+1)(n+1-x)$. Par conséquent $\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n+1-k}} \geqslant \frac{2}{n+2}$ et $|w_n| \geqslant \frac{2(n+1)}{n+2}$. Ainsi on ne peut avoir $\lim w_n = 0$, et la série produit est trivialement divergente.

4.10. Remarque:

On appelle série entière une série dont le terme général u_n est de la forme $u_n = a_n x^n$, où x est un paramètre réel. On démontrerait alors qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que pour $|x| < R$ la série donnée soit absolument convergente, et pour $|x| > R$ (si $R \neq +\infty$) la série donnée est trivialement divergente. Ce nombre R (éventuellement $+\infty$) s'appelle le rayon de convergence de cette série et on démontre alors que la fonction f définie sur $]-R, +R[$ par $f: x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est indéfiniment dérivable sur cet intervalle, avec:

$$\forall x \in]-R, R[, \; f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} , \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} , \; \ldots$$

C'est-à-dire que dans l'intervalle $]-R, R[$, la série des dérivées est convergente, sa somme étant la dérivée de la somme de la série. Cette notion est importante en probabilités pour le calcul de la somme de séries classiques, mais les démonstrations de ces résultats nous emmèneraient bien loin des programmes...

4.11. Exemple:

Reprenons l'exemple 3.5. (i). Nous avons vu que pour tout x réel strictement positif, la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente.

Il est évident que pour $x = 0$ la série est convergente de somme 1 (puisque tous les termes à partir du second sont nuls).

On montre que pour tout x réel la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente. Notons $f(x)$ sa somme.

Donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

D'après le résultat admis en 4.10. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a:

$$\forall x \in \mathbb{R} , \; f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Donc, à l'aide d'un simple décalage d'indice:

$$\forall x \in \mathbb{R} , \; f'(x) = f(x)$$

Or le lecteur a dû voir en terminale que les seules fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' = f$ sont proportionnelles à la fonction exponentielle. Comme on a $f(0) = 1$, le coefficient de proportionnalité vaut 1 . C'est-à-dire:

$$\forall x \in \mathbb{R} , \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Nous reverrons ce fait ultérieurement à l'aide de la formule de Taylor pour la fonction exponentielle.

4.12. Exercice:

Appliquer le théorème 4.8. aux séries de termes généraux respectifs $u_n = \frac{x^n}{n!}$, $v_n = \frac{y^n}{n!}$.

Conclusion?