chapitre 1

topologie

Nous admettrons que, devant les insuffisances du corps $\mathbb{Q}$, on a su définir un nouveau corps appelé «corps des nombres réels» et noté $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-corps et encore muni d'une relation d'ordre, prolongeant celle définie sur $\mathbb{Q}$, qui en fait un corps commutatif totalement ordonné (cf. cours d'algèbre p. 87). Ce nouvel ensemble ordonné vérifie la propriété fondamentale dite «de la borne supérieure» que nous considérerons comme axiome, puisqu'il est dit que nous ne procéderons pas ici à la construction de $\mathbb{R}$. En revanche nous essaierons, dans ce chapitre et dans le suivant, d'en déduire les autres propriétés importantes de $\mathbb{R}$.

Signalons pour la culture le résultat suivant: Tout corps commutatif totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure est isomorphe à $\mathbb{R}$. Ceci permettrait de montrer que les différentes techniques de construction de $\mathbb{R}$ que le lecteur pourrait connaître conduisent bien au même ensemble (bien sûr à isomorphisme près).

1. RAPPELS

1.1. Rappels à l'ordre:

$(\mathbb{R}, +, ., \leqslant)$ est un corps commutatif totalement ordonné. On note:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant 0\}, \ \mathbb{R}^*_+ = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\} \quad \text{(idem pour } \mathbb{R}_-, \mathbb{R}^*_-)$$

et on a les trivialités fort utiles suivantes:

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$ (resp. $x < y \iff y - x \in \mathbb{R}^*_+$)

(ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \ x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \forall z \in \mathbb{R}_+, \ x \leqslant y \Rightarrow xz \leqslant yz$

L'assertion (i) se traduit en clair de la façon suivante: pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence. Nous n'insisterons jamais assez sur le piège tendu par l'assertion (iii). En effet, on voit encore des gens affirmer: $\frac{a}{b} \leqslant 1 \Rightarrow a \leqslant b$, sans prendre garde au signe de b .

1.2. La notion de valeur absolue:

On appelle **valeur absolue sur** $\mathbb{R}$ *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par:*

$$\text{si } x \geqslant 0 \,,\ |x| = x \quad \text{et si } x \leqslant 0 \,,\ |x| = -x$$

En d'autres termes: $\forall x \in \mathbb{R} \,,\ |x| = \max(x, -x)$

1.3. Propriétés:

L'application valeur absolue vérifie les propriétés suivantes:

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$ **(inégalité triangulaire)**

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \geqslant ||x| - |y||$

(v) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}_+,\ |x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$
(resp. $|x| < a \iff -a < x < a$*)*

(vi) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}_+,\ |x| \geqslant a \iff (x \geqslant a)$ *ou* $(x \leqslant -a)$

(vii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|$ *et* $|x|^2 = x^2$

Soit x un nombre réel quelconque, on pose $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = \max(-x, 0)$. Nous laissons le lecteur vérifier que l'on a: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^+ \in \mathbb{R}_+, x^- \in \mathbb{R}_+, x = x^+ - x^-, |x| = x^+ + x^-$

1.4. Majoration et minoration:

Soit A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$.

(i) *On dit que* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est un* **majorant de** A *(resp. un* **minorant de** A*) si l'on a:* $\forall x \in A \,,\ x \leqslant \alpha$ *(resp.* $\forall x \in A \,, \alpha \leqslant x$*). On dit qu'une partie qui admet un majorant est* **majorée** *(resp. qu'une partie qui admet un minorant est* **minorée***). Une partie à la fois majorée et minorée est dite* **bornée** .

(ii) *On dit que* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est le* **plus grand** *(resp. le* **plus petit***)* **élément** *de* A *si les deux conditions suivantes sont réalisées:*

a) $\alpha \in A$
b) α *est un majorant de* A
(resp. *a)* $\alpha \in A$ *b)* α *est un minorant de* A*)*

(iii) *Si l'ensemble des majorants de* A *admet un plus petit élément, celui-ci est appelé la* **borne supérieure de** A *et se note* sup (A)*. De même si l'ensemble des minorants de* A *admet un plus grand élément, celui-ci est appelé la* **borne inférieure de** A *et se note* inf (A) .

La notion de borne supérieure est une notion fine, elle est différente de la notion de plus grand élément. En effet, la borne supérieure de A, lorsqu'elle existe, peut ne pas appartenir à A, par exemple : $\sup(\,]0, 1[\,) = 1$.

Toutefois, si l'on a $\sup(A) \in A$, alors il est clair que sup A est également le plus grand élément de A.

1.5. Caractérisations des bornes supérieure ou inférieure:

Soit A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$. *On a:*

$$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A \,,\ x \leqslant \alpha \\ \text{et} \\ \forall \epsilon > 0 \,,\ \exists x \in A \,,\ \alpha - \epsilon < x \leqslant \alpha \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l}\textit{de même:}\\ \beta = \inf(A) \iff \left\{\begin{array}{l}\forall x \in A,\ \beta \leqslant x \\ \text{et} \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \beta \leqslant x < \beta + \epsilon\end{array}\right.\end{array}\right)$$

En effet, par exemple l'assertion $\forall x \in A, x \leqslant \alpha$ signifie que α est un majorant de A, tandis que l'assertion $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \alpha - \epsilon < x \leqslant \alpha$ signifie que tout nombre strictement plus petit que α n'est plus un majorant de A. Un tel α est donc bien le plus petit des majorants.

Remarquons que si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si l'on pose $-A = \{-x, x \in A\}$. Alors $-A$ est minorée si et seulement si A est majorée, $\inf(-A)$ existe si et seulement si $\sup(A)$ existe, et dans ce cas on a: $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Commentaire:

Dans les caractérisations des bornes supérieure et inférieure interviennent deux énoncés mathématiques du type:

$$\forall \epsilon \ldots,\ \exists x \ldots$$

Il faut comprendre que si un tel énoncé est donné pour vrai, alors il est important pour son utilisateur car c'est un énoncé productif. Expliquons nous: $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A, \ldots$ signifie que **si l'on se donne un ϵ** strictement positif quelconque, par exemple $1, 10^{-4}, 1525, \ldots$, **il existe au moins un** x dans A vérifiant certaines propriétés. En choisissant effectivement un tel x parmi toutes les solutions possibles, cet x sera disponible pour des calculs ultérieurs.

On peut concrétiser cela de façon imagée en disant qu'un assemblage mathématique de la forme précédente est un jack-pot: chaque fois que l'on introduit ϵ strictement positif dans la fente «Insert coins» on gagne au moins un x appartenant à A et ayant certaines propriétés. Ceci permet de comprendre que l'on peut jouer dans le jack-pot la somme que l'on veut, mais que l'on ne peut décider de ce que l'on va gagner, puisque si A n'est pas connue, on ne connaît pas le mécanisme interne du jack-pot.

A l'inverse, si on demande de montrer que le nombre α est la borne supérieure d'une certaine partie A, il ne suffit pas de jouer une douzaine d'ϵ et de constater que l'on gagne à chaque fois au moins un x. **Il faut** que vous mettiez en place **un raisonnement général** qui montre que «quoi que l'on joue, on gagne»! Pour conserver l'image précédente, il faut donc que vous **construisiez** la mécanique interne du jack-pot.

Enfin si l'on dispose d'une partie A admettant une borne supérieure et d'une autre partie B admettant aussi une borne supérieure (éventuellement la même), le jack-pot «borne supérieure de A» n'est pas le même que celui de B. En jouant ϵ sur chacun d'eux, on gagne sur les deux tableaux, mais il n'y a aucune raison de gagner la même chose!

Nous venons de découvrir deux types de jack-pots: les jack-pots «borne supérieure» et «borne inférieure», nous en découvrirons bien d'autres au cours de ce livre, car les énoncés de ce type sont la base de l'analyse. Nous ne craignons pas d'affirmer que, finalement, un analyste est comparable à un «gambler» de Las Vegas ou de Macao: il passe le plus clair de son temps soit à construire des jack-pots soit à jouer sur des jack-pots fabriqués par ses collègues. Mais il a souvent l'intuition du jeu et il sait ce qu'il doit jouer pour aboutir au résultat espéré. Au début, il vous arrivera donc peut-être de procéder par tâtonnements avant de découvrir la bonne mise, mais ne vous découragez pourtant pas, car c'est surtout une question d'entraînement.

1.6. Propriétés de la borne supérieure (ou inférieure):

(i) *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

(ii) *Toute partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

D'après la remarque précédente, ces deux assertions sont bien évidemment équivalentes. Nous avons déjà signalé dans l'introduction que cette propriété serait admise.

Soient X, Y deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $X \subset Y$. Alors si Y est une partie majorée de $\mathbb{R}$, il en est de même pour X et on a de plus $\sup(X) \leqslant \sup(Y)$. De même si Y est une partie minorée de $\mathbb{R}$, X est également minorée et on a $\inf(Y) \leqslant \inf(X)$.

1.7. Théorème:

$\mathbb{R}$ *est* **archimédien,** *i.e.:* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x$.

(Ou, de façon équivalente: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*_+, \exists n \in \mathbb{N}, nx > a$*)*

Preuve:

Raisonnons par l'absurde et supposons donc qu'il existe un x réel tel que, pour tout entier naturel n, on ait $n \leqslant x$. $\mathbb{N}$ serait alors une partie majorée de $\mathbb{R}$. D'après la propriété de la borne supérieure, $\mathbb{N}$ admettrait alors une borne supérieure α. Jouons alors $\epsilon = \frac{1}{2}$ sur le jack-pot « $\alpha = \sup \mathbb{N}$ », on gagnerait un entier naturel p tel que $\alpha - \frac{1}{2} < p$. Il en résulterait $p + 1 > \alpha + \frac{1}{2}$, d'où $p + 1 > \alpha$ et comme $p + 1 \in \mathbb{N}$ la contradiction est claire.

1.8. Applications importantes:

(i) La notion de partie entière:

Pour tout x réel, il existe un unique entier rationnel n tel que $n \leqslant x < n + 1$. Celui-ci se note $E(x)$ ou $[x]$ et s'appelle la **partie entière** de x.

La preuve est laissée au lecteur qui distinguera les trois cas $x > 0, x = 0, x < 0$.

(ii) Une preuve de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

Il s'agit de montrer qu'entre deux nombres réels distincts il existe toujours au moins un nombre rationnel.

Soient donc $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe un entier naturel n tel que $n > \frac{1}{b-a}$. Posons alors $p = E(na)$. On a donc:

$$p \leqslant na < p + 1 \text{, i.e. } \frac{p}{n} \leqslant a < \frac{p+1}{n}$$

On voit alors que $\frac{p+1}{n}$ est un nombre rationnel strictement compris entre a et b.

1.9. Exercices:

(i) Montrer qu'en fait entre deux nombres réels distincts il y a toujours une infinité de nombres rationnels.

(ii) Montrer qu'entre deux nombres réels a et b distincts, il y a toujours une infinité de nombres irrationnels, i.e. montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(hint: considérer un nombre rationnel r strictement compris entre a et b, puis les nombres de la forme $r + \frac{\sqrt{2}}{n}$, pour n entier naturel assez grand).

2. INTERVALLES DE $\mathbb{R}$

2.1. Rappels:

(i) Soient a, b *deux nombres réels tels que* $a \leqslant b$. *On appelle* **segment d'extrémités** a *et* b, *que l'on note* $[a, b]$, *l'ensemble des nombres réels* x *tels que* $a \leqslant x \leqslant b$.

(ii) Soit I *une partie de* $\mathbb{R}$. *On dit que* I *est un* **intervalle** *si:*

$$\forall a, b \in I\ ,\ a \leqslant b \Rightarrow [a, b] \subset I$$

La propriété de la borne supérieure ou inférieure permet de classifier les intervalles de $\mathbb{R}$ en neuf types distincts selon qu'il existe ou non un majorant ou un minorant, ainsi qu'un plus grand ou un plus petit élément:

2.2. Les neuf types d'intervalles de $\mathbb{R}$:

Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. I *est de l'un des types suivants:*

(i) *Un segment:* $[a, b]$

(ii) *Un intervalle ouvert borné:* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a<x<b\}$

(iii) *Un intervalle semi-ouvert borné:*
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x < b\}$ *ou* $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a<x\leqslant b\}$

(iv) *Un intervalle minoré, non majoré*
ouvert: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x>a\}$ *ou fermé:* $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant a\}$

(v) *Un intervalle majoré, non minoré*
ouvert: $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x<b\}$ *ou fermé:* $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant b\}$

(vi) *Un intervalle ni majoré, ni minoré:* $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

La preuve de tout ceci n'est pas très difficile mais demande tout de même un peu de soin, nous le laissons à la sagacité du lecteur...

Parmi toutes les parties de $\mathbb{R}$, les intervalles jouent un rôle primordial en analyse, cela provient du fait que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties connexes de $\mathbb{R}$ (i.e. les parties «d'un seul tenant»).

2.3. Exercices:

(i) L'intersection de deux intervalles est-elle un intervalle?

(ii) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la réunion de deux intervalles soit encore un intervalle.

3. VOISINAGES

3.1. Définition:

Soit $a \in \mathbb{R}$, *on appelle* **voisinage** *de* a, *tout intervalle ouvert contenant* a. *On note* $\mathcal{V}(a)$ *l'ensemble des voisinages de* a .

3.2. Remarques:

Il est clair que tout voisinage V de a contient un voisinage de la forme $]a-\epsilon, a+\epsilon[$, avec ϵ strictement positif. Un tel voisinage est dit **centré en** a et on a:
$]a-\epsilon, a+\epsilon[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a-\epsilon < x < a+\epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a| < \epsilon\}$. On peut donc se limiter à l'étude des voisinages centrés, ce qui explique que l'analyse est aussi la saga des ϵ et des valeurs absolues.

D'autre part, si un intervalle fermé I contient «strictement» un point a (i.e. si a n'est pas une des bornes de cet intervalle), on peut trouver un voisinage de a contenu dans I, par exemple $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset [a-\epsilon, a+\epsilon]$, pour ϵ strictement positif.

De même un voisinage de a contient toujours un intervalle fermé contenant «strictement» a , par exemple $[a-\frac{\epsilon}{2}, a+\frac{\epsilon}{2}] \subset]a-\epsilon, a+\epsilon[$, pour ϵ strictement positif.

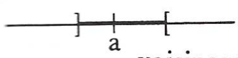
Ces remarques seront utiles lorsque nous définirons la notion de limite et justifieront le fait que l'on puisse utiliser indifféremment des inégalités strictes ou larges (cf. chap. 5, 1.2.).

3.3. Généralisations:

(i) *Soit* $a \in \mathbb{R}$, *on appelle* **voisinage à droite de** a, *tout intervalle semi-ouvert* $[a, b[$, *avec* $b > a$, *ou l'intervalle* $[a, +\infty[$. *On définit de même la notion de* **voisinage à gauche** *du point* a.

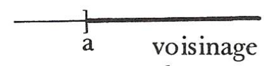
(ii) *On note* $\overline{\mathbb{R}}$ *l'ensemble des nombres réels auxquels on adjoint les deux symboles* $-\infty, +\infty$, *i.e.* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ($\overline{\mathbb{R}}$ *porte le nom de* **droite numérique** *achevée).*

On appelle alors **voisinage de** $+\infty$ *(resp. de* $-\infty$ *) tout intervalle ouvert de la forme* $]a, +\infty[$ *(resp. de la forme* $]-\infty, a[$*).*



voisinage de a

voisinage à droite de a

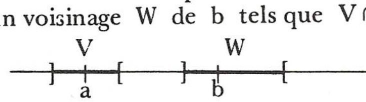


voisinage de $+\infty$

3.4. Exercices:

(i) Que peut-on dire de l'intersection de deux voisinages d'un point a ? Qu'en est-il de l'intersection d'une famille quelconque de voisinages de a ?
(hint: pensez à l'intersection des voisinages de la forme $\left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[$, pour $n \in \mathbb{N}^*$)

(ii) Montrer que si a et b sont deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$, alors il existe un voisinage V de a et un voisinage W de b tels que $V \cap W = \phi$.



3.5. Définition:

Soit $a \in \mathbb{R}$, *on appelle* **voisinage épointé de** a *tout voisinage de* a *privé du point* a *(idem pour les voisinages d'un côté).*

Par exemple, si $V = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x - a| < \epsilon\}$ est un voisinage centré de a, le voisinage épointé $\dot{V}$ correspondant est $\dot{V} = V \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < |x - a| < \epsilon\}$.

Voici enfin pour terminer deux définitions fort utiles en analyse:

3.6. Définition:

On appelle **intérieur** *d'un intervalle non vide* I, *l'intervalle ouvert noté* $\overset{\circ}{I}$ *obtenu en privant* I *de ses bornes éventuelles, un élément de* $\overset{\circ}{I}$ *est appelé* **point intérieur à** I.

Par exemple si $I = [a, b[$, alors $\overset{\circ}{I} =]a, b[$; si $I =]-\infty, a]$, $\overset{\circ}{I} =]-\infty, a[$, ...

3.7. Définition:

Soit A *une partie de* $\mathbb{R}$. *On dit qu'un nombre réel* a *est* **point d'accumulation de** A *si tout voisinage de* a *contient au moins un point de* A *autre que* a.

Par exemple, les bornes d'un intervalle I en sont des points d'accumulation, 0 est un point d'accumulation de $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ signifie que tout nombre réel est point d'accumulation de $\mathbb{Q}$. En revanche 1525 n'est pas un point d'accumulation de $]0, 1]$.

3.8. Remarque:

Un point de A n'est pas nécessairement un point d'accumulation de A (on dit alors qu'un tel point est **isolé** dans A). De même un point d'accumulation d'une partie A n'est pas nécessairement un élément de A, mais on peut «s'approcher» d'un tel point en restant dans A, d'où l'intérêt de cette notion dans la définition du concept de limite. Un point intérieur à un intervalle I est bien entendu un point d'accumulation de I et «même qu'on peut s'en approcher des deux côtés!»

Voilà le décor en place, nous pouvons commencer à faire de l'analyse...

chapitre 2

suites

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définition:

Soit X *un ensemble quelconque, on appelle* **suite d'éléments de** X *toute application* u *d'une partie* A *de* $\mathbb{N}$ *dans* X. *Si* $n \in A$ *il est d'usage de noter* u_n *l'image de* n *par* u.

Si A est une partie finie de $\mathbb{N}$, on dit que la suite u est une suite finie. Ces suites ne sont pas d'un grand intérêt en analyse. Aussi supposerons-nous que A est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Il existe alors une bijection strictement croissante de A sur $\mathbb{N}$ (au plus petit élément de A on associe 0, au suivant on associe 1, ...). Par conséquent, nous ne considérerons dans la théorie que des suites définies sur $\mathbb{N}$, une suite d'éléments de X est donc un élément de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, X)$.

Remarquons qu'il convient de ne pas confondre la suite u également notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, c'est-à-dire qu'il ne faut pas confondre l'application u et son image. En particulier une suite u peut très bien ne prendre qu'un nombre fini de valeurs, c'est le cas en particulier de la suite définie par $u_n = (-1)^n$.

Si $X = \mathbb{R}$ la suite u est dite suite réelle et si $X = \mathbb{C}$ la suite u est dite suite complexe. Jusqu'au 6ème paragraphe de ce chapitre nous ne considérerons que des suites réelles et nous réserverons le dernier paragraphe à l'exposé de quelques notions sur les suites complexes.

1.2. Définitions:

Soit u *une suite réelle.*

(i) *On dit que* u *est* **majorée** *(resp.* **minorée***) s'il existe un nombre* M *(resp.* m*) tel que:* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$ *(resp.* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$*) et on dit alors que* M *(resp.* m*) est un* **majorant** *(resp.* **minorant***) de cette suite.*

(ii) *Une suite à la fois majorée et minorée est dite* **bornée**.

1.3. Définitions:

Soit u *une suite réelle.*

(i) *On dit que* u *est une suite* **croissante** *(resp.* **décroissante***) si l'on a:*
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ *(resp.* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$*).*

(ii) *On dit que* u *est une suite* **monotone** *si* u *est une suite croissante ou si* u *est une suite décroissante.*

(iii) *On définit de même les notions de suite* **strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone.**

Remarquons que ces définitions ne contiennent aucune nouveauté, puisque, u étant une application de $(\mathbb{N}, \leqslant)$ dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, il s'agit d'un remake des définitions générales d'applications monotones.

1.4. Définitions et propriété:

Soient u, v *deux suites réelles,* λ *un nombre réel quelconque.*

(i) *On appelle* **somme** *des suites* u *et* v *, la suite* w *définie par:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; w_n = u_n + v_n$$

(ii) *On appelle* **produit** *des suites* u *et* v *, la suite* p *définie par:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; p_n = u_n v_n$$

(iii) *On appelle* **produit externe** *de la suite* u *par le nombre* λ *, la suite* q *définie par:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; q_n = \lambda u_n$$

Muni de ces lois, l'ensemble des suites réelles possède une structure de $\mathbb{R}$ **-algèbre commutative.** *L'ensemble des suites constantes étant une sous-algèbre isomorphe à* $\mathbb{R}$.

Là encore il n'y a rien de nouveau puisque les lois ainsi définies ne sont autres que les lois usuelles sur $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

2. CONVERGENCE ET DIVERGENCE

2.1. Définitions:

Soit u *une suite réelle. On dit que la suite* u *est* **convergente** *si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes:*

(i) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \; \forall \epsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n \geqslant n_0, \; |u_n - \ell| < \epsilon$

(ii) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \; \forall V \in \mathcal{V}(\ell), \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n \geqslant n_0, \; u_n \in V$

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente.**

La partie « $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ » de la définition d'une suite convergente est donc un nouveau jack-pot, avec lequel nous allons jouer pendant quelque temps.

2.2. Commentaires:

L'équivalence de ces deux définitions résulte simplement de la définition d'un voisinage d'un point ℓ (voir chapitre 1, paragraphe 3). On traduit cette définition en disant: «on est aussi près que l'on veut du nombre ℓ , à condition de prendre n assez grand», ce qui a l'avantage de faire comprendre que la notion de convergence est une notion accumulative, «les termes de la suite étant attirés par ℓ ».

2.3. Proposition:

Soit u *une suite réelle convergente. Alors le nombre* ℓ *dont la définition précédente affirme l'existence est unique. On l'appelle* **limite** *de la suite* u *et nous noterons dans ce cas:*

$$\ell = \lim_{n \to \infty} u_n \quad ou \quad \ell = \lim u$$

Preuve:

Supposons qu'il existe deux nombres ℓ, ℓ' distincts répondant aux conditions de la définition 2.1., on a alors:

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0 \ , \ |u_n - \ell| < \epsilon$$
$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geqslant n_1 \ , \ |u_n - \ell'| < \epsilon$$

(ϵ étant donné, n_0 et n_1 n'ont aucune raison d'être égaux).

Jouons alors $\epsilon = \dfrac{|\ell' - \ell|}{2}$ à la fois sur le jack-pot «$\lim u_n = \ell$» et sur le jack-pot «$\lim u_n = \ell'$». Nous gagnons donc deux entiers n_0 et n_1 et on a:

$$\forall n \geqslant \max(n_0, n_1) \ , \ |u_n - \ell| < \frac{|\ell' - \ell|}{2} \quad \text{et} \ |u_n - \ell'| < \frac{|\ell' - \ell|}{2}$$

Écrivons alors $\ell - \ell' = \ell - u_n + u_n - \ell'$. L'inégalité triangulaire donne:

$$|\ell - \ell'| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'|$$

Par conséquent si $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a:

$$|\ell - \ell'| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < \frac{|\ell' - \ell|}{2} + \frac{|\ell - \ell|}{2} \quad \text{, i.e. } |\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$$

d'où la contradiction. Vous comprenez maintenant pourquoi le gambler a joué $\dfrac{|\ell' - \ell|}{2}$, il avait imaginé la suite des événements! Il lui suffisait de partager la mise $|\ell' - \ell|$ entre les deux jack-pots, par exemple en faisant deux parts égales.

Si nous voulions raisonner en termes de voisinages, la proposition résulterait de l'exercice 3.4.(ii) du chapitre 1, qui affirme que l'on peut trouver un voisinage de ℓ et un voisinage de ℓ' disjoints. Les termes de la suite devant se trouver, à partir d'un certain rang, dans les deux voisinages, la contradiction en résulte de même.

2.4. Exemples:

(i) Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$. Alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Il nous faut démontrer: $\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall n \geqslant n_0, |\dfrac{1}{n} - 0| < \epsilon$.

ϵ étant donné, la condition est manifestement remplie lorsque $n > \dfrac{1}{\epsilon}$. Il suffit donc de prendre $n_0 = E(\dfrac{1}{\epsilon}) + 1$. ou tout autre nombre entier supérieur à celui-ci.

(ii) Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Il nous faut démontrer: $\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \geqslant n_0 |\dfrac{(-1)^n}{n} - 0| < \epsilon$. Ce qui ne paraît pas très différent de l'exemple précédent. Par conséquent ϵ étant donné $n_0 = E(\dfrac{1}{\epsilon}) + 1$ convient.

Plus généralement, on a l'équivalence fort utile: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n \to \infty} |u_n| = 0$.

(iii) Considérons la suite u définie par $u_n = (-1)^n$. Nous allons montrer que cette suite n'est pas convergente, c'est-à-dire, en prenant la négation de la définition 2.1.:

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \ , \ \exists \epsilon > 0 \ , \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \exists n \geqslant n_0 \ , \ |u_n - \ell| \geqslant \epsilon$$

Nous allons voir que $\epsilon = \frac{1}{2}$ convient: en effet, quel que soit le choix de ℓ, l'un au moins des deux nombres $|1-\ell|$ et $|-1-\ell|$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Comme pour tout entier n_0, il existe des nombres pairs et des nombres impairs supérieurs à n_0, la conclusion en résulte.

Nous retrouverons plus loin cet exemple et nous donnerons alors une démonstration plus élégante de sa divergence.

2.5. Remarque:

Deux suites qui ne diffèrent que pour un nombre fini d'indices n sont de même nature (i.e. sont toutes deux convergentes ou divergentes) et dans le cas de la convergence ont la même limite. C'est-à-dire qu'on ne modifie ni la nature ni la limite éventuelle d'une suite lorsque l'on modifie un nombre fini de ses termes. Ceci explique le succès de l'expression «la suite u possède la propriété P, à partir d'un certain rang». Tout se passe alors comme si la suite u avait cette propriété dès le premier rang (par exemple propriété de monotonie, de majoration, ...).

2.6. Proposition:

Toute suite convergente est bornée.

Preuve:

Soit u une suite convergente et ℓ sa limite. On a alors:

$$(\text{pour } \epsilon = 1),\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < 1,\ \text{i.e. } \ell - 1 < u_n < \ell + 1$$

Posons $M = \max(u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, \ell+1)$, $m = \min(u_0, \dots, u_{n_0-1}, \ell-1)$.

On a bien: $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$ (séparer les deux cas $n < n_0$, $n \geqslant n_0$), ce qui achève la preuve.

2.7. Définition et propriété:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle et soit* $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *une application strictement croissante. La suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$ *est appelée* **suite extraite** *de la suite initiale. (*$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est finalement rien d'autre que la composée* $u \circ \varphi$*).*

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, toute suite extraite est convergente de même limite.*

Preuve:

Supposons donc u convergente de limite ℓ, on a:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \epsilon$$

Mais φ étant une application «entière» strictement croissante, il est évident, par récurrence, que l'on a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$. Donc $n \geqslant n_0$ entraîne $\varphi(n) \geqslant \varphi(n_0) \geqslant n_0$ et par conséquent: $\forall n \geqslant n_0$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \epsilon$.

C'est-à-dire, en posant $v_n = u_{\varphi(n)}$:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |v_n - \ell| < \epsilon$$

ce qui montre bien que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Ainsi, pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, il peut être commode d'exhiber une suite extraite non convergente, ou d'exhiber deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes.

Par exemple, dans le cas de la suite définie par $u_n = (-1)^n$, la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 , donc convergente de limite 1 , tandis que la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à -1 , donc convergente de limite -1 . Par conséquent, la suite initiale n'est pas convergente et on retrouve bien ainsi le résultat 2.4.(iii).

2.8. Exercice:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les trois suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes. Montrer que ces trois suites extraites ont la même limite et que la suite initiale converge également vers ce nombre.

2.9. Définitions:

Soit u *une suite réelle. On dit que cette suite tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$ *) si l'on a:* $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0, u_n > A$ *(resp.* $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0, u_n < B$). *On écrit alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *) et on dit que la suite* u *est* **divergente de première espèce.** *Une suite divergente qui n'est pas divergente de première espèce est dite* **divergente de seconde espèce.**

2.10. Exemple fondamental: Suites géométriques:

Soit $q \in \mathbb{R}$ et considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$. Une telle suite est définie sur $\mathbb{N}$ (sauf pour $q = 0$ où elle n'est définie que sur $\mathbb{N}^*$) et est appelée **suite géométrique de raison** q .

1er cas: $q > 1$.

On peut alors écrire $q = 1 + h$, avec $h > 0$. La formule du binôme de Newton montre alors que l'on a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n = (1+h)^n \geqslant 1 + nh$. Soit A un nombre réel quelconque, dès que n dépasse $\frac{A-1}{h}$, on a $1 + nh > A$ et donc a fortiori $q^n > A$. Ce qui montre que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, la suite est donc divergente de 1ère espèce.

2ème cas: $0 < |q| < 1$.

On peut alors écrire $|q| = \frac{1}{q'}$, avec $q' > 1$. Pour tout ϵ strictement positif, $\frac{1}{\epsilon}$ est strictement positif et l'étude faite au premier cas montre que pour n assez grand $q'^n > \frac{1}{\epsilon}$, i.e. $|q|^n < \epsilon$ ou encore $|q^n| < \epsilon$. Ce qui montre que la suite converge vers 0 .

3ème cas: $q < -1$.

Posons alors $q = -q'$, avec $q' > 1$. On a $q^n = (-1)^n q'^n$. La suite extraite constituée des termes d'indices pairs tend vers $+\infty$ et celle constituée des termes d'indices impairs tend vers $-\infty$. La suite est donc divergente de 2ème espèce.

4ème cas: Les scories.

- $q = 1$: la suite est constante et égale à 1 .
- $q = -1$: ce cas a déjà été vu et on sait que cette suite est divergente de seconde espèce.
- $q = 0$: la suite est constante et égale à 0 .

En résumé:

$|q|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

$q>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$

$q \leqslant -1 \Rightarrow$ la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente de seconde espèce

$q = 1 \Rightarrow$ la suite est constante égale à 1.

2.11. Un exercice traité: Le théorème de Cesaro:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite réelle, posons:* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}$.

Alors:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \ell \quad (\ell \in \overline{\mathbb{R}})$$

Preuve:

1er cas: supposons ℓ réel..

On peut écrire $v_n - \ell = \dfrac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n} - \ell = \dfrac{(u_1-\ell)+(u_2-\ell)+\ldots+(u_n-\ell)}{n}$.

Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ. Par conséquent si on se donne ϵ strictement positif quelconque, on peut trouver un rang n_0 tel que pour n plus grand que n_0 on ait $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$. Donc si $n \geqslant n_0$:

$$v_n - \ell = \frac{(u_1-\ell)+\ldots+(u_{n_0-1}-\ell)}{n} + \frac{(u_{n_0}-\ell)+\ldots+(u_n-\ell)}{n}$$

Posons $A = |(u_1-\ell)+\ldots+(u_{n_0-1}-\ell)|$. Ce nombre A est déterminé par ϵ et ne dépend pas de n. L'inégalité triangulaire donne alors:

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{A}{n} + \frac{|u_{n_0}-\ell| + \ldots + |u_n-\ell|}{n} < \frac{A}{n} + \frac{n-n_0+1}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2} < \frac{A}{n} + \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n > \frac{2A}{\epsilon}$, on a $\frac{A}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Posons donc $n_1 = E\left(\frac{2A}{\epsilon}\right)+1$, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$.

On en déduit $|v_n - \ell| < \epsilon$. Ce qui montre bien $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$.

2ème cas: $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer par une méthode analogue que la conclusion subsiste.

Remarquons enfin que la réciproque de ce théorème est fausse. Considérons par exemple la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^{n+1}$. Cette suite est divergente de 2ème espèce, alors que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ associée converge vers 0. En effet, pour n pair on trouve $v_n = 0$ et pour n impair $v_n = \frac{1}{n}$ et donc:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \left(n_0 = E\left(\tfrac{1}{\epsilon}\right)+1\right),\ \forall n \geqslant n_0,\ |v_n| < \epsilon$$