première partie

analyse séquentielle

EXERCICES

1) Étudier la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$p_n = \cos a \,.\, \cos\frac{a}{2} \,.\, \dots \,.\, \cos\frac{a}{2^n} \quad (a\in\mathbb{R})$$

(hint: utiliser la relation $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$)

2) Étudier le couple de suites (u, v) défini par la donnée de u_0, v_0 réels et les relations de récurrence:

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ u_{n+1}=\frac{1}{3}(2\,u_n+v_n)\,,\ v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2\,v_n)$$

(hint: calculer $u_{n+1}+v_{n+1}$)

3) Montrer que pour tout x réel strictement positif on a:

$$x-\frac{x^2}{2} < \operatorname{Log}(1+x) < x$$

En déduire $$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)$$

4) Soient deux nombres réels a et b strictement positifs tels que $b<a$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0=a$, $b_0=b$ et les relations de récurrence:

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ a_{n+1}=\frac{a_n^{\,2}}{a_n+b_n}\,,\ b_{n+1}=\frac{b_n^{\,2}}{a_n+b_n}$$

Montrer tout d'abord que ces suites sont bien définies et les étudier.

(hint: considérer $a_{n+1}-b_{n+1}$ et $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$)

5) *Suite de Fibonacci.* On définit une suite u par la donnée de $u_1=2$, $u_2=3$ et la relation de récurrence: $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$.

(i) Montrer que l'on a: $\forall n\geqslant 2$, $u_n^{\,2}-u_{n+1}u_{n-1}=(-1)^{n+1}$.

(ii) Pour $n\geqslant 2$, on pose $v_n=\frac{u_n}{u_{n-1}}$. Étudier les suites extraites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6) Étudier les suites définies sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ par les relations respectives:

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{1+x}\,dx\ ;\ v_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[n]{\sin x}\,dx\ ;\ w_n=\int_1^{1+\frac{1}{n}}\sqrt[n]{1+x^n}\,dx$$

7) Soient a et b deux nombres réels tels que $0<a<b$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0=a$, $b_0=b$ et les relations de récurrence:

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}\,,\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

8) On définit trois suites a, b, c par la donnée de leurs premiers termes respectifs a_1, b_1, c_1 strictement positifs et les relations de récurrence:

$$\forall n \geq 1\,, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}\,, \quad \frac{3}{c_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}$$

Montrer que ces suites sont bien définies et que les suites $(a_n)_{n \geq 2}$, $(c_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes. Que dire de la suite b ?

9) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n^3)_{n \in \mathbb{N}}$ soient convergentes. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également convergente.

10) (i) Montrer que l'on a: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{n+1} < \operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n < \dfrac{1}{n}$.

(ii) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n$ est monotone et bornée. Conclusion?

(iii) Plus généralement, soit f une fonction définie sur $[1, +\infty[$ continue, positive et décroissante. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par:

$$u_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) - \int_1^n f(t)\, dt$$

En particulier, trouver la nature de la suite

$$n \longmapsto \frac{1}{2 \operatorname{Log} 2} + \frac{1}{3 \operatorname{Log} 3} + \ldots + \frac{1}{n \operatorname{Log} n} - \operatorname{Log}(\operatorname{Log} n)$$

(Oral E.S.C.P.)

X 11) Montrer que les suites $n \longmapsto \cos n$ et $n \longmapsto \sin n$ sont divergentes de deuxième espèce.
(hint: on pourra raisonner par l'absurde et transformer $\cos(n+1)$, $\sin(n+1)$)

XX 12) On considère deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'. Pour tout n entier naturel on pose:

$$u_n = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\ell \ell'$.

X 13) Soit z un nombre complexe non nul, calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

XX 14) On se donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = +\infty$ (c'est-à-dire que la série de terme général a_n est divergente). A toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\,.$$

(i) Montrer: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} v_n = \ell$. (Théorème de Cesaro généralisé).

(ii) Montrer que le résultat est encore valable pour $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

(iii) Soient $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ les termes généraux de deux séries. On suppose que, pour tout n, u_n est strictement positif et que $u_n \sim v_n$.
Montrer que si la série de terme général u_n est divergente, alors:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \sim v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

En déduire par exemple que $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \operatorname{Log} n$.