Estimación, diagnóstico y pronóstico de los modelos

Javier López

Universidad los Libertadores

Abril, 2020

Índice

Estimación del Modelo

El objetivo es estimar los parámetros del modelo *ARIMA* a partir de valores observados $Y_1, Y_2, ..., Y_n$
Asumimos que el modelo ha sido especificado con valores de p, d, q.
Sabemos que d lo tenemos por diferenciación, luego estimamos los parámetros de un $ARMA(p, q)$.

Método de Momentos

Autoregresivo:

- **AR(1):** Tenemos que $\rho_1 = \phi$, luego igualando ρ_1 a γ_1 por el método de momentos, tenemos que $\hat{\phi} = \gamma_1$
- **AR(2):** $\rho_1 = \phi_1 + \rho_1\phi_2$ y $\rho_2 = \rho_1\phi_1 + \phi_2$, luego por momentos tenemos que $\rho_1 = \gamma_1$ y $\rho_2 = \gamma_2$, así $\hat{\phi}_1 = \dfrac{\gamma_1(1-\gamma_2)}{(1-\gamma_1^2)}$ y $\hat{\phi}_2 = \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1^2}{1-\gamma_1^2}$
- **AR(p):** Tenemos por la ecuaciones de Yule-Walker estimadas:

$$\begin{aligned}
\phi_1 + \gamma_1\phi_2 + \gamma_2\phi_3 + \ldots + \gamma_{p-1}\phi_p &= \gamma_1 \\
\gamma_1\phi_1 + \phi_2 + \gamma_1\phi_3 + \ldots + \gamma_{p-2}\phi_p &= \gamma_2 \\
&\vdots \\
\gamma_{p-1}\phi_1 + \gamma_{p-2}\phi_2 + \gamma_{p-3}\phi_3 + \ldots + \phi_p &= \gamma_p
\end{aligned}$$

Método de Momentos

Media Móvil:

- **MA(1):** Tenemos que $\rho_1 = \dfrac{-\theta}{1+\theta^2}$, igualando ρ_1 a γ_1, tenemos dos raíces reales dadas por:

$$\hat{\theta} = \frac{-1}{2\gamma_1} \pm \sqrt{\frac{1}{4\gamma_1^2} - 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\gamma_1^2}}{2\gamma_1}$$

  Con $|\gamma_1| < 0{,}5$.

- Para Medias Móviles de orden más alto puede ser complicado ya que se pueden producir estimaciones pobres dadas por las ecuaciones no lineales en θ

Método de Momentos

Modelos Mixtos:

- **ARMA(1,1):** Tenemos que $\rho_k = \dfrac{(1-\theta\phi)(\phi-\theta)}{1-2\theta\phi+\theta^2}\phi^{k-1}$, para $k \geq 1$

  Note que $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \phi$, luego $\hat{\phi} = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}$ así,

$$\gamma_1 = \frac{(1-\theta\hat{\phi})(\hat{\phi}-\theta)}{1-2\theta\hat{\phi}+\theta^2}$$

  Para encontrar $\hat{\theta}$ resolvemos la ecuación cuadrática.

Método de Momentos - Estimación de Varianza

- Para todos los casos necesitamos estimar σ_e^2, inicialmente $\gamma_0 = Var(Y_t)$ que es la varianza muestral, con:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2$$

- **Para AR(p):** $\hat{\sigma}_e^2 = (1 - \hat{\phi}_1\gamma_1 - \hat{\phi}_2\gamma_2 - ... - \hat{\phi}_p\gamma_p)s^2$
- **Para MA(q):** $\hat{\sigma}_e^2 = \dfrac{s^2}{1 + \hat{\theta}_1^{\,2} + \hat{\theta}_2^{\,2} + ...\hat{\theta}_q^{\,2}}$
- **Para ARMA(1,1):** $\hat{\sigma}_e^2 = \dfrac{1 - \hat{\phi}^2}{1 - 2\hat{\theta}\hat{\phi} + \hat{\theta}^2}$

Esquema de simulación y estimación por Momentos

Modelo	Parámetros	Estimación	n
MA(1)	-0.9	-0.86	120
MA(1)	0.9	0.78	120
MA(1)	-0.9	-0.81	60
MA(1)	0.9	0.83	60
MA(1)	0.5	0.6	60
AR(1)	0.9	0.81	60
AR(1)	0.4	0.42	60
AR(2)	(1.5, -0.75)	(1.21, -0.52)	120

Ver código en R

Estimación de Mínimos Cuadrados

Autoregresivo:

- **AR(1):** $Y_t - \mu = \phi(Y_{t-1} - \mu) + e_t$,
  luego $e_t = (Y_t - \mu) - \phi(Y_{t-1} - \mu)$
  Así tenemos la suma de cuadrados condicionales:
  $S_c(\phi, \mu) = \sum_{t=2}^{n}[(Y_t - \mu) - \phi(Y_{t-1} - \mu)]^2$
  $$\frac{\delta S_c(\phi, \mu)}{\delta \mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} \approx \frac{\overline{Y} - \phi \overline{Y}}{1 - \phi} = \overline{Y}$$
  $$\frac{\delta S_c(\phi, \mu)}{\delta \phi} = 0 \Rightarrow \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(Y_t - \overline{Y})(Y_{t-1} - \overline{Y})}{\sum_{t=2}^{n}(Y_{t-1} - \overline{Y})^2}$$
- **AR(2):** $\hat{\mu} = \overline{Y}$, y por las ecuaciones de Yule-Walker estimadas
  $$\gamma_1 = \hat{\phi}_1 + \gamma_1 \hat{\phi}_2$$
  $$\gamma_2 = \gamma_1 \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2$$

Así sucesivamente para el orden p

Estimación Mínimos Cuadrados

Media Movil:

- **MA(1):** $Y_t = e_t - \theta e_{t-1}$
  Podemos escribirlo como un $AR(\infty)$,
  luego: $Y_t = -\theta Y_{t-1} - \theta^2 Y_{t-2} - ... + e_t$

$$S_c(\theta) = \sum (e_t)^2 = \sum [Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 Y_{t-2} + ...]^2$$

Esto se resume a un problema no linear, luego se resolverá con técnicas de optimización numérica, utilizando métodos de Gauss-Newton o Nerder-Meal

Estimación Máxima Verosimilitud

Ventaja: Se utiliza toda la información de los datos, inclusive el primer y segundo momento.
Desventaja: Trabaja con una función de densidad de probabilidad.

- **AR(1):** Asumimos $e_t \sim^{iid} N(0, \sigma_e^2)$, luego la $f.d.p$ marginal es $Y_t \sim N(\mu, \frac{\sigma_e^2}{(1-\phi^2)})$, así tenemos que:

$$L(\phi, \mu\sigma_e^2) = (2\pi\sigma_e^2)^{\frac{-n}{2}}(1-\phi^2)^{\frac{1}{2}} exp[-\frac{1}{2\sigma_e^2}S(\phi,\mu)]$$

  con $S(\phi, \mu) = \sum_{t=2}^{n}[(Y_t - \mu) - \phi(Y_{t-1} - \mu)]^2 + (1-\phi^2)(Y_1 - \mu)$
  Luego maximizamos el logaritmo de la función de cuadrados no condicionales para encontrar la estimación de los parámetros.

Propiedades de las estimaciones

AR(1)

Parámetros	Momentos	MCO	MV	n
0.9	0.831	0.857	0.892	60
0.4	0.470	0.473	0.465	60

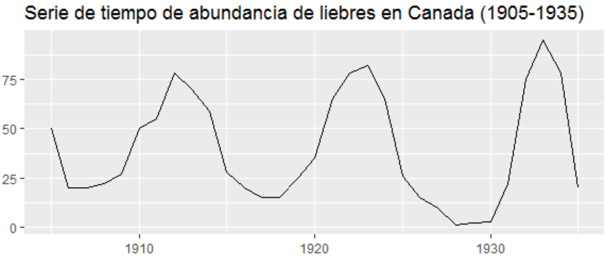
AR(2)

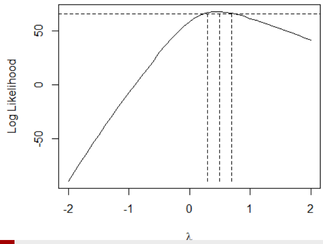
Parámetros	Momentos	MCO	MV	n
$\phi_1 = 1{,}5$	1.472	1.513	1.506	120
$\phi_2 = -0{,}75$	-0.767	-0.805	-0.796	120

ARMA(1,1)

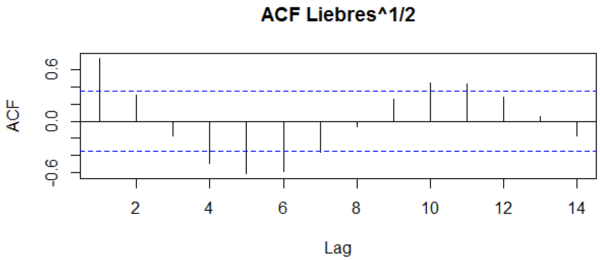
Parámetros	Momentos	MCO	MV	n
$\phi_1 = 0{,}6$	0.637	0.558	0.564	100
$\phi_2 = -0{,}3$	-0.206	-0.366	-0.355	100

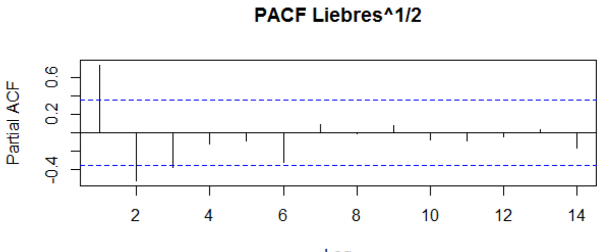
Diagnóstico del Modelo - Ejemplo practico



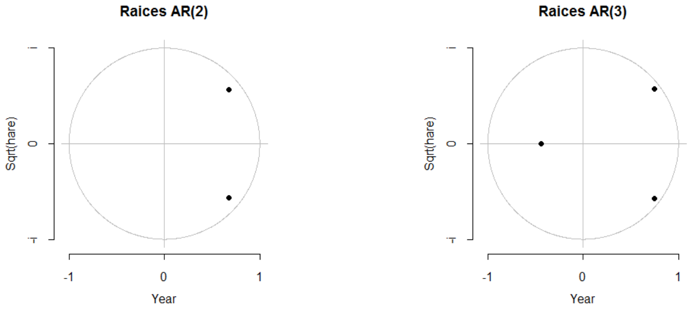


Especificación del Modelo - Serie de Tiempo Liebres





Ajuste del Modelo - Serie de Tiempo Liebres

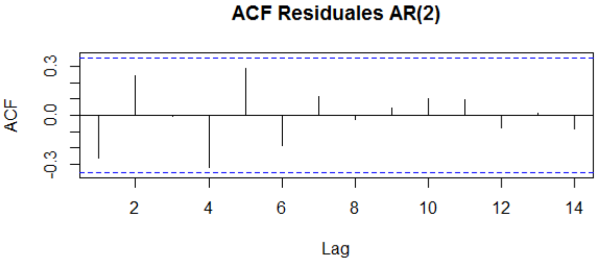


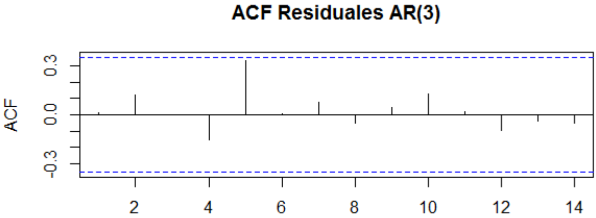
Diagnóstico del Modelo - ACF de los residuos

Para analizar la independencia del ruido del modelo, consideramos el ACF de los residuos. Los residuos están normalmente distribuidos con media cero y varianza $\frac{1}{n}$, luego los $\hat{\gamma}_k, \hat{\gamma}_j$ son aproximadamente no correlacionados.
Utilizamos el Test de Ljung-Box para contrastar la hipótesis de no correlación.

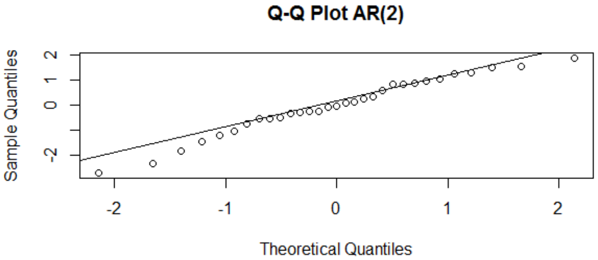
$$Q = n(n+2)\left(\frac{\hat{\gamma_1}^2}{n-1} + \frac{\hat{\gamma_2}^2}{n-2} + ... + \frac{\hat{\gamma_k}^2}{n-k}\right)$$

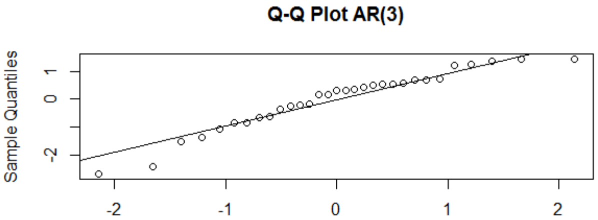
Diagnóstico del Modelo - Serie de Tiempo Liebres



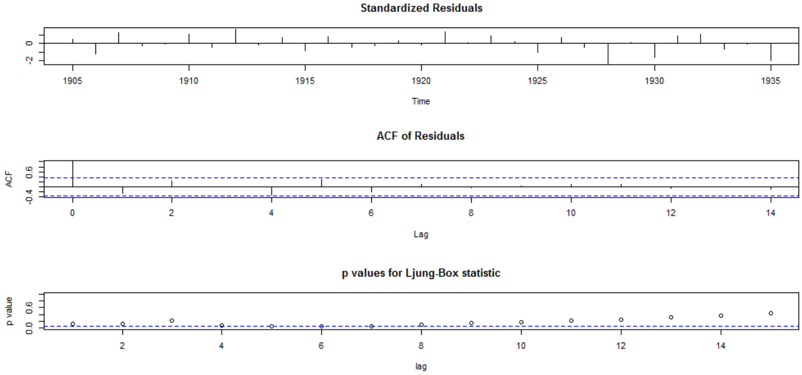


Diagnóstico del Modelo - Serie de Tiempo Liebres

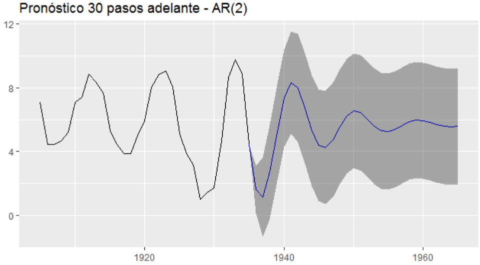


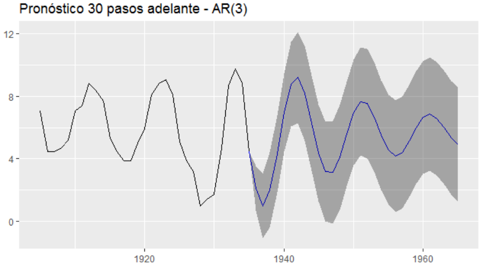


Diagnóstico del Modelo - Serie de Tiempo Liebres



Pronóstico del Modelo - Serie de Tiempo Liebres





Pronóstico del Modelo

- **AR(1):**

$$\begin{aligned} Y_t - \mu &= \phi(Y_{t-1} - \mu) + e_t \\ Y_{t+1} - \mu &= \phi(Y_t - \mu) + e_{t+1} \\ \hat{Y}_t(1) - \mu &= \phi(E(Y_t | Y_1, Y_2, ..., Y_t) - \mu) + E(e_{t+1} | Y_1, Y_2, ..., Y_t) \\ \hat{Y}_t(1) &= \mu + \phi(Y_t - \mu) \end{aligned}$$

Para el tiempo w tenemos:

$$\hat{Y}_t(w) = \mu + \phi[\hat{Y}_t(w-1) - \mu]$$

para $w > 1$
De manera recursiva podemos ver:

$$\hat{Y}_t(w) = \mu + \phi^w(Y_t - \mu)$$

Pronóstico del Modelo

- **MA(1):**

$$Y_t = \mu + e_t - \theta e_{t-1}$$
$$\hat{Y}_t(1) = \mu - \theta E(e_t | Y_1, Y_2, ..., Y_t)$$
$$\hat{Y}_t(1) = \mu - \theta e_t$$

En general

$$\hat{Y}_t(w) = \mu + E(e_{t+w} | Y_1, Y_2, ..., Y_t) - \theta E(e_{t+w-1} | Y_1, Y_2, ..., Y_t)$$

para $w > 1$, e_{t+w} y e_{t+w-1} son independientes de $Y_1, Y_2, ..., Y_t$, luego

$$\hat{Y}_t(w) = \mu$$

para $w > 1$

Pronóstico del Modelo

Predicción de limites de confianza:
Si el componente estadístico es normalmente distribuido, entonces el error de pronóstico dado por:

$$e_t(w) = Y_{t+w} - \hat{Y}_t(w)$$

también está normalmente distribuido, luego para un nivel de confianza de $1-\alpha$ tenemos que:

$$P\left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{Y_{t+w} - \hat{Y}_t(w)}{\sqrt{Var(e_t(w))}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

luego un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\,\%$ ara Y_{t+w} está dado por:

$$\hat{Y}_t(w) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(e_t(w))}$$


THANK
YOU
GRACIAS
ARIGATO
SHUKURIA
BİYAN
SHUKRIA
DANKSCHEEN
TINGKI
YAQHANYELAY
TASHAKKUR ATU
SUKSAMA
EKHMET
GRAZIE
MEHRBANI
KOMAPSUMNIDA
MAAKE
PALDIES
GOZAIMASHITA
EFCHARISTO
JUSPAXAR
BOLZÏN
MERCI