Modelos de series de tiempo multivariadas VAR(p)

Javier López

Universidad los Libertadores

Abril, 2020

Índice

1 Introducción

2 VAR(p)

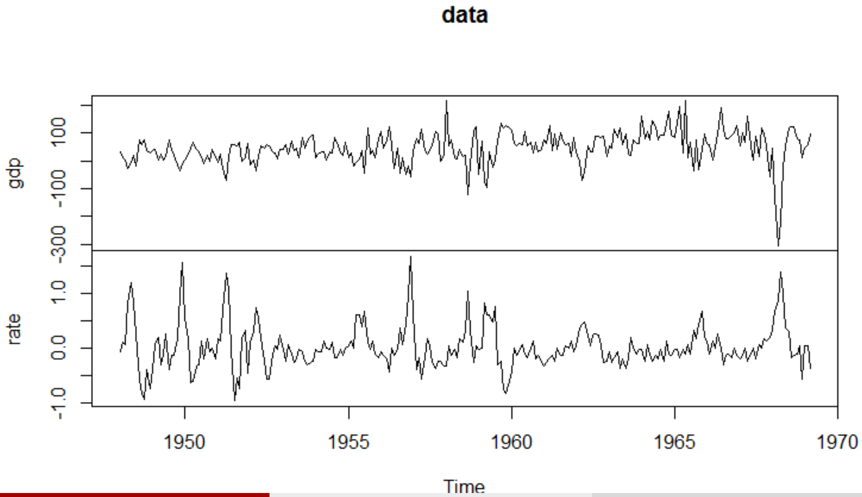
3 Especificación del Modelo

Introducción

Como habíamos vistos anteriormente en series de tiempo univariadas, uno de nuestros objetivos es realizar pronósticos de una variable, ahora en series de tiempo multivariadas vamos a tener un vector aleatorio compuesto por varias series de tiempo univariadas relacionadas entre si buscando el mismo objetivo.

Ejemplo PIB y Desempleo en EEUU

Sea el vector aleatorio $\mathbf{Y_t} = (Y_{1t}, Y_{2t})$, donde Y_{1t} es el PIB de EEUU y Y_{2t} es la tasa de desempleo en EEEUU.



Objetivos de las series de tiempo multivariadas

Sea el vector aleatorio k-dimensional $\mathbf{Y_t} = (Y_{1t}, Y_{2t}, ..., Y_{kt})$, luego los objetivos son:

- Definir funciones $f_1, f_2, ..., f_k$ que nos permitan realizar pronósticos.
- Encontrar la interrelación entre las variables.

Estacionario

Débilmente estacionario

$\mathbf{Y_t}$ es débilmente estacionario si $\mathbb{E}(\mathbf{Y_t}) = \mu$ y
$Cov(\mathbf{Y_t}) = \mathbb{E}[(\mathbf{Y_t} - \mu)(\mathbf{Y_t} - \mu)']= \Sigma_Y$ $(k \times k)$ es semidefinida positiva

Estrictamente estacionario

$\mathbf{Y_t}$ es estrictamente estacionario si la función de densidad de probabilidad conjunta de $(Y_{t1}, ..., Y_{tk})$ es la misma de $(Y_{t,k+1}, ..., Y_{t,k+j})$ donde k y j son arbitrarios.

Covarianza

Covarianza Cruzada

$$\Gamma_l = Cov(\mathbf{Y_t}, \mathbf{Y_{t-l}}) = \mathbb{E}[(\mathbf{Y_t} - \mu)(\mathbf{Y_{t-l}} - \mu)']$$

Γ_0 es la matriz de covarianza de $\mathbf{Y_t}$
Note que el (i, j) elemento de $\Gamma_l = \Gamma_l[\gamma_{l,ij}]$ es $\gamma_{l,ij}$, donde $\gamma_{l,ij}$ es la covarianza entre $Y_{i,t}$ y $Y_{j,t-l}$
Esta mide la dependencia lineal de Y_{it} y el l-ésimo rezago de Y_{jt}

Correlación

Matriz de Correlación Cruzada - CCM (en inglés)

$$\rho_{\mathbf{l}} = D^{-1}\Gamma_l D^{-1} = [\rho_{l,ij}]$$

Donde $D = diag\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ con $\sigma_i^2 = Var(Y_{it}) = \gamma_{0,ij}$ que es el ij-ésimo elemnto de Γ_0

Correlación Muestral

CCM Muestral

- $\hat{\mu}_y = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \mathbf{Y_t}$
- $\hat{\Gamma}_0 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(\mathbf{Y_t} - \hat{\mu_y})(\mathbf{Y_t} - \hat{\mu_y})^{l}$
- $\hat{\Gamma}_l = \dfrac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(\mathbf{Y_t} - \hat{\mu_y})(\mathbf{Y_{t-l}} - \hat{\mu_y})^{l}$
- $\hat{\rho}_l = \hat{D}^{-1}\hat{\Gamma}_l\hat{D}^{-1}$, donde $\hat{D} = diag\{\hat{\gamma_{0,11}}^{1/2}, ..., \hat{\gamma_{0,kk}}^{1/2}\}$
  y $\hat{\gamma_{0,ii}}$ es el elemento (i, i) de Γ_0

Esta se puede ver como una generalización del ACF univariado para $\mathbf{Y_t}$

Testeando correlación cruzada

Deseamos detectar la existencia de dependencia lineal dinámica en los datos. Formalmente es contrastar la siguiente hipótesis:

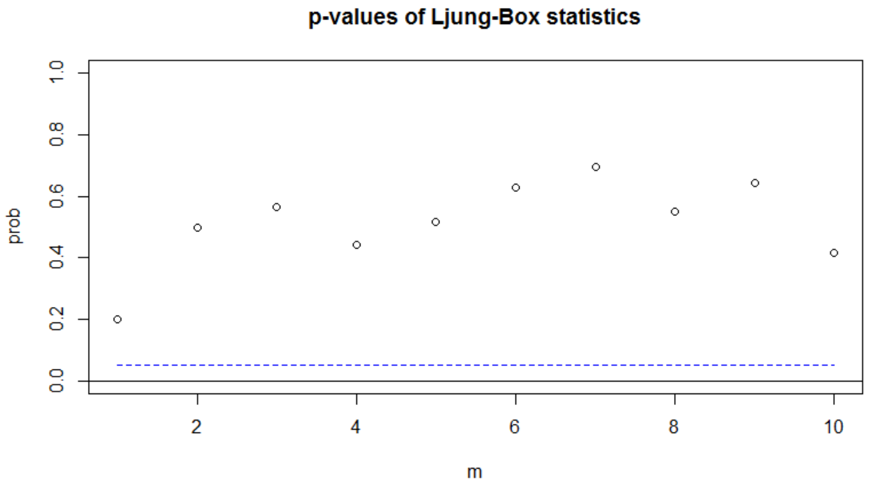
$$H_0 : \rho_1 = ... = \rho_m = 0$$
$$H_a : \rho_i \neq 0$$

Test de Ljung-Box

$$Q_k(m) = n^2 \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{n-l} tr(\hat{\Gamma}_l^l \hat{\Gamma}_0^{-1} \hat{\Gamma}_l^l \hat{\Gamma}_0^{-1})$$

donde $tr(A)$ es la traza de una matriz A.
$Q_k(m)$ es asintoticamente distribuida Chi-cuadrado con mk^2

Correlación cruzada



VAR(p)

$$\mathbf{Y}_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \mathbf{Y}_{t-i} + \mathbf{a}_t$$

Donde ϕ_0 es k-dimensional, ϕ_i es de dimensión $(k \times k)$, $i > 0$
$\mathbf{a}_t$ es iid com media cero y matriz de varianza Σ_a definida positiva.

Notación:

$$\phi(B)\mathbf{Y_t} = \phi_0 + \mathbf{a}_t$$

Donde $\phi(B) = I_k - \sum_{i=1}^{p} \phi_i B^i$ es una matriz polinomial de grado p
$\phi_l = [\phi_{l,ij}]$ donde $\phi_{l,ij}$ es el l-ésimo rezago de la matriz de coeficientes AR

Ejemplo VAR(1)

$$\mathbf{Y_t} = \phi_0 + \phi_1 \mathbf{Y_{t-1}} + \mathbf{a_t}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{10} \\ \phi_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{1,11} & \phi_{1,12} \\ \phi_{1,21} & \phi_{1,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

o su equivalente

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \phi_{10} + \phi_{1,11} Y_{1,t-1} + \phi_{1,12} Y_{2,t-1} + a_{1t} \\ y_{2t} &= \phi_{20} + \phi_{1,21} Y_{1,t-1} + \phi_{1,22} Y_{2,t-1} + a_{2t} \end{aligned}$$

$\phi_{1,12}$ muestra la dependencia lineal de Y_{1t} sobre $Y_{2,t-1}$ en presencia de $Y_{1,t-1}$

Estacionariedad del VAR(p)

$\phi(B)\mathbf{Y_t} = \phi_0 + \mathbf{a}_t$ donde $\phi(B) = I_k - \sum_{i=1}^{p} \phi_i B^i$
usando series expandidas podemos escribir:

$$\mathbf{Y_t} = \Phi\mathbf{Y_{t-1}} + \mathbf{b_t}$$

donde:

$$\mathbf{b_t} = (\mathbf{a_t}^{\prime}, \mathbf{0}^{\prime})$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

luego, para que el modelo sea estacionario el determinante de $|\mathbf{I} - \mathbf{\Phi B}| = 0$ debe ser mayor que 1 en valor absoluto.

Especificación del Modelo

Test secuencial de razón de verosimilitud

$H_0 : \phi_s = 0$ Vs $H_a : \phi_s \neq 0$

$\Lambda = \frac{max\{L(B_{s-1;\Sigma_a})\}}{max\{L(B_{s;\Sigma_a})\}} = \left(\frac{|\hat{\Sigma}_{a,s}|}{|\hat{\Sigma}_{a,s-1}|} \right)^{\frac{n-s}{2}}$, se distribuye $\chi^2_{k^2}$

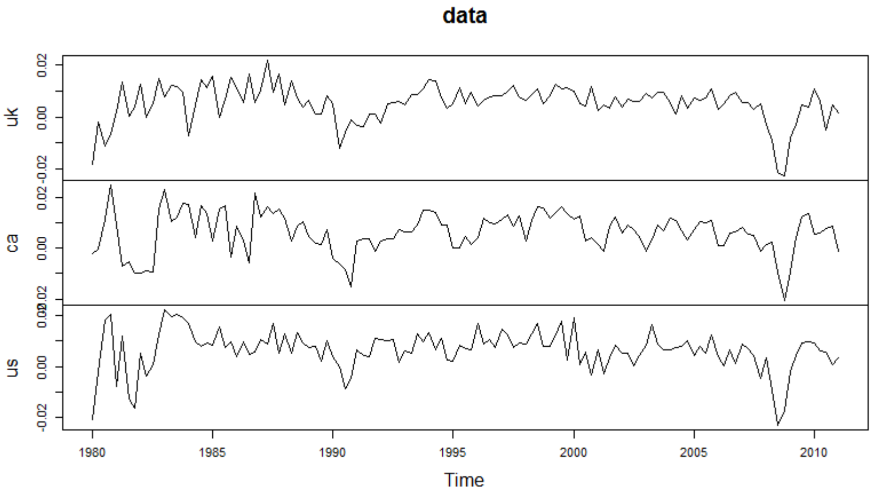
Criterios de información

$$AIC(s) = ln|\hat{\Sigma}_{a,s}| + \frac{2}{n} sk^2$$

$$BIC(s) = ln|\hat{\Sigma}_{a,s}| + \frac{ln(n)}{n} sk^2$$

$$HQ(s) = ln|\hat{\Sigma}_{a,s}| + \frac{2ln(ln(n))}{n} sk^2$$

Ejemplo: PIB Reino Unido, Canada y EEUU



Criterios de información para serie de PIB

p	AIC	BIC	HQ
0	-30.96	-30.96	-30.96
1	-31.88	-31.68	-31.80
2	-31.96	-31.56	-31.80
3	-31.92	-31.31	-31.68
4	-31.90	-31.08	-31.57
5	-31.78	-30.76	-31.37
6	-31.71	-30.49	-31.21
7	-31.62	-30.19	-31.04
8	-31.76	-30.13	-31.10
9	-31.69	-29.86	-30.95
10	-31.60	-29.56	-30.77
11	-31.60	-29.36	-30.69
12	-31.62	-29.17	-30.63
13	-31.67	-29.02	-30.60


THANK
YOU
GRACIAS
ARIGATO
SHUKURIA
DANKSCHEEN
BIYAN
SHUKRIA
TINGKI
YAQHANYELAY
TASHAKKUR ATU
SUKSAMA
EKHMET
GOZAIMASHITA
EFCHARISTO
JUSPAXAR
KOMAPSUMNIDA
MAAKE
GRAZIE
MEHRBANI
PALDIES
BOLZIN
MERCI