Series de Tiempo
Modelos ARMA(p,q)

Edgar Javier López Moreno

Universidad los Libertadores

Marzo, 2020

Índice

Proceso Lineal General

$\{Y_t\}$ Serie de tiempo observada

$\{e_t\}$ Serie de ruido blanco no observada, iid de media cero y varianza constante

Proceso lineal general

$Y_t = e_t + \Psi_1 e_{t-1} + \Psi_2 e_{t-2} + \ldots$, con $\sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i^2 < \infty$

Sin perdida de generalidad tenemos que $\Psi_j = \theta^j$ donde $\theta \in (-1, 1)$, entonces
$Y_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \phi^3 e_{t-3} + \ldots$

Propiedades

Esperanza

$E(Y_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i E(e_{t-i}) = 0$

Varianza

$Var(Y_t) = \sum_{i=0}^{\infty} Var(\phi^i e_{t-i}) = \sigma_e^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \ldots) = \sigma_e^2(\frac{1}{1-\phi^2})$

Covarianza

$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i e_{t-i}, \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i e_{t-1-i}) = \phi\sigma_e^2(\frac{1}{1-\phi^2})$

Correlación

$Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-1})}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t-1})}} = \phi$

Proceso de Media Móvil

El proceso de media móvil de orden q MA(q) fue trabajado por Slutsky en 1927 y Wold en 1938 y se define como sigue:

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$$

donde e_t es ruido blanco

Ejemplo MA(1): $Y_t = e_t - \theta e_{t-1}$

Esperanza

$E(Y_t) = 0$

Varianza

$\gamma_0 =$Var(Y$_t$) $= \sigma_e^2(1+\theta^2)$

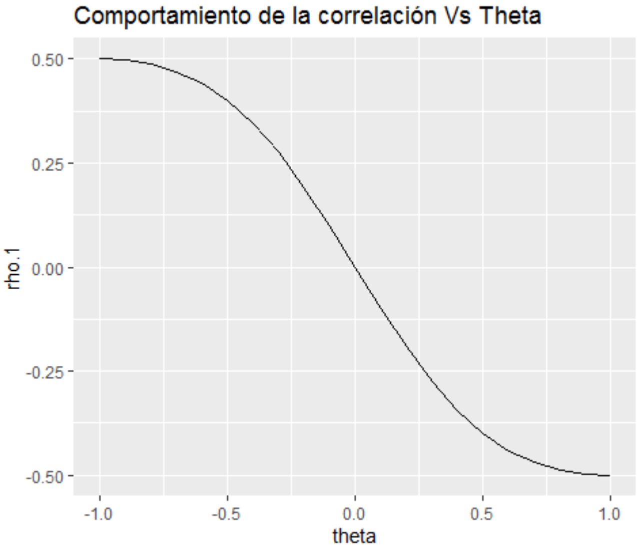
Covarianza

$$\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(e_t - \theta e_{t-1}, e_{t-1} - \theta e_{t-2})$$
$$= \text{Cov}(\text{-}\theta e_{t-1}, e_{t-1})$$
$$= \text{-}\theta\sigma_e^2$$

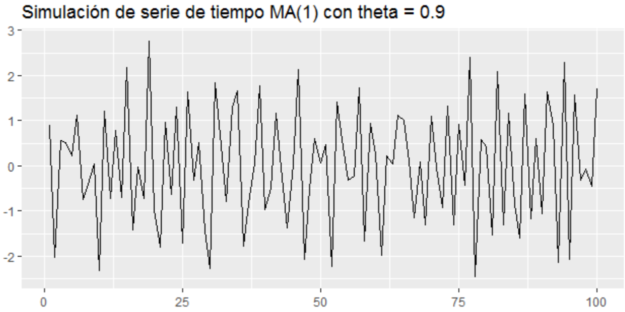
Correlación

$$\rho_1 = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-1})}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t-1})}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$
$\rho_k = 0$ para $k = 2, 3, 4, \ldots$

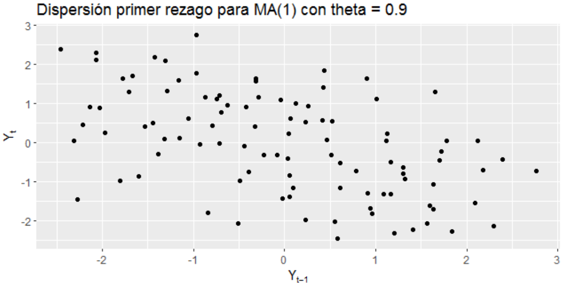
Gráficos MA(1)

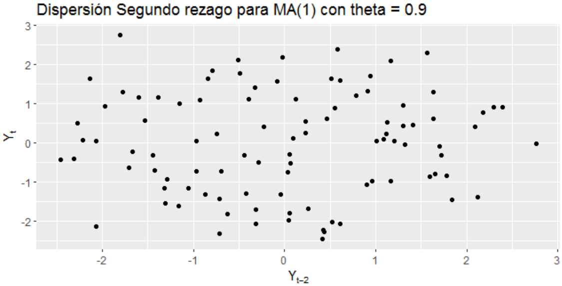


Simulación MA(1): Serie temporal



Simulación MA(1): Correlación





Ejemplo MA(2): $Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$

Esperanza

$E(Y_t) = 0$

Varianza

$\gamma_0 = \sigma_e^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$

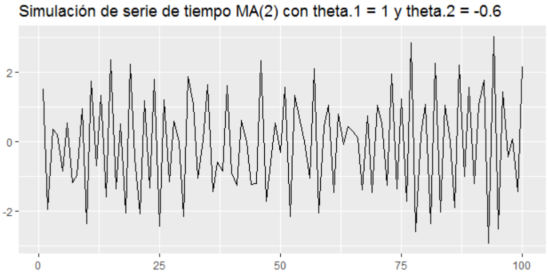
Covarianza

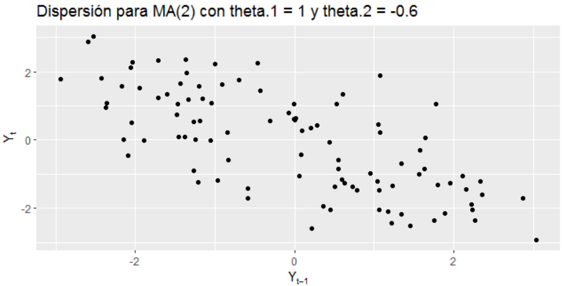
$\gamma_1 = \sigma_e^2 \theta_1(\theta_2 - 1)$
$\gamma_2 = -\theta_2 \sigma_e^2$

Correlación

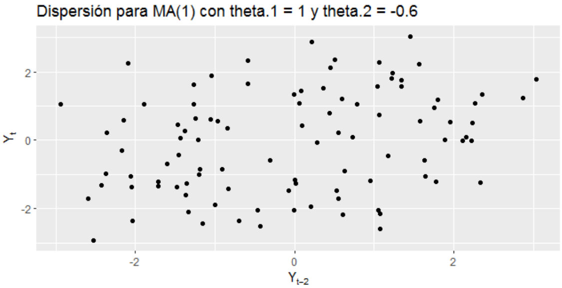
$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$
$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$
$\rho_k = 0$ para $k = 3, 4, 5, \ldots$

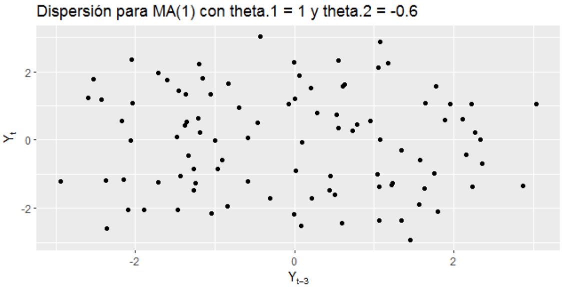
Simulación MA(2): Serie temporal y correlación





Simulación MA(2): Correlación





MA(q): $Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$

Varianza

$$\gamma_0 = \sigma_e^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2)$$

Correlación

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2} & , \quad k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & , \quad k > q \end{cases}$$

Procesos Autoregresivo

Como su nombre lo indica, son regresiones en si mismas. Fue utilizado por Yule en 1926 y se define de la siguiente manera:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} + e_t$$

donde Y_t es una combinación lineal de los p valores pasados más recientes y e_t ruido blanco que no es explicado por valores pasados. Notación de AR(p).

Ejemplo AR(1): $Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$

Esperanza

$E(Y_t) = 0$

Varianza

$\gamma_0 = Var(Y_t) = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}$, con $|\phi| < 1$

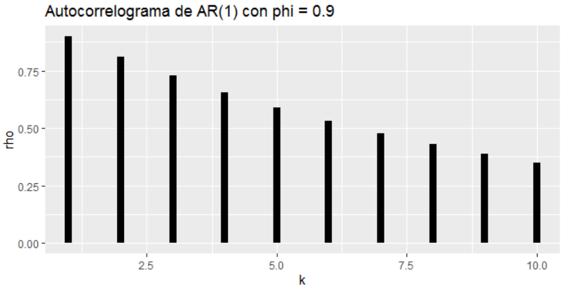
Covarianza

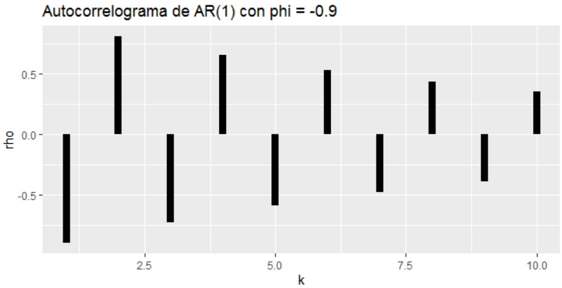
$\gamma_k = \phi\gamma_{k-1} = \phi^k \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$

Correlación

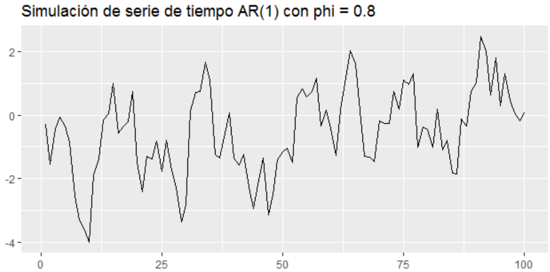
$\rho_k = \phi^k$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$

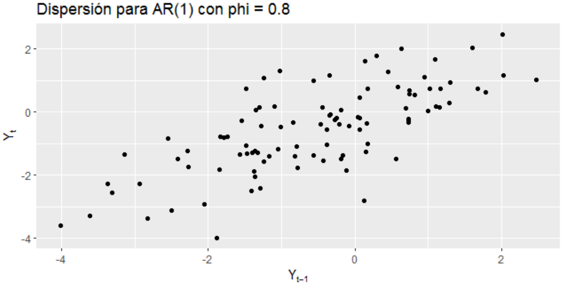
Gráficos AR(1)



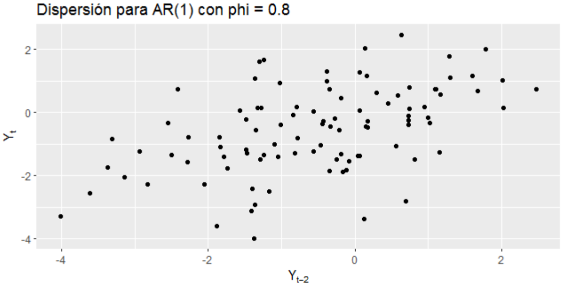


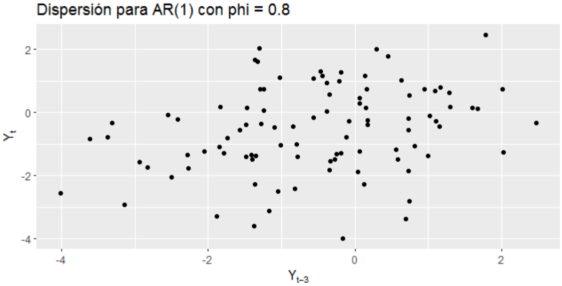
Simulación AR(1): Serie Temporal y correlación





Simulación AR(1): Correlación





AR(1) como MA(∞)

Si en un AR(1) reemplazamos t por $t-1$ tenemos que:

$$Y_{t-1} = \phi Y_{t-2} + e_{t-1}$$

así,

$$Y_t = \phi(\phi Y_{t-2} + e_{t-1}) + e_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 Y_{t-2}$$

Si se repite el proceso $k-1$ veces tenemos que:

$$Y_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \ldots + \phi^{k-1} e_{t-k+1} + \phi^k Y_{t-k}$$

luego, asumiendo $|\phi| < 1$ y haciendo k tendiendo a infinito, tenemos que:

$$Y_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \ldots$$

un MA(∞)

Ejemplo AR(2): $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t$

Polinomio característico

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$$

Se requiere que las raíces del polinomio característico deben ser mayores que 1 para que el proceso AR(2) sea estacionario, luego se debe garantizar que:

- $\phi_1 + \phi_2 < 1$
- $\phi_1 - \phi_2 < 1$
- $|\phi_2| < 1$

Propiedades AR(2)

Covarianza - Ec. Yule-Walker

$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$

Correlación

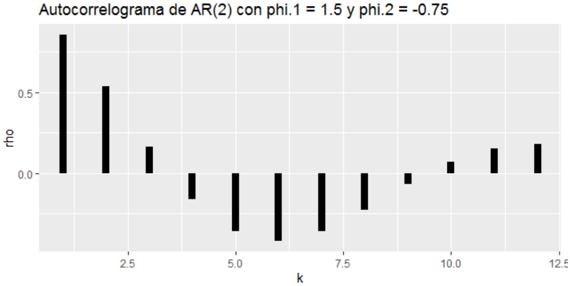
$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$

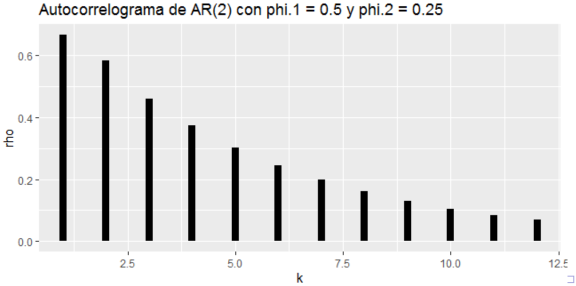
Particularmente para $k = 1$ tenemos que:

$$\rho_0 = 1$$

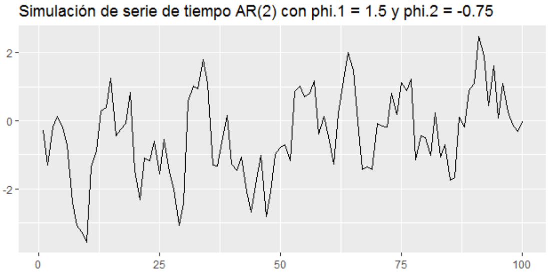
$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

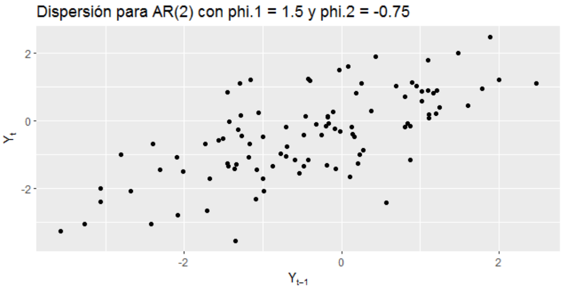
Gráficos AR(2)



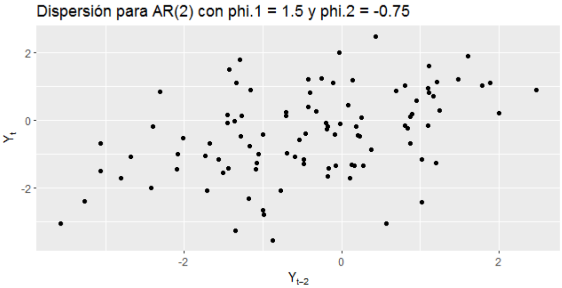


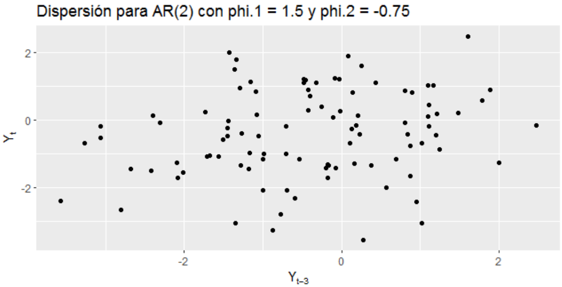
Simulación AR(2): Serie Temporal y correlación





Simulación AR(2): Correlación





AR(p): $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} + e_t$

Estacionariedad AR(p)

A partir de las raices del polinomio característico

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - ... - \phi_p x^p = 0$$

se debe cumplir que:

- $\phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_p < 1$
- $|\phi_p| < 1$

Correlación AR(p)

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \phi_3 \rho_{k-3} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p}$$

y usando $\rho_0 = 1$ y $\rho_{-k} = \rho_k$ tenemos que:

Ecuaciones de Yule-Walker

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 + \ldots + \phi_p \rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \phi_3 \rho_1 + \ldots + \phi_p \rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_k &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \phi_3 \rho_{p-3} + \ldots + \phi_p
\end{aligned}$$

ARMA(p,q)

El modelo ARMA(p,q), es un modelo mixto definido como sigue:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - ... - \theta_q e_{t-q}$$

Ejemplo ARMA(1,1): $Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1}$

La función de covarianza y correlación están dadas por:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi\gamma_1 + (1 - \theta(\phi - \theta))\sigma_e^2 \\
\gamma_1 &= \phi\gamma_0 - \theta\sigma_e^2 \\
\gamma_k &= \phi\gamma_{k-1}
\end{aligned}$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones, tenemos que:

$$\gamma_0 = \frac{(1 - 2\phi\theta + \theta^2)}{1 - \phi^2}\sigma_e^2$$

y por recursión tenemos que:

$$\rho_k = \frac{(1 - \phi\theta)(\phi - \theta)}{1 - 2\theta\phi + \theta^2}\phi^{k-1}$$

para $k > 1$

Gráficas de función de autocorrelación

Se dejan como ejercicio


THANK
YOU
GRACIAS
ARIGATO
SHUKURIA
BİYAN
SHUKRIA
DANKSCHEEN
TASHAKKUR ATU
YAQHANYELAY
SUKSAMA
EKHMET
TINGKI
GRAZIE
MEHRBANI
BOLZÏN
MERCI
GOZAIMASHITA
EFCHARISTO
JUSPAXAR
KOMAPSUMNIDA
MAAKE
PALDIES
SPASSIBO
SNACHALHUYA
NUHUN
CHALTU
WABEEJA
MAITEKA
HUI
SPASIBO
DENKAUJA
NENACHALHYA
ATTO
SIKOMO
MINMONCHAR
TAVTAPUCH
MEDAWAGSE
MERASTAWHY
GAEJTHO
AGUYJE
FAKAAUE
LAH
GUI
HATUR
EKOJU
MAKETAI
SANCO
BAIIKA