University of Ljubljana
Faculty of Mathematics and Physics

5. naloga
FFT in autokorelacije

Ma-Fi praktikum 2020/21

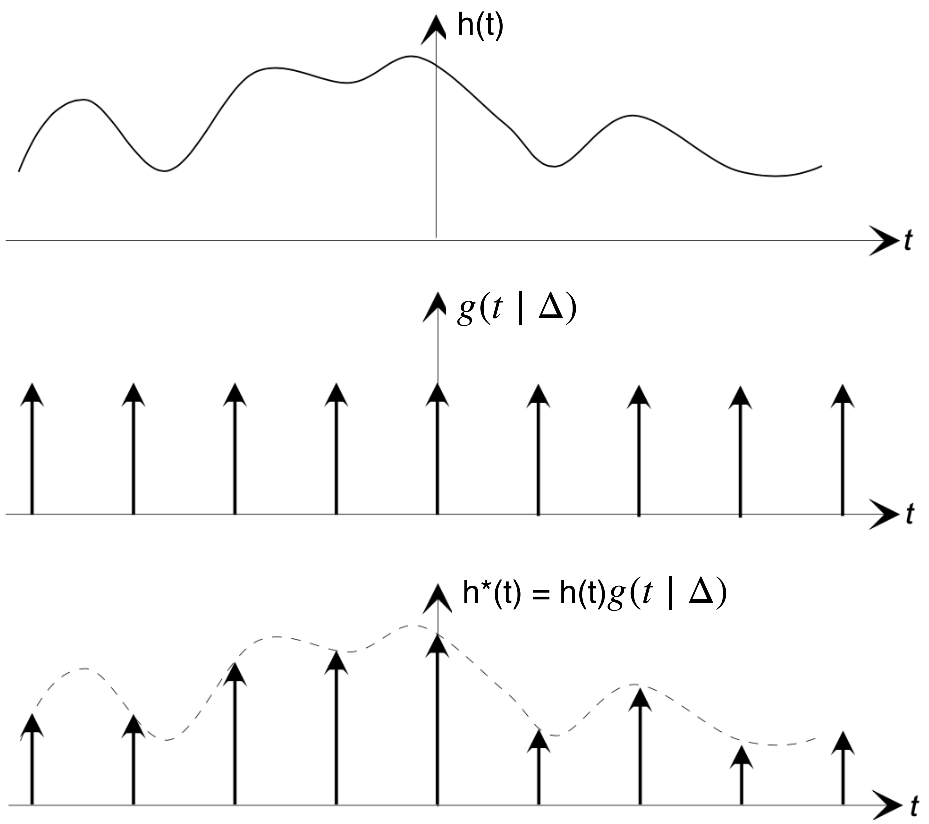
FT - malo bolj matematično…

- Današnji debati bo koristilo, če pristopimo k FT še z malo več matematičnega formalizma, kot nadgradnjo prejšnjega tedna.
  - Vpeljimo DFT z uporabo 'Diracovega glavnika':

$$g(t \mid \Delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta)$$

ki predstavlja diskretno vzorčenje funkcije h(t):

$$h^*(t) = h(t)g(t \mid \Delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t)\delta(t - n\Delta)$$



  - Seveda lahko tudi kar zapišemo vsoto tudi s komponentami $h_n = h(t_n = n\Delta)$:

$$h^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \delta(t - n\Delta)$$

- S pomočjo tega zapisa lahko FT vzorčene funkcije h*(t) zelo hitro izračunamo:

$$H^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) e^{-i2\pi f t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\delta(t - n\Delta) e^{-i2\pi f t}\, dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-i2\pi f n\Delta}$$

FT - malo bolj matematično…

- Diracov glavnik pa lahko zapišemo tudi z neskončno (Fourierovo) vrsto:

$$g(t \mid \Delta) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i2\pi n t}{\Delta}}$$

- In potem izračunamo FT kot:

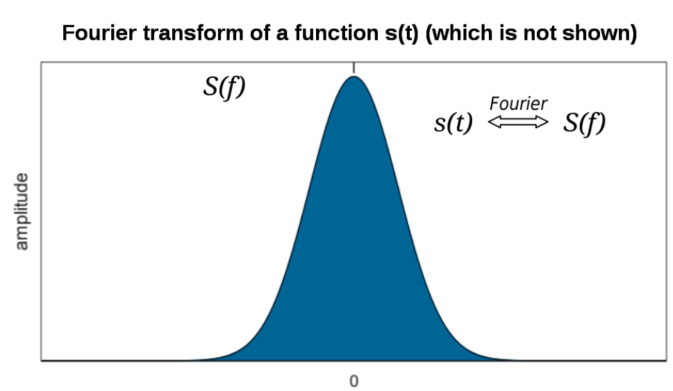
$$H^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) e^{-i2\pi f t}\, dt$$

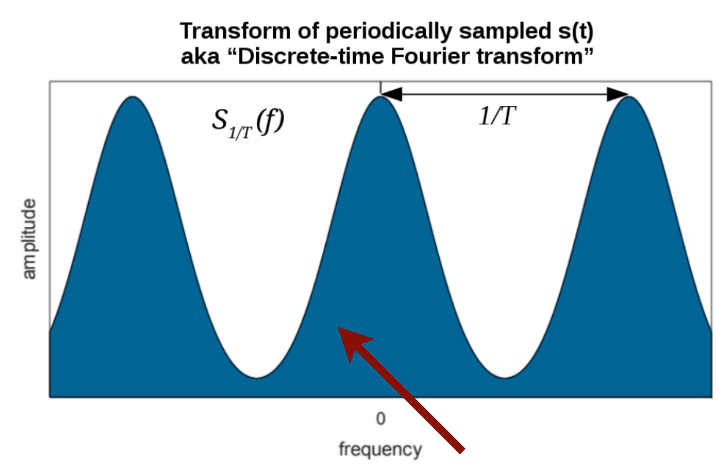
$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{\frac{i2\pi n t}{\Delta}} e^{-i2\pi f t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f - \frac{n}{\Delta})$$

  - Vzorčenje je torej povzročilo neintuitiven rezultat, da je FT vzorčene funkcije neskončna vsota za diskretne frekvence n/Δ premaknjenih FT nevzorčene funkcije (pa še faktor $1/\Delta$ …).

H(f)





H*(f)

tudi druga izpeljava Sampling teorema (aliasing…)

FT - malo bolj matematično…

- Diracov glavnik pa lahko zapišemo tudi z neskončno (Fourierovo) vrsto:

$$g(t \mid \Delta) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i2\pi n t}{\Delta}}$$

- In potem izračunamo FT kot:

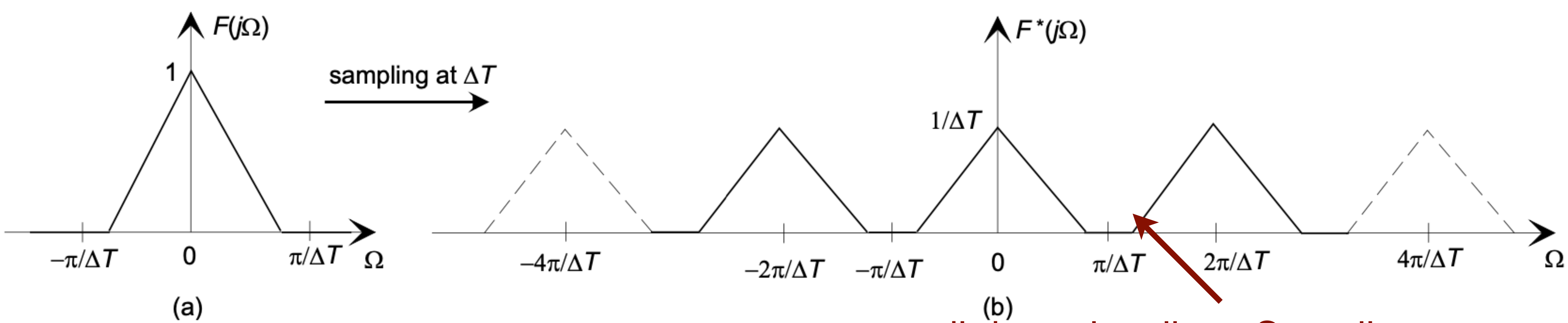
$$H^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) e^{-i2\pi f t} \, dt$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{\frac{i2\pi n t}{\Delta}} e^{-i2\pi f t} \, dt$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f - \frac{n}{\Delta})$$

funkcija zdaj periodična na intervalu širine 1/Δ !

- Vzorčenje je torej povzročilo neintuitiven rezultat, da je FT vzorčene funkcije neskončna vsota za diskretne frekvence n/Δ premaknjenih FT nevzorčene funkcije (pa še faktor $1/\Delta$ …).



tudi druga izpeljava Sampling teorema (aliasing…)

FT - malo bolj matematično…

- Recimo, da imamo opravka s končno (N) točkami vzorčenja. Kot smo že pisali, je potem celotni čas vzorčenja T enak T=$N\Delta$. Za diskretno frekvenco f_k = k/T (k=0,…,N-1) je potem diskretna vsota:

$$H^*(f_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n\, e^{-i2\pi f_k n\Delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n\, e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n^T e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}$$

KONČNA vsota čez periodo!

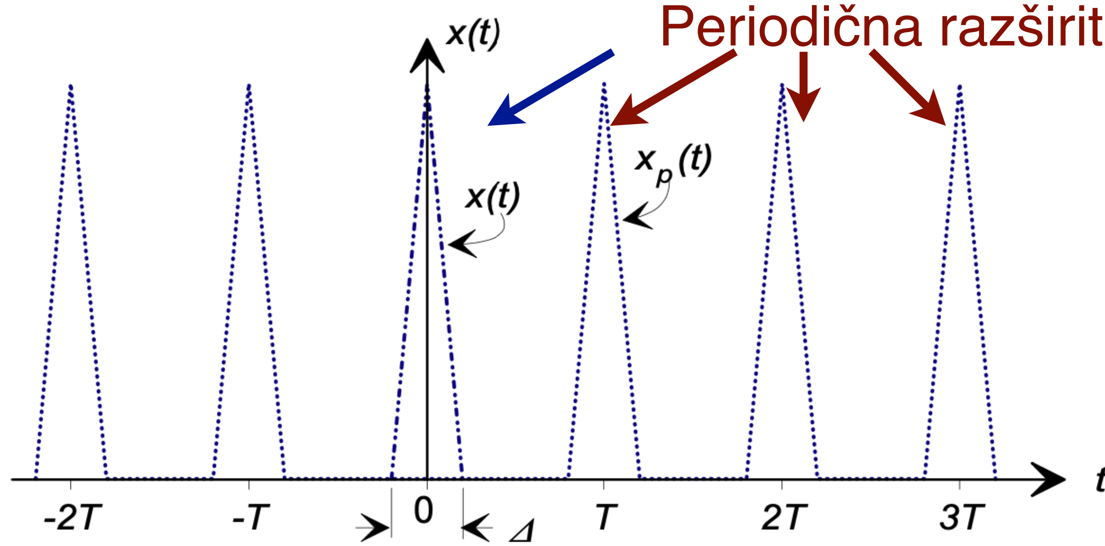
- Uvedli smo periodično razširjeno vsoto:

$$h_n^T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{n-mN} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n\Delta - mN\Delta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(t_n - mT)$$

naša funkcija je zdaj periodična na intervalu širine T

- Če je bila funkcija h(t) periodična v N točkah na intervalu [0,T), smo reproducirali funkcijo v celoti…
  - Drugače pa je naša funkcija postala periodična s periodo T, hoteli to, ali ne…

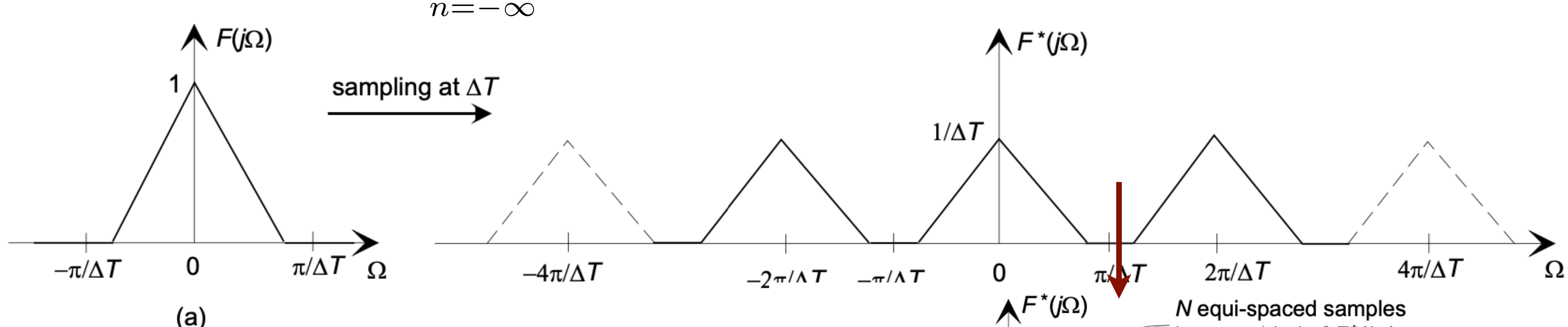
Periodična razširitev originalne funkcije…



FT - malo bolj matematično…

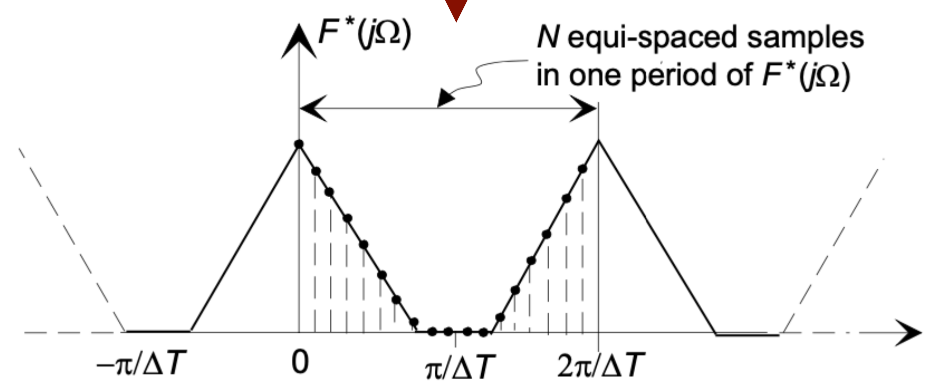
- Ker imamo omejene frekvence f_k = k/T (k=0,…,N-1) smo se omejili na interval (0,ν_s) - oziroma na $(-\nu_c, +\nu_c)$ - in tako dobimo preprost izraz (brez ponovitev):

$$H^*(f) = \frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f-\frac{n}{\Delta}) \quad \Longrightarrow \quad H^*(f_k) = \frac{1}{\Delta}H(f_k) = H_k$$



- Tako končno reproduciramo:

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n^T e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}$$



- Po enakem postopku lahko dobimo še inverz (samo za ponovitev):

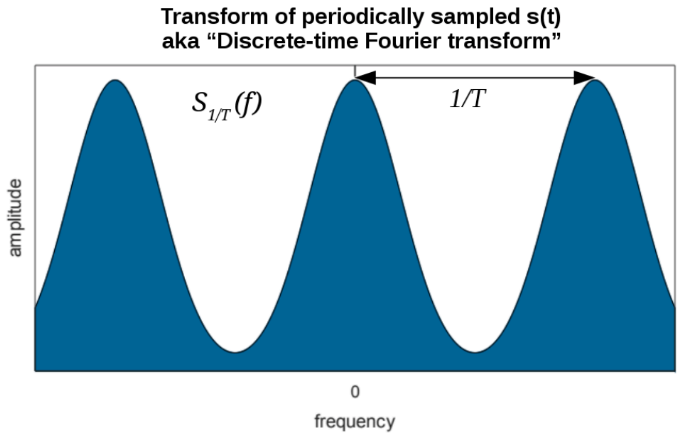
$$h_n^T = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{+\frac{i2\pi kn}{N}}$$

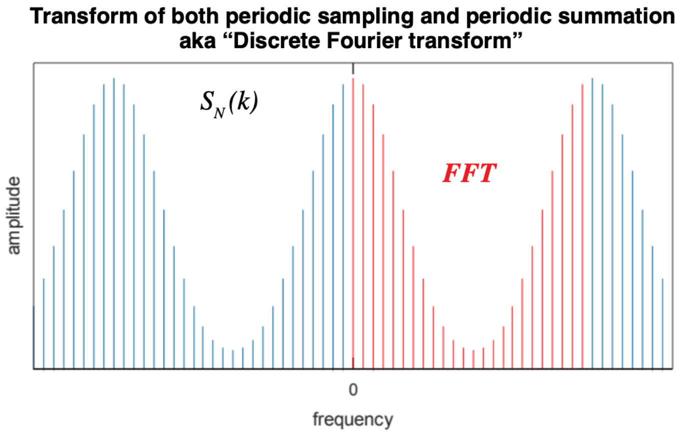
očitna periodičnost pri nadaljevanju n onkraj N …

FT - malo bolj matematično…

- Ker imamo omejene frekvence f_k = k/T (k=0,…,N-1) smo se omejili na interval (0,ν_s) - oziroma na $(-\nu_c, +\nu_c)$ - in tako dobimo preprost izraz (brez ponovitev):

$$H^*(f) = \frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f - \frac{n}{\Delta}) \quad \Longrightarrow \quad H^*(f_k) = \frac{1}{\Delta}H(f_k) = H_k$$





- Tako končno reproduciramo DFT formulo:

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n^T e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}$$

- Po enakem postopku lahko dobimo še inverz (samo za ponovitev):

$$h_n^T = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{+\frac{i2\pi kn}{N}}$$

očitna periodičnost pri nadaljevanju n onkraj N …

Korelacije in Autokorelacije

- Poznamo tri zapise (auto)korelacij, odvisno od vrste funkcije:
  - Za neskončno funkcijo (povprečimo):

$$\phi_{ff}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t$$

zakasnitev

  - Za končno funkcijo, neničelno na intervalu $[t_1,t_2]$ (ne povprečimo):

$$\rho_{ff}(\tau) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t$$

  - Za periodično funkcijo (povprečimo po periodi):

$$\phi_{ff}(\tau) = \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t$$

tudi autokorelacijska funkcija ima enako periodo T

Korelacije in Autokorelacije

- Nekaj lastnosti autokorelacijskih funkcij:
  - So sode funkcije zakasnitve (τ).
  - Maksimalno vrednost autokor. funkcije dosežejo pri τ=0.
    - Ustreza energiji oziroma moči :

$$E = \rho_{ff}(0) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)^2 \mathrm{d}t \qquad P = \phi_{ff}(0) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t)^2 \mathrm{d}t$$

  - Avtokor. funkcije nimajo fazne informacije in so neodvisne od časovnega intervala.
    - Velja z uporabo razuma, glede na definicijo…

  - Če je f(t) neperiodična, s povprečjem nič, potem velja:

$$\lim_{\tau \to \infty} \rho_{ff}(\tau) = 0$$

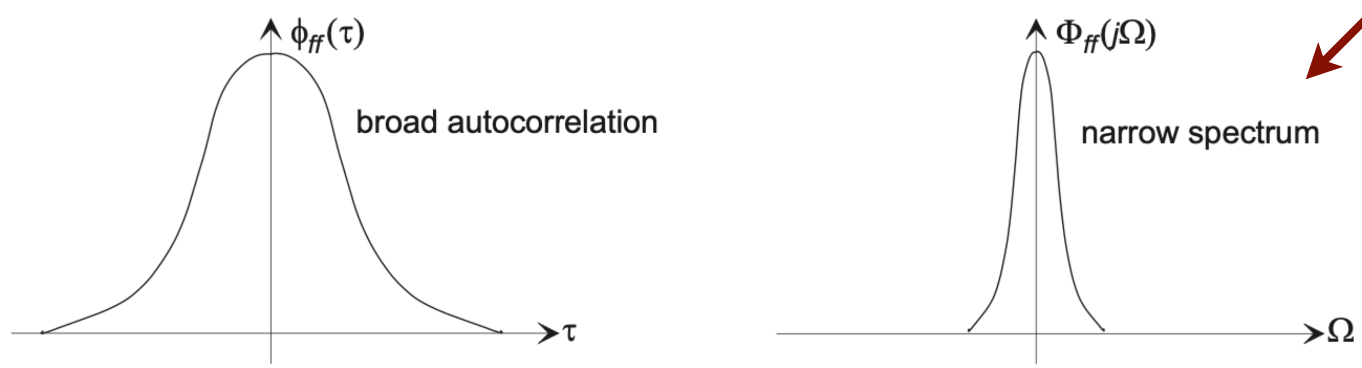
… recimo naključni šum (sprehodi)…

    - Avtokorelacija naključnih procesov pada ~ eksponentno.
      - Za beli šum dobimo kar delta funkcijo…

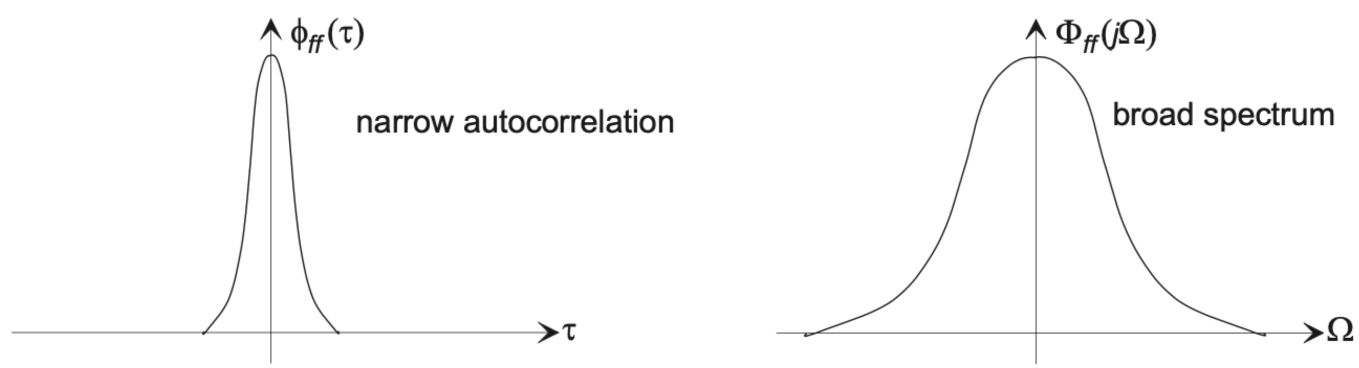
Korelacije in Autokorelacije pri FT

- Še nekaj lastnosti autokorelacijskih funkcij pri FT kar grafično:
  - Znano iz lastnosti FT…
    - A narrow autocorrelation function generally implies a "broad" spectrum

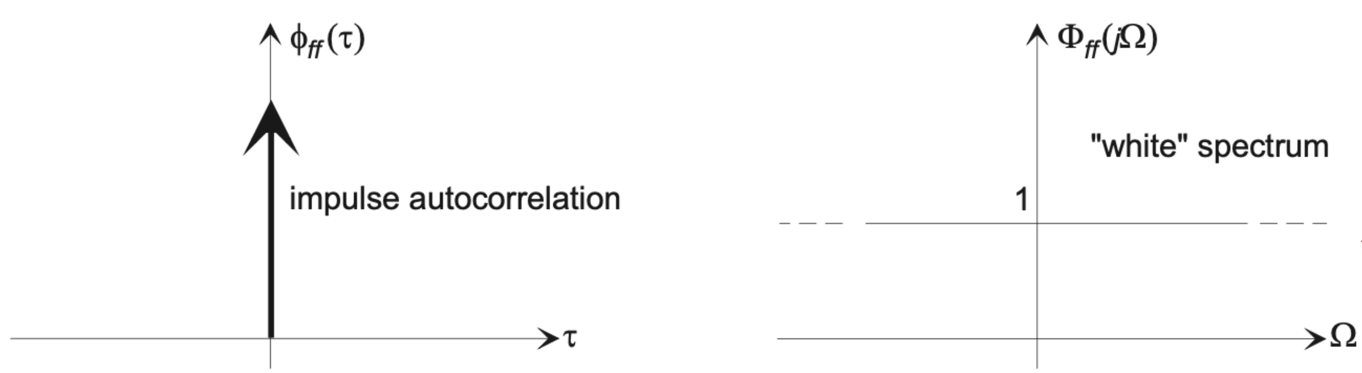
Spekter avtokorelacij: FT!



- and a "broad" autocorrelation function generally implies a narrow-band waveform.



In the limit, if $\phi_{ff}(\tau) = \delta(\tau)$, then $\Phi_{ff}(\mathrm{j}\,\Omega) = 1$, and the spectrum is defined to be "white".



FT delta funkcije…
(velja tudi obratno!)

Korelacije in Autokorelacije

- Korelacijske (cross-correlation) funkcije so preprosta razširitev koncepta.
  - Spet ločimo primere neskončnih (trajajočih) funkcij (povprečimo):

$$\phi_{fg}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t+\tau)\mathrm{d}t$$

  - in končnih funkcij (ne povprečimo):

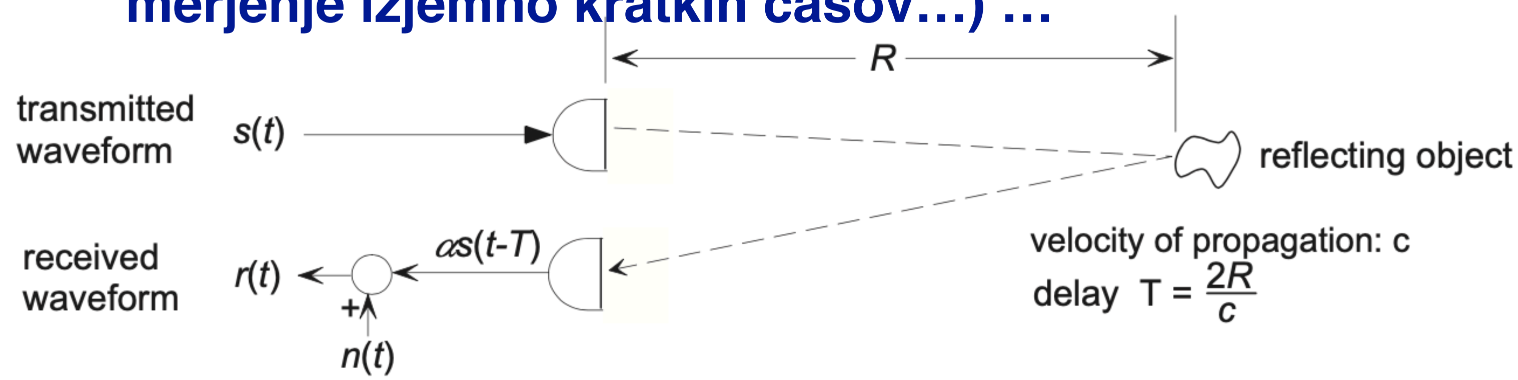
$$\rho_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)\mathrm{d}t$$

  - Spet nekaj lastnosti:
    - $\phi_{fg}(\tau) = \phi_{gf}(-\tau)$ - ni pa to nujno soda funkcija.
    - Če je $\phi_{fg}(\tau) = 0$ za vsak τ, potem sta funkciji f(t) in g(t) nekorelirani.
    - Če je g(t) skalirana in premaknjena funkcija f(t) : g(t) = A f(t-T), potem bo imela korelacija vrh pri τ=T.

Uporaba (auto)korelacijskih funkcij

- (V fiziki) autokorelacije zelo pogosto uporabimo predvsem za to, da se znebimo šuma!
- Korelacije (cross-correlation) pa se uporabljajo za optimalne ocene zakasnitve, npr radar/sonar/lidar (eholokacija) in meritve zelo kratkih časov (isti postopek…).
  - Posebej relevantna uporaba pri GPS sprejemnikih…

Kombiniran zgled: 'eholokacija' (autocorrelator - merjenje izjemno kratkih časov…) …



$$\phi_{sr}(\tau) = \int_{\infty}^{\infty} s(t) r(t+\tau) \mathrm{d}t$$

Odbiti signal premaknjen, skaliran in zašumljen…

$$= \int_{\infty}^{\infty} s(t)\left(n(t+\tau) + \alpha s(t-T+\tau)\right) \mathrm{d}t$$

$$= \phi_{sn}(\tau) + \alpha \phi_{ss}(\tau - T)$$

Korelacija s šumom je ~ nič…

Autokorelacija ima vrh pri τ=T (zakasnitev…).

Uporaba FT pri korelacijah

- V obeh primerih FT bistveno poenostavijo računanje.
  - Če prepoznamo v integralih statistično/matematično konvolucijo:

$$\rho_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)\mathrm{d}t = f \otimes g,$$

  - se lahko iz lastnosti FT spomnimo poenostavitve konvolucije v produkt:

$$\mathcal{F}\left(\rho_{fg}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{fg}(\tau)e^{-2\pi i\nu\tau}\mathrm{d}\tau = F(-\nu)\cdot G(\nu),$$

za realne funkcije f: F(-ν) = F*(ν)

  - torej je formalno zelo enostavno:

$$\rho_{fg}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left(F(-\nu)\cdot G(\nu)\right).$$

Autokorelacija inverz Moči (|F|^2)

Uporaba FT pri korelacijah

- V obeh primerih FT bistveno poenostavijo računanje.
  - Če prepoznamo v integralih statistično/matematično konvolucijo:

$$\rho_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)\mathrm{d}t = f \otimes g.$$

function $h(t)$. Normally, $H(\omega)$ does look a lot less noisy, indeed. Instead of doing it the roundabout way by using the autocorrelation function, we could have used the square of the magnitude of $F(\omega)$ in the first place. We all know, that a squared representation in the ordinate always pleases the eye, if we want to do cosmetics to a noisy spectrum. Big spectral components will grow when squared, small ones will get even smaller (cf. New Testament, Matthew 13:12: "For to him who has will more be given but from him who has not, even the little he has will be taken away."). But isn't it rather obvious that squaring doesn't change anything to the signal-to-noise ratio? In order to make it "look good", we pay the price of losing linearity.

$-\infty$

za realne funkcije f: F(-ν) = F*(ν)

  - torej je formalno zelo enostavno:

$$\rho_{fg}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left(F(-\nu)\cdot G(\nu)\right).$$

Autokorelacija inverz Moči (|F|^2)

Diskretne vsote (in FT)

- Ko imamo opravka z diskretnimi vzorčenji periodičnih funkcij f in g, je korelacija izražena kot vsota:

$$\phi_{gh}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} g_{k+n}\, h_k$$

  in avtokorelacija ravno tako.
- Za avtokorelacijo velikokrat vzamemo reskalirano obliko:

$$\widetilde{\phi}_{hh}(n) = \frac{\phi_{hh}(n) - \langle h\rangle^2}{\phi_{hh}(0) - \langle h\rangle^2} \ ,$$

- Kjer je $\langle h\rangle$ povprečje vzorca:

$$\langle h\rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} h_k$$

- in je števec približek za oceno variance signala:

$$\sigma^2 = \phi_{hh}(0) - \langle h\rangle^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left(h_k - \langle h\rangle\right)^2 \ .$$

Diskretne vsote (in FT)

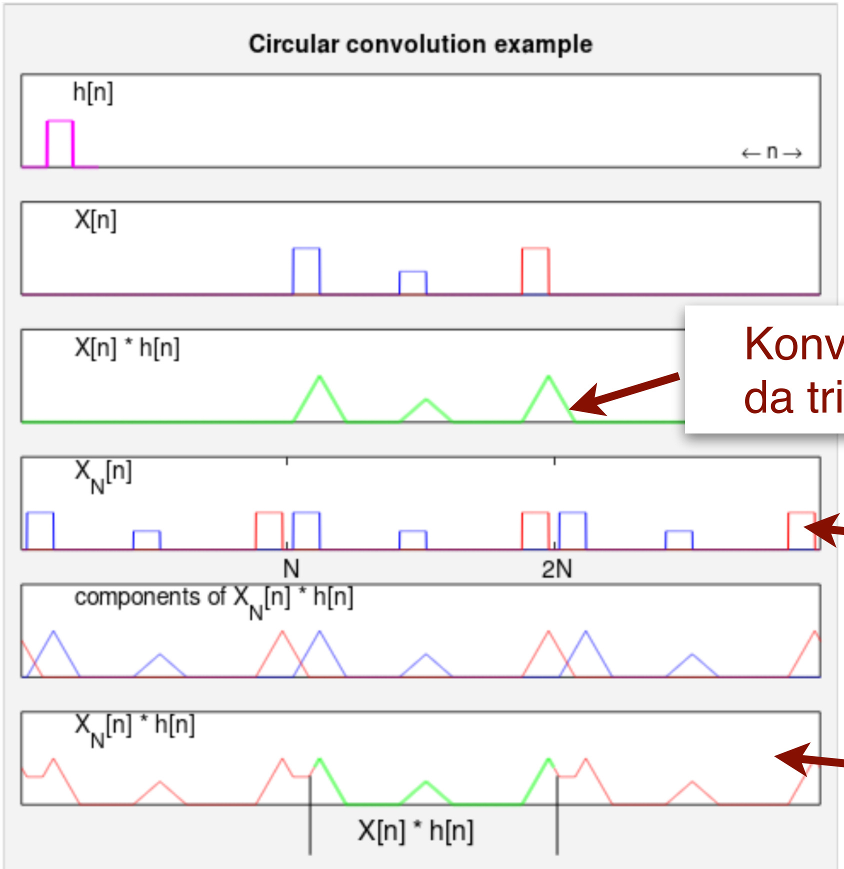
- Posebej je potrebno biti pozoren pri periodičnosti funkcij:
  - Eden izmed vzorcev je premaknjen; če ga ne znamo (periodično) 'razširiti', moramo avtokorelacijo popraviti za vsoto s končno mnogo členi:

$$\phi_{hh}(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n-1} h_{k+n} h_k \; .$$

V praksi kdaj pustijo kar N,
čeprav ni prav (ker se lepše obnaša…)

Lahko vzamemo samo prvih
N-n členov

  - Posebej pa se moramo spomniti, da nam pri uporabi DFT $\mathcal{F}$ nastopijo periodično razširjene funkcije (če niso v originalu periodične, zdaj so…)



$$\phi_{gh}(n) = \frac{1}{N-n} \mathcal{F}^{-1}\left[G \cdot (H)^*\right]$$

Konvolucija dveh 'škatlic'
da trikotnik…

Periodična razširitev…

Hitro dobljen (FFT), a malo
popačen (potujen) rezultat

Periodični, s periodo T.
Dobimo t.i. ciklično konvolucijo….

Diskretne vsote (in FT)

- Z namenom, da se znebimo cikličnosti v konvoluciji (ter stranskih učinkov), ter se pretvarjamo, da imamo opravka z običajno (linearno) konvolucijo, uporabimo trik:
  - signal h dolžine N prepišemo v dvakrat daljšega $\widetilde{h}$ (2N):

$$\widetilde{h}_n = h_n , \widetilde{h}_{n+N} = 0 \quad \text{za} \quad n = 0, \ldots, N-1$$

Zero padding!!!

ki ga periodično nadaljujemo:

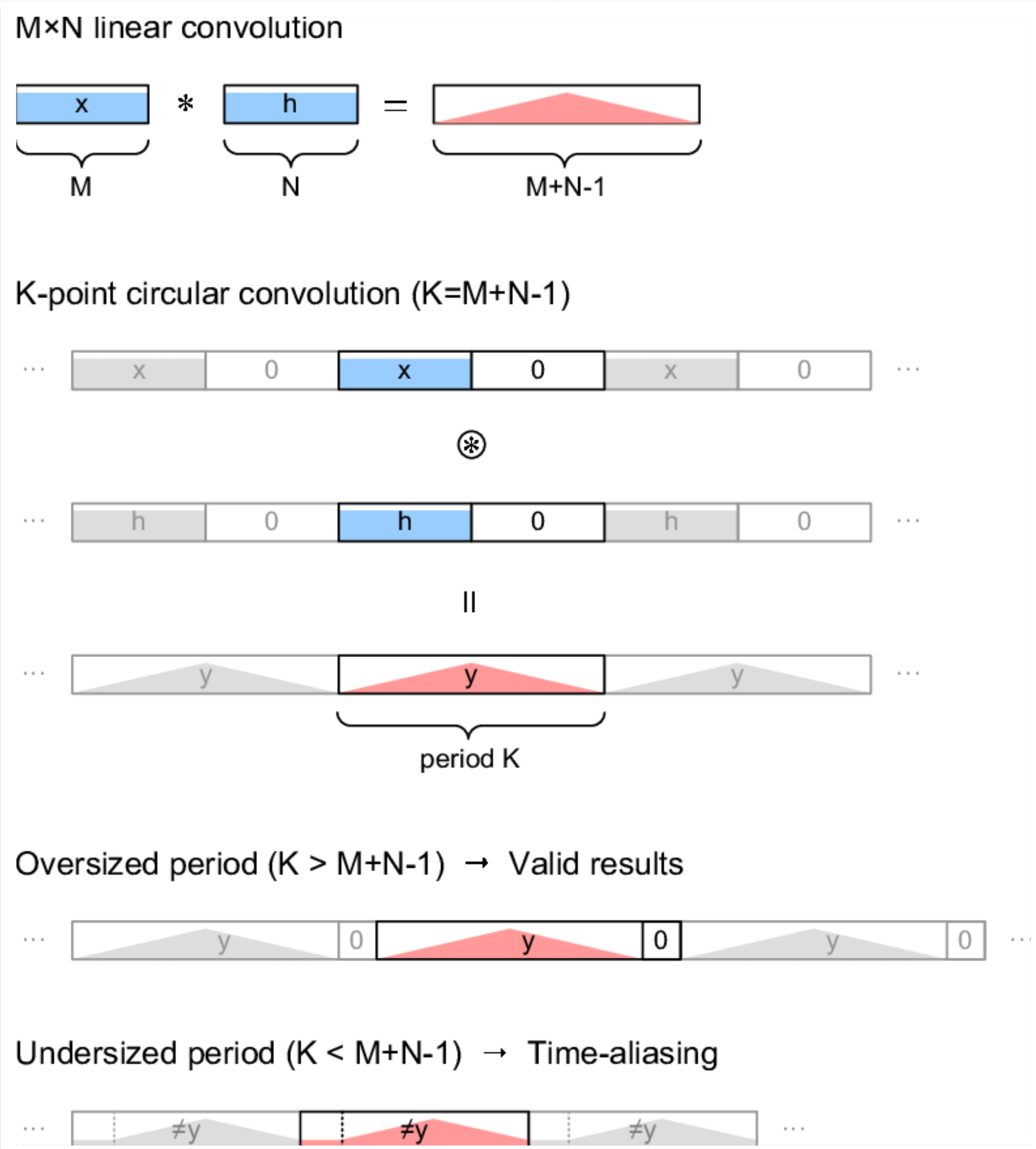
$$\widetilde{h}_{n+2N} = \widetilde{h}_n \quad \text{za} \quad n = 0, \ldots, 2N-1$$

- To je popolnoma dovolj, da ohranimo linearnost v avtokorelaciji s FFT izraza:

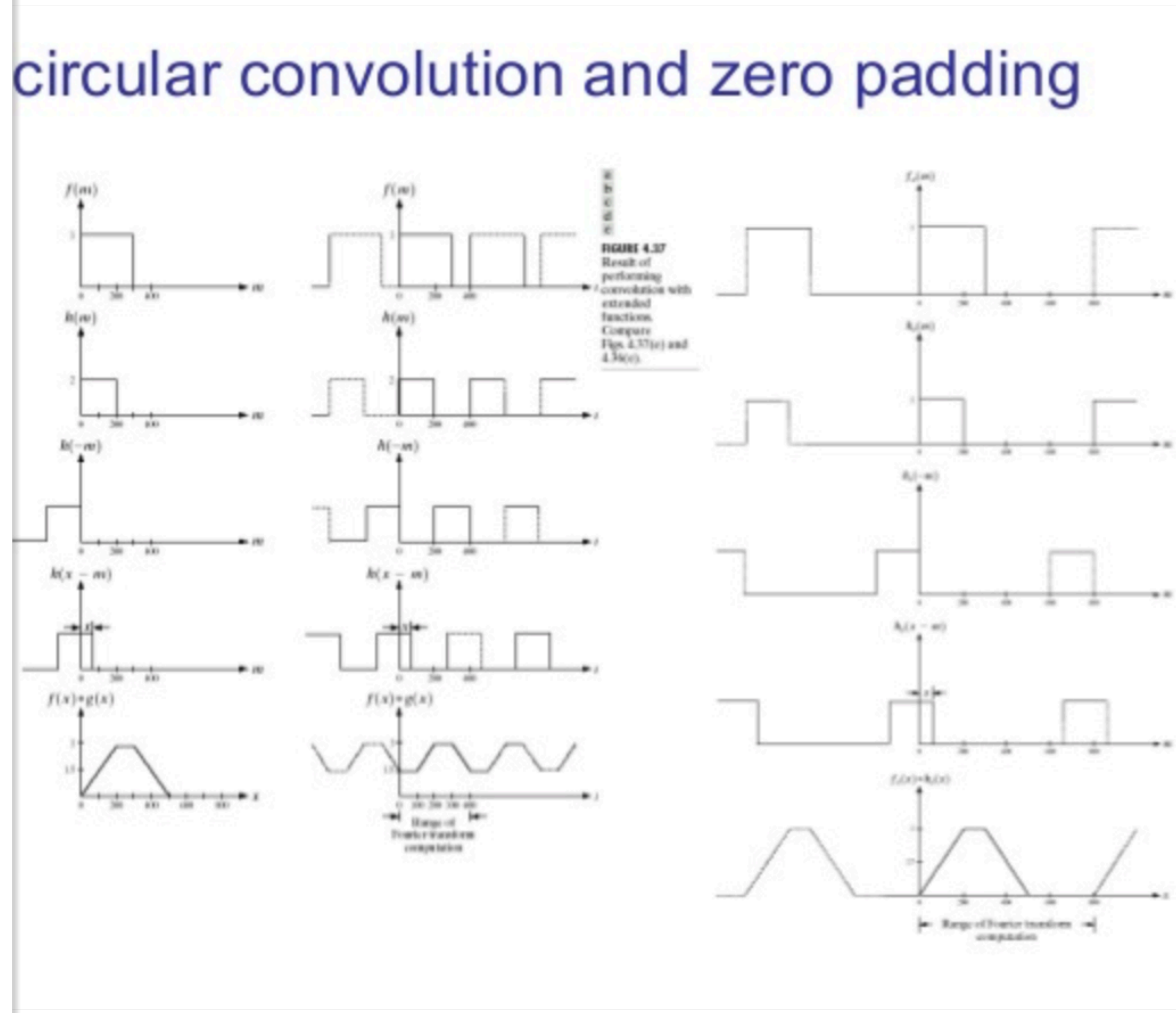
$$\phi_{hh}(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{2N-1} \widetilde{h}_{k+n} \widetilde{h}_k \ ,$$

kjer obdržimo 2N-1 členov po inverzni FT…

Diskretne vsote (in FT)



nosti v konvoluciji (ter stranskih
namo opravka z običajno (linearno)



kjer obdržimo 2N členov po inverzni FT…

Fast Fourier Transform

- Najbolj razširjen in najhitrejši algoritem dandanes je Fast Fourier Transform (FFT):

An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series

James W. Cooley; John W. Tukey

Mathematics of Computation, Vol. 19, No. 90. (Apr., 1965), pp. 297-301.

- Zvit rekurziven algoritem, izpeljava algoritma je na spletni učilnici…
    - Kar je pomembno za našo nalogo (in kasnejšo uporabo):
        - Rutina prisotna v vseh programskih jezikih, tudi Python-u
        - Nujno je uporabiti pomožne funkcije, ki nam postavijo točke v pravi vrstni red!

```
Hk = fft.fft(fft.ifftshift(hn))/N # Fourier coefficients (divided by N), correctly shifted
nu = fft.fftfreq(N,delta) # Natural frequencies
Hk = fft.fftshift(Hk) # Shift zero freq to center
nu = fft.fftshift(nu) # Shift zero freq to center
```

- fftshift in ifftshift nam preuredita vrstni red iz [0,N-1] v [-N/2,N/2] in obratno, kar je natanko to, kar potrebujemo.

FFT - hitra izpeljava

- DFT zapišemo kompaktno kot:

Časovna zahtevnost N^2

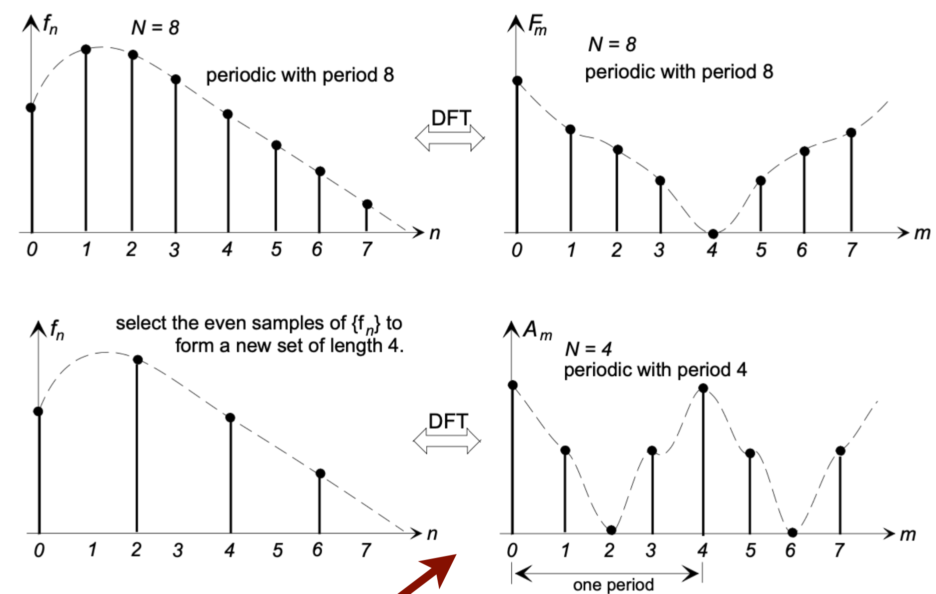
$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \exp(2\pi i k n/N) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} h_n, \qquad k = -\tfrac{N}{2}, \dots, \tfrac{N}{2}, \quad W_N = \exp(2\pi i/N)$$

- Novo definirani faktor W_N izraža pri potenciranju vse lastnosti periodičnost, simetričnost ipd, na primer:

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} \qquad \text{periodičnost v } n \text{ in } k$$

$$W_N^n = -W_N^{n-N/2} \qquad \text{za } n \geq N/2$$

$$W_N^n = -W_{\frac{N}{m}}^{\frac{n}{m}} \qquad \text{krajšanje: za } m, \frac{n}{M}, \frac{N}{M} \in \mathbb{Z}$$



- Vsoto razbijemo na sodi in lihi del (izpeljava po Lancozs-u):

Perioda N

Za FFT mora biti $N=2^M$

Perioda N/2 !

$$H_k = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} h_{2j} W_N^{k(2j)} + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} h_{2j+1} W_N^{k(2j+1)} = H_k^{\mathrm{sod}} + W_N^k H_k^{\mathrm{lih}},$$

ter zaradi (anti)simetrije okrog N/2 in periodičnosti novih členov tudi:

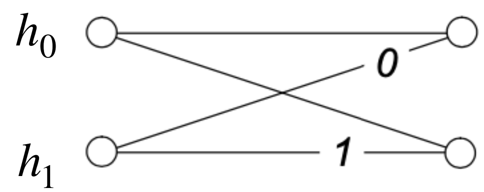
$$H_k = H_k^{\mathrm{sod}} + W_N^k H_k^{\mathrm{lih}} \qquad \text{za} \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$H_k = H_{k-\frac{N}{2}}^{\mathrm{sod}} - W_N^{k-\frac{N}{2}} H_{k-\frac{N}{2}}^{\mathrm{lih}} \qquad \text{za} \quad k = \frac{N}{2}, \dots, N-1$$

Zahtevnost $N(N+1)/2 < N^2$
($2^*(N/2)^2 + N/2$ seštevanje)

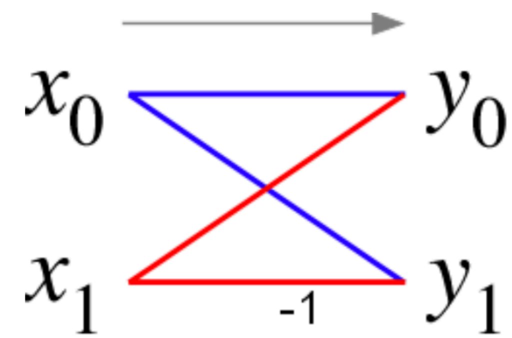
FFT - hitra izpeljava

- Za N=2 dobimo lep zapis (dobesedno, FFT Butterfly):



$$H_0 = h_0 + W_2^0 h_1 = h_0 + h_1$$

$$H_1 = h_0 + W_2^1 h_1 = h_0 - h_1$$

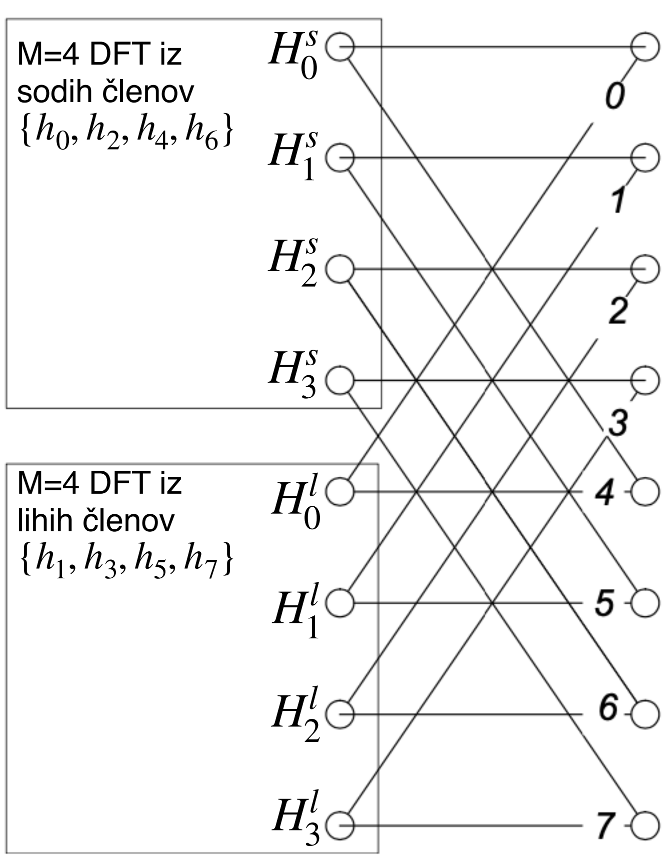


- Za prvo delitev:

$$H_k = H_k^{\text{sod}} + W_N^k H_k^{\text{lih}} \qquad \text{za} \quad k = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$H_k = H_{k-\frac{N}{2}}^{\text{sod}} - W_N^{k-\frac{N}{2}} H_{k-\frac{N}{2}}^{\text{lih}} \qquad \text{za} \quad k = \frac{N}{2}, \ldots, N - 1$$

lahko ‘metuljčke razmnožimo. Z N=8 členi bi v diagramu FFT izgledala takole:



$$H_0 = H_0^s + W_8^0 H_0^l$$

$$H_1 = H_1^s + W_8^1 H_1^l$$

$$H_2 = H_2^s + W_8^2 H_2^l$$

$$H_3 = H_3^s + W_8^3 H_3^l$$

$$H_4 = H_4^s + W_8^4 H_4^l = H_0^s - W_8^0 H_0^l$$

$$H_5 = H_5^s + W_8^5 H_5^l = H_1^s - W_8^1 H_1^l$$

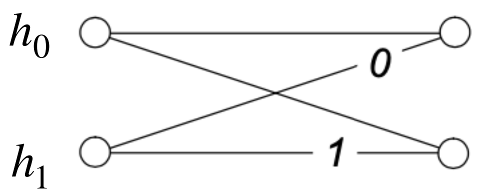
$$H_6 = H_6^s + W_8^6 H_6^l = H_2^s - W_8^2 H_2^l$$

$$H_7 = H_7^s + W_7^4 H_7^l = H_3^s - W_8^3 H_3^l$$

Lihe člene utežimo in prištejemo/odštejemo

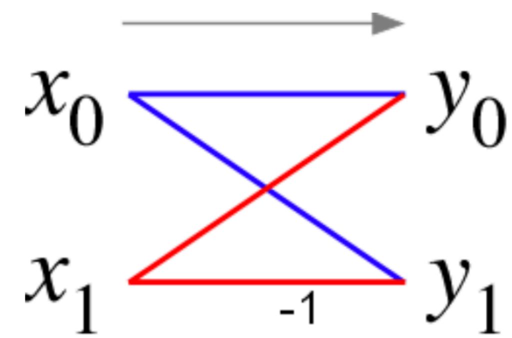
FFT - hitra izpeljava

- Za N=2 dobimo lep zapis (dobesedno, FFT Butterfly):



$$H_0 = h_0 + W_2^0 h_1 = h_0 + h_1$$

$$H_1 = h_0 + W_2^1 h_1 = h_0 - h_1$$



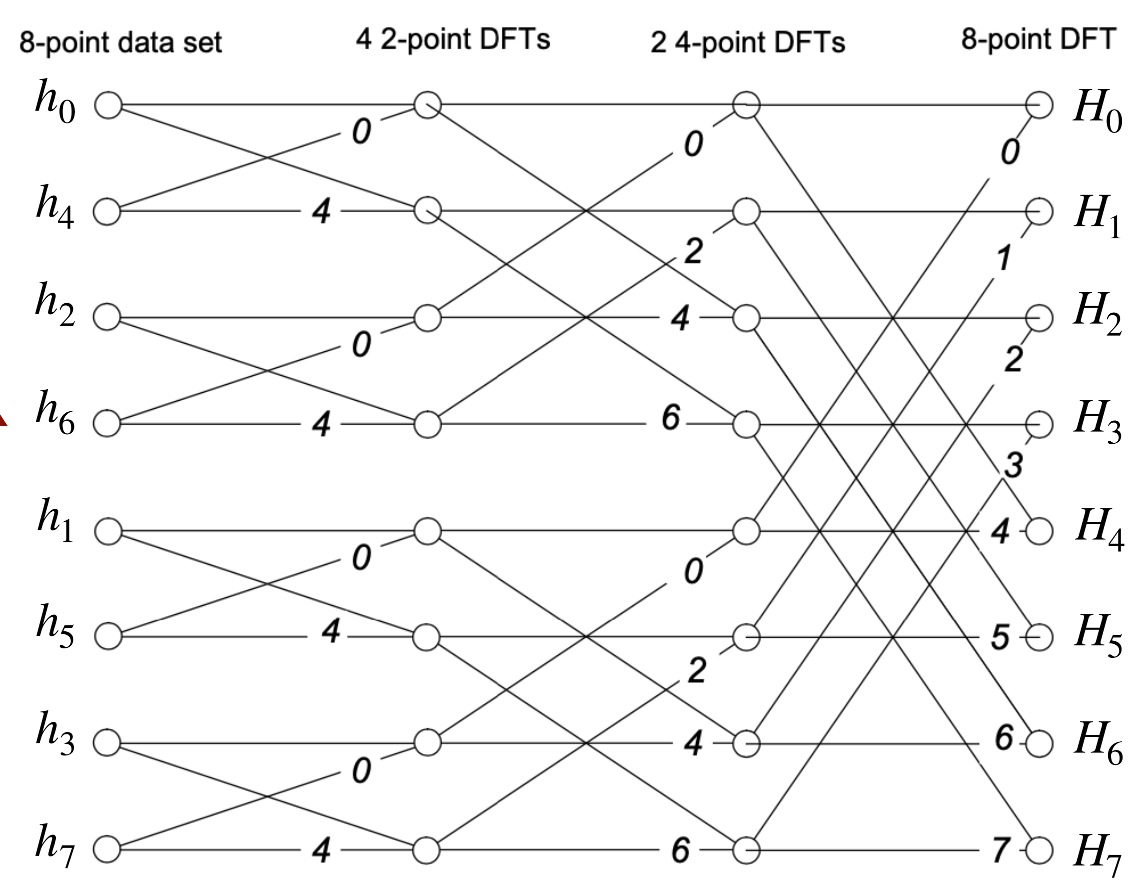
- Zapis pa postane tudi rekurziven. Če definiramo M=N/2 , dobimo:

$$H_k = H_k^{\text{sod}} + W_N^k H_k^{\text{lih}} \qquad \text{za} \quad k = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$H_k = H_{k-\frac{N}{2}}^{\text{sod}} - W_N^{k-\frac{N}{2}} H_{k-\frac{N}{2}}^{\text{lih}} \qquad \text{za} \quad k = \frac{N}{2}, \ldots, N - 1$$

- Vsakega od novih členov lahko ‘razpolavljamo’, dokler na koncu ne dobimo le dveh členov v vsoti (torej metuljčka). Rekurzija z N=8 členi bi grafično zgledala takole:

Očitno neintuitiven vrstni red!



FFT - hitra izpeljava

- Vrstni red členov se dobi v resnici zelo enostavno, z obrnjenim vrstnim redom binarnega zapisa indeksa:

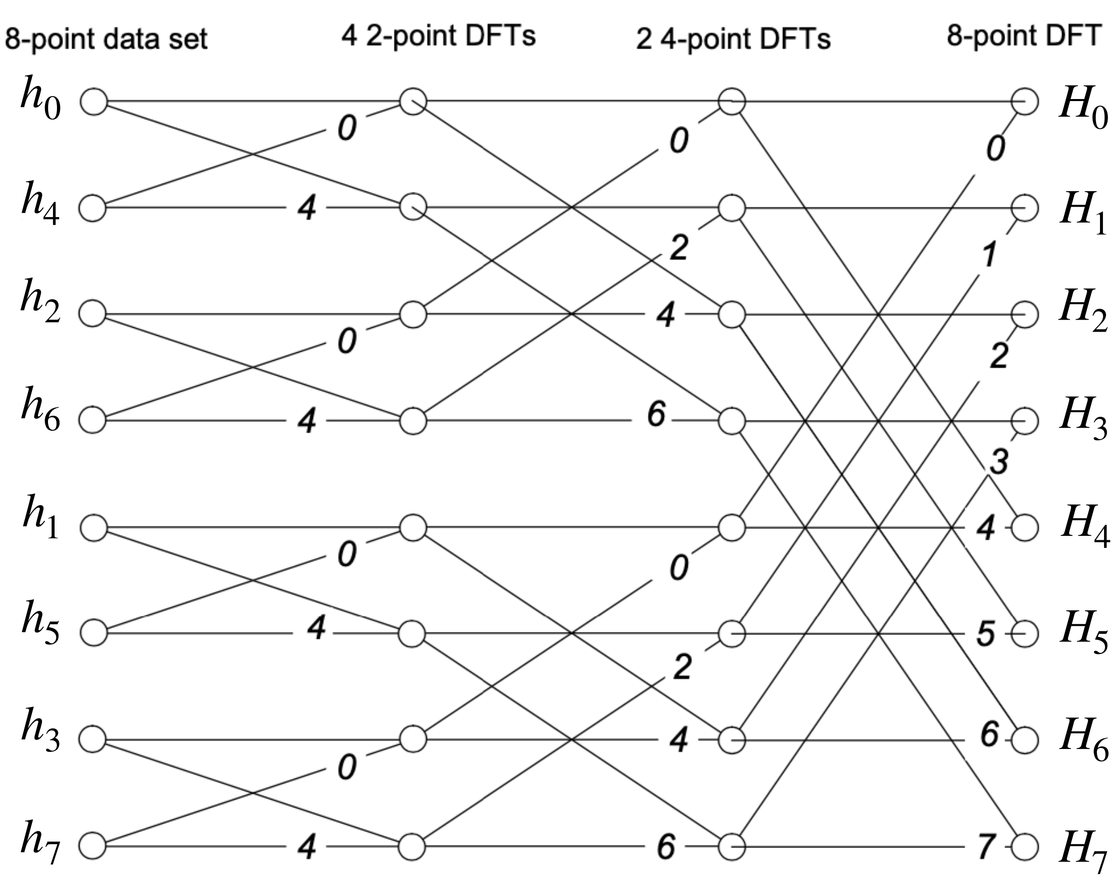
Indeks k:	0	1	2	3	4	5	6	7
	$(000)_2$	$(001)_2$	$(010)_2$	$(011)_2$	$(100)_2$	$(101)_2$	$(110)_2$	$(111)_2$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Indeks n:	$(000)_2$	$(100)_2$	$(010)_2$	$(110)_2$	$(001)_2$	$(101)_2$	$(011)_2$	$(111)_2$
	0	4	2	6	1	5	3	7

bit reversal

Indeks n

Indeks k

Očitno neintuitiven vrstni red!



Končna zahtevnost $\dfrac{N}{2}\log_2 N$!

N	M_{DFT}	M_{FFT}	M_{FFT}/M_{DFT}
4	16	4	0.25
8	64	12	0.188
16	256	32	0.125
32	1,024	80	0.0781
64	4,096	192	0.0469
128	16,384	448	0.0273
256	65,536	1024	0.0156
512	262,144	2,304	0.00879
1024	1,048,576	5,120	0.00488
2048	4,194,304	11,264	0.00268
4096	16,777,216	24,576	0.00146

Naloga

- S pomočjo avtokorelacij in korelacij si oglej zvok dveh velikih uharic.
  - Na spletni učilnici so bolj ali manj zašumljeni vzorci:
    - poglej si spektre, dobljene z FFT,
    - poglej, kaj naredi čiščenje z avtokorelacijo,
    - ali lahko identificiraš posamezni sovi ?
  - Za računske namene je tu FFT nujen:
    - razišči vedenje, časovno odvisnost ipd…
- Za dodatno nalogo si najdi še kak smiseln vzorec in poskusi avtokorelacijo (periodičen + šum …).