

6. naloga: Enačbe hoda

Za opis najpreprostejših fizikalnih procesov uporabljamo navadne diferencialne enačbe, ki povezujejo vrednosti spremenljivk sistema z njihovimi časovnimi spremembami. Tak primer je na primer enačba za časovno odvisnost temperature v stanovanju, ki je obdano s stenami z neko toplotno prevodnostjo in določeno zunanjo temperaturo. V najpreprostejšem primeru ima enačba obliko

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{zun}}) \quad (1)$$

z analitično rešitvijo

$$T(t) = T_{\text{zun}} + e^{-kt}(T(0) - T_{\text{zun}}) .$$

Enačbam, ki opisujejo razvoj spremenljivk sistema y po času ali drugi neodvisni spremenljivki x , pravimo *enačbe hoda*. Pri tej nalogi bomo proučili uporabnost različnih numeričnih metod za reševanje enačbe hoda oblike $dy/dx = f(x, y)$, kot na primer (1). Najbolj groba prva inačica, tako imenovana osnovna Eulerjeva metoda, je le prepisana aproksimacija za prvi odvod $y' \approx (y(x+h) - y(x))/h$, torej

$$y(x+h) = y(x) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_x . \quad (2)$$

Diferencialno enačbo smo prepisali v diferenčno: sistem spremljamo v ekvidistantnih korakih dolžine h . Metoda je večinoma stabilna, le groba: za večjo natančnost moramo ustrezno zmanjšati korak. Za red boljše ($\mathcal{O}(h^3)$), t.j. lokalna natančnost drugega reda) je simetrizirana Eulerjeva (ali sredinska) formula, ki sledi iz simetriziranega približka za prvi odvod, $y' \approx (y(x+h) - y(x-h))/2h$. Računamo po shemi

$$y(x+h) = y(x-h) + 2h \left. \frac{dy}{dx} \right|_x , \quad (3)$$

ki pa je praviloma nestabilna. Želeli bi si pravzaprav nekaj takega

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} \left[\left. \frac{dy}{dx} \right|_x + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x+h} \right] , \quad (4)$$

le da to pot ne poznamo odvoda v končni točki intervala (shema je implicitna). Pomagamo si lahko z iteracijo. Zapišimo odvod kot:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x = f(x, y)$$

ter

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_n = y(x_n)$$

Heunova metoda ($\mathcal{O}(h^3)$ lokalno) je približek idealne formule z:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})] \quad (6)$$

Izvedenka tega je nato Midpoint metoda (tudi $\mathcal{O}(h^3)$ lokalno):

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (7)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_1) \quad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n + h k_2 \quad (9)$$

Le-to lahko potem izboljšamo kot modificirano Midpoint metodo itd. . .

V praksi zahtevamo natančnost in numerično učinkovitost, ki sta neprimerno boljši kot pri opisanih preprostih metodah. Uporabimo metode, zasnovane na algoritmih prediktor-korektor, metode višjih redov iz družine Runge-Kutta (z adaptivnimi koraki), ali ekstrapolacijske metode. Brez dvoma ena najbolj priljubljenih je metoda RK4,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x, y(x)) , \\ k_2 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{h}{2}k_1\right) , \\ k_3 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{h}{2}k_2\right) , \\ k_4 &= f(x + h, y(x) + hk_3) , \\ y(x + h) &= y(x) + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5) . \end{aligned} \tag{10}$$

Naloga: preizkusi preprosto Eulerjevo metodo ter nato še čim več naprednejših metod (Midpoint, Runge-Kutta 4. reda, Adams-Bashfort-Moultonov prediktor-korektor . . .) na primeru z začetnima temperaturama $y(0) = 21$ ali $y(0) = -15$, zunanjo temperaturo $y_{\text{zun}} = -5$ in parametrom $k = 0.1$. Kako velik (ali majhen) korak h je potreben? Izberi metodo (in korak) za izračun družine rešitev pri različnih vrednostih parametra k .

Dodatna naloga: temperatura prostora se lahko še dodatno spreminja zaradi denimo sončevega segrevanja skozi okna, s 24-urno periodo in nekim faznim zamikom δ , kar opišemo z dva- ali triparametrično enačbo

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{zun}}) + A \sin\left(\frac{2\pi}{24}(t - \delta)\right) . \tag{11}$$

Poišči še družino rešitev te enačbe pri $k = 0.1$ in $\delta = 10$! Začni z $A = 1$, kasneje spreminjaj tudi to vrednost. V premislek: kakšno metodo bi uporabil, če bi posebej natančno želel določiti maksimalne temperature in trenutke, ko nastopijo?