



EDO DE PRIMER ORDEN

ECUACIONES EXACTAS Y REDUCIBLES A ELLAS



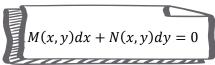
CONTENIDO

Ecuaciones Reducibles a Exactas (Factor Integrante)

Ciertas ecuaciones no exactas pueden transformarse en exactas mediante la multiplicación de un factor integrante, que es una función de una o dos variables.

Resolución:

1. Se expresa la ecuación en la forma diferencial



2. Se verifica la condición de compatibilidad para las ecuaciones exactas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

3. Se plantea $\mu(x,y)$ como el factor integrante (F.I) Entonces, la ecuación



$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y) = 0$$

Se transforma en exacta y la condición de contabilidad se cumple:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x}$$

derivando $\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{2x} + \mu \frac{2\mu}{\partial x}$

y ordenando:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \leftarrow \textit{Ecuación general}$$

4. Se verifican las condiciones de los siguientes casos:

Caso 1.
$$\mu(x, y) = \mu(x)$$

Entonces
$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \wedge \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Reemplazando en la ecuación general:

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) - N \, \frac{d\mu}{dx} = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{N}{\partial x} \right) = N \, \frac{d\mu}{dx}$$



$$\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx = \int \frac{1}{\mu} d\mu$$

Condición:
$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = h(x)$$

$$\Rightarrow \int h(x)dx = \int \frac{1}{\mu}d\mu = \ln \mu$$

Factor Integrante: $\mu(x) = e^{\int h(x)dx}$

Caso 2.
$$\mu(x, y) = \mu(y)$$

Entonces
$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

Reemplazando en la ecuación general:

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) + M \frac{d\mu}{dy} = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{N}{\partial x} \right) = -M \, \frac{d\mu}{dy}$$

$$\int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dy = - \int \frac{1}{\mu} d\mu$$

Condición: $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = g(y)$

$$\Rightarrow -\int g(y)dy = \int \frac{1}{\mu}d\mu = \ln \mu$$

Factor Integrante: $\mu(y) = e^{-\int g(y)dy}$

Caso especial

Si
$$M = yf(xy) \wedge N = xf(xy)$$

$$u(x,y) = \frac{1}{xM - yN}$$

5. Se multiplica la ecuación en la forma diferencial por el FI y se resuelve como una ecuación exacta



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1. Cordero M., Gomez M., Ecuaciones Diferenciales 20 problemas útiles, Universidad Politécnica de Madrid, 2008.
- 2. Kiseliov, A., Kransnov, M., Makarenko, G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Mir, 1968.
- 3. Nagle R., Saff E., Snider A., *Fundamentals of differential equations*, 8fth ed., Addison-Wesley, 2012.
- 4. Valentin F. Zaitsev, Andrei D. Polyanin. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Chapman & Hall_CRC, 2003.