UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

ECUACIONES DIFERENCIALES

Primer Examen

Profesor: Ing. Gabriel Zapata
Semestre: mayo 2023 – septiembre 2023
Paralelo: 10444 **Fecha:** 1 de junio
Nombre del estudiante: Josué Merino Calderón **Resultado Obtenido:** 4,4

1. Resolver la siguiente ecuación

$$y' = y^{\frac{1}{3}}\left(x - y^{\frac{2}{3}}\right)$$

(2 ptos)

$y^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{3}{3}} = y^{1}$

$y' = xy^{\frac{1}{3}} - y^{\cancel{3}\,1}$

Busco que Forma lineal tiene.

$y' - xy^{\frac{1}{3}} = -y^{\cancel{3}\,1}$

$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{3}} = -y^{\cancel{3}\,1}$

$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{3}} = -y(x)$? No es lineal !!

$F(x) = x^0 = 1$

$P(x) = x$

$\mu(x) = e^{\int x} = e^{\frac{x^2}{2}}$

$y = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} \cdot \int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot 1\, dx$

$y = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

$u = \frac{x^2}{2}$

$\frac{du}{dx} = x$

$du = dx\, x$

$y = 1$

$2e^{u^2} du\, e^{u} \frac{du}{dx}$

$u = \frac{x}{2}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$

$du = \frac{1}{2} dx$

$2du = dx$

$2e^{u^2} du$

$u^2 = r$

$2u = \frac{dr}{du}$

$2u\, du = dr$

$\frac{2u}{dr} = du$

$\frac{dr}{2u}$

$2e^{r} \frac{dr}{2}$

$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{3}} - y$

$dy = (xy^{\frac{1}{3}} - y)\, dx$?

$(xy^{\frac{1}{3}} - y)dx - dy = 0$ resuelvo como exacta?

Trato de resolver como Bernoulli:

$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{3}} = -y^{n=1}$ con $n = 1$.

$\frac{dw}{dx} - (1 - 1)xw = -y(1-1)$??

$\frac{dw}{dx} = 0$

$dw = 0$?

$w = -y^{\frac{1}{3}}$?

0,6

$$\frac{dy}{dx} + y = x y^{\frac{1}{3}} \quad n = \frac{1}{3}$$

$w = y$

? ?

$$\frac{dw}{dx} + (1 - \tfrac{1}{3}) w = x (1 - \tfrac{1}{3}).$$

$$\boxed{w = y^{2/3}}$$

$$\frac{dw}{dx} + \frac{2}{3} w = - \frac{2}{3} x.$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2}{3} w - \frac{2}{3} x.$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2}{3} \cancel{(w - x)}.$$

$$3 dw = 2 \cancel{(w - x) dx}$$

$$2(w - x)dx - 3 dw = 0.$$

2. Resolver la siguiente ecuación (2 ptos)

$$(x\cos t + 2te^{x})dt + (\sin t + t^2 e^{x} + 2)dx = 0$$

Para comodidad cambio de variable $t = y$

$(x\cos y + 2ye^{x})dy + (\sin y + y^2 e^{x} + 2)dx = 0.$

No es homogenea, así que verifico si es exacta, escribiendo en la forma $M(dx + Ndy = 0.$

$\underbrace{(\sin y + y^2 e^{x} + 2)}_{M} dx + \underbrace{(x\cos y + 2ye^{x})}_{N} dy = 0.$

1,8

- Condición de compatibilidad.

$\frac{\partial M}{\partial y} = (\cos y + 2ye^{x} + 0)$

$\frac{\partial N}{\partial x} = (\cos y + 2ye^{x})$

Se observa que tanto $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $\therefore$ La ecuación es una $\boxed{\text{EDO EXACTA}}$

- Criterio de exactitud

$\frac{\partial F}{\partial x} = M = \sin y + y^2 e^{x} + 2$ ①

$\frac{\partial F}{\partial y} = N = x\cos y + 2ye^{x}$ ②

F de ①

$\int \partial F = \int M \partial x$

$F = \int_x (\sin y + y^2 e^{x} + 2) dx$

$F = \sin y \int_x dx + y^2 \int_x e^{x} dx + 2\int_x dx$

$F = x\sin y + e^{x} y^2 + 2x + g(y)$

reemplazo en ②

$\frac{\partial}{\partial y}(x\sin y + e^{x}y^2 + 2x + g(y)) = N$

$\cancel{x\cos y} + \cancel{2ye^{x}} + 0 + \frac{dg}{dy} = \cancel{x\cos y} + \cancel{2ye^{x}}$

$\frac{dg}{dy} = 0.$

$\int dg = \int 0 \cdot dy$

$g = C$

$\boxed{\text{Sol. } F: x\sin y + e^{x}y^2 + 2x + C}$

t

3. Determinar las trayectorias isogonales a 45° a la familia de curvas:
$y = -x - 1 + Ce^x$

(3 ptos)

Fórmula isogonales

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{F(x,y) - tg\theta}{1 + F(x,y)\,tg\theta}}$$

Ángulo.
$\theta = 45°$.
$tg\theta = 1$.

$y = -x - 1 + Ce^x$. Derivo para encontrar y'.

$y' = -1 - 0 + Ce^x$. *

① $y = -x - 1 + Ce^x$. (multiplico por -1).
② $y' = -1 + Ce^x$. (

$-y = +x + 1 - Ce^x$
$y' = -1 + Ce^x$

$-y + y' = x + \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{Ce^x} + \cancel{Ce^x}$

$y' = x + y. \rightarrow F(x,y)$ Ahora despejo en la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - \cancel{tg\theta}^{\,1}}{1 + (x+y)\cancel{tg\theta}^{\,1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x + \cancel{y + 1}}{1 + x + y}.$$

(multiplico ambos lados. dx)
(multiplico ambos lados. $(x+y+1)$)

$\Rightarrow (1 + x + y)\,dy = (x + y)\,dx.$

- FD.

$\underbrace{(x+y)}_{M}dx - \underbrace{(1+x+y)}_{N}dy.$

$\boxed{\text{No es homogenea}}$

Puede ser reducible a variables separables con $z = x + y$
Podria ser reducible a homogenea
Puede ser exacta o reducible a ella.

- Resuelvo como exacta.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$
$\frac{\partial N}{\partial x} = -1$

Cumple la condición de compatibilidad. ?

$\frac{\partial F}{\partial x} = M = x + y - 1$ ①

$\frac{\partial F}{\partial y} = N = 1 + x + y$ ②

* signo ?

F de ①

$F: \int_x x\,dx + y\int_x dx - \int dx$

$F: \frac{x^2}{2} + yx + g(y)$
$+ x$

reemplazo en ①

$\frac{\partial F}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + yx + g(y)\right) = 1 + x + y$

$\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
$+ y(x+1)$

$0 + \cancel{x} + \frac{dg}{dy} = 1 + \cancel{x} + y$

$\int dg = \int (1 + y)\,dy.$

$g = y + \frac{y^2}{2}$

$\boxed{\text{sol. } F: \frac{x^2}{2} + yx - x + y + \frac{y^2}{2}}$

NO → $\boxed{\text{sol. } F: \frac{x^2}{2} + yx + y + \frac{y^2}{2}}$