EDO DE PRIMER ORDEN

ECUACIONES EXACTAS Y REDUCIBLES A ELLAS

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Ing. Gabriel Zapata
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS - ESPE

Ecuaciones Reducibles a Exactas (Factor Integrante)

Ciertas ecuaciones no exactas pueden transformarse en exactas mediante la multiplicación de un factor integrante, que es una función de una o dos variables.

Resolución:

1. Se expresa la ecuación en la forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

2. Se verifica la condición de compatibilidad para las ecuaciones exactas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

3. Se plantea $\mu(x,y)$ como el factor integrante $(F.I)$
   Entonces, la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)\,N(x,y) = 0$$

Se transforma en exacta y la condición de contabilidad se cumple:

$$\frac{\partial(\mu\, M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\, N\,)}{\partial x}$$

$$\text{derivando} \quad \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{2x} + \mu\frac{2\mu}{\partial x}$$

y ordenando:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \longleftarrow \textit{Ecuación general}$$

4. Se verifican las condiciones de los siguientes casos:
   Caso 1. $\mu(x,y) = \mu(x)$

$$\text{Entonces} \ \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \ \wedge \ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Reemplazando en la ecuación general:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) - N\,\frac{d\mu}{dx} = 0$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{N}{\partial x}\right) = N\,\frac{d\mu}{dx}$$

$$\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx = \int \frac{1}{\mu} d\mu$$

$\textcolor{red}{Condición:}$ $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = h(x)$

$$\Rightarrow \int h(x) dx = \int \frac{1}{\mu} d\mu = \ln \mu$$

$$Factor\ Integrante: \textcolor{red}{\mu(x) = e^{\int h(x) dx}}$$

Caso 2. $\mu(x, y) = \mu(y)$

Entonces $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \ \wedge \ \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y}$

Reemplazando en la ecuación general:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + M\,\frac{d\mu}{dy} = 0$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{N}{\partial x}\right) = -M\,\frac{d\mu}{dy}$$

$$\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dy = -\int \frac{1}{\mu} d\mu$$

$\textcolor{red}{Condición:}$ $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(y)$

$$\Rightarrow -\int g(y) dy = \int \frac{1}{\mu} d\mu = \ln \mu$$

$$Factor\ Integrante: \textcolor{red}{\mu(y) = e^{-\int g(y) dy}}$$

Caso especial

Si $M = yf(xy) \ \wedge \ N = xf(xy)$

$$u(x, y) = \frac{1}{xM - yN}$$

5. Se multiplica la ecuación en la forma diferencial por el FI y se resuelve como una ecuación exacta

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Cordero M., Gomez M., Ecuaciones Diferenciales - 20 problemas útiles, Universidad Politécnica de Madrid, 2008.
2. Kiseliov, A., Kransnov, M., Makarenko, G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Mir, 1968.
3. Nagle R., Saff E., Snider A., *Fundamentals of differential equations*, 8fth ed., Addison-Wesley, 2012.
4. Valentin F. Zaitsev, Andrei D. Polyanin. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Chapman & Hall_CRC, 2003.