ANALYSE IV	**SÉRIE 1**	**Printemps 2018**
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)		**22 février 2018**

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-ix}\left(\cos x + i \sin x\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de f et en déduire la formule d'Euler.

Exercice 2 (Ex. 4 §14.3 page 110)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par périodicité de période 2 telle que

$$f(x) = x \quad \text{si} \quad x \in [0, 2[\,.$$

Calculer sa série de Fourier en notation complexe.

Exercice 3 (Ex. 1 §15.3 page 117)

Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 4

a) Soit l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Montrer que $I = \sqrt{\pi}$.

Indication : exprimer I^2 sous la forme d'une intégrale double dans $\mathbb{R}^2$ et utiliser les coordonnées polaires pour la calculer.

b) Calculer la transformée de Fourier de la fonction gaussienne définie par

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : Intégrer par parties. Obtenir une équation différentielle pour $\hat{f}(\alpha)$ et la résoudre en utilisant le résultat de la question a).

ANALYSE VI	SÉRIE 1	Printemps 2018
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)	Corrigé	22 février 2018

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Le calcul de la dérivée de f donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= -ie^{-ix}(\cos x + i\sin x) + e^{-ix}(-\sin x + i\cos x) \\ &= e^{-ix}(0 + i0) = 0. \end{aligned}$$

Donc $f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où c est une constante. Puisque $f(0) = 1$, il en résulte que $c = 1$ et alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{-ix}(\cos x + i\sin x) = 1 \implies e^{ix} = (\cos x + i\sin x).$$

Exercice 2

Corrigé : Ex. 4 page 275

Exercice 3

Corrigé : Ex. 1 page 285

Exercice 4

a) On écrit

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(t^2+s^2)}\,dt\,ds.$$

En utilisant les coordonnées polaires $(r, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ on a

$$\begin{aligned} t &= r\cos\theta, & s &= r\sin\theta, \\ t^2 + s^2 &= r^2, & dt\,ds &= r\,dr\,d\theta \end{aligned}$$

et on obtient

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr = -\pi\, e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

Il suit donc que $I = \sqrt{\pi}$.

b) Soit la fonction gaussienne

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

alors sa transformée de Fourier s’écrit

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\alpha x}\,dx.$$

En considérant les fonctions $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $v'(x) = e^{-i\alpha x}$, avec $u'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ et $v(x) = \frac{i}{\alpha}e^{-i\alpha x}$, on intègre par parties et on obtient

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{\alpha}\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-i\alpha x}|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}e^{-i\alpha x}dx.$$

Or

$$\hat{f}'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(-ix)e^{-i\alpha x}dx,$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}e^{-i\alpha x}dx = i\hat{f}'(\alpha).$$

Donc on a

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{i}{\alpha}i\hat{f}'(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}'(\alpha) = -\alpha\hat{f}(\alpha).$$

La solution de l'équation différentielle linéaire ci-dessus est $\hat{f}(\alpha) = Ce^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ avec

$$C = \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \overset{\overset{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{\downarrow}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1.$$

Donc finalement

$$\hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}.$$

ANALYSE IV	**SÉRIE 2**	**Printemps 2018**
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)		**1 mars 2018**

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

Indication : La transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-\omega|x|}$ avec $\omega > 0$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \frac{4\omega}{i\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

Exercice 2 (Exemple 17.7 page 134)

Utiliser les proprietés de la transformée de Fourier (produit de convolution) pour trouver une solution $y(x)$ de l'équation intégrale

$$y(x) + 3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} y(x-t)\,\mathrm{d}t = e^{-|x|} \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Indication : La transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{-\omega|x|}}{\omega}$ avec $\omega > 0$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2+\omega^2} \ .$$

Exercice 3 (Ex. 11 §17.4 page 136)

Utiliser les proprietés de la transformée de Fourier (dérivée et produit de convolution) pour trouver une solution $y(x)$ de l'équation intégrale

$$3y(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y''(t) - y(t)\right] f(x-t)\,\mathrm{d}t = g(x)$$

où $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = xe^{-x^2}$.
Indication : Les transformées de Fourier des fonctions f et g sont respectivemnent données par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2+1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}(g)(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

Exercice 4 (Ex. 2a §15.3 page 117)

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}\cos x$ étendue par parité sur $\mathbb{R}$. Calculer la transformée de Fourier en cosinus de f.

ANALYSE VI	**SÉRIE 2**	**Printemps 2018**
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)	**Corrigé**	**1 mars 2018**

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

On utilise la formule d'inversion du théorème de réciprocité de la transformée de Fourier pour la fonction $f(x) = xe^{-\omega|x|}$:

$$\begin{aligned} xe^{-\omega|x|} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathfrak{F}f)(\alpha) e^{i\alpha x} \mathrm{d}\alpha = \frac{4\omega}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2} e^{i\alpha x} \mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{2\omega}{\pi i} \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2} \cos(\alpha x) \mathrm{d}\alpha}_{=0 \quad \text{car fonction impaire}} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2} \sin(\alpha x)}_{\text{fonction paire}} \mathrm{d}\alpha \Big] \\ &= \frac{4\omega}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2} \sin(\alpha x) \mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2} \sin(\alpha x) \mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{4\omega} xe^{-\omega|x|}.$$

Donc en choisissant $\alpha = t$, $\omega = 2$ et $x = \frac{1}{2}$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{16e}.$$

Exercice 2

Corrigé : Exemple 17.7 page 134

Exercice 3

Corrigé : Ex. 11 page 309

Exercice 4

Corrigé : Ex. 2a page 285

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex. 2b §15.3 page 117)

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}\cos x$ étendue par imparité sur $\mathbb{R}$. Calculer la transformée de Fourier en sinus de f.

Exercice 2 (Ex 7 §15.3 page 118)

Soit f une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx < \infty$ et soit g la fonction définie par $g(x) = xf(x)$. Montrer que

$$\mathfrak{F}(f)'(\alpha) \doteq (\hat{f})'(\alpha) = -i\mathfrak{F}(g)(\alpha)$$

On suppose que tous les calculs formels sont licites.

Exercice 3 (Exemple 18.3 page 140)

Trouver $u(x,t)$ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Indication : la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = e^{-\omega x^2}$ avec $\omega > 0$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega}}$$

Exercice 4

Soit $z = x + iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On définit $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Montrer que :

a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$,

b) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$,

c) $e^{z+2n\pi i} = e^z$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

ANALYSE VI	**SÉRIE 3**	**Printemps 2018**
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)	**Corrigé**	**8 mars 2018**

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre "Analyse avancée pour ingénieurs" (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 2b page 285

Exercice 2

Corrigé : Ex. 7 page 288

Exercice 3

Corrigé : Exemple 18.3 page 140

Exercice 4

a) $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\
&\overset{\text{déf}}{=} e^{x_1+x_2}\left[\cos\left(y_1+y_2\right) + i\sin\left(y_1+y_2\right)\right] \\
&= e^{x_1+x_2}\left[\left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2\right) + i\left(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2\right)\right] \\
&= e^{x_1+x_2}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right)\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right) \\
&= e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right) e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right) \overset{\text{déf}}{=} e^{z_1}e^{z_2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
e^{-z} &= e^{-x-iy} \overset{\text{déf}}{=} e^{-x}\left[\cos\left(-y\right) + i\sin\left(-y\right)\right] \\
&= e^{-x}\left(\cos y - i\sin y\right) = \frac{e^{-x}\left(\cos y - i\sin y\right)\left(\cos y + i\sin y\right)}{\cos y + i\sin y} \\
&= \frac{e^{-x}\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right)}{\cos y + i\sin y} = \frac{1}{e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{e^{z}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
e^{z+2n\pi i} &= e^{x+i(y+2n\pi)} \overset{\text{déf}}{=} e^{x}\left[\cos\left(y+2n\pi\right) + i\sin\left(y+2n\pi\right)\right] \\
&= e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right) \overset{\text{déf}}{=} e^{z}.
\end{aligned}$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex. 1 §9.3 page 71)

a) Déterminer les parties réelles et imaginaires des fonctions $\cos z$, $\cosh z$ et $\sinh z$.

b) A l'aide des équations de Cauchy-Riemann, montrer que ces fonctions sont holomorphes dans $\mathbb{C}$.

c) Calculer les dérivées de ces fonctions.

Exercice 2 (Ex. 2 §9.3 page 71)

La fonction f définie par $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ est-elle holomorphe ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (Ex. 4 §9.3 page 71)

Trouver une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la partie réelle est

$$u(x, y) = e^{\left(x^2 - y^2\right)} \cos(2xy).$$

Exercice 4 (Ex. 5 §9.3 page 71)

Trouver une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que sa partie réelle soit

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-x} \cos y.$$

Exercice 5 (Ex. 8 §9.3 page 71)

Montrer que les équations de Cauchy-Riemann, en coordonées polaires, s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 1 page 223

Exercice 2

Corrigé : Ex. 2 page 224

Exercice 3

Corrigé : Ex. 4 page 224

Exercice 4

Corrigé : Ex. 5 page 224

Exercice 5

Corrigé : Ex. 8 page 226

ANALYSE IV	SÉRIE 5	Printemps 2018
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)		22 mars 2018

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex. 3 §9.3 page 71)

Soit la fonction f définie par $f(z) = \log(1+z^2)$. Déterminer le plus grand domaine de $\mathbb{C}$ où la fonction f est holomorphe.

Exercice 2 (Ex. 6 et Ex. 11 §9.3 page 71)

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $f : V \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x, y)$ est dite harmonique dans V si $f \in C^2(V)$ et

$$(\Delta f)(x, y) \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

pour tout $(x, y) \in V$.

a) Montrer que si $z = x + iy$ et $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans un ouvert V, alors
   i) u et v sont des fonctions harmoniques dans V,
   ii) $u_x v_x + u_y v_y = 0$,
   iii) $|g'(z)|^2 = u_x(x, y)v_y(x, y) - u_y(x, y)v_x(x, y)$.

b) Soit V un ouvert et u une fonction harmonique dans V. Si $z = x + iy$, montrer que la fonction g définie par
$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$
est une fonction holomorphe dans V.

Exercice 3 (Ex. 7 §9.3 page 71)

Montrer que si $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ est holomorphe alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes :
   a) f est constante.
   b) $\mathrm{Re}\,(f)$ est constante.
   c) $\mathrm{Im}\,(f)$ est constante.

Exercice 4 (Ex. 9 §9.3 page 71)

Soit $z = x+iy$ et $f = u+iv$ une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ telle que $\partial u/\partial x+\partial v/\partial y = 0$. Montrer qu'il existe une constante réelle c et une constante complexe d telle que $f(z) = -icz + d$.

Exercice 5 (Ex. 3 §10.3 page 75)

Calculer

a) $\displaystyle\int_\gamma (z^2+1)\,\mathrm{d}z$ où γ est le segment joignant 1 à $1+i$.

b) $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Re}(z^2)\,\mathrm{d}z$ où γ est le cercle unité centré à l'origine.

Exercice 6 (Ex. 9 §10.3 page 76)

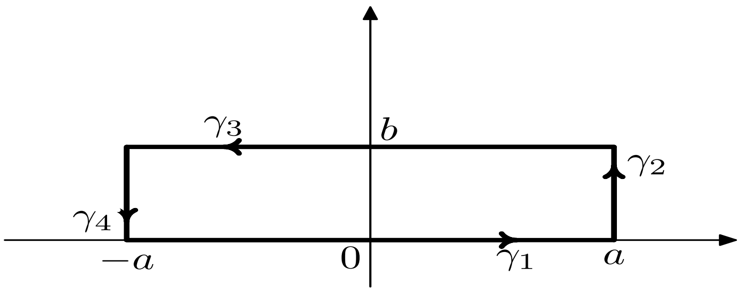
Soit $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{-b^2} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Indication : Considérer la fonction f définie par $f(z) = e^{-z^2}$ et le chemin

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

donné par :



où $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ et que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

c) Conclure en utilisant le résultat $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ obtenu dans l'exercice 4 a) de la série 1.

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réferent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 3 page 224

Exercice 2

Corrigé : Ex. 6 page 225 et Ex. 11 page 227

Exercice 3

Corrigé : Ex. 7 page 226

Exercice 4

Corrigé : Ex. 9 page 226

Exercice 5

Corrigé : Ex. 3 page 229

Exercice 6

Corrigé : Ex. 9 page 232

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex. 6 §10.3 page 76)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{2z}}{z}\,\mathrm{d}z \quad$ où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^3+2z^2+2}{z-2i}\,\mathrm{d}z \quad$ où $\gamma = \left\{z \in \mathbb{C} : |z-2i| = \frac{1}{4}\right\}$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(2z^2+3z+1)}{z-\pi}\,\mathrm{d}z \quad$ où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-\pi| = 1\}$.

Exercice 2 (Ex. 7 ii §10.3 page 76)

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z\,(z+2)}\,\mathrm{d}z \quad \text{où } \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Exercice 3 (Ex. 1 §10.3 page 75)

Soit γ une courbe simple, fermée et régulière par morceaux. Discuter, en fonction de γ, la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{2z}\,\mathrm{d}z$$

Exercice 4 (Ex. 10 et Ex. 11 §10.3 page 77)

a) Soit f une fonction continue dans un domaine D simplement connexe et soit $F : D \mapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in D$. Montrer que, pour toute courbe régulière $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ contenue dans D, on a :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

b) Soit la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{1}{z}$. A l'aide du résultat établi dans la question a), discuter le calcul et trouver la valeur des intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ où γ_1 est le cercle de rayon 1 centré en $z = 2$.

ii) $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ où γ_2 est le cercle de rayon 1 centré en l'origine.

c) Peut-on obtenir les résultats trouvés dans la question b) en utilisant le théorème de Cauchy et la formule intégrale de Cauchy ?

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre "Analyse avancée pour ingénieurs" (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 6 page 230

Exercice 2

Corrigé : Ex. 7 ii page 231

Exercice 3

Corrigé : Ex. 1 page 229

Exercice 4

Corrigé question a) : Ex. 10 page 233
Corrigé question b) : Ex. 11 page 234
Corrigé question c) :

i) Puisque $0 \notin \overline{\text{int } \gamma_1}$, alors le théorème de Cauchy appliqué à la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ donne immédiatement

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = 0$$

ii) Puisque $0 \in \text{int } \gamma_2$, alors la formule intégrale de Cauchy appliquée, pour $z = 0$, à la fonction constante $g(\xi) = 1$ donne

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{\xi} \, \mathrm{d}\xi = 2\pi i g(0) = 2\pi i.$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex. 2 §10.3 page 75)

Calculer

$$\int_\gamma \frac{z^2 \sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} \, \mathrm{d}z$$

où $\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{\pi}{2} \right| = 1 \right\}$.

Exercice 2 (Ex. 7i §10.3 page 76)

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma \frac{3z^2 + 2z + \sin(z+1)}{(z-2)^2} \, \mathrm{d}z \quad \text{où} \quad \gamma = \{ z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1 \}$$

Exercice 3 (Ex. 8 §10.3 page 76)

Calculer

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2 \, (z^2+4)} \, \mathrm{d}z$$

lorsque

a) γ est le cercle de rayon 1 centré en $z = 1$

b) γ est le bord du rectangle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times [0, 4]$

c) γ est le bord du rectangle $[-2, 0] \times [-1, 1]$.

Exercice 4 (Ex. 4 §10.3 et Ex 5 §10.3 page 76)

Soit $\gamma \subset \mathbb{C}$, une courbe simple, fermée et régulière par morceaux. Discuter, en fonction de γ, les valeurs des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2}$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} \, \mathrm{d}z$

Exercice 5 (Ex. 14 §11.3 page 84)

Soit la fonction f définie par $f(z) = \log(1 + z)$.

a) Déterminer le plus grand domaine de $\mathbb{C}$ où la fonction est holomorphe.

b) Calculer son développement de Taylor en $z_0 = 0$ et $z_0 = i$. Donner dans chaque cas son rayon de convergence.

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 2 page 229

Exercice 2

Corrigé : Ex. 7 i page 231

Exercice 3

Corrigé : Ex. 8 page 231

Exercice 4

Corrigé : Ex. 4 et Ex. 5 page 230

Exercice 5

Corrigé : Ex. 14 page 246

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Pour chacune des fonctions données dans les exercices 1 et 2 :

1) écrire la série de Laurent au voisinage du point z_0 qui est indiqué
2) déterminer la nature du point z_0
3) trouver le résidu de la fonction en z_0

Exercice 1 (Ex 1 ii et iv-vii §11.3 page 84)

a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$ en $z_0 = 0$

b) $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$ en $z_0 = 0$

c) $f(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 1}{z + 1}$ en $z_0 = -1$

d) $f(z) = \dfrac{1}{(1 - z)^3}$ en $z_0 = 1$

e) $f(z) = \dfrac{z^2 + z + 1}{z^2 - 1}$ en $z_0 = 1$

Exercice 2 (Ex 3 i-ii §11.3, Ex 6 §11.3 et Ex 12 §11.3 page 84)

a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z - \pi}$ en $z_0 = \pi$

b) $f(z) = z^2 e^{1/z}$ en $z_0 = 0$

c) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z - 1)^2}$ en $z_0 = 1$

d) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z - \pi)^2}$ en $z_0 = \pi$

Indications pour a) et d) : utiliser $\cos z = -\cos(z - \pi)$ et $\sin z = -\sin(z - \pi)$.

Exercice 3 (Ex 2 §11.3 page 84)

Soit la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{1}{z(z + 2)^3}$. On considère les points $z_1 = 0$ et $z_2 = -2$.

a) Ecrire les quatre premiers termes de la série de Laurent de f au voisinage de z_1 et de z_2.
b) Déterminer la nature des points z_1 et z_2.
c) Trouver les valeurs de $\text{Rés}_{z_1}(f)$ et de $\text{Rés}_{z_2}(f)$.

Exercice 4 (Ex 17 §11.3 page 85)

Soient f et g deux fonctions holomorphes au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ telles que $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$. Montrer la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se référent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé :

a) Ex 1 ii page 237

b) Ex 1 iv page 239

c) Ex 1 v page 239

d) Ex 1 vi page 239

e) Ex 1 vii page 239

Exercice 2

Corrigé :

a) Ex 3 i page 241

b) Ex 3 ii page 241

c) Ex 6 page 242

d) Ex 12 page 245

Exercice 3

Corrigé : Ex. 2 page 240

Exercice 4

Corrigé : Ex. 17 page 248

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex 15 §11.3 page 85)

Soit la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{\sin\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^2}$.

a) Trouver les singularités de f et déterminer la nature de ces singularités.

b) Calculer le résidu de f en ces points.

Exercice 2 (Ex 2 §12.3 page 92)

Soit γ une courbe simple fermée régulière par morceaux. Discuter en fonction de γ la valeur des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z-i)(z+2)^2(z-4)}\,\mathrm{d}z$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{(z+1)^2}{(z-3)^3}\,\mathrm{d}z$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}\,\mathrm{d}z$

Exercice 3 (Ex 4 §12.3 page 93)

Soit γ une courbe simple fermée régulière par morceaux. Discuter en fonction de γ la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{1-e^{i\pi z}}{z(z+i)(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$$

Exercice 4 (Ex 5 §12.3 page 93)

Soit γ une courbe simple fermée régulière contenue dans le disque de rayon 2 centré en $z=0$. Discuter en fonction de γ la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \mathrm{tg} z\,\mathrm{d}z.$$

Exercice 5 (Proposition 11.5 page 81)

Soit une fonction f définie par $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, où p et q sont deux fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ telles que z_0 est un zéro d'ordre 1 de q et $p(z_0) \neq 0$. Montrer que

$$\mathrm{Rés}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre "Analyse avancée pour ingénieurs" (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 15 page 247

Exercice 2

Corrigé : Ex. 2 page 251

Exercice 3

Corrigé : Ex. 4 page 255

Exercice 4

Corrigé : Ex. 5 page 255

Exercice 5

D'après les hypothèses, z_0 est un pôle d'ordre 1 de f. On a donc que

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) p(z)}{q(z)}.$$

En utilisant la règle de l'Hôpital (voir exercice 4 série 8) on obtient :

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z) + (z - z_0) p'(z)}{q'(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Remarque : $q(z_0) = 0$ et $q'(z_0) \neq 0$ car z_0 est un zéro d'ordre 1 de q.

ANALYSE IV	**SÉRIE 10**	**Printemps 2018**
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)		**3 mai 2018**

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex 7 §12.3 page 93)

Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \sin 2\theta}{5 + 3\cos 2\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

Exercice 2 (Ex 8 §12.3 page 93)

Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{13 - 5\cos 2\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

Exercice 3 (Ex 9 §12.3 page 93)

Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(5\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} d\theta.$$

Exercice 4 (Ex 11 §12.3 page 94)

Soit $p \in]0,1[$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2}.$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 7 page 257

Exercice 2

Corrigé : Ex. 8 page 257

Exercice 3

Corrigé : Ex. 9 page 258

Exercice 4

Corrigé : Ex. 11 page 260

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex 10 §12.3 page 94 avec $n = 2$)

Soit la fonction h définie par $h(z) = \dfrac{(z-1)^4(z^4+1)}{z^5}$.

a) Déterminer la nature du point $z = 0$.

b) Déterminer la valeur de $\text{Rés}_0(h)$.

c) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 \cos 2\theta \, d\theta$$

en utilisant la méthode de résidus et les résultats des questions précédentes.

Exercice 2 (Ex 12 §12.3 page 94)

a) Soit $z = re^{i\theta}$; montrer que $|1 + z^6| \geq |r^6 - 1|$.

b) Soit C_r le demi-cercle centré en 0, de rayon $r > 1$ et situé dans le demi-plan supérieur. Montrer que

$$\lim_{r\to\infty} \left| \int_{C_r} \frac{z^2}{1+z^6} dz \right| = 0 \,.$$

c) Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx$.

Exercice 3 (Ex 13 §12.3 page 94)

a) Soient $\theta \in [0, \pi]$, $r > 0$ et $z = re^{i\theta}$. Montrer que $|e^{iz}| \leq 1$.

b) Soit $z = re^{i\theta}$. Montrer que $|16 + z^4| \geq |r^4 - 16|$.

c) Montrer que si $\theta \in [0, \pi]$, $r > 2$ et $z = re^{i\theta}$, alors

$$\left| \frac{e^{iz}}{16+z^4} \right| \leq \frac{1}{r^4-16} \,.$$

d) Soit C_r le demi-cercle centré en 0, de rayon $r > 2$ et situé dans le demi-plan supérieur. Montrer que

$$\lim_{r\to\infty} \left| \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{16+z^4} dz \right| = 0.$$

e) Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{16+x^4} dx \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{16+x^4} dx.$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex 10 page 259 (poser $n = 2$ dans la résolution)

Exercice 2

Corrigé : Ex 12 page 260

Exercice 3

Corrigé : Ex 13 page 261

ANALYSE IV	**SÉRIE 12**	**Printemps 2018**
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)		**24 mai 2018**

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex 1 §16.3 page 124)

Calculer la transformée de Laplace des fonctions définies par :

a) $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $f_\alpha(t) = te^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

c) $f_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} & \text{si } t \in [0, \alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$

Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} \mathfrak{L}(f_\alpha)(z)$ pour la fonction de la question c).

Exercice 2 (Ex 3 §16.3 page 124)

Trouver la transformée de Laplace de la fonction f définie par

$$f(t) = e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t).$$

Indication : les transformées de Laplace des fonctions g et h définies par $g(t) = \cos(\omega t)$ et $h(t) = \sin(\omega t)$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ sont respectivement données par

$$\mathfrak{L}(g)(z) = \frac{z}{z^2 + \omega^2} \text{ et } \mathfrak{L}(h)(z) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}.$$

Exercice 3 (Ex 6, Ex 7, Ex 8, Ex 9, Ex 12 §16.3 pages 124-125)

Soient f et g deux fonctions vérifiant les hypothèses nécessaires à l'étude des propriétés des transformées de Laplace (voir §6.3 du cours). Sans faire des preuves détaillées mais en supposant tous les calculs formels licites, montrer les formules suivantes :

a) $\mathfrak{L}(f)'(z) = -\mathfrak{L}(h)(z)$ où la fonction h est définie par $h(t) = tf(t)$ pour $t \geq 0$

b) $\mathfrak{L}(f')(z) = z\mathfrak{L}(f)(z) - f(0)$

c) $\mathfrak{L}(\varphi)(z) = \dfrac{1}{z}\mathfrak{L}(f)(z)$ où la fonction φ est une primitive de f donnée par

$$\varphi(t) = \int_0^t f(s)\, ds \text{ pour } t \geq 0$$

d) $\mathfrak{L}(\varphi)(z) = \dfrac{1}{a}\mathfrak{L}(f)\left(\dfrac{z+b}{a}\right)$ où la fonction φ est définie par $\varphi(t) = e^{-bt}f(at)$ pout $t \geq 0$ avec $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}$

e) $\mathfrak{L}(f * g)(z) = \mathfrak{L}(f)(z)\,\mathfrak{L}(g)(z)$ où $f * g$ est le produit de convolution défini par

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\, ds \text{ pour } t \geq 0.$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex 1 page 291

Exercice 2

Corrigé : Ex 3 page 292

Exercice 3

Corrigé :

a) Ex 6 page 294

b) Ex 7 page 294

c) Ex 8 page 295

d) Ex 9 page 295

e) Ex 12 page 296

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex 4 §16.3 page 124)

Trouver, sans utiliser le théorème des résidus, la transformée de Laplace inverse des fonctions F définies par

a) $F(z) = \dfrac{4z}{z^2+64}$

b) $F(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$.

Exercice 2 (Exemple 16.7 page 122 et Ex 5 §16.3 page 124)

Calculer, en utilisant le théorème des résidus, la transformée de Laplace inverse des fonctions F définies par

a) $F(z) = \dfrac{1}{(z+1)\,(z+2)^2}$

b) $F(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

Exercice 3

Utiliser les méthodes de la transformée de Laplace pour trouver une solution $y(t)$ de l'équation intégrale

$$y'(t) - 2y(t) + \int_0^t y(s)e^{2(s-t)}\,ds = e^{-2t}$$

pour $t \geq 0$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 4

Utiliser les méthodes de la transformée de Laplace pour trouver une solution de l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}\cos 2t$$

pour $t \geq 0$ avec les conditions initiales

$$y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -1.$$

Indications pour les exercices 1,3 et 4

Les transformées de Laplace des fonctions f et g définies par $f(t) = e^{\alpha t}\cos\omega t$ et $g(t) = \sinh\omega t$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ sont respectivement données par

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\omega^2} \text{ et } \mathfrak{L}(g)(z) = \frac{\omega}{z^2-\omega^2}.$$

ANALYSE IV	SÉRIE 13	Printemps 2018
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)	Corrigé	31 mai 2018

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre "Analyse avancée pour ingénieurs" (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex 4 page 292

Exercice 2

Corrigé :

a) Exemple 16.7 page 122

b) Ex 5 page 293

Exercice 3

En posant $f(t) = e^{-2t}$ l'équation intégrale s'écrit

$$y'(t) - 2y(t) + (f * y)(t) = f(t).$$

On écrit $\mathfrak{L}(y)(z) = Y(z)$. Selon les indications de l'énoncé on sait que $\mathfrak{L}(f)(z) = \dfrac{1}{z+2}$.
Par ailleurs $\mathfrak{L}(y')(z) = zY(z) - y(0) = zY(z)$ puisque $y(0) = 0$.
Alors on a

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}(y')(z) - 2Y(z) + \mathfrak{L}(f * y)(z) = \mathfrak{L}(f)(z) \\
\Longrightarrow\ & zY(z) - 2Y(z) + \mathfrak{L}(f)(z)Y(z) = \mathfrak{L}(f)(z) \\
\Longrightarrow\ & \left(z - 2 + \frac{1}{z+2}\right) Y(z) = \frac{1}{z+2} \\
\Longrightarrow\ & \left(z^2 - 3\right) Y(z) = 1 \\
\Longrightarrow\ & Y(z) = \frac{1}{z^2 - 3}
\end{aligned}$$

Avec la formule d'inversion on a :

$$y = \mathfrak{L}^{-1}(Y) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2 - 3}\right)$$

et selon les indications de l'énoncé on trouve

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh\left(\sqrt{3}t\right).$$

Exercice 4

On écrit : $\mathfrak{L}(y)(z) = Y(z)$ et $f(t) = e^{-t}\cos 2t$.
Selon les indications de l'énoncé on sait que

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \frac{z+1}{(z+1)^2 + 4} = \frac{z+1}{z^2 + 2z + 5}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(y'')(z) &= z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) = z^2Y(z) - z + 1 \\
\mathfrak{L}(y')(z) &= zY(z) - y(0) = zY(z) - 1.
\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}(y'')(z) + 2\mathfrak{L}(y')(z) + \mathfrak{L}(y)(z) = \mathfrak{L}(f)(z) \\
\Longrightarrow\ & z^2Y(z) - z + 1 + 2zY(z) - 2 + Y(z) = \frac{z+1}{z^2+2z+5} \\
\Longrightarrow\ & (z^2+2z+1)Y(z) = \frac{z+1}{z^2+2z+5} + z + 1 \\
\Longrightarrow\ & (z+1)Y(z) = \frac{1}{z^2+2z+5} + 1 = \frac{z^2+2z+6}{z^2+2z+5} \\
\Longrightarrow\ & Y(z) = \frac{z^2+2z+6}{(z+1)(z^2+2z+5)}
\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples sous la forme

$$Y(z) = \frac{a}{z+1} + \frac{b(z+1)}{z^2+2z+5}$$

on trouve

$$Y(z) = \frac{5}{4}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{4}\frac{z+1}{z^2+2z+5} = \frac{5}{4}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{4}\frac{z+1}{(z+1)^2+4}$$

Avec la formule d'inversion on a :

$$\mathfrak{L}^{-1}(Y) = \frac{5}{4}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{z+1}\right) - \frac{1}{4}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{z+1}{(z+1)^2+4}\right)$$

et selon les indications de l'énoncé on trouve

$$y(t) = \frac{5}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t}\cos 2t.$$

ANALYSE IV	**Série d'entraînement**	**Printemps 2018**
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)		**Durée : 50 minutes**

Cette série est à faire en dehors des séances habituelles du jeudi. L'examen, qui dure deux heures, sera plus long que cette série. Il est recommandé de la faire en travaillant seul(e), sans consulter des documents (livres, notes personelles, séries d'exercices, corrigés,...) et sans utiliser de calculatrice.

Problème 1

Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Problème 2

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma \frac{(z+i)^2 e^{(z-2)\pi}}{z(z+i-2)}\, dz \qquad \text{où } \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| = 2\}\,.$$

Problème 3

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta.$$

Problème 4

Utiliser les méthodes de la transformée de Laplace pour trouver une solution $y(t)$ de l'équation intégrale

$$y''(t) + 3y'(t) + 5\int_0^t y'(s)e^{3(t-s)}\, ds = e^{3t}$$

pour $t \geq 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
Indication : la transformée de Laplace de la fonction f définie par $f(t) = e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \frac{1}{z - \alpha}.$$

Problème 1

La fonction f est paire ; $f(x) = 0$ pour $x \notin [-1, 1]$

$$\Longrightarrow \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1 - x^2) \cos \alpha x \, dx.$$

Pour $\alpha = 0$, on calcule directement et on trouve :

$$\mathfrak{F}(f)(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1 - x^2) \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[x - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 \right] = \sqrt{\frac{8}{9\pi}}.$$

Pour $\alpha \neq 0$, on calcule en intégrant deux fois par parties et on trouve

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{F}(f)(\alpha) &= \int_0^1 \cos \alpha x \, dx - \int_0^1 x^2 \cos \alpha x \, dx = \\
&= \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \Big|_0^1 - \frac{x^2}{\alpha} \sin \alpha x \Big|_0^1 + \frac{2}{\alpha} \int_0^1 x \sin \alpha x \, dx \\
&= \frac{1}{\alpha} \sin \alpha - \frac{1}{\alpha} \sin \alpha - \frac{2}{\alpha^2} x \cos \alpha x \Big|_0^1 + \frac{2}{\alpha^2} \int_0^1 \cos \alpha x \, dx \\
&= -\frac{2}{\alpha^2} \cos \alpha + \frac{2}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \Big|_0^1 \\
&= -\frac{2}{\alpha^2} \cos \alpha + \frac{2}{\alpha^3} \sin \alpha
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{2}{\alpha^2} \cos \alpha + \frac{2}{\alpha^3} \sin \alpha \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\alpha^3} \left[\sin \alpha - \alpha \cos \alpha \right].$$

Le résultat est

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{8}{9\pi}} & \text{si } \alpha = 0 \\ \sqrt{\dfrac{8}{\pi}} \dfrac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^3} & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Problème 2

On considère la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{(z+i)^2 e^{(z-2)\pi}}{z(z+i-2)}$.
Pôles de f : $z_0 = 0 \notin \text{int}\gamma$ et $z_1 = 2 - i \in \text{int}\gamma$. Donc

$$\int_\gamma \frac{(z+i)^2 e^{(z-2)\pi}}{z(z+i-2)} dz = 2\pi i \text{Rés}_{2-i}(f).$$

Le pôle z_1 est d'ordre 1, donc

$$\text{Rés}_{2-i}(f) = \lim_{z \to 2-i} (z + i - 2) \frac{(z+i)^2 e^{(z-2)\pi}}{z(z+i-2)} = \frac{-4}{2-i},$$

d'où

$$\int_\gamma \frac{(z+i)^2 e^{(z-2)\pi}}{z(z+i-2)}dz = \frac{8\pi}{5}(1-2i).$$

Autre méthode : on utilise la formule intégrale de Cauchy en considérant la fonction g définie par $g(z) = \dfrac{(z+i)^2 e^{(z-2)\pi}}{z}$. On obtient :

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{z+i-2}dz = 2\pi i g(2-i) = \frac{8\pi}{5}(1-2i).$$

Problème 3

Soit $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$, l'intégrale est définie car $5-4\cos\theta \neq 0$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.
Avec $z = e^{i\theta}$, on a $\cos\theta = \dfrac{z^2+1}{2z}$ et $\cos 2\theta = \dfrac{z^4+1}{2z^2}$.
Soit $f(\cos\theta, \sin\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}$ alors on pose

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{iz}f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^4+1}{2z^2}\right) = \frac{i}{2}\frac{z^4+1}{z^2(2z^2-5z+2)}.$$

On a que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 2, $z_1 = \dfrac{1}{2}$ et $z_2 = 2$ sont des pôles d'ordre 1 de $\tilde{f}$.
Soit γ le cercle de rayon $r = 1$ centré en $z = 0$, alors $z_0 \in \text{int}\gamma$, $z_1 \in \text{int}\gamma$ et $z_2 \notin \text{int}\gamma$, et

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta = 2\pi i[\text{Rés}_0(\tilde{f}) + \text{Rés}_{\frac{1}{2}}(\tilde{f})].$$

Or

$$\text{Rés}_0(\tilde{f}) = \frac{i}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z^4+1)}{z^2(2z^2-5z+2)}\right] = \frac{5i}{8}$$

$$\text{Rés}_{\frac{1}{2}}(\tilde{f}) = \frac{i}{2}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left[\frac{(z-\frac{1}{2})(z^4+1)}{z^2(2z^2-5z+2)}\right] = \frac{-17i}{24}.$$

Donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

Problème 4

En posant $f(t) = e^{3t}$ l'équation intégrale s'écrit

$$y''(t) + 3y'(t) + 5\left(f * y'\right)(t) = f(t)$$

On écrit $\mathfrak{L}(y)(z) = Y(z)$. Selon l'indication de l'énoncé on sait que

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \frac{1}{z-3}.$$

Par ailleurs $\mathfrak{L}(y'')(z) = z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) = z^2Y(z)$ et $\mathfrak{L}(y')(z) = zY(z) - y(0) = zY(z)$ puisque $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Alors on a

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}(y'')(z) + 3\mathfrak{L}(y')(z) + 5\mathfrak{L}(f)(z)\mathfrak{L}(y')(z) = \mathfrak{L}(f)(z)\\
\Longrightarrow\ &\left(z^2 + 3z + \frac{5z}{z-3}\right) Y(z) = \frac{1}{z-3}\\
\Longrightarrow\ &\big(z^2(z-3) + 3z(z-3) + 5z\big)\, Y(z) = 1\\
\Longrightarrow\ &\big(z^3 - 4z\big)\, Y(z) = 1\\
\Longrightarrow\ &Y(z) = \frac{1}{z^3 - 4z}.
\end{aligned}$$

Avec la formule d'inversion on a

$$y = \mathfrak{L}^{-1}(Y) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^3 - 4z}\right).$$

On peut calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction $F(z) = \dfrac{1}{z^3 - 4z}$ en utilisant le théorème des résidus.

On pose $h(z) = F(z)e^{zt} = \dfrac{e^{zt}}{z(z^2-4)}$ pour $t \geq 0$.

Les singularités de h sont $z = 0$, $z = 2$, $z = -2$ (pôles d'ordre 1) et on a :

$$\text{Rés}_0(h) = -\frac{1}{4}, \quad \text{Rés}_2(h) = \frac{e^{2t}}{8}, \quad \text{Rés}_{-2}(h) = \frac{e^{-2t}}{8}.$$

Alors

$$\mathfrak{L}^{-1}(F)(t) = \text{Rés}_0(h) + \text{Rés}_2(h) + \text{Rés}_{-2}(h) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right)$$

et on obtient

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cosh 2t.$$