

Analyse IV

Transcript du cours du Pr. Michel CIBILS

Robin MAMIÉ

Printemps 2018

Table des matières

1	Transformées de Fourier	3
1.1	Introduction	3
1.1.1	Définitions et résultats préliminaires	3
1.1.2	Motivation	4
1.1.3	Raisonnement heuristique	4
1.2	Transformée de Fourier d'une fonction	6
1.2.1	Définition	6
1.2.2	Exemples	6
1.3	Transformée de Fourier inverse	8
1.3.1	Définition	8
1.3.2	Théorème de réciprocité (formule d'inversion)	8
1.3.3	Exemple d'utilisation	8
1.4	Propriétés de la transformée de Fourier	9
1.4.1	Continuité et linéarité	9
1.4.2	Transformée de Fourier du produit de convolution	9
1.4.3	Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction	10
1.4.4	Décalage	10
1.4.5	Identité de Plancherel	10
1.4.6	Transformée de Fourier en sinus et cosinus	10
1.5	Esquisse de démonstrations de quelques propriétés	11
1.5.1	Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction	11
1.5.2	Transformée de Fourier du produit de convolution	12
1.5.3	Identité de Plancherel	12
1.6	Exemples d'utilisation de la transformée de Fourier	13
2	Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann	16
2.1	Introduction	16
2.1.1	Motivation	16
2.1.2	Rappel sur les nombres complexes	16
2.2	Fonctions complexes	17
2.2.1	Définitions	17
2.2.2	Exemples	17
2.3	Limites, continuité, dérivabilité	19

2.3.1	Définitions	19
2.3.2	Équations de Cauchy-Riemann	19
2.3.3	Exemples	20
2.3.4	Démonstration des équations de Cauchy-Riemann	22
3	Théorème et formule intégrale de Cauchy	24
3.1	Intégration complexe	24
3.1.1	Définitions et notations	24
3.1.2	Exemples	25
3.2	Théorème de Cauchy	25

Chapitre 1

Transformées de Fourier

1.1 Introduction

1.1.1 Définitions et résultats préliminaires

Définition. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **T-périodique** s'il existe $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

L'intervalle $[0, T]$ caractérise complètement la fonction.

Définition (14.1.i, p.103). Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe des points $\{x\}_{i=0}^{n+1} \subset [a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ tels que pour $i = 0, 1, \dots, n$ on ait :

1. f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$
2. la limite à droite $f(x_i + 0) := \lim_{\substack{t \rightarrow x_i \\ t > x_i}} f(t)$ et la limite à gauche $f(x_{i+1} - 0) := \lim_{\substack{t \rightarrow x_i \\ t < x_i}} f(t)$ existent et sont finies.

Terminologie. On dit qu'une fonction T-périodique est continue par morceaux si elle l'est sur l'intervalle $[0, T]$ qui la caractérise.

Définition (14.2, p.104). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Pour $N \in \mathbb{N}$, la **série de Fourier partielle d'ordre N** de f est :

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$$

où les **coefficients de Fourier** c_n sont des nombres complexes donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx$$

On appelle **série de Fourier de f** (en notation complexe) la limite lorsque $N \rightarrow \infty$ de la série de $F_N f(x)$. On écrit :

$$Ff(x) := \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$$

Théorème (de Dirichlet – Résultat de convergence ; 14.3, p.104). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique telle que f et f' soient continues par morceaux. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$:*

$$Ff(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N f(x) \text{ existe et } Ff(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

En particulier, si f est continue en x , alors $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ et on a $Ff(x) = f(x)$.

Note. Utilisation de la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (cf. ex. 1-2, série 1).

1.1.2 Motivation

Série de Fourier développement des fonctions *périodiques* comme somme infinie de fonctions trigonométriques.

Transformée de Fourier étude de fonctions *non* périodiques.

Idée. Soit $T > 0$ et f_T une fonction T -périodique définie par

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\frac{T}{2}, -1[\\ 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \in]1, \frac{T}{2}[\end{cases}$$

Lorsque la période $T \rightarrow \infty$, on a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

qui n'est plus une fonction périodique.

Idée. considérer des fonctions comme limites de fonctions périodiques dont la période T tend vers $+\infty$.

1.1.3 Raisonnement heuristique

Soit $f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue*, T -périodique telle que f'_T soit continue par morceaux. Alors la série de Fourier de f_T est :

$$Ff_T(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y}$$

pour $y \in \mathbb{R}$, où

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f_T(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx$$

En écrivant $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{T}$ et $\alpha_n = n \cdot \Delta\alpha$, on a $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}$.

$$c_n = \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} dx$$

$$\Rightarrow F f_T(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} dx \right] e^{i\alpha_n y}$$

Échange de la somme infinie et de l'intégrale :

$$F f_T(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[\Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} \right] dx$$

On découvre une somme de Riemann qui permet de définir une intégrale. En effet :

$$\Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} \underbrace{=}_{\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_{n-1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} (\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} d\alpha$$

Donc on obtient :

$$F f_T(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} d\alpha \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha x} dx \right] e^{i\alpha y} d\alpha$$

Comme f_T est continue, alors on a $f_T(y) = F f_T(y)$ et donc lorsque T tend vers $+\infty$, on a $\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} F f_T(y) \iff f(y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} F f_T(y)$.

$$\iff f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \right]}_{\substack{\text{Nouvelle fonction qui dépend de la} \\ \text{variable } \alpha, \text{ qui est appelée la} \\ \text{transformée de Fourier de } f \text{ et} \\ \text{notée } \mathfrak{F}(f) \text{ ou } \hat{f}}} e^{i\alpha y} d\alpha$$

On écrit :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

Remarque. On a que :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha y} d\alpha$$

1.2 Transformée de Fourier d'une fonction

1.2.1 Définition

Définition (15.1, p.113). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$.

La **transformée de Fourier** de f est la fonction notée $\mathfrak{F}(f)$ ou $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\alpha \mapsto \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

1.2.2 Exemples

Exemple. Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ f : x &\mapsto f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^x e^{-i\alpha x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(1-i\alpha)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left. \frac{e^{(1-i\alpha)x}}{1-i\alpha} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{1+i\alpha} \right|_0^{+\infty} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-i\alpha} \left(1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(1-i\alpha)x} \right) - \frac{1}{1+i\alpha} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(1+i\alpha)x} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+i\alpha + 1-i\alpha}{(1-i\alpha)(1+i\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

Résultat :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \hat{f} : \alpha &\mapsto \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

Remarque. Pour calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(1-i\alpha)x}$:

$$\begin{aligned}
\left| e^{(1-i\alpha)x} \right| &= \left| e^{-i\alpha x} e^x \right| = \underbrace{\left| e^{-i\alpha x} \right|}_{=1} |e^x| = e^x \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| e^{(1-i\alpha)x} \right| &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(1-i\alpha)x} &= 0 + i0 = 0
\end{aligned}$$

On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(1+i\alpha)x} = 0$.

Exemple. Soit la fonction

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
f : x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Calcul de la transformée de Fourier de f .

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\alpha x} dx \\
&\stackrel{\alpha \neq 0}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\alpha x}}{i\alpha} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 0
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i0x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \Big|_{-1}^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Résultat :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
\hat{f} : \alpha &\mapsto \hat{f}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On remarque que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{f}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \hat{f}(0)$.

$\Rightarrow \hat{f}$ est aussi continue en $\alpha = 0$.

Autres exemples : ex. 3-4, série 1

1.3 Transformée de Fourier inverse

1.3.1 Définition

Définition. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$. La **transformée de Fourier inverse** de g est notée :

$$\mathfrak{F}^{-1}(g) : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \rightarrow \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) \end{array}, \text{ où } \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{itx} dt.$$

1.3.2 Théorème de réciprocité (formule d'inversion)

Théorème (15.3.i, p.115). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que f et f' soient continues par morceaux avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < \infty$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

En particulier si f est continue en x , on a $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = f(x)$ et alors :

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Autrement dit, on a $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$. La transformée de Fourier peut être vue comme une « transformation \mathfrak{F} » inversible (une bijection) qui « agit » sur la fonction f :

$$f \xrightarrow{\mathfrak{F}} \hat{f} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f$$

1.3.3 Exemple d'utilisation

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto f(x) = e^{-|x|} \end{array} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

La transformée de Fourier de f est (exemple 1, §1.2.2)

$$\hat{f} : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \mapsto \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

On remarque que $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est continue par morceaux car :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = -1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1$$

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}| d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha < \infty$. f est continue $\forall x \in \mathbb{R} \implies$ en appliquant le *théorème de réciprocité*, on a que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$, i.e. :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1 + \alpha^2} d\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, lorsque $x = 0$, on trouve :

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2} = \pi.$$

En particulier, lorsque $x = 1$, on trouve :

$$e^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha}}{1 + \alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha + i \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha}^{\substack{\text{fonction impaire} \\ \text{intégrée sur tout l'axe} \\ \text{réel} = 0}} \right]$$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{e}$$

Conclusion : Le *théorème de réciprocity* permet de calculer la valeur d'intégrales généralisées.

Autre exemple : ex. 1, série 2

1.4 Propriétés de la transformée de Fourier

On considère f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < \infty$. On note indifféremment $\mathfrak{F}(f) \doteq \hat{f}$ et $\mathfrak{F}(g) \doteq \hat{g}$ les transformées de Fourier de f et de g .

Note. Les prochains résultats sont décrits dans les **théorèmes 15.2 et 15.3** aux pages 113 à 115 du livre du cours.

1.4.1 Continuité et linéarité

- $\mathfrak{F}(f)$ est continue $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)| = 0$.
- \mathfrak{F} linéaire : $\mathfrak{F}(af + bg) = a\mathfrak{F}(f) + b\mathfrak{F}(g) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

1.4.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

Définition. Le **produit de convolution** de deux fonctions f et g est la fonction notée $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)g(t) dt$$

Remarque. On peut aussi écrire $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(x - t')dt'$, via un changement de variable.

Résultat : on a que $\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$.

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au **produit** des transformées de Fourier de chaque fonction.

Exemples : ex. 2-3, série 2

1.4.3 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|dx < \infty$, alors on a :

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

On écrit aussi $\widehat{f'}(\alpha) = i\alpha \hat{f}(\alpha)$.

La transformée de Fourier de la dérivée de f s'obtient en **multipliant par $i\alpha$** la transformée de Fourier de f .

Plus généralement, si $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)|dx < \infty$ pour $k = 1, 2, \dots, n$, alors on a :

$$\mathfrak{F}(f^{(k)})(\alpha) = (i\alpha)^k \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n$$

On écrit aussi $\widehat{f^{(k)}}(\alpha) = (i\alpha)^k \hat{f}(\alpha)$.

Exemple : ex.3, série 2

1.4.4 Décalage

Si $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $h(x) = e^{-ibx}f(ax)$, alors :

$$\mathfrak{F}(h)(\alpha) = \frac{1}{|a|} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\alpha + b}{a}\right)$$

1.4.5 Identité de Plancherel

Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 dx < \infty$, alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2 d\alpha$$

1.4.6 Transformée de Fourier en sinus et cosinus

Si la fonction f est paire (i.e. $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$$

qui est la transformée de Fourier en **cosinus** de f .

Si la fonction f est impaire (i.e. $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$$

qui est la transformée de Fourier en **sinus** de f .

Exemples : ex.4, série 2 et ex.1, série 3

Remarque. Si de plus f' est continue par morceaux et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < \infty$, alors, d'après le théorème de réciprocité, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha && \text{lorsque } f \text{ est paire} \\ f(x) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha && \text{lorsque } f \text{ est impaire} \end{aligned}$$

1.5 Esquisse de démonstrations de quelques propriétés

1.5.1 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Démonstration. On a

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\alpha x} dx$$

On intègre par parties, avec $u' = f' \rightarrow u = f$ et $v = e^{-i\alpha x} \rightarrow v' = -i\alpha e^{-i\alpha x}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \right]$$

Or, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) e^{-i\alpha x}| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = 0$ car $|e^{-i\alpha x}| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ (f est sommable).

$$\Rightarrow \mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = i\alpha \mathfrak{F}(f)(\alpha)$$

□

Remarque. Formule pour la dérivée de la transformée de Fourier d'une fonction :

$$\mathfrak{F}'(f)(\alpha) = (\hat{f})'(\alpha) = -i \mathfrak{F}(xf(x))(\alpha)$$

Cf. ex. 2, série 3

1.5.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(f * g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-i\alpha x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \right] e^{-i\alpha x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{-i\alpha x} dx \right] g(t) dt \\
&\stackrel{\text{cdv}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha(y+t)} dy \right] g(t) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} dt \\
&= \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}(f)(\alpha) \cdot \mathfrak{F}(g)(\alpha)
\end{aligned}$$

□

1.5.3 Identité de Plancherel

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On remarque que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x+t) dx &\stackrel{1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) e^{i\alpha(x+t)} d\alpha \right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \right] e^{i\alpha t} d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) \overline{\mathfrak{F}(f)(\alpha)} e^{i\alpha t} d\alpha
\end{aligned}$$

En posant $t = 0$ et en choisissant $g = f$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(\alpha)]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2 d\alpha$$

□

1. Par le **théorème de réciprocity**, §1.3.2

1.6 Exemples d'utilisation de la transformée de Fourier

- a) Trouver une solution particulière $y(x)$ d'une équation différentielle du type :

$$\lambda y''(x) + \omega y(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda, \omega \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

qui est l'équation de l'oscillateur forcé (f est une fonction donnée).

Méthode : on écrit la transformée de Fourier de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\lambda y'' + \omega y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff \lambda \mathfrak{F}(y'')(\alpha) + \omega \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff \lambda (-\alpha^2) \mathfrak{F}(y)(\alpha) + \omega \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff (\omega - \lambda \alpha^2) \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \frac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda \alpha^2} \end{aligned}$$

On utilise le **théorème de réciprocité** (§1.3.2) : la solution particulière $y(x)$ s'obtient en calculant la transformée de Fourier inverse de la fonction de la variable α définie par $\frac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda \alpha^2}$.

- b) On utilise la transformée de Fourier pour résoudre des équations intégrales du type produit de convolution (*cf. ex. 2 et 3, série 3*).
c) Problèmes statistiques avec loi normale.

fonction gaussienne $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ex. 4, série 1 : $\hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ est aussi une fonction gaussienne.

- d) Mécanique quantique

$f(x)$: position de la particule quantique

$\hat{f}(p)$: impulsion de la particule quantique

- e) Résolution de l'équation de la chaleur pour une barre conductrice de longueur **infinie**.

Rappel : cas d'une barre de longueur **finie**

Soit une barre de longueur $0 < L < \infty$. On note $u(x, t)$ la fonction qui décrit la température de la barre au point x et à l'instant t .

L'évolution de la température $u(x, t)$ le long de la barre est modélisée par l'équation de la chaleur donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad \text{pour } x \in]0, L[\text{ et } t > 0, \quad a \neq 0$$

où a est un coefficient thermique. On impose :

— **deux** conditions limites $u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t > 0$,

— une condition initiale $u(x, 0) = f(x)$ pour $x \in]0, L[$.²

Problème : trouver une solution $u(x, t)$ satisfaisant ces conditions.

Cas d'une barre de longueur infinie

Il n'y a plus de conditions aux limites concernant les extrémités de la barre.

Le problème est :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x) \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, avec **une** condition initiale, valable $\forall x \in \mathbb{R}$ où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 telle que f et la transformée de Fourier de f soient sommables.

Résolution

1^{re} étape : on écrit la transformée de Fourier de l'équation de la chaleur en considérant $u(x, t)$ comme fonction de la variable x (t joue le rôle d'un paramètre). On obtient :

$$\mathfrak{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) (\alpha, t) = a^2 \mathfrak{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (\alpha, t) \text{ avec } \mathfrak{F}(u)(\alpha, 0) = \mathfrak{F}(f)(\alpha)$$

Avec la notation :

$$v(\alpha, t) = (\mathfrak{F}u)(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx$$

On obtient à gauche :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) (\alpha, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} v(\alpha, t) \end{aligned}$$

2. Dans le milieu de l'ingénierie, on sous-entend souvent qu'une condition **limite** l'est aux positions, et qu'une condition **initiale** l'est au temps

Et à droite :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha, t) &\stackrel{3}{=} (i\alpha)^2 \mathfrak{F}(u)(\alpha, t) \\ &= -\alpha^2 v(\alpha, t)\end{aligned}$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} v(\alpha, t) = -a^2 \alpha^2 v(\alpha, t)$$

C'est une équation différentielle du **premier ordre** pour la fonction $v(\alpha, t)$ par rapport à **la variable** t (α joue le rôle de paramètre).

La solution est :

$$v(\alpha, t) = v(\alpha, 0)e^{-a^2 \alpha^2 t} = \mathfrak{F}(f)(\alpha)e^{-a^2 \alpha^2 t}$$

2^e étape : pour obtenir la solution $u(x, t)$, on calcule la transformée de Fourier inverse de $v(\alpha, t)$ en considérant t comme paramètre. On obtient :

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \mathfrak{F}^{-1}(v)(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\alpha, t) e^{i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(f)(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 t} e^{i\alpha x} d\alpha\end{aligned}$$

comme solution de l'équation de la chaleur pour une barre de longueur infinie.

Exemple : ex. 3, série 3

3. Par la propriété du §1.4.3, concernant la **transformée de Fourier de la dérivée** d'une fonction

Chapitre 2

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

2.1 Introduction

2.1.1 Motivation

But : étendre l'étude de fonctions réelles (du type $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) à des fonctions qui dépendent d'une variable complexe qui sont à valeurs complexes (du type $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ où \mathbb{C} est l'ensemble des nombres complexes).

Rôle : établir les notions de limite, de continuité, de dérivabilité et d'intégration dans \mathbb{C} .

Intérêt : méthodes puissantes qui permettent de calculer facilement des intégrales réelles compliquées.

Cf. ex. 4, série 3

2.1.2 Rappel sur les nombres complexes

- \mathbb{C} désigne l'ensemble des nombres complexes
- $z \in \mathbb{C} \iff z = x + iy$ avec $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ et $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ où $0 = 0 + i0$
- complexe conjugué de z $\bar{z} = x - iy$
- module de $z \in \mathbb{C}$ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$
- représentation polaire de $z \in \mathbb{C}^*$ $z = |z| e^{i\theta} = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$
- θ est appelé l'argument de z et est noté $\arg z$

Remarque. Pour $z \in \mathbb{C}^*$:

- L'argument de z est défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$
- Par convention, la **valeur (détermination) principale** de l'argument de z est l'unique angle $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que $\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta$

2.2 Fonctions complexes

2.2.1 Définitions

Définition. Une fonction d'une variable complexe à valeur dans \mathbb{C} s'écrit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \end{array}$$

où

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & u(x, y) \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & v(x, y) \end{array}$$

sont deux fonctions à valeurs réelles qui s'appellent respectivement la partie réelle de f (on note $u = \operatorname{Re} f$) et la partie imaginaire de f (on note $v = \operatorname{Im} f$).

Remarque. Les variables $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ des fonctions u et v sont les parties réelles et imaginaires de la variable $z \in \mathbb{C}$ de la fonction f .

2.2.2 Exemples

Exemple.

1)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = \bar{z} = x - iy \end{array}$$

On a $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = -y$.

2)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \end{array}$$

On a $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$.

3)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \end{array}$$

On a $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

4) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la fonction exponentielle est définie par :

$$e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}^*$$

On a $u(x, y) = e^x \cos y$ et $v(x, y) = e^x \sin y$.

Remarque. Contrairement au cas réel, e^z n'est pas bijective sur \mathbb{C} car $e^{z+2ik\pi} = e^z \forall z \in \mathbb{C}$ (ex.4, série 3). En choisissant y tel que $-\pi < y \leq \pi$, la fonction e^z est bijective sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in]-\pi; \pi]\}$. Avec cette convention, c'est la « restriction bijective de l'exponentielle complexe ».

5) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, la fonction logarithme est définie par :

$$\log z := \ln |z| + i \arg z$$

avec le choix de la valeur principale $\arg z \in]-\pi; \pi[$. Avec cette convention, c'est la « **détermination principale du logarithme complexe** » (correspond à la fonction réciproque de la restriction bijective de l'exponentielle).

En écrivant $z = x + iy$, on a $u(x, y) = \ln |x + iy| = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ et $v(x, y) = \arg(x + iy)$.

Remarque.

- a) Les formules valables en analyse réelle ne sont pas nécessairement valables en analyse complexe. Par exemple, en général, on a $\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$. En effet, pour $z_1 = -1$ et $z_2 = -1$:

$$\log [(-1)(-1)] = \log(1) := \ln |1| + i \arg(1) = 0 + i0 = 0$$

mais

$$\log(-1) + \log(-1) = 2 \log(-1) := 2 [\ln |-1| + i \arg(-1)] = 2i\pi \neq 0$$

- b) La fonction $\log z$ n'est pas continue sur le demi-axe réel négatif. En effet, par exemple pour $z = -1$, on considère $t > 0$:

$$z_t^+ = -1 + it \quad \text{et} \quad z_t^- = -1 - it$$

On a $\lim_{t \rightarrow 0^+} z_t^+ = -1$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} z_t^- = -1$.

Note. Pour $z = x + iy$, on a la valeur principale :

$$\arg z = \begin{cases} \pi + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0, y > 0 \\ -\pi + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Avec la définition du logarithme, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^+) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln |-1 + it| + i \lim_{t \rightarrow 0^+} \arg(-1 + it) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \sqrt{1 + t^2} + i \lim_{t \rightarrow 0^+} [\pi + \operatorname{Arctg}(-t)] \\ &= \ln(1) + i\pi = 0 + i\pi = i\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^-) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln |-1 - it| + i \lim_{t \rightarrow 0^+} \arg(-1 - it) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \sqrt{1 + t^2} + i \lim_{t \rightarrow 0^+} [-\pi + \operatorname{Arctg}(t)] \\ &= \ln(1) - i\pi = 0 - i\pi = -i\pi \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^+) \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^-) \implies$ la fonction $\log z$ n'est pas continue en $z = -1$. De façon analogue, on obtient le même résultat $\forall z \in]-\infty; 0[$. $\log z$ **n'est pas continue** pour $z \in]-\infty; 0]$

Résultat final : En excluant le demi-axe réel négatif, on a que la fonction $\log z$ est continue sur l'ensemble :

$$V = \mathbb{C} \setminus]-\infty; 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

C'est la « **restriction continue du logarithme complexe** ».

6) Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit les fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

Cf. ex. 1, série 4

2.3 Limites, continuité, dérivabilité

2.3.1 Définitions

Définition. Les notions de topologie (ouverts, fermés, etc.), de limite, de continuité et de dérivabilité sont analogues à celles de l'analyse réelle. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, alors :

- 1) f possède une limite $l \in \mathbb{C}$ en $z_0 \in \mathbb{C}$ (notation $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$) si :
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - l| < \epsilon$
- 2) f est continue en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$
- 3) f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et est finie. La limite s'appelle la dérivée de f en z_0 et est notée $f'(z_0)$. Les règles de dérivation établies dans \mathbb{R} sont valables dans \mathbb{C} .
- 4) Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on dit que la fonction $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ est **holomorphe** (ou analytique complexe) dans V si f est *définie et dérivable* $\forall z \in V$.

2.3.2 Équations de Cauchy-Riemann

Remarque (sur un abus de notation). Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on l'identifie souvent au sous-ensemble correspondant de \mathbb{R}^2 , i.e. on écrit indifféremment $z = x + iy \in V (\in \mathbb{C})$ ou $(x, y) \in V (\in \mathbb{R}^2)$ de façon abusive.

Théorème (de Cauchy-Riemann). Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, où $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : V \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de f . Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1) f est holomorphe dans V
- 2) Les fonctions $u, v \in C^1(V)$ et satisfont les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

En particulier, si f est holomorphe dans V , alors on a :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad \forall z = x + iy \in V$$

Remarque.

- 1) Démonstration du Théorème : voir §2.3.4 (fin du chapitre)
- 2) Les équations de Cauchy-Riemann sont une condition nécessaire pour que f soit holomorphe mais elles ne sont pas une condition suffisante. Si u et v sont continûment dérivables ($u, v \in C^1(V)$), alors elles deviennent une condition suffisante.
- 3) Utilité du Théorème : pour qu'une fonction f soit holomorphe dans un ouvert V , il suffit de vérifier que les équations de Cauchy-Riemann pour $u = \operatorname{Re} f \in C^1(V)$ et $v = \operatorname{Im} f \in C^1(V)$ sont satisfaites dans V . Si les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées en $(x_0, y_0) \in V$, alors $f(z_0)$ n'est pas holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$.
- 4) Pour alléger la notation, on écrit :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Équations de Cauchy-Riemann :

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

Exemples : ex. 1 à 4, série 4

2.3.3 Exemples

Exemple (1).

$f(z) = z^2$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

$$\implies u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = 2x \quad u_y(x, y) = -2y \\ v_x(x, y) = 2y \quad v_y(x, y) = 2x \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{C}$$

CR (Cauchy-Riemann) satisfaites $\forall z \in \mathbb{C} \implies f$ holomorphe dans \mathbb{C} .

De plus : $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z$.

Exemple (2).

$f(z) = \bar{z}$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$f(z) = \overline{x + iy} = x - iy$.

$$\implies u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = 1 \quad u_y(x, y) = 0 \\ v_x(x, y) = 0 \quad v_y(x, y) = -1 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x \neq v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

CR non satisfaites $\implies f$ n'est pas holomorphe dans \mathbb{C} .

Exemple (3).

$f(z) = e^z$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

$$\implies u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = e^x \cos y \quad u_y(x, y) = -e^x \sin y \\ v_x(x, y) = e^x \sin y \quad v_y(x, y) = e^x \cos y \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

CR satisfaites $\implies f$ holomorphe dans \mathbb{C} .

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y := e^z$$

Exemple (4).

$f(z) = \log z = \ln |z| + i \arg z$ avec la détermination principale définie pour $V = \mathbb{C} \setminus]-\infty; 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$. $\log z$ est holomorphe dans V et on a :

$$f'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in V$$

En effet : preuve pour le demi-plan $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Pour $z = x + iy$ avec $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. On a : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\arg z = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$.

Donc $\log z := \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$.

$$\implies u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = \frac{\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad u_y(x, y) = \frac{\frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ v_x(x, y) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad v_y(x, y) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

CR satisfaites $\implies f$ holomorphe dans D .

De plus :

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Cf. ex. 1, série 5

2.3.4 Démonstration des équations de Cauchy-Riemann

Démonstration. ' \implies '

Soient $z_0 = x_0 + iy_0 \in V$ et $z = (x_0 + \alpha) + i(y_0 + \beta) \in V$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Puisque f est holomorphe dans V , alors $f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe $\forall z_0 \in V$. On a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{[u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) + iv(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\alpha + i\beta}$$

a) En posant $\beta = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \alpha, y_0) + iv(x_0 + \alpha, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \alpha, y_0) - u(x_0, y_0)}{\alpha} + i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \alpha, y_0) - v(x_0, y_0)}{\alpha} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

b) En posant $\alpha = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0)}{i\beta} + i \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0)}{i\beta} \\ &= \frac{1}{i} u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Les deux limites existent et sont identiques.

$$\implies u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \quad (\text{équations de CR})$$

' \Leftarrow ' On utilise les développements de Taylor au 1^{er} ordre de $u(x, y)$ et $v(x, y)$ pour montrer que $f'(z_0)$ existe.

Cf. ex. 5, série 4 et ex. 2-4, série 5

□

Remarque (finale). Affirmer que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $z = x + iy$ **n'est pas équivalent** au fait que le champ vectoriel $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continûment dérivable dans

le contexte usuel de \mathbb{R}^2 (i.e matrice jacobienne $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ de \tilde{f} existe avec u_x, u_y, v_x, v_y continues).

Par exemple, $f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe dans \mathbb{C} : si $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z = (x_0 + \alpha) + i(y_0 + \beta)$, alors on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x_0 + \alpha) - i(y_0 + \beta) - x_0 + iy_0}{(x_0 + \alpha) + i(y_0 + \beta) - x_0 - iy_0} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} = \begin{cases} -1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -1, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1$$

$\implies f'(z_0)$ n'existe pas.

Mais $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y)) = (x, -y)$

\implies Matrice jacobienne $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ existe $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Chapitre 3

Théorème et formule intégrale de Cauchy

3.1 Intégration complexe

3.1.1 Définitions et notations

Définition.

- 1) $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une **courbe simple régulière** s'il existe un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\gamma : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t) \end{array}$ telle que :

- $\Gamma = \gamma([a, b])$, la courbe Γ est l'image de γ
- $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2 \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b[$
- $\gamma \in C^1([a, b])$
- $|\gamma'(t)| = [\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2]^{\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

γ s'appelle une paramétrisation de Γ décrite par $t \in [a, b]$.

- 2) $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple régulière **fermée** si de plus $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.
- 3) $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple régulière **par morceaux** si $\exists \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ des courbes simples régulières telles que $\Gamma = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$.

Note (Abus de langage et de notation). En analyse complexe, on identifie souvent la courbe Γ à sa paramétrisation γ . On dit « soit γ une courbe... » au lieu de « soit Γ une courbe... »

- 4) Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) de paramétrisation γ , on note **l'intérieur** $\text{int } \Gamma$ (ou aussi $\text{int } \gamma$) l'ensemble ouvert et borné $V \in \mathbb{C}$ dont le bord est Γ (i.e. tel que $\partial V = \Gamma$).

Pour l'adhérence de V , on écrit $\overline{\text{int } \gamma} = \text{int } \gamma \cup \partial V$.

Note. γ est dite orientée **positivement** si le sens de parcours laisse l'intérieur int γ à gauche.

- 5) Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple régulière de paramétrisation $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et soit $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. L'**intégrale** de f le long de Γ est définie par :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

- 6) Si la courbe $\Gamma = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ est simple régulière par morceaux, alors :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} f(z)dz$$

3.1.2 Exemples

Exemple. Calculer $\int_{\gamma} f(z)dz$ pour $f(z) = z^2$ et γ le demi-cercle unité de rayon 1 centré à l'origine.

$$\begin{aligned} \gamma : \quad [0; \pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto \gamma(\theta) = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

$$\gamma'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = ie^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_0^{\pi} f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)d\theta = \int_0^{\pi} (e^{i\theta})^2 ie^{i\theta}d\theta \\ &= i \int_0^{\pi} e^{3i\theta}d\theta = \frac{1}{3}e^{3i\theta} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} [e^{3i\pi} - e^{i0}] \\ &= \frac{1}{3}(-1 - 1) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Autres exemples : ex.5, série 5

3.2 Théorème de Cauchy

Théorème. Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D et γ une courbe simple régulière fermée contenue dans D . Alors :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Cf. ex. 6, série 5

Bibliographie

[1] Bernard Dacogna et Chiara Tanteri. *Analyse avancée pour ingénieurs*. PPUR, 2017.

Toutes les références (numéro de théorème, définition, etc.) sont faites à ce livre.

Contributeurs

- Robin Mamie (IN)
- Eric Jollès (SC)