

Analyse IV

Transcript du cours du Pr. Michel CIBILS

Robin MAMIÉ

Printemps 2018

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Transformées de Fourier | 3 |
| 1.1 | Introduction | 3 |
| 1.1.1 | Définitions et résultats préliminaires | 3 |
| 1.1.2 | Motivation | 4 |
| 1.1.3 | Raisonnement heuristique | 4 |
| 1.2 | Transformée de Fourier d'une fonction | 6 |
| 1.2.1 | Définition | 6 |
| 1.2.2 | Exemples | 6 |
| 1.3 | Transformée de Fourier inverse | 8 |
| 1.3.1 | Définition | 8 |
| 1.3.2 | Théorème de réciprocité (formule d'inversion) | 8 |
| 1.3.3 | Exemple d'utilisation | 8 |
| 1.4 | Propriétés de la transformée de Fourier | 9 |
| 1.4.1 | Continuité et linéarité | 9 |
| 1.4.2 | Transformée de Fourier du produit de convolution | 9 |
| 1.4.3 | Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction | 10 |
| 1.4.4 | Décalage | 10 |
| 1.4.5 | Identité de Plancherel | 10 |
| 1.4.6 | Transformée de Fourier en sinus et cosinus | 10 |
| 1.5 | Esquisse de démonstrations de quelques propriétés | 11 |
| 1.5.1 | Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction | 11 |
| 1.5.2 | Transformée de Fourier du produit de convolution | 12 |
| 1.5.3 | Identité de Plancherel | 12 |
| 1.6 | Exemples d'utilisation de la transformée de Fourier | 13 |
| 2 | Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann | 16 |
| 2.1 | Introduction | 16 |
| 2.1.1 | Motivation | 16 |
| 2.1.2 | Rappel sur les nombres complexes | 16 |
| 2.2 | Fonctions complexes | 17 |
| 2.2.1 | Définitions | 17 |
| 2.2.2 | Exemples | 17 |
| 2.3 | Limites, continuité, dérivabilité | 19 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.3.1 | Définitions | 19 |
| 2.3.2 | Équations de Cauchy-Riemann | 19 |
| 2.3.3 | Exemples | 20 |
| 2.3.4 | Démonstration des équations de Cauchy-Riemann | 22 |
| 3 | Théorème et formule intégrale de Cauchy | 24 |
| 3.1 | Intégration complexe | 24 |
| 3.1.1 | Définitions et notations | 24 |
| 3.1.2 | Exemples | 25 |
| 3.2 | Théorème de Cauchy | 25 |
| 3.2.1 | Théorème | 25 |
| 3.2.2 | Exemples | 26 |
| 3.2.3 | Démonstration du théorème de Cauchy | 27 |
| 3.2.4 | Corollaire du Théorème de Cauchy | 28 |
| 3.3 | Formule intégrale de Cauchy | 29 |
| 3.3.1 | Énoncé | 29 |
| 3.3.2 | Exemples d'utilisation | 29 |
| 3.3.3 | Démonstration de la formule intégrale de Cauchy | 31 |
| 3.4 | Corollaire de la formule intégrale de Cauchy | 31 |
| 3.4.1 | Énoncé | 31 |
| 3.4.2 | Exemples d'utilisation | 32 |
| 4 | Séries de Laurent, pôles et résidus | 34 |
| 4.1 | Polynôme et série de Taylor d'une fonction holomorphe | 34 |
| 4.1.1 | Définitions et résultats | 34 |
| 4.1.2 | Exemples | 35 |
| 4.1.3 | Applications | 36 |
| 4.2 | Développement et série de Laurent d'une fonction holomorphe | 36 |
| 4.2.1 | Problématique, définitions et résultats | 36 |
| 4.2.2 | Définitions issues de la série de Laurent | 38 |

Chapitre 1

Transformées de Fourier

1.1 Introduction

1.1.1 Définitions et résultats préliminaires

Définition. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **T-périodique** s'il existe $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

L'intervalle $[0, T]$ caractérise complètement la fonction.

Définition (14.1.i, p.103). Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe des points $\{x\}_{i=0}^{n+1} \subset [a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ tels que pour $i = 0, 1, \dots, n$ on ait :

1. f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$
2. la limite à droite $f(x_i + 0) := \lim_{\substack{t \rightarrow x_i \\ t > x_i}} f(t)$ et la limite à gauche $f(x_{i+1} - 0) := \lim_{\substack{t \rightarrow x_i \\ t < x_i}} f(t)$ existent et sont finies.

Terminologie. On dit qu'une fonction T-périodique est continue par morceaux si elle l'est sur l'intervalle $[0, T]$ qui la caractérise.

Définition (14.2, p.104). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Pour $N \in \mathbb{N}$, la **série de Fourier partielle d'ordre N** de f est :

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$$

où les **coefficients de Fourier** c_n sont des nombres complexes donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx$$

On appelle **série de Fourier de f** (en notation complexe) la limite lorsque $N \rightarrow \infty$ de la série de $F_N f(x)$. On écrit :

$$Ff(x) := \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$$

Théorème (de Dirichlet – Résultat de convergence ; 14.3, p.104). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique telle que f et f' soient continues par morceaux. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$:*

$$Ff(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N f(x) \text{ existe et } Ff(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

En particulier, si f est continue en x , alors $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ et on a $Ff(x) = f(x)$.

Note. Utilisation de la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (cf. ex. 1-2, série 1).

1.1.2 Motivation

Série de Fourier développement des fonctions *périodiques* comme somme infinie de fonctions trigonométriques.

Transformée de Fourier étude de fonctions *non* périodiques.

Idée. Soit $T > 0$ et f_T une fonction T -périodique définie par

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\frac{T}{2}, -1[\\ 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \in]1, \frac{T}{2}[\end{cases}$$

Lorsque la période $T \rightarrow \infty$, on a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

qui n'est plus une fonction périodique.

Idée. considérer des fonctions comme limites de fonctions périodiques dont la période T tend vers $+\infty$.

1.1.3 Raisonnement heuristique

Soit $f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue*, T -périodique telle que f'_T soit continue par morceaux. Alors la série de Fourier de f_T est :

$$Ff_T(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y}$$

pour $y \in \mathbb{R}$, où

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f_T(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx$$

En écrivant $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{T}$ et $\alpha_n = n \cdot \Delta\alpha$, on a $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}$.

$$c_n = \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} dx$$

$$\Rightarrow F f_T(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} dx \right] e^{i\alpha_n y}$$

Échange de la somme infinie et de l'intégrale :

$$F f_T(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[\Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} \right] dx$$

On découvre une somme de Riemann qui permet de définir une intégrale. En effet :

$$\Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} \underbrace{=}_{\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_{n-1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} (\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} d\alpha$$

Donc on obtient :

$$F f_T(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} d\alpha \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha x} dx \right] e^{i\alpha y} d\alpha$$

Comme f_T est continue, alors on a $f_T(y) = F f_T(y)$ et donc lorsque T tend vers $+\infty$, on a $\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} F f_T(y) \iff f(y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} F f_T(y)$.

$$\iff f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \right]}_{\substack{\text{Nouvelle fonction qui dépend de la} \\ \text{variable } \alpha, \text{ qui est appelée la} \\ \text{transformée de Fourier de } f \text{ et} \\ \text{notée } \mathfrak{F}(f) \text{ ou } \hat{f}}} e^{i\alpha y} d\alpha$$

On écrit :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

Remarque. On a que :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha y} d\alpha$$

1.2 Transformée de Fourier d'une fonction

1.2.1 Définition

Définition (15.1, p.113). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$.

La **transformée de Fourier** de f est la fonction notée $\mathfrak{F}(f)$ ou $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\alpha \mapsto \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

1.2.2 Exemples

Exemple. Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ f : x & \mapsto & f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^x e^{-i\alpha x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(1-i\alpha)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left. \frac{e^{(1-i\alpha)x}}{1-i\alpha} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{1+i\alpha} \right|_0^{+\infty} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-i\alpha} \left(1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(1-i\alpha)x} \right) - \frac{1}{1+i\alpha} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(1+i\alpha)x} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+i\alpha + 1-i\alpha}{(1-i\alpha)(1+i\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

Résultat :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ \hat{f} : \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

Remarque. Pour calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(1-i\alpha)x}$:

$$\begin{aligned}
\left| e^{(1-i\alpha)x} \right| &= \left| e^{-i\alpha x} e^x \right| = \underbrace{\left| e^{-i\alpha x} \right|}_{=1} |e^x| = e^x \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| e^{(1-i\alpha)x} \right| &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(1-i\alpha)x} &= 0 + i0 = 0
\end{aligned}$$

On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(1+i\alpha)x} = 0$.

Exemple. Soit la fonction

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
f : x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Calcul de la transformée de Fourier de f .

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\alpha x} dx \\
&\stackrel{\alpha \neq 0}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\alpha x}}{i\alpha} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 0
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i0x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \Big|_{-1}^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Résultat :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
\hat{f} : \alpha &\mapsto \hat{f}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On remarque que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{f}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \hat{f}(0)$.

$\Rightarrow \hat{f}$ est aussi continue en $\alpha = 0$.

Autres exemples : ex. 3-4, série 1

1.3 Transformée de Fourier inverse

1.3.1 Définition

Définition. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$. La **transformée de Fourier inverse** de g est notée :

$$\mathfrak{F}^{-1}(g) : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \rightarrow \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) \end{array}, \text{ où } \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{itx} dt.$$

1.3.2 Théorème de réciprocity (formule d'inversion)

Théorème (15.3.i, p.115). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que f et f' soient continues par morceaux avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < \infty$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

En particulier si f est continue en x , on a $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = f(x)$ et alors :

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Autrement dit, on a $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$. La transformée de Fourier peut être vue comme une « transformation \mathfrak{F} » inversible (une bijection) qui « agit » sur la fonction f :

$$f \xrightarrow{\mathfrak{F}} \hat{f} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f$$

1.3.3 Exemple d'utilisation

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto f(x) = e^{-|x|} \end{array} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

La transformée de Fourier de f est (exemple 1, §1.2.2)

$$\hat{f} : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \mapsto \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

On remarque que $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est continue par morceaux car :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = -1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1$$

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}| d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha < \infty$. f est continue $\forall x \in \mathbb{R} \implies$ en appliquant le *théorème de réciprocity*, on a que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$, i.e. :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1 + \alpha^2} d\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, lorsque $x = 0$, on trouve :

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2} = \pi.$$

En particulier, lorsque $x = 1$, on trouve :

$$e^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha}}{1 + \alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha + i \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha}^{\substack{\text{fonction impaire} \\ \text{intégrée sur tout l'axe} \\ \text{réel} = 0}} \right]$$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{e}$$

Conclusion : Le *théorème de réciprocity* permet de calculer la valeur d'intégrales généralisées.

Autre exemple : ex. 1, série 2

1.4 Propriétés de la transformée de Fourier

On considère f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < \infty$. On note indifféremment $\mathfrak{F}(f) \doteq \hat{f}$ et $\mathfrak{F}(g) \doteq \hat{g}$ les transformées de Fourier de f et de g .

Note. Les prochains résultats sont décrits dans les **théorèmes 15.2 et 15.3** aux pages 113 à 115 du livre du cours.

1.4.1 Continuité et linéarité

- $\mathfrak{F}(f)$ est continue $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)| = 0$.
- \mathfrak{F} linéaire : $\mathfrak{F}(af + bg) = a\mathfrak{F}(f) + b\mathfrak{F}(g) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

1.4.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

Définition. Le **produit de convolution** de deux fonctions f et g est la fonction notée $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)g(t) dt$$

Remarque. On peut aussi écrire $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(x - t')dt'$, via un changement de variable.

Résultat : on a que $\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$.

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au **produit** des transformées de Fourier de chaque fonction.

Exemples : ex. 2-3, série 2

1.4.3 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|dx < \infty$, alors on a :

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

On écrit aussi $\widehat{f'}(\alpha) = i\alpha \hat{f}(\alpha)$.

La transformée de Fourier de la dérivée de f s'obtient en **multipliant par $i\alpha$** la transformée de Fourier de f .

Plus généralement, si $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)|dx < \infty$ pour $k = 1, 2, \dots, n$, alors on a :

$$\mathfrak{F}(f^{(k)})(\alpha) = (i\alpha)^k \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n$$

On écrit aussi $\widehat{f^{(k)}}(\alpha) = (i\alpha)^k \hat{f}(\alpha)$.

Exemple : ex.3, série 2

1.4.4 Décalage

Si $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $h(x) = e^{-ibx}f(ax)$, alors :

$$\mathfrak{F}(h)(\alpha) = \frac{1}{|a|} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\alpha + b}{a}\right)$$

1.4.5 Identité de Plancherel

Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 dx < \infty$, alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2 d\alpha$$

1.4.6 Transformée de Fourier en sinus et cosinus

Si la fonction f est paire (i.e. $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$$

qui est la transformée de Fourier en **cosinus** de f .

Si la fonction f est impaire (i.e. $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$$

qui est la transformée de Fourier en **sinus** de f .

Exemples : ex.4, série 2 et ex.1, série 3

Remarque. Si de plus f' est continue par morceaux et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < \infty$, alors, d'après le théorème de réciprocité, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha && \text{lorsque } f \text{ est paire} \\ f(x) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha && \text{lorsque } f \text{ est impaire} \end{aligned}$$

1.5 Esquisse de démonstrations de quelques propriétés

1.5.1 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Démonstration. On a

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\alpha x} dx$$

On intègre par parties, avec $u' = f' \rightarrow u = f$ et $v = e^{-i\alpha x} \rightarrow v' = -i\alpha e^{-i\alpha x}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \right]$$

Or, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) e^{-i\alpha x}| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = 0$ car $|e^{-i\alpha x}| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ (f est sommable).

$$\Rightarrow \mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = i\alpha \mathfrak{F}(f)(\alpha)$$

□

Remarque. Formule pour la dérivée de la transformée de Fourier d'une fonction :

$$\mathfrak{F}'(f)(\alpha) = (\hat{f})'(\alpha) = -i \mathfrak{F}(xf(x))(\alpha)$$

Cf. ex. 2, série 3

1.5.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(f * g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-i\alpha x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \right] e^{-i\alpha x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{-i\alpha x} dx \right] g(t) dt \\
&\stackrel{\text{cdv}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha(y+t)} dy \right] g(t) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} dt \\
&= \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}(f)(\alpha) \cdot \mathfrak{F}(g)(\alpha)
\end{aligned}$$

□

1.5.3 Identité de Plancherel

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On remarque que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x+t) dx &\stackrel{1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) e^{i\alpha(x+t)} d\alpha \right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \right] e^{i\alpha t} d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) \overline{\mathfrak{F}(f)(\alpha)} e^{i\alpha t} d\alpha
\end{aligned}$$

En posant $t = 0$ et en choisissant $g = f$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(\alpha)]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2 d\alpha$$

□

1. Par le **théorème de réciprocité**, §1.3.2

1.6 Exemples d'utilisation de la transformée de Fourier

- a) Trouver une solution particulière $y(x)$ d'une équation différentielle du type :

$$\lambda y''(x) + \omega y(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda, \omega \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

qui est l'équation de l'oscillateur forcé (f est une fonction donnée).

Méthode : on écrit la transformée de Fourier de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\lambda y'' + \omega y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff \lambda \mathfrak{F}(y'')(\alpha) + \omega \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff \lambda (-\alpha^2) \mathfrak{F}(y)(\alpha) + \omega \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff (\omega - \lambda \alpha^2) \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \frac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda \alpha^2} \end{aligned}$$

On utilise le **théorème de réciprocity** (§1.3.2) : la solution particulière $y(x)$ s'obtient en calculant la transformée de Fourier inverse de la fonction de la variable α définie par $\frac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda \alpha^2}$.

- b) On utilise la transformée de Fourier pour résoudre des équations intégrales du type produit de convolution (*cf. ex. 2 et 3, série 3*).
c) Problèmes statistiques avec loi normale.

fonction gaussienne $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ex. 4, série 1 : $\hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ est aussi une fonction gaussienne.

- d) Mécanique quantique

$f(x)$: position de la particule quantique

$\hat{f}(p)$: impulsion de la particule quantique

- e) Résolution de l'équation de la chaleur pour une barre conductrice de longueur **infinie**.

Rappel : cas d'une barre de longueur **finie**

Soit une barre de longueur $0 < L < \infty$. On note $u(x, t)$ la fonction qui décrit la température de la barre au point x et à l'instant t .

L'évolution de la température $u(x, t)$ le long de la barre est modélisée par l'équation de la chaleur donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad \text{pour } x \in]0, L[\text{ et } t > 0, \quad a \neq 0$$

où a est un coefficient thermique. On impose :

— **deux** conditions limites $u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t > 0$,

— une condition initiale $u(x, 0) = f(x)$ pour $x \in]0, L[$.²

Problème : trouver une solution $u(x, t)$ satisfaisant ces conditions.

Cas d'une barre de longueur infinie

Il n'y a plus de conditions aux limites concernant les extrémités de la barre.

Le problème est :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x) \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, avec **une** condition initiale, valable $\forall x \in \mathbb{R}$ où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 telle que f et la transformée de Fourier de f soient sommables.

Résolution

1^{re} étape : on écrit la transformée de Fourier de l'équation de la chaleur en considérant $u(x, t)$ comme fonction de la variable x (t joue le rôle d'un paramètre). On obtient :

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha, t) = a^2 \mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha, t) \text{ avec } \mathfrak{F}(u)(\alpha, 0) = \mathfrak{F}(f)(\alpha)$$

Avec la notation :

$$v(\alpha, t) = (\mathfrak{F}u)(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx$$

On obtient à gauche :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} v(\alpha, t) \end{aligned}$$

2. Dans le milieu de l'ingénierie, on sous-entend souvent qu'une condition **limite** l'est aux positions, et qu'une condition **initiale** l'est au temps

Et à droite :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha, t) &\stackrel{3}{=} (i\alpha)^2 \mathfrak{F}(u)(\alpha, t) \\ &= -\alpha^2 v(\alpha, t)\end{aligned}$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} v(\alpha, t) = -a^2 \alpha^2 v(\alpha, t)$$

C'est une équation différentielle du **premier ordre** pour la fonction $v(\alpha, t)$ par rapport à **la variable** t (α joue le rôle de paramètre).

La solution est :

$$v(\alpha, t) = v(\alpha, 0)e^{-a^2 \alpha^2 t} = \mathfrak{F}(f)(\alpha)e^{-a^2 \alpha^2 t}$$

2^e étape : pour obtenir la solution $u(x, t)$, on calcule la transformée de Fourier inverse de $v(\alpha, t)$ en considérant t comme paramètre. On obtient :

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \mathfrak{F}^{-1}(v)(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\alpha, t) e^{i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(f)(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 t} e^{i\alpha x} d\alpha\end{aligned}$$

comme solution de l'équation de la chaleur pour une barre de longueur infinie.

Exemple : ex. 3, série 3

3. Par la propriété du §1.4.3, concernant la **transformée de Fourier de la dérivée** d'une fonction

Chapitre 2

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

2.1 Introduction

2.1.1 Motivation

But : étendre l'étude de fonctions réelles (du type $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) à des fonctions qui dépendent d'une variable complexe qui sont à valeurs complexes (du type $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ où \mathbb{C} est l'ensemble des nombres complexes).

Rôle : établir les notions de limite, de continuité, de dérivabilité et d'intégration dans \mathbb{C} .

Intérêt : méthodes puissantes qui permettent de calculer facilement des intégrales réelles compliquées.

Cf. ex. 4, série 3

2.1.2 Rappel sur les nombres complexes

- \mathbb{C} désigne l'ensemble des nombres complexes
- $z \in \mathbb{C} \iff z = x + iy$ avec $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ et $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ où $0 = 0 + i0$
- complexe conjugué de z $\bar{z} = x - iy$
- module de $z \in \mathbb{C}$ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$
- représentation polaire de $z \in \mathbb{C}^*$ $z = |z| e^{i\theta} = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$
- θ est appelé l'argument de z et est noté $\arg z$

Remarque. Pour $z \in \mathbb{C}^*$:

- L'argument de z est défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$
- Par convention, la **valeur (détermination) principale** de l'argument de z est l'unique angle $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que $\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta$

2.2 Fonctions complexes

2.2.1 Définitions

Définition. Une fonction d'une variable complexe à valeur dans \mathbb{C} s'écrit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \end{array}$$

où

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & u(x, y) \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & v(x, y) \end{array}$$

sont deux fonctions à valeurs réelles qui s'appellent respectivement la partie réelle de f (on note $u = \operatorname{Re} f$) et la partie imaginaire de f (on note $v = \operatorname{Im} f$).

Remarque. Les variables $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ des fonctions u et v sont les parties réelles et imaginaires de la variable $z \in \mathbb{C}$ de la fonction f .

2.2.2 Exemples

Exemple.

1)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = \bar{z} = x - iy \end{array}$$

On a $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = -y$.

2)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \end{array}$$

On a $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$.

3)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \end{array}$$

On a $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

4) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la fonction exponentielle est définie par :

$$e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}^*$$

On a $u(x, y) = e^x \cos y$ et $v(x, y) = e^x \sin y$.

Remarque. Contrairement au cas réel, e^z n'est pas bijective sur \mathbb{C} car $e^{z+2ik\pi} = e^z \forall z \in \mathbb{C}$ (ex.4, série 3). En choisissant y tel que $-\pi < y \leq \pi$, la fonction e^z est bijective sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in]-\pi; \pi]\}$. Avec cette convention, c'est la « restriction bijective de l'exponentielle complexe ».

5) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, la fonction logarithme est définie par :

$$\log z := \ln |z| + i \arg z$$

avec le choix de la valeur principale $\arg z \in]-\pi; \pi[$. Avec cette convention, c'est la « **détermination principale du logarithme complexe** » (correspond à la fonction réciproque de la restriction bijective de l'exponentielle).

En écrivant $z = x + iy$, on a $u(x, y) = \ln |x + iy| = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ et $v(x, y) = \arg(x + iy)$.

Remarque.

- a) Les formules valables en analyse réelle ne sont pas nécessairement valables en analyse complexe. Par exemple, en général, on a $\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$. En effet, pour $z_1 = -1$ et $z_2 = -1$:

$$\log [(-1)(-1)] = \log(1) := \ln |1| + i \arg(1) = 0 + i0 = 0$$

mais

$$\log(-1) + \log(-1) = 2 \log(-1) := 2 [\ln |-1| + i \arg(-1)] = 2i\pi \neq 0$$

- b) La fonction $\log z$ n'est pas continue sur le demi-axe réel négatif. En effet, par exemple pour $z = -1$, on considère $t > 0$:

$$z_t^+ = -1 + it \quad \text{et} \quad z_t^- = -1 - it$$

On a $\lim_{t \rightarrow 0^+} z_t^+ = -1$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} z_t^- = -1$.

Note. Pour $z = x + iy$, on a la valeur principale :

$$\arg z = \begin{cases} \pi + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0, y > 0 \\ -\pi + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Avec la définition du logarithme, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^+) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln |-1 + it| + i \lim_{t \rightarrow 0^+} \arg(-1 + it) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \sqrt{1 + t^2} + i \lim_{t \rightarrow 0^+} [\pi + \operatorname{Arctg}(-t)] \\ &= \ln(1) + i\pi = 0 + i\pi = i\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^-) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln |-1 - it| + i \lim_{t \rightarrow 0^+} \arg(-1 - it) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \sqrt{1 + t^2} + i \lim_{t \rightarrow 0^+} [-\pi + \operatorname{Arctg}(t)] \\ &= \ln(1) - i\pi = 0 - i\pi = -i\pi \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^+) \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^-) \implies$ la fonction $\log z$ n'est pas continue en $z = -1$. De façon analogue, on obtient le même résultat $\forall z \in]-\infty; 0[$. $\log z$ **n'est pas continue** pour $z \in]-\infty; 0]$

Résultat final : En excluant le demi-axe réel négatif, on a que la fonction $\log z$ est continue sur l'ensemble :

$$V = \mathbb{C} \setminus]-\infty; 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

C'est la « **restriction continue du logarithme complexe** ».

6) Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit les fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

Cf. ex. 1, série 4

2.3 Limites, continuité, dérivabilité

2.3.1 Définitions

Définition (9.1, p.67). Les notions de topologie (ouverts, fermés, etc.), de limite, de continuité et de dérivabilité sont analogues à celles de l'analyse réelle. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, alors :

- 1) f possède une limite $l \in \mathbb{C}$ en $z_0 \in \mathbb{C}$ (notation $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$) si :
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - l| < \epsilon$
- 2) f est continue en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$
- 3) f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et est finie. La limite s'appelle la dérivée de f en z_0 et est notée $f'(z_0)$. Les règles de dérivation établies dans \mathbb{R} sont valables dans \mathbb{C} .
- 4) Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on dit que la fonction $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ est **holomorphe** (ou analytique complexe) dans V si f est *définie et dérivable* $\forall z \in V$.

2.3.2 Équations de Cauchy-Riemann

Remarque (sur un abus de notation). Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on l'identifie souvent au sous-ensemble correspondant de \mathbb{R}^2 , i.e. on écrit indifféremment $z = x + iy \in V (\in \mathbb{C})$ ou $(x, y) \in V (\in \mathbb{R}^2)$ de façon abusive.

Théorème (de Cauchy-Riemann ; 9.2, p.67). Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, où $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : V \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de f . Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1) f est holomorphe dans V
- 2) Les fonctions $u, v \in C^1(V)$ et satisfont les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

En particulier, si f est holomorphe dans V , alors on a :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad \forall z = x + iy \in V$$

Remarque.

- 1) Démonstration du Théorème : voir §2.3.4 (fin du chapitre)
- 2) Les équations de Cauchy-Riemann sont une condition nécessaire pour que f soit holomorphe mais elles ne sont pas une condition suffisante. Si u et v sont continûment dérivables ($u, v \in C^1(V)$), alors elles deviennent une condition suffisante.
- 3) Utilité du Théorème : pour qu'une fonction f soit holomorphe dans un ouvert V , il suffit de vérifier que les équations de Cauchy-Riemann pour $u = \operatorname{Re} f \in C^1(V)$ et $v = \operatorname{Im} f \in C^1(V)$ sont satisfaites dans V . Si les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées en $(x_0, y_0) \in V$, alors $f(z_0)$ n'est pas holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$.
- 4) Pour alléger la notation, on écrit :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Équations de Cauchy-Riemann :

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

Exemples : ex. 1 à 4, série 4

2.3.3 Exemples

Exemple (1).

$f(z) = z^2$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$.

$$\implies u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = 2x \quad u_y(x, y) = -2y \\ v_x(x, y) = 2y \quad v_y(x, y) = 2x \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{C}$$

CR (Cauchy-Riemann) satisfaites $\forall z \in \mathbb{C} \implies f$ holomorphe dans \mathbb{C} .

De plus : $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z$.

Exemple (2).

$f(z) = \bar{z}$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$f(z) = \overline{x + iy} = x - iy$.

$$\implies u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = 1 \quad u_y(x, y) = 0 \\ v_x(x, y) = 0 \quad v_y(x, y) = -1 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x \neq v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

CR non satisfaites $\implies f$ n'est pas holomorphe dans \mathbb{C} .

Exemple (3).

$f(z) = e^z$ définie pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

$$\implies u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = e^x \cos y \quad u_y(x, y) = -e^x \sin y \\ v_x(x, y) = e^x \sin y \quad v_y(x, y) = e^x \cos y \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

CR satisfaites $\implies f$ holomorphe dans \mathbb{C} .

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y := e^z$$

Exemple (4).

$f(z) = \log z = \ln |z| + i \arg z$ avec la détermination principale définie pour $V = \mathbb{C} \setminus]-\infty; 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$. $\log z$ est holomorphe dans V et on a :

$$f'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in V$$

En effet : preuve pour le demi-plan $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Pour $z = x + iy$ avec $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. On a : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\arg z = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$.

Donc $\log z := \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$.

$$\implies u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = \frac{\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad u_y(x, y) = \frac{\frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ v_x(x, y) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad v_y(x, y) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

CR satisfaites $\implies f$ holomorphe dans D .

De plus :

$$\begin{aligned}
f'(z) &= u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

Cf. ex. 1, série 5

2.3.4 Démonstration des équations de Cauchy-Riemann

Démonstration. ' \implies '

Soient $z_0 = x_0 + iy_0 \in V$ et $z = (x_0 + \alpha) + i(y_0 + \beta) \in V$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Puisque f est holomorphe dans V , alors $f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe $\forall z_0 \in V$. On a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{[u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) + iv(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\alpha + i\beta}$$

a) En posant $\beta = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \alpha, y_0) + iv(x_0 + \alpha, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \alpha, y_0) - u(x_0, y_0)}{\alpha} + i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \alpha, y_0) - v(x_0, y_0)}{\alpha} \\
&= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

b) En posant $\alpha = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0)}{i\beta} + i \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0)}{i\beta} \\
&= \frac{1}{i} u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Les deux limites existent et sont identiques.

$$\implies u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \quad (\text{équations de CR})$$

' \Leftarrow ' On utilise les développements de Taylor au 1^{er} ordre de $u(x, y)$ et $v(x, y)$ pour montrer que $f'(z_0)$ existe.

Cf. ex. 5, série 4 et ex. 2-4, série 5

□

Remarque (finale). Affirmer que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $z = x + iy$ **n'est pas équivalent** au fait que le champ vectoriel $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continûment dérivable dans

le contexte usuel de \mathbb{R}^2 (i.e matrice jacobienne $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ de \tilde{f} existe avec u_x, u_y, v_x, v_y continues).

Par exemple, $f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe dans \mathbb{C} : si $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z = (x_0 + \alpha) + i(y_0 + \beta)$, alors on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x_0 + \alpha) - i(y_0 + \beta) - x_0 + iy_0}{(x_0 + \alpha) + i(y_0 + \beta) - x_0 - iy_0} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} = \begin{cases} -1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -1, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1$$

$\implies f'(z_0)$ n'existe pas.

Mais $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y)) = (x, -y)$

\implies Matrice jacobienne $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ existe $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Chapitre 3

Théorème et formule intégrale de Cauchy

3.1 Intégration complexe

3.1.1 Définitions et notations

Définition (10.1, p.73).

- 1) $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une **courbe simple régulière** s'il existe un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\gamma : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t) \end{array}$ telle que :

- $\Gamma = \gamma([a, b])$, la courbe Γ est l'image de γ
- $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2 \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b[$
- $\gamma \in C^1([a, b])$
- $|\gamma'(t)| = [\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2]^{\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

γ s'appelle une paramétrisation de Γ décrite par $t \in [a, b]$.

- 2) $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple régulière **fermée** si de plus $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.
- 3) $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple régulière **par morceaux** si $\exists \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ des courbes simples régulières telles que $\Gamma = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$.

Note (Abus de langage et de notation). En analyse complexe, on identifie souvent la courbe Γ à sa paramétrisation γ . On dit « soit γ une courbe... » au lieu de « soit Γ une courbe... »

- 4) Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) de paramétrisation γ , on note **l'intérieur** $\text{int } \Gamma$ (ou aussi $\text{int } \gamma$) l'ensemble ouvert et borné $V \in \mathbb{C}$ dont le bord est Γ (i.e. tel que $\partial V = \Gamma$).

Pour l'adhérence de V , on écrit $\overline{\text{int } \gamma} = \text{int } \gamma \cup \partial V$.

Note. γ est dite orientée **positivement** si le sens de parcours laisse l'intérieur int γ à gauche.

- 5) Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple régulière de paramétrisation $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et soit $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. L'**intégrale** de f le long de Γ est définie par :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

- 6) Si la courbe $\Gamma = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ est simple régulière par morceaux, alors :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} f(z)dz$$

3.1.2 Exemples

Exemple. Calculer $\int_{\gamma} f(z)dz$ pour $f(z) = z^2$ et γ le demi-cercle unité de rayon 1 centré à l'origine.

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0; \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \gamma(\theta) = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \end{array}$$

$$\gamma'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = ie^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_0^{\pi} f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)d\theta = \int_0^{\pi} (e^{i\theta})^2 ie^{i\theta}d\theta \\ &= i \int_0^{\pi} e^{3i\theta}d\theta = \frac{1}{3}e^{3i\theta} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} [e^{3i\pi} - e^{i0}] \\ &= \frac{1}{3}(-1 - 1) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Autres exemples : ex.5, série 5

3.2 Théorème de Cauchy

3.2.1 Théorème

Théorème (10.2, p.73). Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D et γ une courbe simple régulière fermée contenue dans D . Alors :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Cf. ex. 6, série 5

Terminologie. On appelle domaine simplement connexe un ensemble ouvert $D \subset \mathbb{C}$ qui « n'a pas de trous ».

3.2.2 Exemples

Exemple (1). $D = \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ holomorphe dans D et γ une courbe simple fermée régulière (par morceaux) *quelconque* dans D , alors :

$$\text{Thm. de Cauchy} \implies \int_{\gamma} z^2 dz = 0$$

Par exemple, si $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ (cercle unité centré à l'origine), on a bien :

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{2\pi} |e^{i\theta}|^2 i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{3i\theta} d\theta = \frac{1}{3} e^{3i\theta} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} [e^{6i\pi} - 1] = \frac{1}{3} [1 - 1] = 0$$

Exemple (2). $f(z) = \frac{1}{z}$

- a) $D = \mathbb{C}$ Le Thm. de Cauchy ne s'applique pas car f n'est pas holomorphe en $t = 0$.
 $D = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Le Thm. de Cauchy ne s'applique pas non plus car D n'est pas simplement connexe. Par exemple, si γ le cercle unité centré en $z = 0$, alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \dots = 2i\pi \neq 0$$

- b) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ Le Thm. de Cauchy s'applique car D est simplement connexe et f est holomorphe dans D .

$$\text{Thm. de Cauchy} \implies \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$$

pour $\gamma \subset D$ courbe simple fermée régulière quelconque. Par exemple, si γ est le cercle unité centré en $z = 2$, alors :

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \dots = 0$$

Cf. ex.4, série 6, application avec variantes de $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$

3.2.3 Démonstration du théorème de Cauchy

Démonstration. Soient $\gamma \subset D$ une courbe simple régulière fermée

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t) \end{array}$$

et f une fonction holomorphe dans D définie par $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b [u(\alpha(t), \beta(t)) + iv(\alpha(t), \beta(t))] \cdot [\alpha'(t) + i\beta'(t)] dt \\ &= \int_a^b [u(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) - v(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [u(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t) + v(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t)] dt \\ &= \underbrace{\int_a^b \begin{pmatrix} u(\alpha(t), \beta(t)) \\ -v(\alpha(t), \beta(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} dt}_{I_1} \\ &\quad + i \underbrace{\int_a^b \begin{pmatrix} v(\alpha(t), \beta(t)) \\ u(\alpha(t), \beta(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} dt}_{I_2} \end{aligned}$$

On a que $I_1 = \int_{\gamma} F \cdot d\ell$ est l'intervalle curviligne le long de γ du champ vectoriel $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $F(x, y) = (u(x, y), -v(x, y))$. En appliquant le Thm. de Green, on obtient :

$$I_1 = \iint_{\text{int } \gamma} \text{rot } F(x, y) dx dy = \iint_{\text{int } \gamma} [-v_x(x, y) - u_y(x, y)] dx dy$$

f holomorphe dans D et $\gamma \subset D \xrightarrow[\text{CR}]{\text{Thm}} v_x(x, y) + u_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \text{int } \gamma \implies I_1 = 0$

On a que $I_2 = \int_{\gamma} G \cdot d\ell$ est l'intervalle curviligne le long de γ du champ vectoriel $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $G(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$. En appliquant le Thm. de Green, on obtient :

$$I_2 = \iint_{\text{int } \gamma} \text{rot } G(x, y) dx dy = \iint_{\text{int } \gamma} [u_x(x, y) - v_y(x, y)] dx dy$$

f holomorphe dans D et $\gamma \subset D \xrightarrow[\text{CR}]{\text{Thm}} u_x(x, y) - v_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \text{int } \gamma \implies I_2 = 0$

Conclusion :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = I_1 + iI_2 = 0 + i0 = 0$$

□

3.2.4 Corollaire du Théorème de Cauchy

Corollaire. Soient $D_0, D_1, D_2, \dots, D_m \subset \mathbb{C}$ des domaines simplement connexes tels que :

- 1) $\overline{\text{int } D_j} \subset D_0 \quad \forall j = 1, \dots, m$
- 2) $\overline{\text{int } D_j} \cap \overline{\text{int } D_k} = \emptyset \quad \forall j, k = 1, \dots, m; \quad j \neq k$ (domaines disjoints)
- 3) $\partial D_j = \gamma_j$ pour $j = 0, 1, \dots, m$ sont des courbes simples fermées régulières (par morceaux)

Soit $f : D = \overline{\text{int } D_0} \setminus \bigcup_{j=1}^m D_j \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D . Alors :

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

où toutes les courbes γ_j sont orientées positivement.

Justification heuristique du corollaire

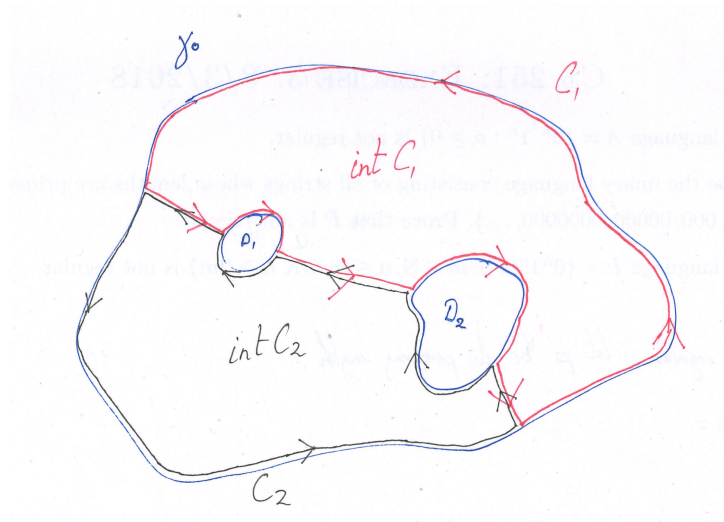


FIGURE 3.1 – Illustration de la justification heuristique

$$D = \overline{\text{int } D_0} \setminus (D_1 \cup D_2) = \overline{\text{int } C_1} \cup \overline{\text{int } C_2}$$

Les bords de γ_0, γ_1 et γ_2 de D_0, D_1 et D_2 appartiennent à D .

— D'une part, f holomorphe dans $\overline{\text{int } C_1}$ et $\overline{\text{int } C_2}$, C_1 et C_2 sont fermés $\xrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{Thm.}}$

$$\int_{C_1} f(z)dz = 0 \text{ et } \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

— D'autre part, avec C_1 et C_2 orientés positivement, on a :

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

où γ_0 est orientée *positivement* (D_0 à gauche), mais γ_1 et γ_2 orientées *négativement* (D_1 et D_2 à droite).

Donc :

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z)dz &= - \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad \text{orientation négative (dessin)} \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad \text{orientation positive (énoncé)} \end{aligned}$$

3.3 Formule intégrale de Cauchy

3.3.1 Énoncé

Théorème. Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D et γ une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement contenue dans D . Alors :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \forall z \in \text{int } \gamma$$

Illustration. $D = \mathbb{C}$

Si f est une fonction holomorphe dans \mathbb{C} , la valeur de la fonction f en un point $z \in \mathbb{C}$ s'obtient en intégrant $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ le long de n'importe quelle courbe γ (orientée positivement) telle que $z \in \text{int } \gamma$.

3.3.2 Exemples d'utilisation

Exemple (1). Soit γ une courbe simple fermée régulière. Discuter en fonction de γ la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz$$

Constatation : la fonction $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$ n'est pas définie en $z = 0$.

Distinction de différents cas :

1^{er} cas $0 \in \gamma$ L'intégrale n'est pas définie puisque $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$ n'est pas continue sur γ .

2^e cas $0 \notin \overline{\text{int } \gamma}$ La fonction $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$ est holomorphe dans un domaine D simplement connexe tel que $\overline{\text{int } \gamma} \subset D$. Comme $\gamma \subset \overline{\text{int } \gamma} \subset D$, alors le Thm. de Cauchy s'applique à la fonction g et on trouve :

$$\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz = 0$$

$\forall \gamma$ de ce type (i.e. $0 \notin \overline{\text{int } \gamma}$).

3^e cas $0 \in \text{int } \gamma$ La fonction $f(\xi) = \cos 2\xi$ est holomorphe dans \mathbb{C} . Comme $\gamma \subset \mathbb{C}$, en lui appliquant la formule intégrale de Cauchy pour $z = 0$ (avec $D = \mathbb{C}$), on trouve :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos 2\xi}{\xi - 0} d\xi \implies \int_{\gamma} \frac{\cos 2\xi}{\xi} d\xi = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i$$

Conclusion : $\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz = 2\pi i \quad \forall \gamma$ de ce type.

Remarque. Pour le cercle unité de rayon 1, on a $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, il faudrait calculer :

$$\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2e^{i\theta})}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} \cos(2e^{i\theta}) d\theta$$

Exemple (2). Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z + i\pi} dz$$

où γ est le cercle de rayon 4 centré en $z = 1$.

Utilisation de la formule de Cauchy, constatations :

- 1) La fonction $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z + i\pi}$ n'est pas définie en $z = -i\pi$
- 2) $-i\pi \in \text{int } \gamma$

On considère γ orientée positivement et $f(\xi) = e^{\xi^2}$ qui est holomorphe dans \mathbb{C} . Formule intégrale de Cauchy pour $z = -i\pi$ (avec $D = \mathbb{C}$) donne :

$$f(-i\pi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\xi^2}}{\xi + i\pi} d\xi \implies \int_{\gamma} \frac{e^{\xi^2}}{\xi + i\pi} d\xi = 2\pi i f(-i\pi)$$

Mais $f(-i\pi) = e^{(-i\pi)^2} = e^{-\pi^2}$, donc :

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z + i\pi} dz = 2\pi i e^{-\pi^2}$$

Autres exemples : ex. 1-4, série 6

3.3.3 Démonstration de la formule intégrale de Cauchy

Démonstration. Soit f holomorphe dans D et γ une courbe simple fermée régulière orientée positivement et contenue dans D . Soient $z \in \text{int } \gamma$ et C un cercle de rayon r centré en z orienté positivement tel que $C \subset \text{int } \gamma$. On note $V = \text{int } \gamma \setminus \text{int } C$.

Corollaire du Thm. de Cauchy (§3.2.4) appliqué à la fonction $g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ holomorphe pour $\xi \in V$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &\stackrel{\text{Cor.}}{\underset{\text{Thm. Cauchy}}{=}} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

$$*\xi(\theta) = z + re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad \xi'(\theta) = ire^{i\theta}$$

D'une part, on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (\text{grandeur indépendante de } r)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta &= \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} [f(z + re^{i\theta})] d\theta \stackrel{f \text{ continue}}{=} \int_0^{2\pi} f(z) d\theta \\ &= f(z) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi f(z) \end{aligned}$$

Égalité des limites :

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z)$$

□

3.4 Corollaire de la formule intégrale de Cauchy

3.4.1 Énoncé

Avec les mêmes hypothèses du §3.3 ($D \subset \mathbb{C}$ domaine simplement connexe, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe dans D , $\gamma \subset D$ courbe fermée régulière orientée positivement), on a :

- 1) f est infiniment dérivable dans D
- 2)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, \forall z \in \text{int } \gamma$$

Commentaires

- 1) Pour $n = 0$, le corollaire redonne la formule intégrale de Cauchy :

$$f(z) = f^{(0)}(z) = \frac{0!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

- 2) Résultat remarquable : le corollaire affirme qu'une fonction holomorphe dans D (i.e. dérivable $\forall z \in D$) est en fait infiniment dérivable et que sa n -ième dérivée se calcule en dérivant n fois par rapport à z sous l'intégrale de la formule de Cauchy. En effet : $f^{(n)} = \frac{d^n}{dz^n}$

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left[\frac{1}{\xi - z} \right]' d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{1!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left[\frac{1}{(\xi - z)^2} \right]' d\xi = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$$

$$f^{(3)}(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left[\frac{1}{(\xi - z)^3} \right]' d\xi = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4} d\xi = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4} d\xi$$

Récurrence sur n :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

3.4.2 Exemples d'utilisation

Exemple (1). Calculer :

$$\int_{\gamma} \frac{ze^{3z+5}}{(z+1)^3} dz \quad \text{où } \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$$

Constatations :

- 1) la fonction $g(z) = \frac{ze^{3z+5}}{(z+1)^3}$ n'est pas définie en $z = -1$

- 2) γ est le cercle de rayon 2 centré en $z_0 = i$ et $-1 \in \text{int } \gamma$.

On considère γ orientée positivement et la fonction $f(\xi) = \xi e^{3\xi+5}$ qui est holomorphe dans \mathbb{C} .

En appliquant à f le corollaire de la formule de Cauchy pour $z = -1$ et $n = 2$ (avec $D = \mathbb{C}$), on obtient :

$$f''(-1) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\xi e^{3\xi+5}}{(\xi + 1)^3} d\xi$$

mais $f'(\xi) = (\xi e^{3\xi+5})' = e^{3\xi+5} + 3\xi e^{3\xi+5}$ et $f''(\xi) = 3e^{3\xi+5} + 3e^{3\xi+5} + 9\xi e^{3\xi+5}$

$$\implies f''(-1) = -3e^2$$

Donc :

$$\int_{\gamma} \frac{\xi e^{3\xi+5}}{(\xi+1)^3} d\xi = -3\pi i e^2$$

Exemple (2). Soit γ une courbe simple fermée régulière. Discuter en fonction de γ la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2} dz$$

La fonction $g(z) = \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2}$ n'est pas définie pour $z = \frac{\pi}{2} \implies$ distinction de plusieurs cas.

— **1^{er} cas** $\frac{\pi}{2} \in \gamma$

L'intégrale n'est pas définie puisque $g(z) = \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2}$ n'est pas continue en $z = \frac{\pi}{2}$

— **2^e cas** $\frac{\pi}{2} \notin \overline{\text{int } \gamma}$

La fonction $g(z) = \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2}$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe D tel que $\overline{\text{int } \gamma} \subset D$. Comme $\gamma \subset \overline{\text{int } \gamma} \subset D$, alors le Théorème de Cauchy s'applique à g et on trouve :

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2} dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ de ce type}$$

— **3^e cas** $\frac{\pi}{2} \in \text{int } \gamma$

La fonction $f(\xi) = \frac{\xi^2}{2} \sin \xi$ est holomorphe dans \mathbb{C} . Comme $\gamma \subset \mathbb{C}$, en lui appliquant le corollaire de la formule de Cauchy pour $z = \frac{\pi}{2}$ et $n = 1$ (avec $D = \mathbb{C}$), on obtient :

$$f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{\xi^2}{2} \sin \xi}{(\xi - \frac{\pi}{2})^2} d\xi$$

mais $f'(\xi) = \left(\frac{\xi^2}{2} \sin \xi \right)' = \xi \sin \xi + \frac{\xi^2}{2} \cos \xi$

$$\implies f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Conclusion :

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2} dz = 2\pi i \frac{\pi}{2} = \pi^2 i$$

Autres exemples : ex. 1-4, série 7

Chapitre 4

Séries de Laurent, pôles et résidus

4.1 Polynôme et série de Taylor d'une fonction holomorphe

4.1.1 Définitions et résultats

Hypothèses. Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et $f : \begin{matrix} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) \end{matrix}$ une fonction holomorphe dans D et $z_0 \in D$.

Définition. Pour $N \in \mathbb{N}$, le **polynôme de Taylor** de f de degré N en z_0 est :

$$T_N f(z) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Résultat (séries de Taylor). Soit $R > 0$ et $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ le plus grand disque de rayon R centré en z_0 contenu dans D .

Convention : si $D = \mathbb{C} \implies R = +\infty$ et $D_R(z_0) = \mathbb{C}$

Alors :

1)

$$Tf(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} T_N f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

existe et est finie $\forall z \in D_R(z_0)$. L'expression $Tf(z)$ s'appelle **la série de Taylor** de f en z_0 .

2) De plus, on a $f(z) = Tf(z) \quad \forall z \in D_R(z_0)$

R est appelé **le rayon de convergence** de la série de Taylor.

3) Les coefficients de la série de Taylor sont reliés à la formule de Cauchy par le corollaire du §3.4. On a :

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où $\gamma \subset D_R(z_0)$ est une courbe simple fermée régulière orientée positivement telle que $z_0 \in \text{int } \gamma$.

4.1.2 Exemples

Exemple (1).

$$f(z) = e^z$$

est holomorphe dans \mathbb{C} . On a $f^{(n)}(z) = e^z$ et $f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Donc :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Exemple (2).

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

est holomorphe dans $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Le plus grand disque centré en $z_0 = 0$ contenu dans D est $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

On a $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$ et $f^{(n)}(0) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Donc :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$$

« **Série géométrique** » avec rayon de convergence $R = 1$.

Exemple (3).

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

est holomorphe dans $D = \mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$.

Le plus grand disque centré en $z_0 = 0$ et contenu dans D est $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

On a :

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} \stackrel{\text{Ex. 2}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$$

Le rayon de convergence $R = 1$

Autre exemple : ex. 5, série γ

4.1.3 Applications

1) Règle de l'Hôpital

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f, g deux fonctions holomorphes au voisinage de z_0 telles que $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$. Alors :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Preuve : ex.4, série 8

2) Théorème de Liouville

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction *bornée* et holomorphe *dans* \mathbb{C} , alors f est constante.

Preuve : corrigé de l'ex. 18, p.248 (§11.3)

4.2 Développement et série de Laurent d'une fonction holomorphe

4.2.1 Problématique, définitions et résultats

Motivation.

Le développement de Taylor d'une fonction f donne une série en puissances **positives** de $z - z_0$ au voisinage d'un point z_0 où f **est** holomorphe.

But : généralisation avec un développement en puissances **positives** et **négatives** de $z - z_0$ où z_0 peut être une **singularité** de f .

Hypothèses.

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $z_0 \in D$ et $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$.

Définition. Pour $N \in \mathbb{N}$, le développement de Laurent de f de degré N au voisinage de z_0 est :

$$\begin{aligned} L_N f(z) &= \sum_{n=-N}^N c_n (z - z_0)^n \\ &= \frac{c_{-N}}{(z - z_0)^N} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_N(z - z_0)^N \end{aligned}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où $\gamma \subset D$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement telle que $z_0 \in \text{int } \gamma$.

Résultat. Soit $R > 0$ et $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ le plus grand disque de rayon R centré en z_0 et contenu dans D . Alors :

1)

$$Lf(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} L_N f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

existe et est finie pour tout $z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. L'expression $Lf(z)$ s'appelle la **série de Laurent** de f au voisinage de z_0 .

2) De plus, on a $f(z) = Lf(z) \quad \forall z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ et R est appelé le **rayon de convergence** de la série de Laurent.

Remarque.

a) La série de Laurent de f peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Lf(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

— La première série

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

s'appelle la **partie singulière** de la série de Laurent.

— La deuxième série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

s'appelle la **partie régulière** de la série de Laurent.

b) Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en z_0 , alors la série de Laurent coïncide avec la série de Taylor.

En effet, la partie singulière de la série de Laurent est nulle puisque :

Pour $n = 1, 2, 3, \dots$, on a :

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi = 0$$

par le Théorème de Cauchy (§3.2), car $f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}$ est holomorphe dans D .

Les coefficients de la partie régulière donnent la série de Taylor car :

Pour $n = 1, 2, 3, \dots$, on a :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

par le corollaire de la formule intégrale de Cauchy (§3.4), car $f(\xi)$ est holomorphe dans D .

4.2.2 Définitions issues de la série de Laurent

Définition (1). $z_0 \in \mathbb{C}$ est un **point régulier** de $f \iff$ la partie singulière de la série de Laurent au voisinage de z_0 est nulle.

C'est-à-dire :

$$Lf(z) = Tf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Bibliographie

[1] Bernard Dacogna et Chiara Tanteri. *Analyse avancée pour ingénieurs*. PPUR, 2017.

Toutes les références (numéro de théorème, définition, etc.) sont faites à ce livre.

Contributeurs

- Robin Mamie (IN)
- Eric Jollès (SC)
- Yves Zumbach (IN)