Analyse IV

Transcript du cours du Pr. Michel Cibils

Robin Mamié

Printemps 2018

Table des matières

Chapitre 1

Transformées de Fourier

1.1 Introduction

1.1.1 Définitions et résultats préliminaires

Définition. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **T-périodique** s'il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

L'intervalle $[0, T]$ caractérise complètement la fonction.

Définition (14.1.i, p.103)**.** Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe des points $\{x\}_{i=0}^{n+1} \subset [a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ tels que pour $i = 0, 1, ..., n$ on ait :

1. f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$
2. la limite à droite $f(x_i+0) := \lim\limits_{\substack{t\to x_i\\ t>x_i}} f(t)$ et la limite à gauche $f(x_{i+1}-0) := \lim\limits_{\substack{t\to x_i\\ t<x_i}} f(t)$ existent et sont finies.

Terminologie. On dit qu'une fonction T-périodique est continue par morceaux si elle l'est sur l'intervalle $[0, T]$ qui la caractérise.

Définition (14.2, p.104)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Pour $N \in \mathbb{N}$, la **série de Fourier partielle d'ordre N** de f est :

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

où les **coefficients de Fourier** c_n sont des nombres complexes donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} \mathrm{d}x$$

On appelle **série de Fourier de f** (en notation complexe) la limite lorsque $N \longrightarrow \infty$ de la série de $F_N f(x)$. On écrit :

$$Ff(x) := \lim_{N\to+\infty} F_N f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

Théorème (de Dirichlet – Résultat de convergence ; 14.3, p.104)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique telle que f et f' soient continues par morceaux. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$:*

$$Ff(x) = \lim_{N\to\infty} F_N f(x) \text{ existe et } Ff(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

En particulier, si f est continue en x, alors $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ et on a $Ff(x) = f(x)$.

Note. Utilisation de la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ *(cf. ex. 1-2, série 1).*

1.1.2 Motivation

Série de Fourier développement des fonctions *périodiques* comme somme infinie de fonctions trigonométriques.

Transformée de Fourier étude de fonctions *non* périodiques.

Idée. Soit $T > 0$ et f_T une fonction T-périodique définie par

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left]-\frac{T}{2}, -1\right[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \left]1, \frac{T}{2}\right[\end{cases}$$

Lorsque la période $T \to \infty$, on a :

$$\lim_{T\to\infty} f_T(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-1,1] \end{cases}$$

qui n'est plus une fonction périodique.

Idée. considérer des fonctions comme limites de fonctions périodiques dont la période T tend vers $+\infty$.

1.1.3 Raisonnement heuristique

Soit $f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue*, T-périodique telle que f_T' soit continue par morceaux. Alors la série de Fourier de f_T est :

$$Ff_T(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}y}$$

pour $y \in \mathbb{R}$, où

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f_T(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} \mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} \mathrm{d}x$$

En écrivant $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{T}$ et $\alpha_n = n \cdot \Delta\alpha$, on a $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}$.

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} \mathrm{d}x \\
\Rightarrow F f_T(y) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} \mathrm{d}x \right] e^{i\alpha_n y}
\end{aligned}
$$

Échange de la somme infinie et de l'intégrale :

$$
F f_T(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[\Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n (x-y)} \right] \mathrm{d}x
$$

On découvre une somme de Riemann qui permet de définir une intégrale. En effet :

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} &\underbrace{=}_{\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_{n-1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} \mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
$$

Donc on obtient :

$$
\begin{aligned}
F f_T(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} \mathrm{d}\alpha \right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \right] e^{i\alpha y} \mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
$$

Comme f_T est continue, alors on a $f_T(y) = F f_T(y)$ et donc lorsque T tend vers $+\infty$, on a $\lim_{T \to +\infty} f_T(y) = \lim_{T \to +\infty} F f_T(y) \iff f(y) = \lim_{T \to +\infty} F f_T(y)$.

$$
\iff f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \right]}_{\substack{\text{Nouvelle fonction qui dépend de la} \\ \text{variable } \alpha \text{, qui est appelée la} \\ \text{transformée de Fourier de } f \text{ et} \\ \text{notée } \mathfrak{F}(f) \text{ ou } \hat{f}}} e^{i\alpha y} \mathrm{d}\alpha
$$

On écrit :

$$
\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x
$$

Remarque. On a que :

$$
f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha y} \mathrm{d}\alpha
$$

1.2 Transformée de Fourier d'une fonction

1.2.1 Définition

Définition (15.1, p.113)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$.

La **transformée de Fourier** de f est la fonction notée $\mathfrak{F}(f)$ ou $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\alpha \longmapsto \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x$$

1.2.2 Exemples

Exemple. Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & f(x) = e^{-|x|} = \left\{ \begin{array}{lll} e^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \\ e^{x} & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\alpha)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\alpha)x}\mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left. \frac{e^{(1-i\alpha)x}}{1-i\alpha} \right|_{-\infty}^{0} - \left. \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{1+i\alpha} \right|_{0}^{+\infty} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-i\alpha} \left(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{(1-i\alpha)x} \right) - \frac{1}{1+i\alpha} \left(\lim_{x\to+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+i\alpha+1-i\alpha}{(1-i\alpha)(1+i\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2}
\end{aligned}$$

Résultat :

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

Remarque. Pour calculer $\lim_{x\to-\infty} e^{(1-i\alpha)x}$:

$$\left|e^{(1-i\alpha)x}\right| = \left|e^{-i\alpha x}e^{x}\right| = \underbrace{\left|e^{-i\alpha x}\right|}_{=1}|e^{x}| = e^{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left|e^{(1-i\alpha)x}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{(1-i\alpha)x} = 0 + i0 = 0$$

On a aussi $\lim_{x\to+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} = 0$.

Exemple. Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Calcul de la transformée de Fourier de f.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x \\ &\overbrace{=}^{\alpha\neq 0} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i\alpha} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha}\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i0x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\Big|_{-1}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Résultat :

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} & \text{si} \quad \alpha \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si} \quad \alpha = 0 \end{cases} \end{array}$$

On remarque que $\lim_{\alpha\to 0}\hat{f}(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \hat{f}(0)$.

$\Longrightarrow$ $\hat{f}$ est aussi continue en $\alpha = 0$.

Autres exemples : ex. 3-4, série 1

1.3 Transformée de Fourier inverse

1.3.1 Définition

Définition. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\mathrm{d}t < \infty$. La **transformée de Fourier inverse** de g est notée :

$$\mathfrak{F}^{-1}(g) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \to & \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) \end{array}, \text{ où } \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{itx}\mathrm{d}t.$$

1.3.2 Théorème de réciprocité (formule d'inversion)

Théorème (15.3.i, p.115)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que f et f' soient continues par morceaux avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha < \infty$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}\mathrm{d}\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

En particulier si f est continue en x, on a $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = f(x)$ et alors :

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}\mathrm{d}\alpha$$

Autrement dit, on a $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$. La transformée de Fourier peut être vue comme une « transformation $\mathfrak{F}$ » inversible (une bijection) qui « agit » sur la fonction f :

$$f \xrightarrow{\mathfrak{F}} \hat{f} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f$$

1.3.3 Exemple d'utilisation

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & f(x) = e^{-|x|} = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \\ e^{x} & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. \end{array}$.

La transformée de Fourier de f est (*exemple 1, §1.2.2*)

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

On remarque que $f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -e^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \\ e^{x} & \text{si} & x < 0 \end{array} \right.$ est continue par morceaux car :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f'(x) = -1 \text{ et } \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f'(x) = 1$$

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha < \infty$. f est continue $\forall x \in \mathbb{R} \implies$ en appliquant le *théorème de réciprocité*, on a que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}$, i.e. :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, lorsque $x = 0$, on trouve :

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2} = \pi.$$

En particulier, lorsque $x = 1$, on trouve :

$$e^{-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha}}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha + i \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha}^{\substack{\text{fonction impaire} \\ \text{intégrée sur tout l'axe réel } =0}}\right]$$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{e}$$

Conclusion : Le *théorème de réciprocité* permet de calculer la valeur d'intégrales généralisées.

Autre exemple : ex. 1, série 2

1.4 Propriétés de la transformée de Fourier

On considère f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\mathrm{d}x < \infty$. On note indifféremment $\mathfrak{F}(f) \doteq \hat{f}$ et $\mathfrak{F}(g) \doteq \hat{g}$ les transformées de Fourier de f et de g.

Note. Les prochains résultats sont décrits dans les **théorèmes 15.2 et 15.3** aux pages 113 à 115 du livre du cours.

1.4.1 Continuité et linéarité

— $\mathfrak{F}(f)$ est continue $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{\alpha \to \pm\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)| = 0$.

— $\mathfrak{F}$ linéaire : $\mathfrak{F}(af + bg) = a\,\mathfrak{F}(f) + b\,\mathfrak{F}(g) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

1.4.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

Définition. Le **produit de convolution** de deux fonctions f et g est la fonction notée $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)g(t)\mathrm{d}t$$

Remarque. On peut aussi écrire $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(x-t')\mathrm{d}t'$, via un changement de variable.

Résultat : on a que $\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\ \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$.

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au **produit** des transformées de Fourier de chaque fonction.

Exemples : ex. 2-3, série 2

1.4.3 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\mathrm{d}x < \infty$, alors on a :

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha\ \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

On écrit aussi $\widehat{f'}(\alpha) = i\alpha\ \hat{f}(\alpha)$.

La transformée de Fourier de la dérivée de f s'obtient en **multipliant par** $i\alpha$ la transformée de Fourier de f.

Plus généralement, si $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)|\mathrm{d}x < \infty$ pour $k = 1, 2, ..., n$, alors on a :

$$\mathfrak{F}(f^{(k)})(\alpha) = (i\alpha)^k\ \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, k = 1, 2, ..., n$$

On écrit aussi $\widehat{f^{(k)}}(\alpha) = (i\alpha)^k\ \hat{f}(\alpha)$.

Exemple : ex.3, série 2

1.4.4 Décalage

Si $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $h(x) = e^{-ibx} f(ax)$, alors :

$$\mathfrak{F}(h)(\alpha) = \frac{1}{|a|}\mathfrak{F}(f)(\frac{\alpha + b}{a})$$

1.4.5 Identité de Plancherel

Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 \mathrm{d}x < \infty$, alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha$$

1.4.6 Transformée de Fourier en sinus et cosinus

Si la fonction f est paire (i.e. $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x)\mathrm{d}x$$

qui est la transformée de Fourier en **cosinus** de f.

Si la fonction f est impaire (i.e. $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\mathrm{d}x$$

qui est la transformée de Fourier en **sinus** de f.

Exemples : ex.4, série 2 et ex.1, série 3

Remarque. Si de plus f' est continue par morceaux et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha < \infty$, alors, d'après le *théorème de réciprocité*, on a :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\cos(\alpha x)\mathrm{d}\alpha \quad \text{lorsque } f \text{ est paire}$$

$$f(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\sin(\alpha x)\mathrm{d}\alpha \quad \text{lorsque } f \text{ est impaire}$$

Bibliographie

[1] Bernard Dacogna et Chiara Tanteri. *Analyse avancée pour ingénieurs.* PPUR, 2017. Toutes les références (numéro de théorème, définition, etc.) sont faites à ce livre.