Analyse IV

Transcript du cours du Pr. Michel Cibils

Robin Mamié

Printemps 2018

Table des matières

Chapitre 1

Transformées de Fourier

1.1 Introduction

1.1.1 Définitions et résultats préliminaires

Définition. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **T-périodique** s'il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

L'intervalle $[0, T]$ caractérise complètement la fonction.

Définition (14.1.i, p.103)**.** Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe des points $\{x\}_{i=0}^{n+1} \subset [a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ tels que pour $i = 0, 1, \ldots, n$ on ait :

1. f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$
2. la limite à droite $f(x_i + 0) := \lim\limits_{\substack{t \to x_i \\ t > x_i}} f(t)$ et la limite à gauche $f(x_{i+1} - 0) := \lim\limits_{\substack{t \to x_i \\ t < x_i}} f(t)$ existent et sont finies.

Terminologie. On dit qu'une fonction T-périodique est continue par morceaux si elle l'est sur l'intervalle $[0, T]$ qui la caractérise.

Définition (14.2, p.104)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Pour $N \in \mathbb{N}$, la **série de Fourier partielle d'ordre N** de f est :

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$$

où les **coefficients de Fourier** c_n sont des nombres complexes donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} \mathrm{d}x$$

On appelle **série de Fourier de f** (en notation complexe) la limite lorsque $N \longrightarrow \infty$ de la série de $F_N f(x)$. On écrit :

$$Ff(x) := \lim_{N\to+\infty} F_N f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

Théorème (de Dirichlet – Résultat de convergence ; 14.3, p.104)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique telle que f et f' soient continues par morceaux. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$:*

$$Ff(x) = \lim_{N\to\infty} F_N f(x) \text{ existe et } Ff(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

En particulier, si f est continue en x, alors $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ et on a $Ff(x) = f(x)$.

Note. Utilisation de la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ *(cf. ex. 1-2, série 1).*

1.1.2 Motivation

Série de Fourier développement des fonctions *périodiques* comme somme infinie de fonctions trigonométriques.

Transformée de Fourier étude de fonctions *non* périodiques.

Idée. Soit $T > 0$ et f_T une fonction T-périodique définie par

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left]-\frac{T}{2}, -1\right[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \left]1, \frac{T}{2}\right[\end{cases}$$

Lorsque la période $T \to \infty$, on a :

$$\lim_{T\to\infty} f_T(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

qui n'est plus une fonction périodique.

Idée. considérer des fonctions comme limites de fonctions périodiques dont la période T tend vers $+\infty$.

1.1.3 Raisonnement heuristique

Soit $f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue*, T-périodique telle que f'_T soit continue par morceaux. Alors la série de Fourier de f_T est :

$$Ff_T(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}y}$$

pour $y \in \mathbb{R}$, où

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f_T(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} \mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} \mathrm{d}x$$

En écrivant $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{T}$ et $\alpha_n = n \cdot \Delta\alpha$, on a $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}$.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} \mathrm{d}x \\ \Rightarrow F f_T(y) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} \mathrm{d}x \right] e^{i\alpha_n y} \end{aligned}$$

Échange de la somme infinie et de l'intégrale :

$$F f_T(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[\Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n (x-y)} \right] \mathrm{d}x$$

On découvre une somme de Riemann qui permet de définir une intégrale. En effet :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n (x-y)} &\underbrace{=}_{\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_{n-1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n (x-y)} (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} F f_T(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} \mathrm{d}\alpha \right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \right] e^{i\alpha y} \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

Comme f_T est continue, alors on a $f_T(y) = F f_T(y)$ et donc lorsque T tend vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{T\to+\infty} f_T(y) = \lim\limits_{T\to+\infty} F f_T(y) \iff f(y) = \lim\limits_{T\to+\infty} F f_T(y)$.

$$\iff f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \right]}_{\substack{\text{Nouvelle fonction qui dépend de la} \\ \text{variable } \alpha \text{, qui est appelée la} \\ \text{transformée de Fourier de } f \text{ et} \\ \text{notée } \mathfrak{F}(f) \text{ ou } \hat{f}}} e^{i\alpha y} \mathrm{d}\alpha$$

On écrit :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x$$

Remarque. On a que :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha y} \mathrm{d}\alpha$$

1.2 Transformée de Fourier d'une fonction

1.2.1 Définition

Définition (15.1, p.113)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$.

La **transformée de Fourier** de f est la fonction notée $\mathfrak{F}(f)$ ou $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\alpha \longmapsto \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x$$

1.2.2 Exemples

Exemple. Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & f(x) = e^{-|x|} = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ e^{x} & \text{si} \quad x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\alpha)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\alpha)x}\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left.\frac{e^{(1-i\alpha)x}}{1-i\alpha}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{1+i\alpha}\right|_{0}^{+\infty} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-i\alpha}\left(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{(1-i\alpha)x}\right) - \frac{1}{1+i\alpha}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+i\alpha+1-i\alpha}{(1-i\alpha)(1+i\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2}
\end{aligned}$$

Résultat :

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

Remarque. Pour calculer $\lim_{x\to-\infty} e^{(1-i\alpha)x}$:

$$\left|e^{(1-i\alpha)x}\right| = \left|e^{-i\alpha x}e^x\right| = \underbrace{\left|e^{-i\alpha x}\right|}_{=1}\left|e^x\right| = e^x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left|e^{(1-i\alpha)x}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{(1-i\alpha)x} = 0 + i0 = 0$$

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} = 0$.

Exemple. Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Calcul de la transformée de Fourier de f.

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x$$

$$\overbrace{=}^{\alpha\neq 0} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i\alpha}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha}\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 0$$

Pour $\alpha = 0$:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i0x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\Big|_{-1}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Résultat :

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} & \text{si} \quad \alpha \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si} \quad \alpha = 0 \end{cases} \end{array}$$

On remarque que $\lim\limits_{\alpha\to 0}\hat{f}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \hat{f}(0)$.
$\Longrightarrow$ $\hat{f}$ est aussi continue en $\alpha = 0$.
Autres exemples : ex. 3-4, série 1

1.3 Transformée de Fourier inverse

1.3.1 Définition

Définition. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\mathrm{d}t < \infty$. La **transformée de Fourier inverse** de g est notée :

$$\mathfrak{F}^{-1}(g) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \to & \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) \end{array}, \text{ où } \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{itx}\mathrm{d}t.$$

1.3.2 Théorème de réciprocité (formule d'inversion)

Théorème (15.3.i, p.115)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que f et f' soient continues par morceaux avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha < \infty$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}\mathrm{d}\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

En particulier si f est continue en x, on a $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = f(x)$ et alors :

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}\mathrm{d}\alpha$$

Autrement dit, on a $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$. La transformée de Fourier peut être vue comme une « transformation $\mathfrak{F}$ » inversible (une bijection) qui « agit » sur la fonction f :

$$f \xrightarrow{\mathfrak{F}} \hat{f} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f$$

1.3.3 Exemple d'utilisation

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & f(x) = e^{-|x|} = \left\{ \begin{array}{lll} e^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \\ e^{x} & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. \end{array}$.

La transformée de Fourier de f est (*exemple 1, §1.2.2*)

$$\hat{f} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

On remarque que $f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -e^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \\ e^{x} & \text{si} & x < 0 \end{array} \right.$ est continue par morceaux car :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = -1 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1$$

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha < \infty$. f est continue $\forall x \in \mathbb{R} \implies$ en appliquant le *théorème de réciprocité*, on a que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}$, i.e. :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, lorsque $x = 0$, on trouve :

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2} = \pi.$$

En particulier, lorsque $x = 1$, on trouve :

$$e^{-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha}}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha + i\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha}^{\substack{\text{fonction impaire}\\ \text{intégrée sur tout l'axe}\\ \text{réel} = 0}}\right]$$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{e}$$

Conclusion : Le *théorème de réciprocité* permet de calculer la valeur d'intégrales généralisées.

Autre exemple : ex. 1, série 2

1.4 Propriétés de la transformée de Fourier

On considère f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\mathrm{d}x < \infty$. On note indifféremment $\mathfrak{F}(f) \doteq \hat{f}$ et $\mathfrak{F}(g) \doteq \hat{g}$ les transformées de Fourier de f et de g.

Note. Les prochains résultats sont décrits dans les **théorèmes 15.2 et 15.3** aux pages 113 à 115 du livre du cours.

1.4.1 Continuité et linéarité

— $\mathfrak{F}(f)$ est continue $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim_{\alpha\to\pm\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)| = 0$.

— $\mathfrak{F}$ linéaire : $\mathfrak{F}(af + bg) = a\,\mathfrak{F}(f) + b\,\mathfrak{F}(g) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

1.4.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

Définition. Le **produit de convolution** de deux fonctions f et g est la fonction notée $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

Remarque. On peut aussi écrire $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(x-t')\mathrm{d}t'$, via un changement de variable.

Résultat : on a que $\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\ \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$.

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au **produit** des transformées de Fourier de chaque fonction.

Exemples : ex. 2-3, série 2

1.4.3 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\mathrm{d}x < \infty$, alors on a :

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha\ \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

On écrit aussi $\widehat{f'}(\alpha) = i\alpha\ \hat{f}(\alpha)$.

La transformée de Fourier de la dérivée de f s'obtient en **multipliant par** $i\alpha$ la transformée de Fourier de f.

Plus généralement, si $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)|\mathrm{d}x < \infty$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, alors on a :

$$\mathfrak{F}(f^{(k)})(\alpha) = (i\alpha)^k\ \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, n$$

On écrit aussi $\widehat{f^{(k)}}(\alpha) = (i\alpha)^k\ \hat{f}(\alpha)$.

Exemple : ex.3, série 2

1.4.4 Décalage

Si $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $h(x) = e^{-ibx} f(ax)$, alors :

$$\mathfrak{F}(h)(\alpha) = \frac{1}{|a|}\mathfrak{F}(f)\left(\frac{\alpha + b}{a}\right)$$

1.4.5 Identité de Plancherel

Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2\mathrm{d}x < \infty$, alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha$$

1.4.6 Transformée de Fourier en sinus et cosinus

Si la fonction f est paire (i.e. $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\mathrm{d}x$$

qui est la transformée de Fourier en **cosinus** de f.

Si la fonction f est impaire (i.e. $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\mathrm{d}x$$

qui est la transformée de Fourier en **sinus** de f.

Exemples : ex.4, série 2 et ex.1, série 3

Remarque. Si de plus f' est continue par morceaux et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha < \infty$, alors, d'après le *théorème de réciprocité*, on a :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\cos(\alpha x)\mathrm{d}\alpha \quad \text{lorsque } f \text{ est paire}$$
$$f(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\sin(\alpha x)\mathrm{d}\alpha \quad \text{lorsque } f \text{ est impaire}$$

1.5 Esquisse de démonstrations de quelques propriétés

1.5.1 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Démonstration. On a

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x$$

On intègre par parties, avec $u' = f' \to u = f$ et $v = e^{-i\alpha x} \to v' = -i\alpha e^{-i\alpha x}$.

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x\right]$$

Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|f(x)e^{-i\alpha x}\right| = \lim\limits_{x\to\pm\infty}|f(x)| = 0$ car $\left|e^{-i\alpha x}\right| = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x < \infty$ (f est sommable).

$$\Longrightarrow \mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x = i\alpha\,\mathfrak{F}(f)(\alpha)$$

□

Remarque. Formule pour la dérivée de la transformée de Fourier d'une fonction :

$$\mathfrak{F}'(f)(\alpha) = (\hat{f})'(\alpha) = -i\,\mathfrak{F}\left(xf(x)\right)(\alpha)$$

Cf. ex. 2, série 3

1.5.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

Démonstration. On a

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}(f*g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t\right]e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x\right]g(t)\mathrm{d}t \\
&\overbrace{=}^{\text{cdv}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-i\alpha(y+t)}\mathrm{d}y\right]g(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-i\alpha y}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-i\alpha t}\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2\pi}\,\mathfrak{F}(f)(\alpha)\cdot\mathfrak{F}(g)(\alpha)
\end{aligned}
$$

□

1.5.3 Identité de Plancherel

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On remarque que

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x+t)\mathrm{d}x &\overbrace{=}^{1} \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}(g)(\alpha)e^{i\alpha(x+t)}\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}(g)(\alpha)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x\right]e^{i\alpha t}\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}(g)(\alpha)\overline{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}e^{i\alpha t}\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
$$

En posant $t = 0$ et en choisissant $g = f$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(\alpha)]^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}|\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2\,\mathrm{d}\alpha$$

□

1. Par le **théorème de réciprocité**, §1.3.2

1.6 Exemples d'utilisation de la transformée de Fourier

a) Trouver une solution particulière $y(x)$ d'une équation différentielle du type :

$$\lambda\, y''(x) + \omega\, y(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda, \omega \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

qui est l'équation de l'oscillateur forcé (f est une fonction donnée).
Méthode : on écrit la transformée de Fourier de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{F}(\lambda y'' + \omega y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\
\Longleftrightarrow\ & \lambda\, \mathfrak{F}(y'')(\alpha) + \omega\, \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\
\Longleftrightarrow\ & \lambda\left(-\alpha^2\right) \mathfrak{F}(y)(\alpha) + \omega\, \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\omega - \lambda\alpha^2\right) \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\
\Longleftrightarrow\ & \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \frac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda\alpha^2}
\end{aligned}$$

On utilise le **théorème de réciprocité** (§1.3.2) : la solution particulière $y(x)$ s'obtient en calculant la transformée de Fourier inverse de la fonction de la variable α définie par $\frac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda\alpha^2}$.

b) On utilise la transformée de Fourier pour résoudre des équations intégrales du type produit de convolution (*cf. ex. 2 et 3, série 3*).

c) Problèmes statistiques avec loi normale.
fonction gaussienne $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Ex. 4, série 1 : $\hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ est aussi une fonction gaussienne.

d) Mécanique quantique
$f(x)$: position de la particule quantique
$\hat{f}(p)$: impulsion de la particule quantique

e) Résolution de l'équation de la chaleur pour une barre conductrice de longueur **infinie**.

Rappel : cas d'une barre de longueur **finie**

Soit une barre de longueur $0 < L < \infty$. On note $u(x,t)$ la fonction qui décrit la température de la barre au point x et à l'instant t.
L'évolution de la température $u(x,t)$ le long de la barre est modélisée par l'équation de la chaleur donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \quad \text{pour } x \in]0, L[\text{ et } t > 0, \quad a \neq 0$$

où a est un coefficient thermique. On impose :

— **deux** conditions limites $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t > 0$,

— une condition initiale $u(x,0) = f(x)$ pour $x \in]0, L[$. [2]

Problème : trouver une solution $u(x,t)$ satisfaisant ces conditions.

Cas d'une barre de longueur infinie

Il n'y a plus de conditions aux limites concernant les extrémités de la barre. Le problème est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) & = & a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \\ u(x,0) & = & f(x) \end{array} \right.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, avec **une** condition initiale, valable $\forall x \in \mathbb{R}$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^1 telle que f et la transformée de Fourier de f soient sommables.

Résolution

1^re^ étape : on écrit la transformée de Fourier de l'équation de la chaleur en considérant $u(x,t)$ comme fonction de la variable x (t joue le rôle d'un paramètre). On obtient :

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha, t) = a^2 \mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha, t) \text{ avec } \mathfrak{F}(u)(\alpha, 0) = \mathfrak{F}(f)(\alpha)$$

Avec la notation :

$$v(\alpha, t) = (\mathfrak{F}u)(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x$$

On obtient à gauche :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} v(\alpha, t) \end{aligned}$$

2. Dans le milieu de l'ingénierie, on sous-entend souvent qu'une condition **limite** l'est aux positions, et qu'une condition **initiale** l'est au temps

Et à droite :

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha, t) \overbrace{=}^{3} (i\alpha)^2 \mathfrak{F}(u)(\alpha, t)$$
$$= -\alpha^2 v(\alpha, t)$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} v(\alpha, t) = -a^2 \alpha^2 v(\alpha, t)$$

C'est une équation différentielle du **premier ordre** pour la fonction $v(\alpha, t)$ par rapport à **la variable** t (α joue le rôle de paramètre).
La solution est :

$$v(\alpha, t) = v(\alpha, 0) e^{-a^2 \alpha^2 t} = \mathfrak{F}(f)(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 t}$$

2e étape : pour obtenir la solution $u(x, t)$, on calcule la transformée de Fourier inverse de $v(\alpha, t)$ en considérant t comme paramètre. On obtient :

$$\begin{aligned} u(x, t) = \mathfrak{F}^{-1}(v)(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\alpha, t) e^{i\alpha x} \mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(f)(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 t} e^{i\alpha x} \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

comme solution de l'équation de la chaleur pour une barre de longueur infinie.
Exemple : ex. 3, série 3

3. Par la propriété du §1.4.3, concernant la **transformée de Fourier de la dérivée** d'une fonction

Chapitre 2

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

2.1 Introduction

2.1.1 Motivation

But : étendre l'étude de fonctions réelles (du type $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) à des fonctions qui dépendent d'**une** variable complexe qui sont à valeurs complexes (du type $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes).

Rôle : établir les notions de limite, de continuité, de dérivabilité et d'intégration dans $\mathbb{C}$.

Intérêt : méthodes puissantes qui permettent de calculer facilement des intégrales **réelles** compliquées.

Cf. ex. 4, série 3

Bibliographie

[1] Bernard Dacogna et Chiara Tanteri. *Analyse avancée pour ingénieurs.* PPUR, 2017. Toutes les références (numéro de théorème, définition, etc.) sont faites à ce livre.

Contributeurs

— Robin Mamie (IN)