Analyse IV

Transcript du cours du Pr. Michel Cibils

Robin Mamié

Printemps 2018

Chapitre 1

Transformées de Fourier

1.1 Introduction

1.1.1 Définitions et résultats préliminaires

Définition 1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **T-périodique** s'il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$. L'intervalle $[0,T]$ caractérise complètement la fonction.

Définition 2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle $[a,b]$ s'il existe des points $\{x\}_{i=0}^{n+1} \subset [a,b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ tels que pour $i = 0, 1, ..., n$ on ait :

1. f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$
2. la limite à droite $f(x_i+0) := \lim\limits_{\substack{t\to x_i \\ t>x_i}} f(t)$ et la limite à gauche $f(x_{i+1}-0) := \lim\limits_{\substack{t\to x_i \\ t<x_i}} f(t)$ existent et sont finies.

Terminologie. On dit qu'une fonction T-périodique est continue par morceaux si elle l'est sur l'intervalle $[0,T]$ qui la caractérise.

Définition 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Pour $N \in \mathbb{N}$, la **série de Fourier partielle d'ordre N** de f est :

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

où les **coefficients de Fourier** c_n sont des nombres complexes donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} \mathrm{d}x$$

On appelle **série de Fourier de f** (en notation complexe) la limite lorsque $N \longrightarrow \infty$ de la série de $F_N f(x)$. On écrit :

$$Ff(x) := \lim_{N\to\infty} F_N f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

Théorème (de Dirichlet – Résultat de convergence)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique telle que f et f' soient continues par morceaux. Alors $\forall x \in \mathbb{R} : Ff(x) = \lim_{N\to\infty} F_N f(x)$ existe et $Ff(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. En particulier, si f est continue en x, alors $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ et on a $Ff(x) = f(x)$.*

Note. Utilisation de la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (cf. ex. 1-2, série 1).

1.1.2 Motivation

Série de Fourier développement des fonctions *périodiques* comme somme infinie de fonctions trigonométriques.

Transformée de Fourier étude de fonctions *non* périodiques.

Idée. Soit $T > 0$ et f_T une fonction T-périodique définie par

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left]-\frac{T}{2}, -1\right[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \left]1, \frac{T}{2}\right[\end{cases}$$

Lorsque la période $T \to \infty$, on a :

$$\lim_{T\to\infty} f_T(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

qui n'est plus une fonction périodique.

Idée. considérer des fonctions comme limites de fonctions périodiques dont la périodiques dont la période T tend vers $+\infty$.

1.1.3 Raisonnement heuristique

Soit $f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue*, T-périodique telle que f_T' soit continue par morceaux. Alors la série de Fourier de f_T est :

$$Ff_T(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}y}$$

pour $y \in \mathbb{R}$, où

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f_T(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} \mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} \mathrm{d}x$$

En écrivant $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{T}$ et $\alpha_n = n \cdot \Delta\alpha$, on a $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}$.

$$c_n = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-i\alpha_n x}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow Ff_T(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-i\alpha_n x}\mathrm{d}x\right]e^{i\alpha_n y}$$

Échange de la somme infinie et de l'intégrale :

$$Ff_T(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)\left[\Delta\alpha\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)}\right]\mathrm{d}x$$

On décrouvre une somme de Riemann qui permet de définir une intégrale. En effet :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} &\underbrace{=}_{\Delta\alpha=\alpha_n-\alpha_{n-1}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)}(\alpha_n-\alpha_{n-1}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)}\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned}Ff_T(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)}\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x\right]e^{i\alpha y}\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

Comme f_T est continue, alors on a $f_T(y) = Ff(y)$ et donc lorsque T tend vers $+\infty$, on a $\lim_{T\to\infty} f_T(y) = \lim_{T\to\infty} Ff_T(y) \iff f(y) = \lim_{T\to\infty} Ff_T(y)$.

$$\iff f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x\right]}_{\substack{\text{Nouvelle fonction qui dépend de la} \\ \text{variable } \alpha\text{, qui est appelée la} \\ \text{transformée de Fourier de } f \text{ et} \\ \text{notée } \mathfrak{F}(f) \text{ ou } \hat{f}}} e^{i\alpha y}\mathrm{d}\alpha$$

On écrit :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x$$

Remarque. On a que :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\alpha)e^{i\alpha y}\mathrm{d}\alpha$$

1.2 Transformée de Fourier d'une fonction

1.2.1 Définitions

Définition 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$. La **transformée de Fourier** de f est la fonction notée $\mathfrak{F}(f)$ ou $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\alpha \longmapsto \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x$$

1.2.2 Définitions

Exemple. Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \to & f(x) = e^{-|x|} = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ e^{x} & \text{si} \quad x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\alpha)x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} \mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left. \frac{e^{(1-i\alpha)x}}{1-i\alpha} \right|_{-\infty}^{0} - \left. \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{1+i\alpha} \right|_{0}^{+\infty} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-i\alpha} \left(1 - \lim_{x \to -\infty} e^{(1-i\alpha)x} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1+i\alpha} \left(\lim_{x \to +\infty} e^{-(1+i\alpha)x} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+i\alpha+1-i\alpha}{(1-i\alpha)(1+i\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2}
\end{aligned}$$

Résultat :

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \to & \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

Autres exemples : ex. 3-4, série 1

Remarque. Pour calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{(1-i\alpha)x}$:

$$\begin{aligned} \left| e^{(1-i\alpha)x} \right| &= \left| e^{-i\alpha x} e^{x} \right| = \underbrace{\left| e^{-i\alpha x} \right|}_{=1} \left| e^{x} \right| = e^{x} \\ \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \left| e^{(1-i\alpha)x} \right| &= \lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} e^{(1-i\alpha)x} &= 0 + i0 = 0 \end{aligned}$$

On a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-(1+i\alpha)x} = 0$.