Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-ix}(\cos x + i \sin x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de f et en déduire la formule d'Euler.

Exercice 2 (Ex. 4 §14.3 page 110)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par périodicité de période 2 telle que

$$f(x) = x \quad \text{si} \quad x \in [0, 2[\,.$$

Calculer sa série de Fourier en notation complexe.

Exercice 3 (Ex. 1 §15.3 page 117)

Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 4

a) Soit l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Montrer que $I = \sqrt{\pi}$.

Indication : exprimer I^2 sous la forme d'une intégrale double dans $\mathbb{R}^2$ et utiliser les coordonnées polaires pour la calculer.

b) Calculer la transformée de Fourier de la fonction gaussienne définie par

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : Intégrer par parties. Obtenir une équation différentielle pour $\hat{f}(\alpha)$ et la résoudre en utilisant le résultat de la question a).

ANALYSE VI	**SÉRIE 1**	**Printemps 2018**
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)	**Corrigé**	**22 février 2018**

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Le calcul de la dérivée de f donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= -ie^{-ix}\left(\cos x + i\sin x\right) + e^{-ix}\left(-\sin x + i\cos x\right) \\ &= e^{-ix}(0+i0) = 0. \end{aligned}$$

Donc $f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où c est une constante. Puisque $f(0) = 1$, il en résulte que $c = 1$ et alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{-ix}\left(\cos x + i\sin x\right) = 1 \implies e^{ix} = \left(\cos x + i\sin x\right).$$

Exercice 2

Corrigé : Ex. 4 page 275

Exercice 3

Corrigé : Ex. 1 page 285

Exercice 4

a) On écrit

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(t^2+s^2)}\,dt\,ds.$$

En utilisant les coordonnées polaires $(r,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[$ on a

$$\begin{aligned} t &= r\cos\theta, \qquad s = r\sin\theta, \\ t^2+s^2 &= r^2, \quad dt\,ds = r\,dr\,d\theta \end{aligned}$$

et on obtient

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr = -\pi\, e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

Il suit donc que $I = \sqrt{\pi}$.

b) Soit la fonction gaussienne

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

alors sa transformée de Fourier s'écrit

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\alpha x} dx.$$

En considérant les fonctions $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $v'(x) = e^{-i\alpha x}$, avec $u'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ et $v(x) = \frac{i}{\alpha} e^{-i\alpha x}$, on intègre par parties et on obtient

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\alpha} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\alpha x}|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\alpha x} dx.$$

Or

$$\hat{f}'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (-ix) e^{-i\alpha x} dx,$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\alpha x} dx = i\hat{f}'(\alpha).$$

Donc on a

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{i}{\alpha} i\hat{f}'(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}'(\alpha) = -\alpha\hat{f}(\alpha).$$

La solution de l'équation différentielle linéaire ci-dessus est $\hat{f}(\alpha) = Ce^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ avec

$$C = \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \overset{\overset{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{\downarrow}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1.$$

Donc finalement

$$\hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}.$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

Indication : La transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-\omega|x|}$ avec $\omega > 0$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \frac{4\omega}{i\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

Exercice 2 (Exemple 17.7 page 134)

Utiliser les proprietés de la transformée de Fourier (produit de convolution) pour trouver une solution $y(x)$ de l'équation intégrale

$$y(x) + 3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} y(x-t)\,\mathrm{d}t = e^{-|x|} \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Indication : La transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{-\omega|x|}}{\omega}$ avec $\omega > 0$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2+\omega^2} \ .$$

Exercice 3 (Ex. 11 §17.4 page 136)

Utiliser les proprietés de la transformée de Fourier (dérivée et produit de convolution) pour trouver une solution $y(x)$ de l'équation intégrale

$$3y(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y''(t) - y(t)\right] f(x-t)\,\mathrm{d}t = g(x)$$

où $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = xe^{-x^2}$.

Indication : Les transformées de Fourier des fonctions f et g sont respectivemnent données par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2+1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}(g)(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

Exercice 4 (Ex. 2a §15.3 page 117)

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}\cos x$ étendue par parité sur $\mathbb{R}$. Calculer la transformée de Fourier en cosinus de f.

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

On utilise la formule d'inversion du théorème de réciprocité de la transformée de Fourier pour la fonction $f(x) = xe^{-\omega|x|}$:

$$\begin{aligned} xe^{-\omega|x|} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathfrak{F}f)(\alpha) e^{i\alpha x} \mathrm{d}\alpha = \frac{4\omega}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2} e^{i\alpha x} \mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{2\omega}{\pi i} \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2} \cos(\alpha x) \mathrm{d}\alpha}_{=0 \quad \text{car fonction impaire}} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2} \sin(\alpha x)}_{\text{fonction paire}} \mathrm{d}\alpha \Big] \\ &= \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2} \sin(\alpha x) \mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2} \sin(\alpha x) \mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{4\omega} xe^{-\omega|x|}.$$

Donc en choisissant $\alpha = t$, $\omega = 2$ et $x = \frac{1}{2}$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{16e}.$$

Exercice 2

Corrigé : Exemple 17.7 page 134

Exercice 3

Corrigé : Ex. 11 page 309

Exercice 4

Corrigé : Ex. 2a page 285

ANALYSE IV	**SÉRIE 3**	**Printemps 2018**
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)		**8 mars 2018**

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex. 2b §15.3 page 117)

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}\cos x$ étendue par imparité sur $\mathbb{R}$. Calculer la transformée de Fourier en sinus de f.

Exercice 2 (Ex 7 §15.3 page 118)

Soit f une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx < \infty$ et soit g la fonction définie par $g(x) = xf(x)$. Montrer que

$$\mathfrak{F}(f)'(\alpha) \doteq (\hat{f})'(\alpha) = -i\mathfrak{F}(g)(\alpha)$$

On suppose que tous les calculs formels sont licites.

Exercice 3 (Exemple 18.3 page 140)

Trouver $u(x,t)$ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Indication : la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = e^{-\omega x^2}$ avec $\omega > 0$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega}}$$

Exercice 4

Soit $z = x + iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On définit $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$. Montrer que :

a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$,

b) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$,

c) $e^{z+2n\pi i} = e^z$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 2b page 285

Exercice 2

Corrigé : Ex. 7 page 288

Exercice 3

Corrigé : Exemple 18.3 page 140

Exercice 4

a) $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\
&\overset{\text{déf}}{=} e^{x_1+x_2}\left[\cos\left(y_1+y_2\right)+i\sin\left(y_1+y_2\right)\right] \\
&= e^{x_1+x_2}\left[\left(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2\right)+i\left(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2\right)\right] \\
&= e^{x_1+x_2}\left(\cos y_1+i\sin y_1\right)\left(\cos y_2+i\sin y_2\right) \\
&= e^{x_1}\left(\cos y_1+i\sin y_1\right)e^{x_2}\left(\cos y_2+i\sin y_2\right) \overset{\text{déf}}{=} e^{z_1}e^{z_2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
e^{-z} &= e^{-x-iy} \overset{\text{déf}}{=} e^{-x}\left[\cos\left(-y\right)+i\sin\left(-y\right)\right] \\
&= e^{-x}\left(\cos y-i\sin y\right) = \frac{e^{-x}\left(\cos y-i\sin y\right)\left(\cos y+i\sin y\right)}{\cos y+i\sin y} \\
&= \frac{e^{-x}\left(\cos^2 y+\sin^2 y\right)}{\cos y+i\sin y} = \frac{1}{e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{e^{z}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
e^{z+2n\pi i} &= e^{x+i(y+2n\pi)} \overset{\text{déf}}{=} e^{x}\left[\cos\left(y+2n\pi\right)+i\sin\left(y+2n\pi\right)\right] \\
&= e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right) \overset{\text{déf}}{=} e^{z}.
\end{aligned}$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex. 1 §9.3 page 71)

a) Déterminer les parties réelles et imaginaires des fonctions $\cos z$, $\cosh z$ et $\sinh z$.

b) A l'aide des équations de Cauchy-Riemann, montrer que ces fonctions sont holomorphes dans $\mathbb{C}$.

c) Calculer les dérivées de ces fonctions.

Exercice 2 (Ex. 2 §9.3 page 71)

La fonction f définie par $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ est-elle holomorphe ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (Ex. 4 §9.3 page 71)

Trouver une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la partie réelle est

$$u(x, y) = e^{\left(x^2 - y^2\right)} \cos(2xy).$$

Exercice 4 (Ex. 5 §9.3 page 71)

Trouver une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que sa partie réelle soit

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-x} \cos y.$$

Exercice 5 (Ex. 8 §9.3 page 71)

Montrer que les équations de Cauchy-Riemann, en coordonées polaires, s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 1 page 223

Exercice 2

Corrigé : Ex. 2 page 224

Exercice 3

Corrigé : Ex. 4 page 224

Exercice 4

Corrigé : Ex. 5 page 224

Exercice 5

Corrigé : Ex. 8 page 226

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex. 3 §9.3 page 71)

Soit la fonction f définie par $f(z) = \log(1 + z^2)$. Déterminer le plus grand domaine de $\mathbb{C}$ où la fonction f est holomorphe.

Exercice 2 (Ex. 6 et Ex. 11 §9.3 page 71)

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $f : V \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x, y)$ est dite harmonique dans V si $f \in C^2(V)$ et

$$(\Delta f)(x, y) \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

pour tout $(x, y) \in V$.

a) Montrer que si $z = x + iy$ et $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans un ouvert V, alors
   i) u et v sont des fonctions harmoniques dans V,
   ii) $u_x v_x + u_y v_y = 0$,
   iii) $|g'(z)|^2 = u_x(x, y)v_y(x, y) - u_y(x, y)v_x(x, y)$.

b) Soit V un ouvert et u une fonction harmonique dans V. Si $z = x + iy$, montrer que la fonction g définie par
$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$
est une fonction holomorphe dans V.

Exercice 3 (Ex. 7 §9.3 page 71)

Montrer que si $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ est holomorphe alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes :
a) f est constante.
b) $\mathrm{Re}\,(f)$ est constante.
c) $\mathrm{Im}\,(f)$ est constante.

Exercice 4 (Ex. 9 §9.3 page 71)

Soit $z = x+iy$ et $f = u+iv$ une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ telle que $\partial u/\partial x+\partial v/\partial y = 0$. Montrer qu'il existe une constante réelle c et une constante complexe d telle que $f(z) = -icz + d$.

Exercice 5 (Ex. 3 §10.3 page 75)

Calculer

a) $\displaystyle\int_\gamma (z^2+1)\,\mathrm{d}z$ où γ est le segment joignant 1 à $1+i$.

b) $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Re}(z^2)\,\mathrm{d}z$ où γ est le cercle unité centré à l'origine.

Exercice 6 (Ex. 9 §10.3 page 76)

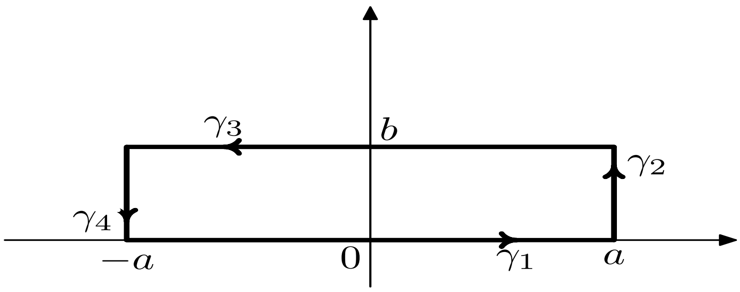
Soit $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{-b^2} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Indication : Considérer la fonction f définie par $f(z) = e^{-z^2}$ et le chemin

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

donné par :



où $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ et que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

c) Conclure en utilisant le résultat $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ obtenu dans l'exercice 4 a) de la série 1.

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre “Analyse avancée pour ingénieurs” (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 3 page 224

Exercice 2

Corrigé : Ex. 6 page 225 et Ex. 11 page 227

Exercice 3

Corrigé : Ex. 7 page 226

Exercice 4

Corrigé : Ex. 9 page 226

Exercice 5

Corrigé : Ex. 3 page 229

Exercice 6

Corrigé : Ex. 9 page 232

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées entre parenthèses se réfèrent au livre *Analyse avancée pour ingénieurs* (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1 (Ex. 6 §10.3 page 76)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{2z}}{z}\,\mathrm{d}z \quad$ où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^3 + 2z^2 + 2}{z - 2i}\,\mathrm{d}z \quad$ où $\gamma = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = \frac{1}{4}\right\}$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(2z^2 + 3z + 1)}{z - \pi}\,\mathrm{d}z \quad$ où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - \pi| = 1\}$.

Exercice 2 (Ex. 7 ii §10.3 page 76)

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z\,(z+2)}\,\mathrm{d}z \quad \text{où } \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Exercice 3 (Ex. 1 §10.3 page 75)

Soit γ une courbe simple, fermée et régulière par morceaux. Discuter, en fonction de γ, la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{2z}\,\mathrm{d}z$$

Exercice 4 (Ex. 10 et Ex. 11 §10.3 page 77)

a) Soit f une fonction continue dans un domaine D simplement connexe et soit $F : D \mapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in D$. Montrer que, pour toute courbe régulière $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ contenue dans D, on a :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F\left(\gamma(b)\right) - F\left(\gamma(a)\right).$$

b) Soit la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{1}{z}$. A l'aide du résultat établi dans la question a), discuter le calcul et trouver la valeur des intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ où γ_1 est le cercle de rayon 1 centré en $z = 2$.

ii) $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ où γ_2 est le cercle de rayon 1 centré en l'origine.

c) Peut-on obtenir les résultats trouvés dans la question b) en utilisant le théorème de Cauchy et la formule intégrale de Cauchy ?

ANALYSE VI	**SÉRIE 6**	**Printemps 2018**
EPFL – (SC-SIE-IN-GC)	**Corrigé**	**29 mars 2018**

Pour chaque exercice de la série, la numérotation et la page indiquées se réfèrent aux corrigés du livre "Analyse avancée pour ingénieurs" (B. Dacorogna et C. Tanteri, PPUR).

Exercice 1

Corrigé : Ex. 6 page 230

Exercice 2

Corrigé : Ex. 7 ii page 231

Exercice 3

Corrigé : Ex. 1 page 229

Exercice 4

Corrigé question a) : Ex. 10 page 233
Corrigé question b) : Ex. 11 page 234
Corrigé question c) :

i) Puisque $0 \notin \overline{\operatorname{int} \gamma_1}$, alors le théorème de Cauchy appliqué à la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ donne immédiatement

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z = 0$$

ii) Puisque $0 \in \operatorname{int} \gamma_2$, alors la formule intégrale de Cauchy appliquée, pour $z = 0$, à la fonction constante $g(\xi) = 1$ donne

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{\xi}\, \mathrm{d}\xi = 2\pi i g(0) = 2\pi i.$$