Analyse IV

Transcript du cours du Pr. Michel Cibils

Robin Mamié

Printemps 2018

Table des matières

Chapitre 1

Transformées de Fourier

1.1 Introduction

1.1.1 Définitions et résultats préliminaires

Définition. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **T-périodique** s'il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

L'intervalle $[0, T]$ caractérise complètement la fonction.

Définition (14.1.i, p.103)**.** Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe des points $\{x\}_{i=0}^{n+1} \subset [a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ tels que pour $i = 0, 1, \ldots, n$ on ait :

1. f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$
2. la limite à droite $f(x_i+0) := \lim\limits_{\substack{t \to x_i \\ t > x_i}} f(t)$ et la limite à gauche $f(x_{i+1}-0) := \lim\limits_{\substack{t \to x_i \\ t < x_i}} f(t)$ existent et sont finies.

Terminologie. On dit qu'une fonction T-périodique est continue par morceaux si elle l'est sur l'intervalle $[0, T]$ qui la caractérise.

Définition (14.2, p.104)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Pour $N \in \mathbb{N}$, la **série de Fourier partielle d'ordre N** de f est :

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$$

où les **coefficients de Fourier** c_n sont des nombres complexes donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} \mathrm{d}x$$

On appelle **série de Fourier de f** (en notation complexe) la limite lorsque $N \longrightarrow \infty$ de la série de $F_N f(x)$. On écrit :

$$Ff(x) := \lim_{N\to+\infty} F_N f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

Théorème (de Dirichlet – Résultat de convergence ; 14.3, p.104)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique telle que f et f' soient continues par morceaux. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$:*

$$Ff(x) = \lim_{N\to\infty} F_N f(x) \text{ existe et } Ff(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

En particulier, si f est continue en x, alors $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ et on a $Ff(x) = f(x)$.

Note. Utilisation de la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ *(cf. ex. 1-2, série 1).*

1.1.2 Motivation

Série de Fourier développement des fonctions *périodiques* comme somme infinie de fonctions trigonométriques.

Transformée de Fourier étude de fonctions *non* périodiques.

Idée. Soit $T > 0$ et f_T une fonction T-périodique définie par

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left]-\frac{T}{2}, -1\right[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \left]1, \frac{T}{2}\right[\end{cases}$$

Lorsque la période $T \to \infty$, on a :

$$\lim_{T\to\infty} f_T(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

qui n'est plus une fonction périodique.

Idée. considérer des fonctions comme limites de fonctions périodiques dont la période T tend vers $+\infty$.

1.1.3 Raisonnement heuristique

Soit $f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue*, T-périodique telle que f_T' soit continue par morceaux. Alors la série de Fourier de f_T est :

$$Ff_T(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}y}$$

pour $y \in \mathbb{R}$, où

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f_T(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} \mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} \mathrm{d}x$$

En écrivant $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{T}$ et $\alpha_n = n \cdot \Delta\alpha$, on a $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}$.

$$c_n = \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} \mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow F f_T(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} \mathrm{d}x \right] e^{i\alpha_n y}$$

Échange de la somme infinie et de l'intégrale :

$$F f_T(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[\Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n (x-y)} \right] \mathrm{d}x$$

On découvre une somme de Riemann qui permet de définir une intégrale. En effet :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n (x-y)} &\underbrace{=}_{\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_{n-1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n (x-y)} (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} F f_T(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} \mathrm{d}\alpha \right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \right] e^{i\alpha y} \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

Comme f_T est continue, alors on a $f_T(y) = F f_T(y)$ et donc lorsque T tend vers $+\infty$, on a $\lim_{T \to +\infty} f_T(y) = \lim_{T \to +\infty} F f_T(y) \iff f(y) = \lim_{T \to +\infty} F f_T(y)$.

$$\iff f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \right]}_{\substack{\text{Nouvelle fonction qui dépend de la} \\ \text{variable } \alpha \text{, qui est appelée la} \\ \text{transformée de Fourier de } f \text{ et} \\ \text{notée } \mathfrak{F}(f) \text{ ou } \hat{f}}} e^{i\alpha y} \mathrm{d}\alpha$$

On écrit :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x$$

Remarque. On a que :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha y} \mathrm{d}\alpha$$

1.2 Transformée de Fourier d'une fonction

1.2.1 Définition

Définition (15.1, p.113)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$.

La **transformée de Fourier** de f est la fonction notée $\mathfrak{F}(f)$ ou $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\alpha \longmapsto \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x$$

1.2.2 Exemples

Exemple. Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & f(x) = e^{-|x|} = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ e^{x} & \text{si} \quad x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\alpha)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\alpha)x}\mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left. \frac{e^{(1-i\alpha)x}}{1-i\alpha} \right|_{-\infty}^{0} - \left. \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{1+i\alpha} \right|_{0}^{+\infty} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-i\alpha} \left(1 - \lim_{x \to -\infty} e^{(1-i\alpha)x} \right) - \frac{1}{1+i\alpha} \left(\lim_{x \to +\infty} e^{-(1+i\alpha)x} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+i\alpha+1-i\alpha}{(1-i\alpha)(1+i\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2}
\end{aligned}$$

Résultat :

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

Remarque. Pour calculer $\lim_{x \to -\infty} e^{(1-i\alpha)x}$:

$$\left|e^{(1-i\alpha)x}\right| = \left|e^{-i\alpha x}e^{x}\right| = \underbrace{\left|e^{-i\alpha x}\right|}_{=1}\left|e^{x}\right| = e^{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left|e^{(1-i\alpha)x}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{(1-i\alpha)x} = 0 + i0 = 0$$

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} = 0$.

Exemple. Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Calcul de la transformée de Fourier de f.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x \\ &\overbrace{=}^{\alpha\neq 0} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i\alpha} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha}\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i0x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\Big|_{-1}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Résultat :

$$\hat{f} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} & \text{si} \quad \alpha \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si} \quad \alpha = 0 \end{cases} \end{array}$$

On remarque que $\lim\limits_{\alpha\to 0}\hat{f}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \hat{f}(0)$.

$\Longrightarrow$ $\hat{f}$ est aussi continue en $\alpha = 0$.

Autres exemples : ex. 3-4, série 1

1.3 Transformée de Fourier inverse

1.3.1 Définition

Définition. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\mathrm{d}t < \infty$. La **transformée de Fourier inverse** de g est notée :

$$\mathfrak{F}^{-1}(g) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \to & \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) \end{array}, \text{ où } \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{itx} \mathrm{d}t.$$

1.3.2 Théorème de réciprocité (formule d'inversion)

Théorème (15.3.i, p.115). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que f et f' soient continues par morceaux avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha < \infty$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} \mathrm{d}\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

En particulier si f est continue en x, on a $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = f(x)$ et alors :

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} \mathrm{d}\alpha$$

Autrement dit, on a $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$. La transformée de Fourier peut être vue comme une « transformation $\mathfrak{F}$ » inversible (une bijection) qui « agit » sur la fonction f :

$$f \xrightarrow{\mathfrak{F}} \hat{f} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f$$

1.3.3 Exemple d'utilisation

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & f(x) = e^{-|x|} = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \\ e^{x} & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. \end{array}$.

La transformée de Fourier de f est (*exemple 1, §1.2.2*)

$$\hat{f} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

On remarque que $f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -e^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \\ e^{x} & \text{si} & x < 0 \end{array} \right.$ est continue par morceaux car :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = -1 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1$$

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha < \infty$. f est continue $\forall x \in \mathbb{R} \implies$ en appliquant le *théorème de réciprocité*, on a que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x}$, i.e. :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, lorsque $x = 0$, on trouve :

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2} \implies \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2} = \pi.$$

En particulier, lorsque $x = 1$, on trouve :

$$e^{-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha}}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha + i\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha}^{\substack{\text{fonction impaire}\\ \text{intégrée sur tout l'axe}\\ \text{réel} = 0}}\right]$$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{e}$$

Conclusion : Le *théorème de réciprocité* permet de calculer la valeur d'intégrales généralisées.

Autre exemple : ex. 1, série 2

1.4 Propriétés de la transformée de Fourier

On considère f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\mathrm{d}x < \infty$. On note indifféremment $\mathfrak{F}(f) \doteq \hat{f}$ et $\mathfrak{F}(g) \doteq \hat{g}$ les transformées de Fourier de f et de g.

Note. Les prochains résultats sont décrits dans les **théorèmes 15.2 et 15.3** aux pages 113 à 115 du livre du cours.

1.4.1 Continuité et linéarité

— $\mathfrak{F}(f)$ est continue $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{\alpha\to\pm\infty}|\mathfrak{F}(f)(\alpha)| = 0$.

— $\mathfrak{F}$ linéaire : $\mathfrak{F}(af + bg) = a\,\mathfrak{F}(f) + b\,\mathfrak{F}(g) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

1.4.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

Définition. Le **produit de convolution** de deux fonctions f et g est la fonction notée $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

Remarque. On peut aussi écrire $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(x-t')\mathrm{d}t'$, via un changement de variable.

Résultat : on a que $\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\ \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$.

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au **produit** des transformées de Fourier de chaque fonction.

Exemples : ex. 2-3, série 2

1.4.3 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\mathrm{d}x < \infty$, alors on a :

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha\ \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

On écrit aussi $\widehat{f'}(\alpha) = i\alpha\ \hat{f}(\alpha)$.

La transformée de Fourier de la dérivée de f s'obtient en **multipliant par** $i\alpha$ la transformée de Fourier de f.

Plus généralement, si $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)|\mathrm{d}x < \infty$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, alors on a :

$$\mathfrak{F}(f^{(k)})(\alpha) = (i\alpha)^k\ \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, n$$

On écrit aussi $\widehat{f^{(k)}}(\alpha) = (i\alpha)^k\ \hat{f}(\alpha)$.

Exemple : ex.3, série 2

1.4.4 Décalage

Si $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $h(x) = e^{-ibx} f(ax)$, alors :

$$\mathfrak{F}(h)(\alpha) = \frac{1}{|a|}\mathfrak{F}(f)\left(\frac{\alpha + b}{a}\right)$$

1.4.5 Identité de Plancherel

Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 \mathrm{d}x < \infty$, alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha$$

1.4.6 Transformée de Fourier en sinus et cosinus

Si la fonction f est paire (i.e. $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\mathrm{d}x$$

qui est la transformée de Fourier en **cosinus** de f.

Si la fonction f est impaire (i.e. $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\mathrm{d}x$$

qui est la transformée de Fourier en **sinus** de f.

Exemples : ex.4, série 2 et ex.1, série 3

Remarque. Si de plus f' est continue par morceaux et $\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha < \infty$, alors, d'après le *théorème de réciprocité*, on a :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\cos(\alpha x)\mathrm{d}\alpha \quad \text{lorsque } f \text{ est paire}$$
$$f(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\sin(\alpha x)\mathrm{d}\alpha \quad \text{lorsque } f \text{ est impaire}$$

1.5 Esquisse de démonstrations de quelques propriétés

1.5.1 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Démonstration. On a

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x$$

On intègre par parties, avec $u' = f' \to u = f$ et $v = e^{-i\alpha x} \to v' = -i\alpha e^{-i\alpha x}$.

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x\right]$$

Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|f(x)e^{-i\alpha x}\right| = \lim\limits_{x\to\pm\infty}|f(x)| = 0$ car $\left|e^{-i\alpha x}\right| = 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x < \infty$ (f est sommable).

$$\Longrightarrow \mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x = i\alpha\,\mathfrak{F}(f)(\alpha)$$

□

Remarque. Formule pour la dérivée de la transformée de Fourier d'une fonction :

$$\mathfrak{F}'(f)(\alpha) = (\hat{f})'(\alpha) = -i\,\mathfrak{F}\left(xf(x)\right)(\alpha)$$

Cf. ex. 2, série 3

1.5.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(f * g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) \mathrm{d}t \right] e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x \right] g(t) \mathrm{d}t \\
&\overbrace{=}^{\text{cdv}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha(y+t)} \mathrm{d}y \right] g(t) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2\pi}\, \mathfrak{F}(f)(\alpha) \cdot \mathfrak{F}(g)(\alpha)
\end{aligned}$$

□

1.5.3 Identité de Plancherel

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On remarque que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x+t) \mathrm{d}x &\overbrace{=}^{1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) e^{i\alpha(x+t)} \mathrm{d}\alpha \right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} \mathrm{d}x \right] e^{i\alpha t} \mathrm{d}\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) \overline{\mathfrak{F}(f)(\alpha)} e^{i\alpha t} \mathrm{d}\alpha
\end{aligned}$$

En posant $t = 0$ et en choisissant $g = f$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(\alpha)]^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2 \,\mathrm{d}\alpha$$

□

1. Par le **théorème de réciprocité**, §1.3.2

1.6 Exemples d'utilisation de la transformée de Fourier

a) Trouver une solution particulière $y(x)$ d'une équation différentielle du type :

$$\lambda\, y''(x) + \omega\, y(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda, \omega \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

qui est l'équation de l'oscillateur forcé (f est une fonction donnée).
Méthode : on écrit la transformée de Fourier de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}(\lambda y'' + \omega y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \Longleftrightarrow\ & \lambda\, \mathfrak{F}(y'')(\alpha) + \omega\, \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \Longleftrightarrow\ & \lambda \left(-\alpha^2\right) \mathfrak{F}(y)(\alpha) + \omega\, \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \Longleftrightarrow\ & \left(\omega - \lambda\alpha^2\right) \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \Longleftrightarrow\ & \mathfrak{F}(y)(\alpha) = \frac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda\alpha^2} \end{aligned}$$

On utilise le **théorème de réciprocité** (§1.3.2) : la solution particulière $y(x)$ s'obtient en calculant la transformée de Fourier inverse de la fonction de la variable α définie par $\frac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega-\lambda\alpha^2}$.

b) On utilise la transformée de Fourier pour résoudre des équations intégrales du type produit de convolution (*cf. ex. 2 et 3, série 3*).

c) Problèmes statistiques avec loi normale.
fonction gaussienne $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Ex. 4, série 1 : $\hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ est aussi une fonction gaussienne.

d) Mécanique quantique
$f(x)$: position de la particule quantique
$\hat{f}(p)$: impulsion de la particule quantique

e) Résolution de l'équation de la chaleur pour une barre conductrice de longueur **infinie**.

Rappel : cas d'une barre de longueur **finie**

Soit une barre de longueur $0 < L < \infty$. On note $u(x,t)$ la fonction qui décrit la température de la barre au point x et à l'instant t.

L'évolution de la température $u(x,t)$ le long de la barre est modélisée par l'équation de la chaleur donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \quad \text{pour } x \in]0, L[\text{ et } t > 0, \quad a \neq 0$$

où a est un coefficient thermique. On impose :

— **deux** conditions limites $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t > 0$,

— une condition initiale $u(x, 0) = f(x)$ pour $x \in]0, L[$.[2]

Problème : trouver une solution $u(x, t)$ satisfaisant ces conditions.

Cas d'une barre de longueur infinie

Il n'y a plus de conditions aux limites concernant les extrémités de la barre. Le problème est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) & = & a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \\ u(x,0) & = & f(x) \end{array} \right.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, avec **une** condition initiale, valable $\forall x \in \mathbb{R}$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^1 telle que f et la transformée de Fourier de f soient sommables.

Résolution

1re étape : on écrit la transformée de Fourier de l'équation de la chaleur en considérant $u(x, t)$ comme fonction de la variable x (t joue le rôle d'un paramètre). On obtient :

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha, t) = a^2 \mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha, t) \text{ avec } \mathfrak{F}(u)(\alpha, 0) = \mathfrak{F}(f)(\alpha)$$

Avec la notation :

$$v(\alpha, t) = (\mathfrak{F}u)(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x$$

On obtient à gauche :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}v(\alpha, t) \end{aligned}$$

2. Dans le milieu de l'ingénierie, on sous-entend souvent qu'une condition **limite** l'est aux positions, et qu'une condition **initiale** l'est au temps

Et à droite :

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha,t) \overbrace{=}^{3} (i\alpha)^2\mathfrak{F}(u)(\alpha,t)$$
$$= -\alpha^2 v(\alpha,t)$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}v(\alpha,t) = -a^2\alpha^2 v(\alpha,t)$$

C'est une équation différentielle du **premier ordre** pour la fonction $v(\alpha,t)$ par rapport à **la variable** t (α joue le rôle de paramètre).
La solution est :

$$v(\alpha,t) = v(\alpha,0)e^{-a^2\alpha^2 t} = \mathfrak{F}(f)(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}$$

2e étape : pour obtenir la solution $u(x,t)$, on calcule la transformée de Fourier inverse de $v(\alpha,t)$ en considérant t comme paramètre. On obtient :

$$\begin{aligned} u(x,t) = \mathfrak{F}^{-1}(v)(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\alpha,t)e^{i\alpha x}\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(f)(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}e^{i\alpha x}\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

comme solution de l'équation de la chaleur pour une barre de longueur infinie.
Exemple : ex. 3, série 3

3. Par la propriété du §1.4.3, concernant la **transformée de Fourier de la dérivée** d'une fonction

Chapitre 2

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

2.1 Introduction

2.1.1 Motivation

But : étendre l'étude de fonctions réelles (du type $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) à des fonctions qui dépendent d'**une** variable complexe qui sont à valeurs complexes (du type $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes).

Rôle : établir les notions de limite, de continuité, de dérivabilité et d'intégration dans $\mathbb{C}$.

Intérêt : méthodes puissantes qui permettent de calculer facilement des intégrales **réelles** compliquées.

Cf. ex. 4, série 3

2.1.2 Rappel sur les nombres complexes

- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes
- $z \in \mathbb{C} \iff z = x + iy$ avec $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ et $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ où $0 = 0 + i0$
- complexe conjugué de z $\quad \overline{z} = x - iy$
- module de $z \in \mathbb{C}$ $\quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$
- représentation polaire de $z \in \mathbb{C}^*$ $\quad z = |z|\, e^{i\theta} = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$
- θ est appelé l'argument de z et est noté $\arg z$

Remarque. Pour $z \in \mathbb{C}^*$:

- L'argument de z est défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$
- Par convention, la **valeur (détermination) principale** de l'argument de z est l'unique angle $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$

2.2 Fonctions complexes

2.2.1 Définitions

Définition. Une **fonction d'une variable complexe** à valeur dans $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \end{array}$$

où

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & u(x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad v: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & v(x,y) \end{array}$$

sont deux fonctions à valeurs réelles qui s'appellent respectivement la partie réelle de f (on note $u = \operatorname{Re} f$) et la partie imaginaire de f (on note $v = \operatorname{Im} f$).

Remarque. Les variables $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ des fonctions u et v sont les parties réelles et imaginaires de la variable $z \in \mathbb{C}$ de la fonction f.

2.2.2 Exemples

Exemple.

1)
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = \overline{z} = x - iy \end{array}$$

On a $u(x,y) = x$ et $v(x,y) = -y$.

2)
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \end{array}$$

On a $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$.

3)
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \end{array}$$

On a $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

4) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la fonction exponentielle est définie par :

$$e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}^*$$

On a $u(x,y) = e^x \cos y$ et $v(x,y) = e^x \sin y$.

Remarque. Contrairement au cas réel, e^z n'est pas bijective sur $\mathbb{C}$ car $e^{z+2ik\pi} = e^z$ $\forall z \in \mathbb{Z}$ *(ex.4, série 3)*. En choisissant y tel que $-\pi < y \leq \pi$, la fonction e^z est bijective sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in \,]-\pi;\pi]\}$. Avec cette convention, c'est la **« restriction bijective de l'exponentielle complexe »**.

5) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, la fonction logarithme est définie par :

$$\log z := \ln |z| + i \arg z$$

avec le choix de la valeur principale $\arg z \in \,]-\pi ; \pi[$. Avec cette convention, c'est la **« détermination principale du logarithme complexe »** (correspond à la fonction réciproque de la restriction bijective de l'exponentielle).
En écrivant $z = x + iy$, on a $u(x, y) = \ln |x + iy| = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ et $v(x, y) = \arg(x + iy)$.
Remarque.

a) Les formules valables en analyse réelle ne sont pas nécessairement valables en analyse complexe. Par exemple, en général, on a $\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$. En effet, pour $z_1 = -1$ et $z_2 = -1$:

$$\log [(-1)(-1)] = \log(1) := \ln |1| + i \arg(1) = 0 + i0 = 0$$

mais

$$\log(-1) + \log(-1) = 2 \log(-1) := 2 [\ln |-1| + i \arg(-1)] = 2i\pi \neq 0$$

b) La fonction $\log z$ n'est pas continue sur le demi-axe réel négatif. En effet, par exemple pour $z = -1$, on considère $t > 0$:

$$z_t^+ = -1 + it \quad \text{et} \quad z_t^- = -1 - it$$

On a $\lim\limits_{t \to 0^+} z_t^+ = -1$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} z_t^- = -1$.
Note. Pour $z = x + iy$, on a la valeur principale :

$$\arg z = \begin{cases} \pi + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} & \text{si} \quad x < 0, y > 0 \\ -\pi + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} & \text{si} \quad x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Avec la définition du logarithme, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \log(z_t^+) &= \lim_{t \to 0^+} \ln |-1 + it| + i \lim_{t \to 0^+} \arg(-1 + it) \\ &= \lim_{t \to 0^+} \ln \sqrt{1 + t^2} + i \lim_{t \to 0^+} [\pi + \operatorname{Arctg}(-t)] \\ &= \ln(1) + i\pi = 0 + i\pi = i\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \log(z_t^-) &= \lim_{t \to 0^+} \ln |-1 - it| + i \lim_{t \to 0^+} \arg(-1 - it) \\ &= \lim_{t \to 0^+} \ln \sqrt{1 + t^2} + i \lim_{t \to 0^+} [-\pi + \operatorname{Arctg}(t)] \\ &= \ln(1) - i\pi = 0 - i\pi = -i\pi \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{t\to 0^+} \log(z_t^+) \neq \lim_{t\to 0^+} \log(z_t^-) \implies$ la fonction $\log z$ n'est pas continue en $z = -1$. De façon analogue, on obtient le même résultat $\forall z \in]-\infty; 0[$. $\log z$ **n'est pas continue** pour $z \in \;]-\infty; 0]$

Résultat final : En excluant le demi-axe réel négatif, on a que la fonction $\log z$ est continue sur l'ensemble :

$$V = \mathbb{C} \;\setminus\;]-\infty; 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

C'est la **« restriction continue du logarithme complexe »**.

6) Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit les fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Cf. ex. 1, série 4

2.3 Limites, continuité, dérivabilité

2.3.1 Définitions

Définition. Les notions de topologie (ouverts, fermés, etc.), de limite, de continuité et de dérivabilité sont analogues à celles de l'analyse réelle. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, alors :

1) f possède une limite $l \in \mathbb{C}$ en $z_0 \in \mathbb{C}$ (notation $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$) si :
$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \;\; 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - l| < \epsilon$
2) f est continue en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$
3) f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe et est finie. La limite s'appelle la dérivée de f en z_0 et est notée $f'(z_0)$. Les règles de dérivation établies dans $\mathbb{R}$ sont valables dans $\mathbb{C}$.
4) Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on dit que la fonction $f : V \to \mathbb{C}$ est **holomorphe** (ou analytique complexe) dans V si f est *définie et dérivable* $\forall z \in V$.

2.3.2 Équations de Cauchy-Riemann

Remarque (sur un abus de notation). Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on l'identifie souvent au sous-ensemble correspondant de $\mathbb{R}^2$, i.e. on écrit indifféremment $z = x + iy \in V (\in \mathbb{C})$ ou $(x, y) \in V (\in \mathbb{R}^2)$ de façon abusive.

Théorème (de Cauchy-Riemann). *Soit $V \in \mathbb{C}$ un ouvert et soit une fonction $f : V \to \mathbb{C}$, où $u : V \to \mathbb{R}$ et $v : V \to \mathbb{R}$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de f. Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) f est holomorphe dans V

2) Les fonctions $u, v \in C^1(V)$ et satisfont les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

En particulier, si f est holomorphe dans V, alors on a :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \quad \forall z = x + iy \in V$$

Remarque.

1) Démonstration du Théorème : voir §2.3.4 (fin du chapitre)
2) Les équations de Cauchy-Riemann sont une condition nécessaire pour que f soit holomorphe mais elles ne sont pas une condition suffisante. Si u et v sont continûment dérivables ($u, v \in C^1(V)$), alors elles deviennent une condition suffisante.
3) Utilité du Théorème : pour qu'une fonction f soit holomorphe dans un ouvert V, il suffit de vérifier que les équations de Cauchy-Riemann pour $u = \mathrm{Re}\, f \in C^1(V)$ et $v = \mathrm{Im}\, f \in C^1(V)$ sont satisfaites dans V. Si les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées en $(x_0, y_0) \in V$, alors $f(z_0)$ n'est pas holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$.
4) Pour alléger la notation, on écrit :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Équations de Cauchy-Riemann :

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

Exemples : ex. 1 à 4, série 4

Bibliographie

[1] Bernard Dacogna et Chiara Tanteri. *Analyse avancée pour ingénieurs.* PPUR, 2017. Toutes les références (numéro de théorème, définition, etc.) sont faites à ce livre.

Contributeurs

— Robin Mamie (IN)
— Eric Jollès (SC)