

## **Analyse IV**

Transcript du cours du Pr. Michel CIBILS

Robin MAMIÉ

Printemps 2018

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Transformées de Fourier</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction . . . . .	3
1.1.1	Définitions et résultats préliminaires . . . . .	3
1.1.2	Motivation . . . . .	4
1.1.3	Raisonnement heuristique . . . . .	4
1.2	Transformée de Fourier d'une fonction . . . . .	6
1.2.1	Définition . . . . .	6
1.2.2	Exemples . . . . .	6
1.3	Transformée de Fourier inverse . . . . .	8
1.3.1	Définition . . . . .	8
1.3.2	Théorème de réciprocity (formule d'inversion) . . . . .	8
1.3.3	Exemple d'utilisation . . . . .	8
1.4	Propriétés de la transformée de Fourier . . . . .	9
1.4.1	Continuité et linéarité . . . . .	9
1.4.2	Transformée de Fourier du produit de convolution . . . . .	9
1.4.3	Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction . . . . .	10
1.4.4	Décalage . . . . .	10
1.4.5	Identité de Plancherel . . . . .	10
1.4.6	Transformée de Fourier en sinus et cosinus . . . . .	10
1.5	Esquisse de démonstrations de quelques propriétés . . . . .	11
1.5.1	Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction . . . . .	11
1.5.2	Transformée de Fourier du produit de convolution . . . . .	12
1.5.3	Identité de Plancherel . . . . .	12
1.6	Exemples d'utilisation de la transformée de Fourier . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann</b>	<b>16</b>
2.1	Introduction . . . . .	16
2.1.1	Motivation . . . . .	16
2.1.2	Rappel sur les nombres complexes . . . . .	16
2.2	Fonctions complexes . . . . .	17
2.2.1	Définitions . . . . .	17
2.2.2	Exemples . . . . .	17
2.3	Limites, continuité, dérivabilité . . . . .	19

2.3.1	Définitions . . . . .	19
2.3.2	Équations de Cauchy-Riemann . . . . .	19
2.3.3	Exemples . . . . .	20
2.3.4	Démonstration des équations de Cauchy-Riemann . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Théorème et formule intégrale de Cauchy</b>	<b>24</b>
3.1	Intégration complexe . . . . .	24
3.1.1	Définitions et notations . . . . .	24
3.1.2	Exemples . . . . .	25
3.2	Théorème de Cauchy . . . . .	25
3.2.1	Théorème . . . . .	25
3.2.2	Exemples . . . . .	26
3.2.3	Démonstration du théorème de Cauchy . . . . .	27
3.2.4	Corollaire du Théorème de Cauchy . . . . .	28
3.3	Formule intégrale de Cauchy . . . . .	29
3.3.1	Énoncé . . . . .	29
3.3.2	Exemples d'utilisation . . . . .	29
3.3.3	Démonstration de la formule intégrale de Cauchy . . . . .	31
3.4	Corollaire de la formule intégrale de Cauchy . . . . .	31
3.4.1	Énoncé . . . . .	31
3.4.2	Exemples d'utilisation . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Séries de Laurent, pôles et résidus</b>	<b>34</b>
4.1	Polynôme et série de Taylor d'une fonction holomorphe . . . . .	34
4.1.1	Définitions et résultats . . . . .	34
4.1.2	Exemples . . . . .	35
4.1.3	Applications . . . . .	36
4.2	Développement et série de Laurent d'une fonction holomorphe . . . . .	36
4.2.1	Problématique, définitions et résultats . . . . .	36
4.2.2	Définitions issues de la série de Laurent . . . . .	38
4.2.3	Exemples . . . . .	38
4.3	Étude des pôles d'une fonction et calcul des résidus . . . . .	40
4.3.1	Méthodes de détection des pôles . . . . .	40
4.3.2	Formules de calcul du résidu d'une fonction . . . . .	42
4.3.3	Démonstration des formules . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Théorème des résidus et applications au calcul d'intégrales réelles</b>	<b>45</b>
5.1	Théorème des résidus . . . . .	45
5.1.1	Énoncé . . . . .	45
5.1.2	Exemples . . . . .	45
5.1.3	Démonstration du Théorème des résidus . . . . .	47
5.2	Application du Théorème des résidus au calcul d'intégrales réelles . . . . .	48
5.2.1	Calcul d'intégrale de fonctions périodiques . . . . .	48
5.2.2	Calcul d'intégrales généralisées . . . . .	51

# Chapitre 1

## Transformées de Fourier

### 1.1 Introduction

#### 1.1.1 Définitions et résultats préliminaires

**Définition.** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **T-périodique** s'il existe  $T > 0$  tel que  $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

L'intervalle  $[0, T]$  caractérise complètement la fonction.

**Définition** (14.1.i, p.103). Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle  $[a, b]$  s'il existe des points  $\{x\}_{i=0}^{n+1} \subset [a, b]$  avec  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$  tels que pour  $i = 0, 1, \dots, n$  on ait :

1.  $f$  est continue sur chaque intervalle ouvert  $]x_i, x_{i+1}[$
2. la limite à droite  $f(x_i + 0) := \lim_{\substack{t \rightarrow x_i \\ t > x_i}} f(t)$  et la limite à gauche  $f(x_{i+1} - 0) := \lim_{\substack{t \rightarrow x_i \\ t < x_i}} f(t)$  existent et sont finies.

*Terminologie.* On dit qu'une fonction T-périodique est continue par morceaux si elle l'est sur l'intervalle  $[0, T]$  qui la caractérise.

**Définition** (14.2, p.104). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction T-périodique continue par morceaux. Pour  $N \in \mathbb{N}$ , la **série de Fourier partielle d'ordre N** de  $f$  est :

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$$

où les **coefficients de Fourier**  $c_n$  sont des nombres complexes donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx$$

On appelle **série de Fourier de f** (en notation complexe) la limite lorsque  $N \rightarrow \infty$  de la série de  $F_N f(x)$ . On écrit :

$$Ff(x) := \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$$

**Théorème** (de Dirichlet – Résultat de convergence ; 14.3, p.104). *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique telle que  $f$  et  $f'$  soient continues par morceaux. Alors  $\forall x \in \mathbb{R}$  :*

$$Ff(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N f(x) \text{ existe et } Ff(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

*En particulier, si  $f$  est continue en  $x$ , alors  $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$  et on a  $Ff(x) = f(x)$ .*

*Note.* Utilisation de la formule d'Euler  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  (cf. ex. 1-2, série 1).

### 1.1.2 Motivation

**Série de Fourier** développement des fonctions *périodiques* comme somme infinie de fonctions trigonométriques.

**Transformée de Fourier** étude de fonctions *non* périodiques.

**Idée.** Soit  $T > 0$  et  $f_T$  une fonction  $T$ -périodique définie par

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\frac{T}{2}, -1[ \\ 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \in ]1, \frac{T}{2}[ \end{cases}$$

Lorsque la période  $T \rightarrow \infty$ , on a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

qui n'est plus une fonction périodique.

**Idée.** considérer des fonctions comme limites de fonctions périodiques dont la période  $T$  tend vers  $+\infty$ .

### 1.1.3 Raisonnement heuristique

Soit  $f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction *continue*,  $T$ -périodique telle que  $f'_T$  soit continue par morceaux. Alors la série de Fourier de  $f_T$  est :

$$Ff_T(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} y}$$

pour  $y \in \mathbb{R}$ , où

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f_T(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx$$

En écrivant  $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{T}$  et  $\alpha_n = n \cdot \Delta\alpha$ , on a  $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}$ .

$$c_n = \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} dx$$

$$\Rightarrow F f_T(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha_n x} dx \right] e^{i\alpha_n y}$$

Échange de la somme infinie et de l'intégrale :

$$F f_T(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[ \Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} \right] dx$$

On découvre une somme de Riemann qui permet de définir une intégrale. En effet :

$$\Delta\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} \underbrace{=}_{\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_{n-1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha_n(x-y)} (\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} d\alpha$$

Donc on obtient :

$$F f_T(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(x-y)} d\alpha \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\alpha x} dx \right] e^{i\alpha y} d\alpha$$

Comme  $f_T$  est continue, alors on a  $f_T(y) = F f_T(y)$  et donc lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$ , on a  $\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} F f_T(y) \iff f(y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} F f_T(y)$ .

$$\iff f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \right]}_{\substack{\text{Nouvelle fonction qui dépend de la} \\ \text{variable } \alpha, \text{ qui est appelée la} \\ \text{transformée de Fourier de } f \text{ et} \\ \text{notée } \mathfrak{F}(f) \text{ ou } \hat{f}}} e^{i\alpha y} d\alpha$$

On écrit :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

*Remarque.* On a que :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha y} d\alpha$$

## 1.2 Transformée de Fourier d'une fonction

### 1.2.1 Définition

**Définition** (15.1, p.113). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ .

La **transformée de Fourier** de  $f$  est la fonction notée  $\mathfrak{F}(f)$  ou  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$\alpha \mapsto \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

### 1.2.2 Exemples

*Exemple.* Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^0 e^x e^{-i\alpha x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\alpha)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left. \frac{e^{(1-i\alpha)x}}{1-i\alpha} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{1+i\alpha} \right|_0^{+\infty} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{1-i\alpha} \left( 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(1-i\alpha)x} \right) - \frac{1}{1+i\alpha} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(1+i\alpha)x} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+i\alpha + 1-i\alpha}{(1-i\alpha)(1+i\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

**Résultat :**

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \mapsto & \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

*Remarque.* Pour calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(1-i\alpha)x}$  :

$$\begin{aligned}
\left| e^{(1-i\alpha)x} \right| &= \left| e^{-i\alpha x} e^x \right| = \underbrace{\left| e^{-i\alpha x} \right|}_{=1} |e^x| = e^x \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| e^{(1-i\alpha)x} \right| &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(1-i\alpha)x} &= 0 + i0 = 0
\end{aligned}$$

On a aussi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(1+i\alpha)x} = 0$ .

*Exemple.* Soit la fonction

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
f : x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Calcul de la transformée de Fourier de  $f$ .

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\alpha x} dx \\
&\stackrel{\alpha \neq 0}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\alpha x}}{i\alpha} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 0
\end{aligned}$$

Pour  $\alpha = 0$  :

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i0x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \Big|_{-1}^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

**Résultat :**

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
\hat{f} : \alpha &\mapsto \hat{f}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On remarque que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{f}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \hat{f}(0)$ .

$\Rightarrow \hat{f}$  est aussi continue en  $\alpha = 0$ .

*Autres exemples : ex. 3-4, série 1*



## 1.3 Transformée de Fourier inverse

### 1.3.1 Définition

**Définition.** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue par morceaux telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$ . La **transformée de Fourier inverse** de  $g$  est notée :

$$\mathfrak{F}^{-1}(g) : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \rightarrow \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) \end{array}, \text{ où } \mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{itx} dt.$$

### 1.3.2 Théorème de réciprocité (formule d'inversion)

**Théorème** (15.3.i, p.115). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f$  et  $f'$  soient continues par morceaux avec  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < \infty$ . Alors  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

En particulier si  $f$  est continue en  $x$ , on a  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = f(x)$  et alors :

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Autrement dit, on a  $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$ . La transformée de Fourier peut être vue comme une « transformation  $\mathfrak{F}$  » inversible (une bijection) qui « agit » sur la fonction  $f$  :

$$f \xrightarrow{\mathfrak{F}} \hat{f} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f$$

### 1.3.3 Exemple d'utilisation

*Exemple.* Soit  $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto f(x) = e^{-|x|} \end{array} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

La transformée de Fourier de  $f$  est (exemple 1, §1.2.2)

$$\hat{f} : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \alpha & \mapsto \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

On remarque que  $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$  est continue par morceaux car :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = -1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1$$

De plus,  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}| d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha < \infty$ .  $f$  est continue  $\forall x \in \mathbb{R} \implies$  en appliquant le *théorème de réciprocité*, on a que  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$ , i.e. :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1 + \alpha^2} d\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, lorsque  $x = 0$ , on trouve :

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2} = \pi.$$

En particulier, lorsque  $x = 1$ , on trouve :

$$e^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha}}{1 + \alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha + i \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha}^{\substack{\text{fonction impaire} \\ \text{intégrée sur tout l'axe} \\ \text{réel} = 0}} \right]$$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{e}$$

**Conclusion :** Le *théorème de réciprocity* permet de calculer la valeur d'intégrales généralisées.

*Autre exemple : ex. 1, série 2*

## 1.4 Propriétés de la transformée de Fourier

On considère  $f$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues par morceaux telles que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < \infty$ . On note indifféremment  $\mathfrak{F}(f) \doteq \hat{f}$  et  $\mathfrak{F}(g) \doteq \hat{g}$  les transformées de Fourier de  $f$  et de  $g$ .

*Note.* Les prochains résultats sont décrits dans les **théorèmes 15.2 et 15.3** aux pages 113 à 115 du livre du cours.

### 1.4.1 Continuité et linéarité

- $\mathfrak{F}(f)$  est continue  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)| = 0$ .
- $\mathfrak{F}$  linéaire :  $\mathfrak{F}(af + bg) = a\mathfrak{F}(f) + b\mathfrak{F}(g) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ .

### 1.4.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

**Définition.** Le **produit de convolution** de deux fonctions  $f$  et  $g$  est la fonction notée  $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)g(t) dt$$

*Remarque.* On peut aussi écrire  $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(x - t')dt'$ , via un changement de variable.

**Résultat :** on a que  $\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$ .

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au **produit** des transformées de Fourier de chaque fonction.

*Exemples : ex. 2-3, série 2*

### 1.4.3 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Si de plus  $f \in C^1(\mathbb{R})$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|dx < \infty$ , alors on a :

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

On écrit aussi  $\widehat{f'}(\alpha) = i\alpha \hat{f}(\alpha)$ .

La transformée de Fourier de la dérivée de  $f$  s'obtient en **multipliant par  $i\alpha$**  la transformée de Fourier de  $f$ .

Plus généralement, si  $f \in C^n(\mathbb{R})$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)|dx < \infty$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ , alors on a :

$$\mathfrak{F}(f^{(k)})(\alpha) = (i\alpha)^k \mathfrak{F}(f)(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n$$

On écrit aussi  $\widehat{f^{(k)}}(\alpha) = (i\alpha)^k \hat{f}(\alpha)$ .

*Exemple : ex.3, série 2*

### 1.4.4 Décalage

Si  $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$  et  $h(x) = e^{-ibx}f(ax)$ , alors :

$$\mathfrak{F}(h)(\alpha) = \frac{1}{|a|} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\alpha + b}{a}\right)$$

### 1.4.5 Identité de Plancherel

Si de plus  $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 dx < \infty$ , alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2 d\alpha$$

### 1.4.6 Transformée de Fourier en sinus et cosinus

Si la fonction  $f$  est paire (i.e.  $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$$

qui est la transformée de Fourier en **cosinus** de  $f$ .

Si la fonction  $f$  est impaire (i.e.  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ), alors on a :

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$$

qui est la transformée de Fourier en **sinus** de  $f$ .

Exemples : ex.4, série 2 et ex.1, série 3

*Remarque.* Si de plus  $f'$  est continue par morceaux et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < \infty$ , alors, d'après le théorème de réciprocité, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha && \text{lorsque } f \text{ est paire} \\ f(x) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha && \text{lorsque } f \text{ est impaire} \end{aligned}$$

## 1.5 Esquisse de démonstrations de quelques propriétés

### 1.5.1 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

*Démonstration.* On a

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\alpha x} dx$$

On intègre par parties, avec  $u' = f' \rightarrow u = f$  et  $v = e^{-i\alpha x} \rightarrow v' = -i\alpha e^{-i\alpha x}$ .

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ f(x) e^{-i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \right]$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) e^{-i\alpha x}| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = 0$  car  $|e^{-i\alpha x}| = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$  ( $f$  est sommable).

$$\Rightarrow \mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = i\alpha \mathfrak{F}(f)(\alpha)$$

□

*Remarque.* Formule pour la dérivée de la transformée de Fourier d'une fonction :

$$\mathfrak{F}'(f)(\alpha) = (\hat{f})'(\alpha) = -i \mathfrak{F}(xf(x))(\alpha)$$

Cf. ex. 2, série 3

### 1.5.2 Transformée de Fourier du produit de convolution

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(f * g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-i\alpha x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \right] e^{-i\alpha x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{-i\alpha x} dx \right] g(t) dt \\
&\stackrel{\text{cdv}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha(y+t)} dy \right] g(t) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} dt \\
&= \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}(f)(\alpha) \cdot \mathfrak{F}(g)(\alpha)
\end{aligned}$$

□

### 1.5.3 Identité de Plancherel

*Démonstration.* Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On remarque que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x+t) dx &\stackrel{1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) e^{i\alpha(x+t)} d\alpha \right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \right] e^{i\alpha t} d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(g)(\alpha) \overline{\mathfrak{F}(f)(\alpha)} e^{i\alpha t} d\alpha
\end{aligned}$$

En posant  $t = 0$  et en choisissant  $g = f$ , on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(\alpha)]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f)(\alpha)|^2 d\alpha$$

□

---

1. Par le **théorème de réciprocité**, §1.3.2

## 1.6 Exemples d'utilisation de la transformée de Fourier

- a) Trouver une solution particulière  $y(x)$  d'une équation différentielle du type :

$$\lambda y''(x) + \omega y(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda, \omega \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

qui est l'équation de l'oscillateur forcé ( $f$  est une fonction donnée).

**Méthode :** on écrit la transformée de Fourier de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\lambda y'' + \omega y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff \lambda \mathfrak{F}(y'')(\alpha) + \omega \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff \lambda (-\alpha^2) \mathfrak{F}(y)(\alpha) + \omega \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff (\omega - \lambda \alpha^2) \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ \iff \mathfrak{F}(y)(\alpha) &= \frac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda \alpha^2} \end{aligned}$$

On utilise le **théorème de réciprocité** (§1.3.2) : la solution particulière  $y(x)$  s'obtient en calculant la transformée de Fourier inverse de la fonction de la variable  $\alpha$  définie par  $\frac{\mathfrak{F}(f)(\alpha)}{\omega - \lambda \alpha^2}$ .

- b) On utilise la transformée de Fourier pour résoudre des équations intégrales du type produit de convolution (*cf. ex. 2 et 3, série 3*).
- c) Problèmes statistiques avec loi normale.

fonction gaussienne  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

*Ex. 4, série 1 :*  $\hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$  est aussi une fonction gaussienne.

- d) Mécanique quantique

$f(x)$  : position de la particule quantique

$\hat{f}(p)$  : impulsion de la particule quantique

- e) Résolution de l'équation de la chaleur pour une barre conductrice de longueur **infinie**.

**Rappel :** cas d'une barre de longueur **finie**

Soit une barre de longueur  $0 < L < \infty$ . On note  $u(x, t)$  la fonction qui décrit la température de la barre au point  $x$  et à l'instant  $t$ .

L'évolution de la température  $u(x, t)$  le long de la barre est modélisée par l'équation de la chaleur donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad \text{pour } x \in ]0, L[ \text{ et } t > 0, \quad a \neq 0$$

où  $a$  est un coefficient thermique. On impose :

— **deux** conditions limites  $u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t > 0$ ,

— une condition initiale  $u(x, 0) = f(x)$  pour  $x \in ]0, L[$ .<sup>2</sup>

**Problème :** trouver une solution  $u(x, t)$  satisfaisant ces conditions.

### Cas d'une barre de longueur infinie

Il n'y a plus de conditions aux limites concernant les extrémités de la barre.

Le problème est :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x) \end{cases}$$

Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ , avec **une** condition initiale, valable  $\forall x \in \mathbb{R}$  où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^1$  telle que  $f$  et la transformée de Fourier de  $f$  soient sommables.

### Résolution

**1<sup>re</sup> étape :** on écrit la transformée de Fourier de l'équation de la chaleur en considérant  $u(x, t)$  comme fonction de la variable  $x$  ( $t$  joue le rôle d'un paramètre). On obtient :

$$\mathfrak{F} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) (\alpha, t) = a^2 \mathfrak{F} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (\alpha, t) \text{ avec } \mathfrak{F}(u)(\alpha, 0) = \mathfrak{F}(f)(\alpha)$$

Avec la notation :

$$v(\alpha, t) = (\mathfrak{F}u)(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx$$

On obtient à gauche :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) (\alpha, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} v(\alpha, t) \end{aligned}$$

---

2. Dans le milieu de l'ingénierie, on sous-entend souvent qu'une condition **limite** l'est aux positions, et qu'une condition **initiale** l'est au temps

Et à droite :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha, t) &\stackrel{3}{=} (i\alpha)^2 \mathfrak{F}(u)(\alpha, t) \\ &= -\alpha^2 v(\alpha, t)\end{aligned}$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} v(\alpha, t) = -a^2 \alpha^2 v(\alpha, t)$$

C'est une équation différentielle du **premier ordre** pour la fonction  $v(\alpha, t)$  par rapport à **la variable**  $t$  ( $\alpha$  joue le rôle de paramètre).

La solution est :

$$v(\alpha, t) = v(\alpha, 0)e^{-a^2 \alpha^2 t} = \mathfrak{F}(f)(\alpha)e^{-a^2 \alpha^2 t}$$

**2<sup>e</sup> étape :** pour obtenir la solution  $u(x, t)$ , on calcule la transformée de Fourier inverse de  $v(\alpha, t)$  en considérant  $t$  comme paramètre. On obtient :

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \mathfrak{F}^{-1}(v)(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\alpha, t) e^{i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(f)(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 t} e^{i\alpha x} d\alpha\end{aligned}$$

comme solution de l'équation de la chaleur pour une barre de longueur infinie.

*Exemple : ex. 3, série 3*

---

3. Par la propriété du §1.4.3, concernant la **transformée de Fourier de la dérivée** d'une fonction



## Chapitre 2

# Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Motivation

**But :** étendre l'étude de fonctions réelles (du type  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) à des fonctions qui dépendent d'une variable complexe qui sont à valeurs complexes (du type  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  où  $\mathbb{C}$  est l'ensemble des nombres complexes).

**Rôle :** établir les notions de limite, de continuité, de dérivabilité et d'intégration dans  $\mathbb{C}$ .

**Intérêt :** méthodes puissantes qui permettent de calculer facilement des intégrales réelles compliquées.

*Cf. ex. 4, série 3*

#### 2.1.2 Rappel sur les nombres complexes

- $\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes
- $z \in \mathbb{C} \iff z = x + iy$  avec  $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$  et  $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$  et  $i^2 = -1$
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  où  $0 = 0 + i0$
- complexe conjugué de  $z$   $\bar{z} = x - iy$
- module de  $z \in \mathbb{C}$   $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$
- représentation polaire de  $z \in \mathbb{C}^*$   $z = |z| e^{i\theta} = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$
- $\theta$  est appelé l'argument de  $z$  et est noté  $\arg z$

*Remarque.* Pour  $z \in \mathbb{C}^*$  :

- L'argument de  $z$  est défini à  $2k\pi$  près avec  $k \in \mathbb{Z}$
- Par convention, la **valeur (détermination) principale** de l'argument de  $z$  est l'unique angle  $\theta \in ]-\pi; \pi]$  tel que  $\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta$

## 2.2 Fonctions complexes

### 2.2.1 Définitions

**Définition.** Une fonction d'une variable complexe à valeur dans  $\mathbb{C}$  s'écrit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \end{array}$$

où

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & u(x, y) \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & v(x, y) \end{array}$$

sont deux fonctions à valeurs réelles qui s'appellent respectivement la partie réelle de  $f$  (on note  $u = \operatorname{Re} f$ ) et la partie imaginaire de  $f$  (on note  $v = \operatorname{Im} f$ ).

*Remarque.* Les variables  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  des fonctions  $u$  et  $v$  sont les parties réelles et imaginaires de la variable  $z \in \mathbb{C}$  de la fonction  $f$ .

### 2.2.2 Exemples

*Exemple.*

1)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = \bar{z} = x - iy \end{array}$$

On a  $u(x, y) = x$  et  $v(x, y) = -y$ .

2)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \end{array}$$

On a  $u(x, y) = x^2 - y^2$  et  $v(x, y) = 2xy$ .

3)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \end{array}$$

On a  $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$  et  $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ .

4) Pour  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , la fonction exponentielle est définie par :

$$e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}^*$$

On a  $u(x, y) = e^x \cos y$  et  $v(x, y) = e^x \sin y$ .

*Remarque.* Contrairement au cas réel,  $e^z$  n'est pas bijective sur  $\mathbb{C}$  car  $e^{z+2ik\pi} = e^z \forall z \in \mathbb{C}$  (ex.4, série 3). En choisissant  $y$  tel que  $-\pi < y \leq \pi$ , la fonction  $e^z$  est bijective sur l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in ]-\pi; \pi]\}$ . Avec cette convention, c'est la « restriction bijective de l'exponentielle complexe ».

5) Pour  $z \in \mathbb{C}^*$ , la fonction logarithme est définie par :

$$\log z := \ln |z| + i \arg z$$

avec le choix de la valeur principale  $\arg z \in ]-\pi; \pi[$ . Avec cette convention, c'est la « **détermination principale du logarithme complexe** » (correspond à la fonction réciproque de la restriction bijective de l'exponentielle).

En écrivant  $z = x + iy$ , on a  $u(x, y) = \ln |x + iy| = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $v(x, y) = \arg(x + iy)$ .

*Remarque.*

- a) Les formules valables en analyse réelle ne sont pas nécessairement valables en analyse complexe. Par exemple, en général, on a  $\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$ . En effet, pour  $z_1 = -1$  et  $z_2 = -1$  :

$$\log [(-1)(-1)] = \log(1) := \ln |1| + i \arg(1) = 0 + i0 = 0$$

mais

$$\log(-1) + \log(-1) = 2 \log(-1) := 2 [\ln |-1| + i \arg(-1)] = 2i\pi \neq 0$$

- b) La fonction  $\log z$  n'est pas continue sur le demi-axe réel négatif. En effet, par exemple pour  $z = -1$ , on considère  $t > 0$  :

$$z_t^+ = -1 + it \quad \text{et} \quad z_t^- = -1 - it$$

On a  $\lim_{t \rightarrow 0^+} z_t^+ = -1$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} z_t^- = -1$ .

*Note.* Pour  $z = x + iy$ , on a la valeur principale :

$$\arg z = \begin{cases} \pi + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0, y > 0 \\ -\pi + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Avec la définition du logarithme, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^+) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln |-1 + it| + i \lim_{t \rightarrow 0^+} \arg(-1 + it) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \sqrt{1 + t^2} + i \lim_{t \rightarrow 0^+} [\pi + \operatorname{Arctg}(-t)] \\ &= \ln(1) + i\pi = 0 + i\pi = i\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^-) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln |-1 - it| + i \lim_{t \rightarrow 0^+} \arg(-1 - it) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \sqrt{1 + t^2} + i \lim_{t \rightarrow 0^+} [-\pi + \operatorname{Arctg}(t)] \\ &= \ln(1) - i\pi = 0 - i\pi = -i\pi \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^+) \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} \log(z_t^-) \implies$  la fonction  $\log z$  n'est pas continue en  $z = -1$ . De façon analogue, on obtient le même résultat  $\forall z \in ]-\infty; 0[$ .  $\log z$  **n'est pas continue** pour  $z \in ]-\infty; 0]$

**Résultat final :** En excluant le demi-axe réel négatif, on a que la fonction  $\log z$  est continue sur l'ensemble :

$$V = \mathbb{C} \setminus ]-\infty; 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

C'est la « **restriction continue du logarithme complexe** ».

6) Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on définit les fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

*Cf. ex. 1, série 4*

## 2.3 Limites, continuité, dérivabilité

### 2.3.1 Définitions

**Définition** (9.1, p.67). Les notions de topologie (ouverts, fermés, etc.), de limite, de continuité et de dérivabilité sont analogues à celles de l'analyse réelle. Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , alors :

- 1)  $f$  possède une limite  $l \in \mathbb{C}$  en  $z_0 \in \mathbb{C}$  (notation  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ ) si :  
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - l| < \epsilon$
- 2)  $f$  est continue en  $z_0 \in \mathbb{C}$  si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$
- 3)  $f$  est dérivable en  $z_0 \in \mathbb{C}$  si  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existe et est finie. La limite s'appelle la dérivée de  $f$  en  $z_0$  et est notée  $f'(z_0)$ . Les règles de dérivation établies dans  $\mathbb{R}$  sont valables dans  $\mathbb{C}$ .
- 4) Étant donné un ouvert  $V \subset \mathbb{C}$ , on dit que la fonction  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  est **holomorphe** (ou analytique complexe) dans  $V$  si  $f$  est *définie et dérivable*  $\forall z \in V$ .

### 2.3.2 Équations de Cauchy-Riemann

*Remarque* (sur un abus de notation). Étant donné un ouvert  $V \subset \mathbb{C}$ , on l'identifie souvent au sous-ensemble correspondant de  $\mathbb{R}^2$ , i.e. on écrit indifféremment  $z = x + iy \in V (\in \mathbb{C})$  ou  $(x, y) \in V (\in \mathbb{R}^2)$  de façon abusive.

**Théorème** (de Cauchy-Riemann ; 9.2, p.67). Soit  $V \subset \mathbb{C}$  un ouvert et soit une fonction  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires de  $f$ . Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1)  $f$  est holomorphe dans  $V$
- 2) Les fonctions  $u, v \in C^1(V)$  et satisfont les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

En particulier, si  $f$  est holomorphe dans  $V$ , alors on a :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad \forall z = x + iy \in V$$

Remarque.

- 1) Démonstration du Théorème : voir §2.3.4 (fin du chapitre)
- 2) Les équations de Cauchy-Riemann sont une condition nécessaire pour que  $f$  soit holomorphe mais elles ne sont pas une condition suffisante. Si  $u$  et  $v$  sont continûment dérivables ( $u, v \in C^1(V)$ ), alors elles deviennent une condition suffisante.
- 3) Utilité du Théorème : pour qu'une fonction  $f$  soit holomorphe dans un ouvert  $V$ , il suffit de vérifier que les équations de Cauchy-Riemann pour  $u = \operatorname{Re} f \in C^1(V)$  et  $v = \operatorname{Im} f \in C^1(V)$  sont satisfaites dans  $V$ . Si les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées en  $(x_0, y_0) \in V$ , alors  $f(z_0)$  n'est pas holomorphe en  $z_0 = x_0 + iy_0$ .
- 4) Pour alléger la notation, on écrit :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Équations de Cauchy-Riemann :

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

Exemples : ex. 1 à 4, série 4

### 2.3.3 Exemples

Exemple (1).

$f(z) = z^2$  définie pour  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

$$\implies u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = 2x \quad u_y(x, y) = -2y \\ v_x(x, y) = 2y \quad v_y(x, y) = 2x \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{C}$$

CR (Cauchy-Riemann) satisfaites  $\forall z \in \mathbb{C} \implies f$  holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

De plus :  $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z$ .

Exemple (2).

$f(z) = \bar{z}$  définie pour  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

$f(z) = \overline{x + iy} = x - iy$ .

$$\implies u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = 1 \quad u_y(x, y) = 0 \\ v_x(x, y) = 0 \quad v_y(x, y) = -1 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x \neq v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

CR non satisfaites  $\implies f$  n'est pas holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

Exemple (3).

$f(z) = e^z$  définie pour  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

$$\implies u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = e^x \cos y \quad u_y(x, y) = -e^x \sin y \\ v_x(x, y) = e^x \sin y \quad v_y(x, y) = e^x \cos y \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

CR satisfaites  $\implies f$  holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y := e^z$$

Exemple (4).

$f(z) = \log z = \ln |z| + i \arg z$  avec la détermination principale définie pour  $V = \mathbb{C} \setminus ]-\infty; 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$ .  $\log z$  est holomorphe dans  $V$  et on a :

$$f'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in V$$

En effet : preuve pour le demi-plan  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ . Pour  $z = x + iy$  avec  $x > 0$  et  $y \in \mathbb{R}$ . On a :  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\arg z = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ .

Donc  $\log z := \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ .

$$\implies u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, y) = \frac{\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad u_y(x, y) = \frac{\frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ v_x(x, y) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad v_y(x, y) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

CR satisfaites  $\implies f$  holomorphe dans  $D$ .

De plus :

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Cf. ex. 1, série 5

### 2.3.4 Démonstration des équations de Cauchy-Riemann

*Démonstration.* '  $\implies$  '

Soient  $z_0 = x_0 + iy_0 \in V$  et  $z = (x_0 + \alpha) + i(y_0 + \beta) \in V$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Puisque  $f$  est holomorphe dans  $V$ , alors  $f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existe  $\forall z_0 \in V$ . On a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{[u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) + iv(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\alpha + i\beta}$$

a) En posant  $\beta = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \alpha, y_0) + iv(x_0 + \alpha, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \alpha, y_0) - u(x_0, y_0)}{\alpha} + i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \alpha, y_0) - v(x_0, y_0)}{\alpha} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

b) En posant  $\alpha = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0)}{i\beta} + i \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0)}{i\beta} \\ &= \frac{1}{i} u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Les deux limites existent et sont identiques.

$$\implies u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \quad (\text{équations de CR})$$

' $\Leftarrow$ ' On utilise les développements de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre de  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  pour montrer que  $f'(z_0)$  existe.

Cf. ex. 5, série 4 et ex. 2-4, série 5

□

*Remarque (finale).* Affirmer que  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est dérivable en  $z = x + iy$  **n'est pas équivalent** au fait que le champ vectoriel  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continûment dérivable dans

le contexte usuel de  $\mathbb{R}^2$  (i.e matrice jacobienne  $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$  de  $\tilde{f}$  existe avec  $u_x, u_y, v_x, v_y$  continues).

Par exemple,  $f(z) = \bar{z}$  n'est pas holomorphe dans  $\mathbb{C}$  : si  $z_0 = x_0 + iy_0$  et  $z = (x_0 + \alpha) + i(y_0 + \beta)$ , alors on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x_0 + \alpha) - i(y_0 + \beta) - x_0 + iy_0}{(x_0 + \alpha) + i(y_0 + \beta) - x_0 - iy_0} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} = \begin{cases} -1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -1, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1$$

$\implies f'(z_0)$  n'existe pas.

Mais  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y)) = (x, -y)$

$\implies$  Matrice jacobienne  $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  existe  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$



## Chapitre 3

# Théorème et formule intégrale de Cauchy

### 3.1 Intégration complexe

#### 3.1.1 Définitions et notations

**Définition** (10.1, p.73).

- 1)  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  est une **courbe simple régulière** s'il existe un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  et une fonction  $\gamma : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t) \end{array}$  telle que :

- $\Gamma = \gamma([a, b])$ , la courbe  $\Gamma$  est l'image de  $\gamma$
- $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2 \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b[$
- $\gamma \in C^1([a, b])$
- $|\gamma'(t)| = [\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2]^{\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

$\gamma$  s'appelle une paramétrisation de  $\Gamma$  décrite par  $t \in [a, b]$ .

- 2)  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  est une courbe simple régulière **fermée** si de plus  $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ .
- 3)  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  est une courbe simple régulière **par morceaux** si  $\exists \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$  des courbes simples régulières telles que  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ .

*Note* (Abus de langage et de notation). En analyse complexe, on identifie souvent la courbe  $\Gamma$  à sa paramétrisation  $\gamma$ . On dit « soit  $\gamma$  une courbe... » au lieu de « soit  $\Gamma$  une courbe... »

- 4) Si  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) de paramétrisation  $\gamma$ , on note **l'intérieur**  $\text{int } \Gamma$  (ou aussi  $\text{int } \gamma$ ) l'ensemble ouvert et borné  $V \in \mathbb{C}$  dont le bord est  $\Gamma$  (i.e. tel que  $\partial V = \Gamma$ ).

Pour l'adhérence de  $V$ , on écrit  $\overline{\text{int } \gamma} = \text{int } \gamma \cup \partial V$ .

*Note.*  $\gamma$  est dite orientée **positivement** si le sens de parcours laisse l'intérieur int  $\gamma$  à gauche.

- 5) Soit  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  une courbe simple régulière de paramétrisation  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  et soit  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. L'**intégrale** de  $f$  le long de  $\Gamma$  est définie par :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

- 6) Si la courbe  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$  est simple régulière par morceaux, alors :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} f(z)dz$$

### 3.1.2 Exemples

*Exemple.* Calculer  $\int_{\gamma} f(z)dz$  pour  $f(z) = z^2$  et  $\gamma$  le demi-cercle unité de rayon 1 centré à l'origine.

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0; \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \gamma(\theta) = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \end{array}$$

$$\gamma'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = ie^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_0^{\pi} f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)d\theta = \int_0^{\pi} (e^{i\theta})^2 ie^{i\theta}d\theta \\ &= i \int_0^{\pi} e^{3i\theta}d\theta = \frac{1}{3}e^{3i\theta} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} [e^{3i\pi} - e^{i0}] \\ &= \frac{1}{3}(-1 - 1) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

*Autres exemples : ex.5, série 5*

## 3.2 Théorème de Cauchy

### 3.2.1 Théorème

**Théorème** (10.2, p.73). Soient  $D \subset \mathbb{C}$  un domaine simplement connexe,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $D$  et  $\gamma$  une courbe simple régulière fermée contenue dans  $D$ . Alors :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

*Cf. ex. 6, série 5*

*Terminologie.* On appelle domaine simplement connexe un ensemble ouvert  $D \subset \mathbb{C}$  qui « n'a pas de trous ».

### 3.2.2 Exemples

*Exemple (1).*  $D = \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2$  holomorphe dans  $D$  et  $\gamma$  une courbe simple fermée régulière (par morceaux) *quelconque* dans  $D$ , alors :

$$\text{Thm. de Cauchy} \implies \int_{\gamma} z^2 dz = 0$$

Par exemple, si  $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$  (cercle unité centré à l'origine), on a bien :

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{2\pi} |e^{i\theta}|^2 i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{3i\theta} d\theta = \frac{1}{3} e^{3i\theta} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} [e^{6i\pi} - 1] = \frac{1}{3} [1 - 1] = 0$$

*Exemple (2).*  $f(z) = \frac{1}{z}$

- a)  $D = \mathbb{C}$  Le Thm. de Cauchy ne s'applique pas car  $f$  n'est pas holomorphe en  $t = 0$ .  
 $D = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  Le Thm. de Cauchy ne s'applique pas non plus car  $D$  n'est pas simplement connexe. Par exemple, si  $\gamma$  le cercle unité centré en  $z = 0$ , alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \dots = 2i\pi \neq 0$$

- b)  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$  Le Thm. de Cauchy s'applique car  $D$  est simplement connexe et  $f$  est holomorphe dans  $D$ .

$$\text{Thm. de Cauchy} \implies \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$$

pour  $\gamma \subset D$  courbe simple fermée régulière quelconque. Par exemple, si  $\gamma$  est le cercle unité centré en  $z = 2$ , alors :

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \dots = 0$$

*Cf. ex.4, série 6, application avec variantes de  $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$*

### 3.2.3 Démonstration du théorème de Cauchy

*Démonstration.* Soient  $\gamma \subset D$  une courbe simple régulière fermée

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t) \end{array}$$

et  $f$  une fonction holomorphe dans  $D$  définie par  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b [u(\alpha(t), \beta(t)) + iv(\alpha(t), \beta(t))] \cdot [\alpha'(t) + i\beta'(t)] dt \\ &= \int_a^b [u(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) - v(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [u(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t) + v(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t)] dt \\ &= \underbrace{\int_a^b \begin{pmatrix} u(\alpha(t), \beta(t)) \\ -v(\alpha(t), \beta(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} dt}_{I_1} \\ &\quad + i \underbrace{\int_a^b \begin{pmatrix} v(\alpha(t), \beta(t)) \\ u(\alpha(t), \beta(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} dt}_{I_2} \end{aligned}$$

On a que  $I_1 = \int_{\gamma} F \cdot d\ell$  est l'intervalle curviligne le long de  $\gamma$  du champ vectoriel  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par  $F(x, y) = (u(x, y), -v(x, y))$ . En appliquant le Thm. de Green, on obtient :

$$I_1 = \iint_{\text{int } \gamma} \text{rot } F(x, y) dx dy = \iint_{\text{int } \gamma} [-v_x(x, y) - u_y(x, y)] dx dy$$

$f$  holomorphe dans  $D$  et  $\gamma \subset D \xrightarrow[\text{CR}]{\text{Thm}} v_x(x, y) + u_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \text{int } \gamma \implies I_1 = 0$

On a que  $I_2 = \int_{\gamma} G \cdot d\ell$  est l'intervalle curviligne le long de  $\gamma$  du champ vectoriel  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par  $G(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$ . En appliquant le Thm. de Green, on obtient :

$$I_2 = \iint_{\text{int } \gamma} \text{rot } G(x, y) dx dy = \iint_{\text{int } \gamma} [u_x(x, y) - v_y(x, y)] dx dy$$

$f$  holomorphe dans  $D$  et  $\gamma \subset D \xrightarrow[\text{CR}]{\text{Thm}} u_x(x, y) - v_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \text{int } \gamma \implies I_2 = 0$

**Conclusion :**

$$\int_{\gamma} f(z)dz = I_1 + iI_2 = 0 + i0 = 0$$

□

### 3.2.4 Corollaire du Théorème de Cauchy

**Corollaire.** Soient  $D_0, D_1, D_2, \dots, D_m \subset \mathbb{C}$  des domaines simplement connexes tels que :

- 1)  $\overline{\text{int } D_j} \subset D_0 \quad \forall j = 1, \dots, m$
- 2)  $\overline{\text{int } D_j} \cap \overline{\text{int } D_k} = \emptyset \quad \forall j, k = 1, \dots, m; \quad j \neq k$  (domaines disjoints)
- 3)  $\partial D_j = \gamma_j$  pour  $j = 0, 1, \dots, m$  sont des courbes simples fermées régulières (par morceaux)

Soit  $f : D = \overline{\text{int } D_0} \setminus \bigcup_{j=1}^m D_j \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $D$ . Alors :

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

où toutes les courbes  $\gamma_j$  sont orientées positivement.

**Justification heuristique du corollaire**

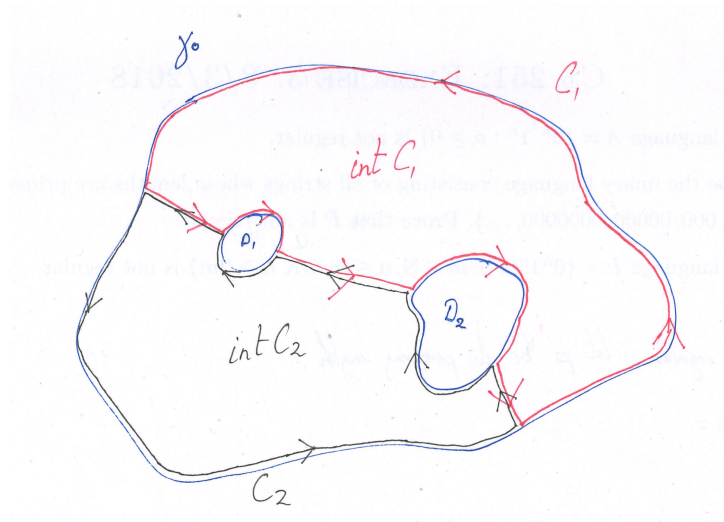


FIGURE 3.1 – Illustration de la justification heuristique

$$D = \overline{\text{int } D_0} \setminus (D_1 \cup D_2) = \overline{\text{int } C_1} \cup \overline{\text{int } C_2}$$

Les bords de  $\gamma_0, \gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $D_0, D_1$  et  $D_2$  appartiennent à  $D$ .

— D'une part,  $f$  holomorphe dans  $\overline{\text{int } C_1}$  et  $\overline{\text{int } C_2}$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont fermés  $\xrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{Thm.}}$

$$\int_{C_1} f(z)dz = 0 \text{ et } \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

— D'autre part, avec  $C_1$  et  $C_2$  orientés positivement, on a :

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

où  $\gamma_0$  est orientée *positivement* ( $D_0$  à gauche), mais  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  orientées *négativement* ( $D_1$  et  $D_2$  à droite).

Donc :

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z)dz &= - \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad \text{orientation négative (dessin)} \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad \text{orientation positive (énoncé)} \end{aligned}$$

### 3.3 Formule intégrale de Cauchy

#### 3.3.1 Énoncé

**Théorème.** Soient  $D \subset \mathbb{C}$  un domaine simplement connexe,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $D$  et  $\gamma$  une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement contenue dans  $D$ . Alors :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \forall z \in \text{int } \gamma$$

*Illustration.*  $D = \mathbb{C}$

Si  $f$  est une fonction holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , la valeur de la fonction  $f$  en un point  $z \in \mathbb{C}$  s'obtient en intégrant  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$  le long de n'importe quelle courbe  $\gamma$  (orientée positivement) telle que  $z \in \text{int } \gamma$ .

#### 3.3.2 Exemples d'utilisation

*Exemple (1).* Soit  $\gamma$  une courbe simple fermée régulière. Discuter en fonction de  $\gamma$  la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz$$

Constatation : la fonction  $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$  n'est pas définie en  $z = 0$ .

Distinction de différents cas :

**1<sup>er</sup> cas**  $0 \in \gamma$  L'intégrale n'est pas définie puisque  $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$  n'est pas continue sur  $\gamma$ .

**2<sup>e</sup> cas**  $0 \notin \overline{\text{int } \gamma}$  La fonction  $g(z) = \frac{\cos 2z}{z}$  est holomorphe dans un domaine  $D$  simplement connexe tel que  $\overline{\text{int } \gamma} \subset D$ . Comme  $\gamma \subset \overline{\text{int } \gamma} \subset D$ , alors le Thm. de Cauchy s'applique à la fonction  $g$  et on trouve :

$$\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz = 0$$

$\forall \gamma$  de ce type (i.e.  $0 \notin \overline{\text{int } \gamma}$ ).

**3<sup>e</sup> cas**  $0 \in \text{int } \gamma$  La fonction  $f(\xi) = \cos 2\xi$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . Comme  $\gamma \subset \mathbb{C}$ , en lui appliquant la formule intégrale de Cauchy pour  $z = 0$  (avec  $D = \mathbb{C}$ ), on trouve :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos 2\xi}{\xi - 0} d\xi \implies \int_{\gamma} \frac{\cos 2\xi}{\xi} d\xi = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i$$

**Conclusion :**  $\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz = 2\pi i \quad \forall \gamma$  de ce type.

*Remarque.* Pour le cercle unité de rayon 1, on a  $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ , il faudrait calculer :

$$\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2e^{i\theta})}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} \cos(2e^{i\theta}) d\theta$$

*Exemple (2).* Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z + i\pi} dz$$

où  $\gamma$  est le cercle de rayon 4 centré en  $z = 1$ .

Utilisation de la formule de Cauchy, constatations :

- 1) La fonction  $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z + i\pi}$  n'est pas définie en  $z = -i\pi$
- 2)  $-i\pi \in \text{int } \gamma$

On considère  $\gamma$  orientée positivement et  $f(\xi) = e^{\xi^2}$  qui est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . Formule intégrale de Cauchy pour  $z = -i\pi$  (avec  $D = \mathbb{C}$ ) donne :

$$f(-i\pi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\xi^2}}{\xi + i\pi} d\xi \implies \int_{\gamma} \frac{e^{\xi^2}}{\xi + i\pi} d\xi = 2\pi i f(-i\pi)$$

Mais  $f(-i\pi) = e^{(-i\pi)^2} = e^{-\pi^2}$ , donc :

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z + i\pi} dz = 2\pi i e^{-\pi^2}$$

*Autres exemples : ex. 1-4, série 6*

### 3.3.3 Démonstration de la formule intégrale de Cauchy

*Démonstration.* Soit  $f$  holomorphe dans  $D$  et  $\gamma$  une courbe simple fermée régulière orientée positivement et contenue dans  $D$ . Soient  $z \in \text{int } \gamma$  et  $C$  un cercle de rayon  $r$  centré en  $z$  orienté positivement tel que  $C \subset \text{int } \gamma$ . On note  $V = \text{int } \gamma \setminus \text{int } C$ .

Corollaire du Thm. de Cauchy (§3.2.4) appliqué à la fonction  $g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$  holomorphe pour  $\xi \in V$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &\stackrel{\text{Cor.}}{\underset{\text{Thm. Cauchy}}{=}} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \stackrel{*}{=} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

$$*\xi(\theta) = z + re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad \xi'(\theta) = ire^{i\theta}$$

D'une part, on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (\text{grandeur indépendante de } r)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta &= \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} [f(z + re^{i\theta})] d\theta \stackrel{f \text{ continue}}{=} \int_0^{2\pi} f(z) d\theta \\ &= f(z) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi f(z) \end{aligned}$$

Égalité des limites :

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z)$$

□

## 3.4 Corollaire de la formule intégrale de Cauchy

### 3.4.1 Énoncé

Avec les mêmes hypothèses du §3.3 ( $D \subset \mathbb{C}$  domaine simplement connexe,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe dans  $D$ ,  $\gamma \subset D$  courbe fermée régulière orientée positivement), on a :

- 1)  $f$  est infiniment dérivable dans  $D$
- 2)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, \forall z \in \text{int } \gamma$$



## Commentaires

- 1) Pour  $n = 0$ , le corollaire redonne la formule intégrale de Cauchy :

$$f(z) = f^{(0)}(z) = \frac{0!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

- 2) Résultat remarquable : le corollaire affirme qu'une fonction holomorphe dans  $D$  (i.e. dérivable  $\forall z \in D$ ) est en fait infiniment dérivable et que sa  $n$ -ième dérivée se calcule en dérivant  $n$  fois par rapport à  $z$  sous l'intégrale de la formule de Cauchy. En effet :  $f^{(n)} = \frac{d^n}{dz^n}$

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left[ \frac{1}{\xi - z} \right]' d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{1!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left[ \frac{1}{(\xi - z)^2} \right]' d\xi = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$$

$$f^{(3)}(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left[ \frac{1}{(\xi - z)^3} \right]' d\xi = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4} d\xi = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4} d\xi$$

Récurrence sur  $n$  :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

### 3.4.2 Exemples d'utilisation

*Exemple (1).* Calculer :

$$\int_{\gamma} \frac{ze^{3z+5}}{(z+1)^3} dz \quad \text{où } \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$$

Constatations :

- 1) la fonction  $g(z) = \frac{ze^{3z+5}}{(z+1)^3}$  n'est pas définie en  $z = -1$

- 2)  $\gamma$  est le cercle de rayon 2 centré en  $z_0 = i$  et  $-1 \in \text{int } \gamma$ .

On considère  $\gamma$  orientée positivement et la fonction  $f(\xi) = \xi e^{3\xi+5}$  qui est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

En appliquant à  $f$  le corollaire de la formule de Cauchy pour  $z = -1$  et  $n = 2$  (avec  $D = \mathbb{C}$ ), on obtient :

$$f''(-1) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\xi e^{3\xi+5}}{(\xi + 1)^3} d\xi$$

mais  $f'(\xi) = (\xi e^{3\xi+5})' = e^{3\xi+5} + 3\xi e^{3\xi+5}$  et  $f''(\xi) = 3e^{3\xi+5} + 3e^{3\xi+5} + 9\xi e^{3\xi+5}$

$$\implies f''(-1) = -3e^2$$

**Donc :**

$$\int_{\gamma} \frac{\xi e^{3\xi+5}}{(\xi+1)^3} d\xi = -3\pi i e^2$$

*Exemple (2).* Soit  $\gamma$  une courbe simple fermée régulière. Discuter en fonction de  $\gamma$  la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2} dz$$

La fonction  $g(z) = \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2}$  n'est pas définie pour  $z = \frac{\pi}{2} \implies$  distinction de plusieurs cas.

— **1<sup>er</sup> cas**  $\frac{\pi}{2} \in \gamma$

L'intégrale n'est pas définie puisque  $g(z) = \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2}$  n'est pas continue en  $z = \frac{\pi}{2}$

— **2<sup>e</sup> cas**  $\frac{\pi}{2} \notin \overline{\text{int } \gamma}$

La fonction  $g(z) = \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2}$  est holomorphe dans un domaine simplement connexe  $D$  tel que  $\overline{\text{int } \gamma} \subset D$ . Comme  $\gamma \subset \overline{\text{int } \gamma} \subset D$ , alors le Théorème de Cauchy s'applique à  $g$  et on trouve :

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2} dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ de ce type}$$

— **3<sup>e</sup> cas**  $\frac{\pi}{2} \in \text{int } \gamma$

La fonction  $f(\xi) = \frac{\xi^2}{2} \sin \xi$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . Comme  $\gamma \subset \mathbb{C}$ , en lui appliquant le corollaire de la formule de Cauchy pour  $z = \frac{\pi}{2}$  et  $n = 1$  (avec  $D = \mathbb{C}$ ), on obtient :

$$f' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{\xi^2}{2} \sin \xi}{(\xi - \frac{\pi}{2})^2} d\xi$$

mais  $f'(\xi) = \left( \frac{\xi^2}{2} \sin \xi \right)' = \xi \sin \xi + \frac{\xi^2}{2} \cos \xi$

$$\implies f' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

**Conclusion :**

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 \sin z}{2(z - \frac{\pi}{2})^2} dz = 2\pi i \frac{\pi}{2} = \pi^2 i$$

*Autres exemples : ex. 1-4, série 7*

## Chapitre 4

# Séries de Laurent, pôles et résidus

### 4.1 Polynôme et série de Taylor d'une fonction holomorphe

#### 4.1.1 Définitions et résultats

**Hypothèses.** Soit un ouvert  $D \subset \mathbb{C}$  et  $f : \begin{matrix} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) \end{matrix}$  une fonction holomorphe dans  $D$  et  $z_0 \in D$ .

**Définition.** Pour  $N \in \mathbb{N}$ , le **polynôme de Taylor** de  $f$  de degré  $N$  en  $z_0$  est :

$$T_N f(z) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

**Résultat** (séries de Taylor). Soit  $R > 0$  et  $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  le plus grand disque de rayon  $R$  centré en  $z_0$  contenu dans  $D$ .

Convention : si  $D = \mathbb{C} \implies R = +\infty$  et  $D_R(z_0) = \mathbb{C}$

Alors :

1)

$$Tf(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} T_N f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

existe et est finie  $\forall z \in D_R(z_0)$ . L'expression  $Tf(z)$  s'appelle **la série de Taylor** de  $f$  en  $z_0$ .

2) De plus, on a  $f(z) = Tf(z) \quad \forall z \in D_R(z_0)$

$R$  est appelé **le rayon de convergence** de la série de Taylor.

3) Les coefficients de la série de Taylor sont reliés à la formule de Cauchy par le corollaire du §3.4. On a :

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où  $\gamma \subset D_R(z_0)$  est une courbe simple fermée régulière orientée positivement telle que  $z_0 \in \text{int } \gamma$ .

#### 4.1.2 Exemples

*Exemple (1).*

$$f(z) = e^z$$

est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . On a  $f^{(n)}(z) = e^z$  et  $f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Donc :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

*Exemple (2).*

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

est holomorphe dans  $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

Le plus grand disque centré en  $z_0 = 0$  contenu dans  $D$  est  $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

On a  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$  et  $f^{(n)}(0) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Donc :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$$

« **Série géométrique** » avec rayon de convergence  $R = 1$ .

*Exemple (3).*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

est holomorphe dans  $D = \mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$ .

Le plus grand disque centré en  $z_0 = 0$  et contenu dans  $D$  est  $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

On a :

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} \stackrel{\text{Ex. 2}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$$

Le rayon de convergence  $R = 1$

*Autre exemple : ex. 5, série  $\gamma$*

### 4.1.3 Applications

#### 1) Règle de l'Hôpital

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $f, g$  deux fonctions holomorphes au voisinage de  $z_0$  telles que  $f(z_0) = 0$ ,  $g(z_0) = 0$  et  $g'(z_0) \neq 0$ . Alors :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

*Preuve : ex.4, série 8*

#### 2) Théorème de Liouville

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction *bornée* et holomorphe *dans*  $\mathbb{C}$ , alors  $f$  est constante.

*Preuve : corrigé de l'ex. 18, p.248 (§11.3)*

## 4.2 Développement et série de Laurent d'une fonction holomorphe

### 4.2.1 Problématique, définitions et résultats

#### Motivation.

Le développement de Taylor d'une fonction  $f$  donne une série en puissances **positives** de  $z - z_0$  au voisinage d'un point  $z_0$  où  $f$  **est** holomorphe.

**But** : généralisation avec un développement en puissances **positives** et **négatives** de  $z - z_0$  où  $z_0$  peut être une **singularité** de  $f$ .

#### Hypothèses.

Soit  $D \subset \mathbb{C}$  un domaine simplement connexe,  $z_0 \in D$  et  $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $D \setminus \{z_0\}$ .

**Définition.** Pour  $N \in \mathbb{N}$ , le développement de Laurent de  $f$  de degré  $N$  au voisinage de  $z_0$  est :

$$\begin{aligned} L_N f(z) &= \sum_{n=-N}^N c_n (z - z_0)^n \\ &= \frac{c_{-N}}{(z - z_0)^N} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_N(z - z_0)^N \end{aligned}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où  $\gamma \subset D$  est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) orientée positivement telle que  $z_0 \in \text{int } \gamma$ .

**Résultat.** Soit  $R > 0$  et  $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  le plus grand disque de rayon  $R$  centré en  $z_0$  et contenu dans  $D$ . Alors :

1)

$$Lf(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} L_N f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

existe et est finie pour tout  $z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ . L'expression  $Lf(z)$  s'appelle la **série de Laurent** de  $f$  au voisinage de  $z_0$ .

2) De plus, on a  $f(z) = Lf(z) \quad \forall z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$  et  $R$  est appelé le **rayon de convergence** de la série de Laurent.

*Remarque.*

a) La série de Laurent de  $f$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Lf(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

— La première série

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

s'appelle la **partie singulière** de la série de Laurent.

— La deuxième série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

s'appelle la **partie régulière** de la série de Laurent.

b) Si  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe en  $z_0$ , alors la série de Laurent coïncide avec la série de Taylor.

En effet, la partie singulière de la série de Laurent est nulle puisque :

Pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ , on a :

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi = 0$$

par le Théorème de Cauchy (§3.2), car  $f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}$  est holomorphe dans  $D$ .

Les coefficients de la partie régulière donnent la série de Taylor car :

Pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ , on a :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

par le corollaire de la formule intégrale de Cauchy (§3.4), car  $f(\xi)$  est holomorphe dans  $D$ .

### 4.2.2 Définitions issues de la série de Laurent

**Définition (1).**  $z_0 \in \mathbb{C}$  est un **point régulier** de  $f \iff$  la partie singulière de la série de Laurent au voisinage de  $z_0$  est nulle.

C'est-à-dire :

$$Lf(z) = Tf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

**Définition (2).** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  est un **pôle d'ordre  $m$**  de  $f \iff c_{-m} \neq 0$  et  $c_{-k} = 0 \quad \forall k \geq m+1$ .

C'est-à-dire :

$$Lf(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

**Définition (3).**  $z_0 \in \mathbb{C}$  est une **singularité essentielle** (isolée) de  $f \iff c_{-n} \neq 0$  pour une infinité d'indices  $n$ .

C'est-à-dire :

$$Lf(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

**Définition (4).** Le **résidu** de  $f$  en  $z_0$ , noté  $\text{Rés}_{z_0}(f)$ , est la valeur du coefficient  $c_{-1}$  de la série de Laurent de  $f$  au voisinage de  $z_0$ .

C'est-à-dire :

$$\text{Rés}_{z_0}(f) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi$$

où  $\gamma \subset D$  avec  $z_0 \in \text{int } \gamma$

### 4.2.3 Exemples

*Exemple (1).* Soit

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

( $f$  holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ )

a) Au voisinage de  $z_0 = 0$ , on a  $Lf(z) = \frac{1}{z} + 0$

$c_{-1} = 1$  et  $c_{-n} = 0$  pour  $n \geq 2 \implies z_0$  est un pôle d'ordre 1 de  $f$  et  $\text{Rés}_0(f) := c_{-1} = 1$

b) Au voisinage de  $z_0 = 1$ , on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1 - z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n = Tf(z) = Lf(z)$$

(cf. série géométrique, donc le rayon de convergence est de 1)

Partie singulière nulle  $\implies z_0 = 1$  est un point régulier de  $f$  et  $\text{Rés}_1(f) = 0$

*Exemple (2).*

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z}$$

( $f$  holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). Au voisinage de  $z_0 = 0$ , on a :

$$Lf(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} + 0$$

On a  $c_{-1} = 2$ ,  $c_{-2} = 0$ ,  $c_{-3} = 1$  et  $c_{-n} = 0$  pour  $n \geq 4$ .

$\implies z_0 = 0$  est un pôle d'ordre 3 de  $f$  et  $\text{Rés}_0(f) := c_{-1} = 2$

*Exemple (3).* Soit

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z}$$

( $f$  holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}$ ). Au voisinage de  $z_0 = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 + z} &= \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1 - (-z)} \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n \end{aligned}$$

$\implies c_{-1} = 1$  et  $c_{-n} = 0$  pour  $n \geq 2 \implies z_0 = 0$  est un pôle d'ordre 1 de  $f$  et  $\text{Rés}_0(f) = 1$

*Exemple (4).*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad g(z) = \frac{\cos z}{z}$$

( $f$  et  $g$  holomorphes dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). Au voisinage de  $z_0 = 0$ , on a :

a)

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z} \sin z = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= 0 + 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots = Lf(z) \end{aligned}$$

$\implies z_0 = 0$  est un **point régulier** de  $f$  et  $\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = 0$  ( $z_0 = 0$  est une singularité éliminable).



b)

$$\begin{aligned}\frac{\cos z}{z} &= \frac{1}{z} \cos z = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \dots = Lf(z)\end{aligned}$$

$\implies z_0 = 0$  est un pôle d'ordre 1 de  $g$  et  $\text{Rés}_0(g) = 1$

*Exemple (5).*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

( $f$  holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). Au voisinage de  $z_0 = 0$ , on a :

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = Lf(z)$$

$c_{-n} = \frac{1}{n!} \neq 0 \ \forall n \geq 1 \implies z_0$  est une singularité essentielle de  $f$  et  $\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = \frac{1}{1!} = 1$ .

## 4.3 Étude des pôles d'une fonction et calcul des résidus

### 4.3.1 Méthodes de détection des pôles

**Définition.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $z_0 \in \mathbb{C}$ .  $z_0$  est un **zéro d'ordre  $n$**  de  $f$  lorsque :

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad \text{mais } f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

**Convention.** Si  $z_0$  n'est pas un zéro de  $f$ , alors  $f(z_0) \neq 0$  et puisque  $f^{(0)}(z_0) = f(z_0) \neq 0$ , en posant  $n = 0$ , on dit que «  $z_0$  est un zéro d'ordre 0 ».

**Méthode.**

- a) Soit  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  où  $p$  et  $q$  sont des fonctions holomorphes au voisinage de  $z_0 \in \mathbb{C}$  qui est un zéro d'ordre  $k$  de  $p$  et un zéro d'ordre  $\ell$  de  $q$ . Deux cas sont possibles :

**Définition.**

Cas 1 : si  $\ell > k$ , alors  $z_0$  est un pôle d'ordre  $\ell - k$  de  $f$ .

Cas 2 : si  $\ell \leq k$ , alors  $z_0$  est un point régulier de  $f$ . On dit que  $z_0$  est une **singularité éliminable** en posant  $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{q(z)}$ .

- b) Soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $D \setminus \{z_0\}$ , soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et

$$L = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]$$

Si  $L$  est finie et  $L \neq 0$ , alors  $z_0$  est un pôle d'ordre  $m$  de  $f$ .

*Exemple.*

1)

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z_0 = 0$$

Avec  $p(z) = \sin z$  et  $q(z) = z$ , on a  $p(0) = \sin(0) = 0$ ,  $p'(0) = \cos(0) = 1$ ,  $q(0) = 0$ ,  $q'(0) = 1$ . Alors  $k = \ell = 1$ . Donc  $z_0$  est un point régulier. C'est une singularité éliminable en posant :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{pour } z \neq 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 & \text{pour } z = 0 \end{cases}$$

2)

$$f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}, \quad z_0 = 0$$

Avec  $p(z) = z$  et  $q(z) = \sin^2 z$ , on a  $p(0) = 0$ ,  $p'(0) = 1 \neq 0$ ,  $q(0) = 0$ ,  $q'(z) \Big|_{z=0} = 2 \sin z \cos z \Big|_{z=0} = 0$ ,  $q''(z) \Big|_{z=0} = 2 \cos^2 z - 2 \sin^2 z \Big|_{z=0} = 2 \neq 0$ . Alors  $k = 1$  et  $l = 2$ . Donc  $z_0 = 0$  est un pôle d'ordre  $\ell - k = 1$  de  $f$ .

3)

$$f(z) = \frac{\sin(z - \pi)}{(z - \pi)^3}$$

$z_0 = \pi$  est un pôle d'ordre 2 de  $f$  car

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - \pi)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ (z - \pi)^2 \frac{\sin(z - \pi)}{(z - \pi)^3} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sin(z - \pi)}{z - \pi} = 1$$

Par ailleurs, on constate

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - \pi)^3 f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ (z - \pi)^3 \frac{\sin(z - \pi)}{(z - \pi)^3} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \sin(z - \pi) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - \pi) f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ (z - \pi) \frac{\sin(z - \pi)}{(z - \pi)^3} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z - \pi} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sin(z - \pi)}{z - \pi} = \infty$$

*Remarque.* Les preuves des critères a) et b) découlent du développement en série de Laurent et de la définition de pôle (§4.2.1 et §4.2.2).

### 4.3.2 Formules de calcul du résidu d'une fonction

#### Méthode.

- a) Soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $D \setminus \{z_0\}$ , soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Si  $z_0$  est un pôle d'ordre  $m$  de  $f$ , alors :

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

- b) Soit  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  où  $p$  et  $q$  sont des fonctions holomorphes au voisinage de  $z_0 \in \mathbb{C}$  telles que  $z_0$  est un zéro d'ordre 1 de  $q(z_0)$  et  $p(z_0) \neq 0$ . Alors :

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

#### Exemple.

1)

$$f(z) = \frac{3z^2}{z+2}$$

alors  $z_0 = -2$  est un pôle d'ordre 1 de  $f$ .

$$\Rightarrow \text{Rés}_{-2}(f) = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{3z^2}{z+2} = 12$$

2)

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-5)^3}$$

alors  $z_0 = 5$  est un pôle d'ordre 3 de  $f$ .

$$\Rightarrow \text{Rés}_5(f) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 5} \frac{d^2}{dz^2} \left[ (z-5)^3 \frac{e^z}{(z-5)^3} \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 5} e^z = \frac{e^5}{2}$$

3)

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 + 1}$$

comme  $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ , alors  $z_0 = i$  et  $z_0 = -i$  sont deux pôles d'ordre 1 de  $f$ .

$$\Rightarrow \text{Rés}_i(f) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)} = \frac{\sin i}{2i}$$

$$\Rightarrow \text{Rés}_{-i}(f) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)} = \frac{\sin(-i)}{-2i} = \frac{\sin i}{2i}$$

4)

$$f(z) = \frac{3z^2}{z+2}$$

et  $z_0 = -2$ . Avec  $p(z) = 3z^2$  et  $q(z) = z+2$ , on a que  $z_0 = -2$  est un zéro d'ordre 1 de  $q$  avec  $p(-2) = 12$  et  $q'(-2) = 1$ .

$$\implies \text{Rés}_{-2}(f) = \frac{12}{1} = 12$$

### 4.3.3 Démonstration des formules

*Démonstration.* a) Si  $m = 1$ , la série de Laurent de  $f$  au voisinage de  $z_0$  donne :

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Alors  $(z - z_0)f(z) = c_{-1} + F(z)$  avec  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1}$

$$\implies \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] = c_{-1} + \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = c_{-1} =: \text{Rés}_{z_0}(f)$$

Si  $m = 2$ , la série de Laurent de  $f$  au voisinage de  $z_0$  donne :

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$(z - z_0)^2 f(z) = c_{-2} + c_{-1}(z - z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+2}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] &= \frac{d}{dz} \left[ c_{-2} + c_{-1}(z - z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+2} \right] \\ &= 0 + c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+2) (z - z_0)^{n+1} \\ &= c_{-1} + G(z) \end{aligned}$$

où

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+2) (z - z_0)^{n+1}$$

Donc

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = c_{-1} + \lim_{z \rightarrow z_0} G(z) = c_{-1} =: \text{Rés}_{z_0}(f)$$

Si  $m \geq 3$ , raisonnement analogue et preuve par récurrence qui fait apparaître le terme  $\frac{1}{(m-1)!}$  dans la formule

b) On applique la formule a) à  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  où  $z_0$  est un pôle d'ordre 1 de  $f$ .

*Cf. ex. 5, série 9*

□

## Chapitre 5

# Théorème des résidus et applications au calcul d'intégrales réelles

### 5.1 Théorème des résidus

#### 5.1.1 Énoncé

**Théorème.** Soient  $D \subset \mathbb{C}$  un ouvert simplement connexe,  $\gamma$  une courbe simple fermée régulière (par morceaux) contenue dans  $D$  orientée positivement et  $z_1, z_2, \dots, z_m \in \text{int} \gamma$  tels que  $z_i \neq z_j$  pour  $i \neq j$ . Si une fonction  $f : D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe, alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(f)$$

*Note.* Si une fonction est holomorphe sauf peut-être en un nombre fini de points  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , alors l'intégrale de  $f$  le long de n'importe quelle courbe simple fermée régulière  $\gamma$  contenue dans  $D$  et orientée positivement est donnée par la somme (multipliée par  $2\pi i$ ) des résidus de la fonction aux points  $z_k$  (où  $f$  n'est pas holomorphe) enfermés à l'intérieur de  $\gamma$ .

#### 5.1.2 Exemples

*Exemple (1).* Soit

$$f(z) = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1} + \frac{1}{z^2}$$

et  $\gamma \subset \mathbb{C}$  une courbe régulière simple fermée orientée positivement.  
Discuter  $\int_{\gamma} f(z) dz$  en fonction de  $\gamma$ .

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{2z(z-1) + 3z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}$$

$z_1 = 0$  est un pôle d'ordre 2 de  $f$  ( $p(0) \neq 0$ ,  $q(0) = 0$ ,  $q'(0) = 0$  et  $q''(0) \neq 0$ ).

$z_2 = 1$  est un pôle d'ordre 1 de  $f$  ( $p(1) \neq 0$ ,  $q(1) = 0$  et  $q'(1) \neq 0$ ).

On a

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z_1}(f) &= \text{Rés}_0(f) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} [z^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[ 2z + \frac{3z^2}{z-1} + 1 \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[ 2 + \frac{6z(z-1) - 3z^2}{(z-1)^2} \right] = 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z_2}(f) &= \text{Rés}_1(f) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{2(z-1)}{z} + \frac{3(z-1)}{z-1} + \frac{z-1}{z^2} \right] \\ &= 0 + 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

### Distinction de cinq cas

**1<sup>er</sup> cas :** 0 et 1  $\in \text{int } \gamma$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Rés}_0(f) + \text{Rés}_1(f)] = 2\pi i [2 + 3] = 10\pi i$$

**2<sup>e</sup> cas :** 0  $\in \text{int } \gamma$  mais 1  $\notin \overline{\text{int } \gamma}$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{ Rés}_0(f) = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i$$

**3<sup>e</sup> cas :** 0  $\notin \overline{\text{int } \gamma}$  mais 1  $\in \text{int } \gamma$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{ Rés}_1(f) = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$$

**4<sup>e</sup> cas :** 0 et 1  $\notin \overline{\text{int } \gamma}$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (\text{Théorème de Cauchy})$$

**5<sup>e</sup> cas :** 0 ou 1  $\in \gamma$

L'intégrale  $\int_{\gamma} f(z) dz$  n'est pas définie.

*Exemples : ex 2 et 3, série 9*

Exemple (2). Soit

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$$

et  $\gamma$  une courbe simple fermée régulière orientée positivement.

Discuter la valeur de  $\int_{\gamma} f(z)dz$  en fonction de  $\gamma$ .

$f$  n'est pas holomorphe en  $z_1 = 0$ . Au voisinage de  $z_1 = 0$ , on a :

$$Lf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{z^2} \right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}}$$

$\implies z_1 = 0$  est une singularité essentielle (cf. §4.2.2).

On a que  $\text{Rés}_0(f) := c_{-1} = 0$  (pas de terme  $z^{-1}$  dans  $Lf(z)$ ).

**Distinction de trois cas**

**1<sup>er</sup> cas :**  $0 \in \text{int } \gamma$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \text{ Rés}_0(f) = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

(mais  $f$  n'est pas holomorphe en  $z = 0$ )

**2<sup>e</sup> cas :**  $0 \notin \overline{\text{int } \gamma}$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad (\text{Théorème de Cauchy})$$

$f$  holomorphe dans un domaine  $D$  simplement connexe tel que  $\overline{\text{int } \gamma} \subset D \implies \gamma \subset \text{int } \gamma \subset D$

**3<sup>e</sup> cas :**  $0 \in \gamma$

L'intégrale  $\int_{\gamma} f(z)dz$  n'est pas définie.

### 5.1.3 Démonstration du Théorème des résidus

*Démonstration.* Soient  $\gamma_k$  avec  $k = 1, 2, \dots, m$   $m$  courbes simples fermées régulières orientées positivement contenues dans  $\text{int } \gamma$  et contenant  $z_k$  dans leur intérieur.

Comme  $f : \overline{\text{int } \gamma} \setminus \bigcup_{k=1}^m \text{int } \gamma_k \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe, en appliquant le corollaire du Théorème de Cauchy (cf. §3.2.4), on a :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z)dz := 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(f)$$

L'intégrale dans la somme est le coefficient  $c_{-1}$  de la série de Laurent de  $f$  au voisinage de  $z_k$  multipliée par  $2\pi i$ . La deuxième égalité est donnée par la définition du résidu de  $f$  en  $z_k$  (§4.2.2).  $\square$



*Remarque.* Si  $f$  est holomorphe dans  $D$ , alors pour toute courbe simple  $\gamma$  fermée régulière dans  $D$ , il n'y a aucune singularité  $z_k \in \text{int } \gamma$ . Dans ce cas,  $\sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(f) = 0$  et le Théorème des résidus donne le résultat  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  du Théorème de Cauchy (§3.2.1).

## 5.2 Application du Théorème des résidus au calcul d'intégrales réelles

### 5.2.1 Calcul d'intégrale de fonctions périodiques

a) But : calculer des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

avec  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

où  $p$  et  $q$  sont des fonctions polynômiales avec  $q(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0 \forall \theta \in [0, 2\pi]$

b) Méthode :

— On pose  $z = e^{i\theta}$  et on a donc

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)$$

— On définit :

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} ; z \mapsto \tilde{f}(z) = \frac{1}{iz} f \left( \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right)$$

On considère  $\gamma$  le cercle *unité* centré en  $z = 0$  orienté positivement et  $z_k$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$  les singularités de  $\tilde{f}$  à l'intérieur de  $\gamma$ .

$z_k \notin \gamma$  car  $q(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$  pour  $\theta \in [0, 2\pi] \implies$  pas de singularité de  $\tilde{f}$  sur  $\gamma$

— On applique le Théorème des résidus à la fonction  $\tilde{f}$  intégrée le long de  $\gamma$  :

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(\tilde{f})$$

Mais on remarque que :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz &= \int_{\gamma} \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{i\theta}} f(\cos \theta, \sin \theta) ie^{i\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta
\end{aligned}$$

est exactement l'intégrale *réelle* que l'on veut calculer.

Le résultat est :

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(\tilde{f})$$

où  $z_k$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$  sont les singularités de  $\tilde{f}$  à l'intérieur du cercle unité  $\gamma$  centré en  $z = 0$ .

c) Exemples

*Exemple (1).* Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} - \sin \theta}$$

On a  $f(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{\sqrt{5} - \sin \theta}$ , et  $\sqrt{5} - \sin \theta \neq 0$  pour  $\theta \in [0, 2\pi]$  et

$$\tilde{f} := \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{iz} \frac{1}{\sqrt{5} - \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{-z^2 + 2i\sqrt{5}z + 1}$$

Les singularités de  $\tilde{f}$  sont les zéros de  $-z^2 + 2i\sqrt{5}z + 1$ .  $\Delta = (2i\sqrt{5})^2 + 4 = -16$

$$z_1 = \frac{-2i\sqrt{5} + 4i}{-2} = i(\sqrt{5} - 2)$$

$$z_2 = \frac{-2i\sqrt{5} - 4i}{-2} = i(\sqrt{5} + 2)$$

On a que  $-z^2 + 2i\sqrt{5}z + 1 = -(z - z_1)(z - z_2) = -[z - i(\sqrt{5} - 2)][z - i(\sqrt{5} + 2)]$   
et

$$\tilde{f}(z) = \frac{-2}{[z - i(\sqrt{5} - 2)][z - i(\sqrt{5} + 2)]}$$

Soit  $\gamma$  le cercle unité centré en  $z = 0$  et orienté positivement.

$$0 < \operatorname{Im} z_1 = \sqrt{5} - 2 < 1 \implies z_1 \in \operatorname{int} \gamma$$

$$\operatorname{Im} z_2 = \sqrt{5} + 2 > 1 \implies z_2 \notin \operatorname{int} \gamma$$

On a :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} - \sin \theta} = 2\pi i \operatorname{R\acute{e}s}_{z_1}(\tilde{f})$$

$z_1 = i(\sqrt{5} - 2)$  est un p\^ole d'ordre 1 de  $\tilde{f}$

$$\begin{aligned} \operatorname{R\acute{e}s}_{z_1}(\tilde{f}) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \tilde{f}(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow i(\sqrt{5}-2)} (z - i(\sqrt{5} - 2)) \frac{-2}{[z - i(\sqrt{5} - 2)][z - i(\sqrt{5} + 2)]} \\ &= \frac{-2}{-4i} = \frac{1}{2i} \end{aligned}$$

Le r\'esultat est

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} - \sin \theta} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

*Exemple (2).* Calculer :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$$

On a  $f(\sin \theta, \cos \theta) = \frac{1}{2 + \cos \theta} \quad 2 + \cos \theta \neq 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

$$\tilde{f} := \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{iz} \frac{1}{2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i(z^2 + 4z + 1)}$$

Les singularit\'es de  $\tilde{f}$  sont les z\'eros de  $z^2 + 4z + 1$ .  $\Delta = 12$

$$z_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 2$$

$$z_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -(\sqrt{3} + 2)$$

On a  $z^2 + 4z + 1 = (z - z_1)(z - z_2) = (z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})$  et

$$\tilde{f} = \frac{2}{i(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})}$$

Soit  $\gamma$  le cercle unité centré en  $z = 0$  orienté positivement.

$$-1 < z_1 = \sqrt{3} - 2 < 0 \implies z_1 \in \text{int } \gamma$$

$$z_2 = -(\sqrt{3} + 2) < -1 \implies z_2 \notin \text{int } \gamma$$

Donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = 2\pi i \text{Rés}_{z_1}(\tilde{f})$$

$z_1 = \sqrt{3} - 2$  est un pôle d'ordre 1 de  $\tilde{f}$ , donc :

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z_1}(\tilde{f}) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \tilde{f}(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{3}-2} (z + 2 - \sqrt{3}) \frac{2}{i(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Le résultat est :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

*Autres exemples : ex 1 à 4, série 10 et ex 1, série 11*

### 5.2.2 Calcul d'intégrales généralisées

1. But : calculer des intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \ (\alpha \geq 0), \ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Où  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , et  $p, q$  sont des fonctions polynômiales telles que  $q(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$  et  $\text{degré}(q) - \text{degré}(p) \geq 2$ .

*Remarque.* Les conditions sur  $p$  et  $q$  impliquent que l'intégrale généralisée  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  existe.

2. Méthode : on choisit un nombre réel  $r > 0$  et on considère la courbe  $\gamma_r := L_r \cup C_r$  orientée positivement, où :

- $L_r$  est le segment de droite  $[-r, r]$  situé sur l'axe réel,
- $C_r$  est le demi-cercle de rayon  $r$  centré en  $z = 0$  et situé dans le demi-plan supérieur.

$\gamma_r = L_r \cup C_r$  est une courbe simple fermée par morceaux.

On définit la fonction  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $z \mapsto g(z) = f(z)e^{i\alpha z} = \frac{p(z)}{q(z)}e^{i\alpha z}$ .

*Constatation.* Les seules singularités de  $g$  sont les zéros de  $q$ . Par hypothèse,  $q$  est une fonction polynômiale et  $q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , alors  $q$  possède un nombre *fini* de zéros et aucun ne se trouve situé sur l'axe réel.

**Idée.** On choisit  $r > 0$  suffisamment grand pour que **tous** les zéros de  $q$  situés dans le *demi-plan supérieur* soient à l'intérieur de  $\gamma_r$ .

En appliquant le Théorème des résidus à  $g(z) = f(z)e^{i\alpha z}$  intégrée le long de  $\gamma_r$ , on a :

$$\int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(g)$$

où  $z_k$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$  sont les singularités de  $f$  (i.e. les zéros de  $q$ ) situées dans le demi-plan supérieur.

D'autre part, puisque  $\gamma_r = L_r \cup C_r$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z} dz &= \int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z} dz + \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z} dz \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z} dz &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z} dz + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z} dz \end{aligned}$$

### Étude de chaque limite

(a)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\alpha z} dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(g) \right] = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(g)$$

(b)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{L_r} f(z)e^{i\alpha z} dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x)e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx$$

où  $z = x \in [-r, r] \subset \mathbb{R}$ . Ceci est l'intégrale généralisée que l'on veut calculer !

(c) On montre que si  $\deg(q) - \deg(p) \geq 2$ , alors :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z} dz = 0$$

**Résultat (final).** On obtient la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rés}_{z_k}(g)$$

où  $g(z) = f(z)e^{i\alpha z}$  et  $z_k$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$  sont les singularités de  $f$  situées dans le demi-plan supérieur (i.e. les zéros de  $q$  tels que  $\text{Im } z_k > 0$ ).

3.

*Exemple (1).* Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx$$

où  $\alpha = 0$  et  $f(x) = \frac{x^2}{x^4+16}$ . On a  $p(x) = x^2$  et  $q(x) = x^4 + 16$ . Conditions vérifiées :  $q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  et  $\deg(q) - \deg(p) = 2$ .

Calcul avec la méthode des résidus avec  $g(z) = f(z) = \frac{z^2}{z^4+16}$ .

Singularités de  $f(z) \iff$  recherche des zéros de  $q(z)$

$q(z) = 0 \iff z^4 + 16 = 0 \iff z^4 = -16 \iff 16e^{i\pi} \iff z = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{4})}$  avec  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Les singularités sont :

**pour  $n = 0$**

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}(1 + i)$$

**pour  $n = 1$**

$$z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = \dots = \sqrt{2}(-1 + i)$$

**pour  $n = 2$**

$$z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = \dots = -\sqrt{2}(1 + i)$$

**pour  $n = 3$**

$$z_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = \dots = -\sqrt{2}(-1 + i)$$

Ce sont des pôles d'ordre 1, car  $z^4 + 16 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$ .

Les seuls pôles qui contribuent sont  $z_1$  et  $z_2$  situés dans le demi-plan *supérieur*.

Calcul des résidus de  $f$  en  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\text{Rés}_{z_1}(f) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4\sqrt{2}(1+i)} = \frac{1-i}{8\sqrt{2}}$$

$$\text{Rés}_{z_2}(f) = \frac{p(z_2)}{q'(z_2)} = \frac{z_2^2}{4z_2^3} = \frac{1}{4z_2} = \frac{1}{4\sqrt{2}(-1+i)} = -\frac{1+i}{8\sqrt{2}}$$

L'intégrale vaut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx = 2\pi i [\text{Rés}_{z_1}(f) + \text{Rés}_{z_2}(f)] = 2\pi i \left[ \frac{1-i}{8\sqrt{2}} - \frac{1+i}{8\sqrt{2}} \right] = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

Exemple (2). Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{x^2 + 1} dx$$

On utilise la formule d'Euler

$$e^{i5x} = \cos 5x + i \sin 5x$$

et on peut écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Re} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i5x}}{x^2 + 1} dx \right]$$

On considère  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx$  où  $\alpha = 5$  et  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

On a  $p(x) = 1$  et  $q(x) = x^2 + 1$ . Conditions vérifiées :  $q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  et  $\deg(p) - \deg(q) = 2$ .

Méthode des résidus avec  $g(z) = f(z)e^{i5z} = \frac{e^{i5z}}{z^2 + 1}$ .

Singularités de  $f \implies$  zéros de  $q \implies q(z) = 0 \implies z^2 + 1 = 0 \implies z^2 = -1 \implies z_1 = i$  et  $z_2 = -i$ . Ce sont des pôles d'ordre 1 et  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ .

Le seul pôle qui contribue est  $z_1 = i$  situé dans le demi-plan supérieur.

$$\operatorname{Rés}_{z_1}(g) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)g(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{i5z}}{(z - i)(z + i)} = \frac{e^{i5i}}{2i} = \frac{e^{-5}}{2i}$$

Alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i5x}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{Rés}_i(g) = 2\pi i \frac{e^{-5}}{2i} = \frac{\pi}{e^5}$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Re} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i5x}}{x^2 + 1} dx \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{\pi}{e^5} \right] = \frac{\pi}{e^5}$$

Autres exemples : ex. 2 et 3, série 11

Démonstration. Preuve de

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z)e^{i\alpha z} dz = 0$$

Sur  $C_r$ , on a  $z = re^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0, \pi]$  et  $dz = ire^{i\theta} d\theta$

$$\begin{aligned}
\implies \int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z} dz &= \int_0^\pi f(re^{i\theta}) e^{i\alpha r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta \\
&= i r \int_0^\pi f(re^{i\theta}) e^{i\alpha r (\cos \theta + i \sin \theta)} e^{i\theta} d\theta \\
&= i r \int_0^\pi f(re^{i\theta}) e^{-\alpha r \sin \theta} e^{i\alpha r \cos \theta} e^{i\theta} d\theta \\
&= i r \int_0^\pi f(re^{i\theta}) e^{-\alpha r \sin \theta} e^{i(\alpha r \cos \theta + \theta)} d\theta
\end{aligned}$$

Alors

$$\left| \int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq r \int_0^\pi \left| f(re^{i\theta}) \right| e^{-\alpha r \sin \theta} \left| e^{i(\alpha r \cos \theta + \theta)} \right| d\theta$$

1. Puisque  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  avec  $\deg(q) - \deg(p) \geq 2$ , alors on a que  $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z|$  suffisamment grand,  $C \in \mathbb{R}_+^*$  est une constante.
2. Comme  $\alpha \geq 0$ ,  $r > 0$  et  $\sin \theta \geq 0$  pour  $\theta \in [0, \pi]$ , on a que  $-\alpha r \sin \theta \leq 0$ .

$$0 \leq e^{-\alpha r \sin \theta} \leq 1$$

3. De plus,  $|e^{i(\theta + \alpha r \cos \theta)}| = 1$  car  $|e^{ix}| = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Donc on obtient :

$$\left| \int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq r \int_0^\pi \frac{C}{r^2} d\theta = \frac{C}{r} \int_0^\pi d\theta = \frac{C\pi}{r}$$

Puisque

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{C\pi}{r} = 0 \implies \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0$$

□



# Bibliographie

[1] Bernard Dacogna et Chiara Tanteri. *Analyse avancée pour ingénieurs*. PPUR, 2017.

Toutes les références (numéro de théorème, définition, etc.) sont faites à ce livre.

## Contributeurs

- Robin Mamie (IN)
- Eric Jollès (SC)
- Yves Zumbach (IN)
- Victor Cochard (IN)
- Ghali Chraibi (SC)