POLYTECH SORBONNE

Algorithmique générale
MAIN-3, année 2022
Séance TP N°1
Février 2022
VOYLES Evan

Objectif

☞ Complexité en moyenne.

Problème [Complexité en moyenne du tri rapide]

1. Réaliser un suivi à la trace de la procédure `partitionBis` appliquée aux instances suivantes :

$$I_1 = [2,6,0,4,3,1,5], I_2 = [7,6,5,4,3,2,1] \text{ et } I_3 = [1,2,3,4,5,6,7].$$

Instruction	Description/Remarque	T	indpiv	pospiv	x	j
partitionBis(I_1, 0, 6)	T <- I_1, deb <- 0, fin <- 6	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]				
indpiv <- deb	indipiv <- 0	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0			
pospiv <- deb	pospiv <- 0	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0	0		
x <- T(deb)	x <- T(0)	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0	0	2	
[Pour] j <- deb + 1	j <- 0 + 1	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0	0	2	1
[Pour] j <= fin	1 <= 6 est vrai, la boucle continue	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0	0	2	1
[Si] T(j) <= x	6 <= 2 est faux, on retourne a la boucle	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0	0	2	1
[Pour] j <- j + 1	j < - 1 + 1	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0	0	2	2
[Pour] j <= fin	2 <= 6 est vrai, la boucle continue	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0	0	2	2
[Si] T(j) <= x	0 <= 2 est vrai	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0	0	2	2
pospiv <- pospiv + 1	pospiv <- 0 + 1	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	2
[Si] j >pospiv	2 > 1 est vrai	[2, 6, 0, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	2
echanger(T, pospiv, j)	T(1) <- 0, T(2) <- 6	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	2
[Pour] j <- j + 1	j < - 2 + 1	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	3
[Pour] j <= fin	3 <= 6 est vrai, la boucle continue	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	3
[Si] T(j) <= x	4 <= 2 est faux	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	3
[Pour] j <- j + 1	j < - 3 + 1	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	4
[Pour] j <= fin	4 <= 6 est vrai, la boucle continue	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	4
[Si] T(j) <= x	3 <= 2 est faux	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	4
[Pour] j <- j + 1	j < - 4 + 1	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	5
[Pour] j <= fin	5 <= 6 est vrai, la boucle continue	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	5
[Si] T(j) <= x	1 <= 2 est vrai	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	1	2	5
pospiv <- pospiv + 1	pospiv <- 1 + 1	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	2	2	5
[Si] j >pospiv	5 > 2 est vrai	[2, 0, 6, 4, 3, 1, 5]	0	2	2	5
echanger(T, pospiv, j)	T(2) <- 1, T(5) <- 6	[2, 0, 1, 4, 3, 6, 5]	0	2	2	5
[Pour] j <- j + 1	j < - 5 + 1	[2, 0, 1, 4, 3, 6, 5]	0	2	2	6
[Pour] j <= fin	6 <= 6 est vrai, la boucle continue	[2, 0, 1, 4, 3, 6, 5]	0	2	2	6
[Si] T(j) <= x	5 <= 2 est faux	[2, 0, 1, 4, 3, 6, 5]	0	2	2	6
[Pour] j <- j + 1	j < - 6 + 1	[2, 0, 1, 4, 3, 6, 5]	0	2	2	7
[Pour] j <= fin	7 <= 6 est faux, la boucle termine	[2, 0, 1, 4, 3, 6, 5]	0	2	2	7
[Si] indpiv < pospiv	0 < 2 est vrai	[2, 0, 1, 4, 3, 6, 5]	0	2	2	7
echanger(T, indpiv, pospiv)	T(0) <- 1, T(2) <- 2	[1, 0, 2, 4, 3, 6, 5]	0	2	2	7

Nombre d'**échanges** : 3, Nombre de **comparaison** : 6

Notre tableau en sorti $[1,0,2,4,3,6,4]$ a été partitionné en deux parties autour du pivot 2. A gauche, l'on a $T_g = [1,0]$ dont tous les éléments $g \in T_g$ satisfaitent $g < 2$ et à droite l'on a $T_d = [4,3,6,5] \mid \forall d \in T_d,\ d > 2$. La schéma de partition de l'algorithme `partitionBis` parcours le tableau pour compter le nombre des valeurs qui sont inférieures au pivot. En le comptant, s'il il y a des valuers plus grand que le pivot dans le soustableau à gauche, `partitionBis` va effectuer un échange. Donc, on verra que ce schéma doit opérer $n-2$ comparaisons des éléments du tableau à trier.

Instruction	Description/Remarque	T	indpiv	pospiv	x	j
partitionBis(I_2, 0, 6)	T <- I_2, deb <- 0, fin <- 6	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]				
indpiv <- deb	indpiv <- 0	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0			
pospiv <- deb	pospiv <- 0	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	0		
x <- T(deb)	x <- 7	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	0	7	
[Pour] j <- deb + 1	j <- 0 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	0	7	1
[Pour] j <= fin	1 <= 6 est vrai, la boucle continue	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	0	7	1
[Si] T(j) <= x	6 <= 7 est vrai	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	0	7	1
pospiv <- pospiv + 1	pospiv <- 0 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	1	7	1
[Si] j > pospiv	1 > 1 est faux	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	1	7	1
[Pour] j <- j + 1	j <- 1 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	1	7	2
[Pour] j <= fin	2 <= 6 est vrai, la boucle continue	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	1	7	2
[Si] T(j) <= x	5 <= 7 est vrai	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	1	7	2
pospiv <- pospiv + 1	pospiv <- 1 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	2	7	2
[Si] j > pospiv	2 > 2 est faux	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	2	7	2
[Pour] j <- j + 1	j <- 2 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	2	7	3
[Pour] j <= fin	3 <= 6 est vrai, la boucle continue	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	2	7	3
[Si] T(j) <= x	4 <= 7 est vrai	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	2	7	3
pospiv <- pospiv + 1	pospiv <- 2 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	3	7	3
[Si] j > pospiv	3 > 3 est faux	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	3	7	3
[Pour] j <- j + 1	j <- 3 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	3	7	4
[Pour] j <= fin	4 <= 6 est vrai, la boucle continue	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	3	7	4
[Si] T(j) <= x	3 <= 7 est vrai	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	3	7	4
pospiv <- pospiv + 1	pospiv <- 3 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	4	7	4
[Si] j > pospiv	4 > 4 est faux	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	4	7	4
[Pour] j <- j + 1	j <- 4 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	4	7	5
[Pour] j <= fin	5 <= 6 est vrai, la boucle continue	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	4	7	5
[Si] T(j) <= x	2 <= 7 est vrai	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	4	7	5
pospiv <- pospiv + 1	pospiv <- 4 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	5	7	5
[Si] j > pospiv	5 > 5 est faux	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	5	7	5
[Pour] j <- j + 1	j <- 5 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	5	7	6
[Pour] j <= fin	6 <= 6 est vrai, la boucle continue	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	5	7	6
[Si] T(j) <= x	1 <= 7 est vrai	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	5	7	6
pospiv <- pospiv + 1	pospiv <- 5 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	6	7	6
[Si] j > pospiv	5 > 5 est faux	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	6	7	6
[Pour] j <- j + 1	j <- 6 + 1	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	6	7	7
[Pour] j <= fin	7 <= 6 est faux, la boucle termine	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	6	7	7
[Si] indpiv < pospiv	0 < 6 est vrai	[7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]	0	6	7	7
echanger(T, indpiv, pospiv)	T(0) <- 1, T(6) <- 7	[1, 6, 5, 4, 3, 2, 7]	0	6	7	7

Nombre d'échanges : 1, Nombre de comparaison : 6

Chaque élément du tableau qu'on à comparé avec le pivot en était inférieur. Cependant, on a réussi a partitionner le tableau avec un seul échange dans le dernier étape. Avec le pivot 7, $T_g = [1, 6, 5, 4, 3, 2]$ et il vérifie $g < 7 \ \forall g \in T_g$.

Instruction	Description/Remarque	T	indpiv	pospiv	x	j
partitionBis(I_3, 0, 6)	T <- I_3, deb <- 0, fin <- 6	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]				
indpiv <- deb	indpiv <- 0	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0			
pospiv <- deb	pospiv <- 0	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0		
x <- T(deb)	x <- 1	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	
[Pour] j <- deb + 1	j <- 0 + 1	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	1
[Pour] j <= fin	1 <= 6 est vrai, la boucle continue	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	1
[Si] T(j) <= x	2 <= 1 est faux	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	1
[Pour] j <- j + 1	j <- 1 + 1	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	2
[Pour] j <= fin	2 <= 6 est vrai, la boucle continue	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	2
[Si] T(j) <= x	3 <= 1 est faux	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	2
[Pour] j <- j + 1	j <- 2 + 1	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	3
[Pour] j <= fin	3 <= 6 est vrai, la boucle continue	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	3
[Si] T(j) <= x	4 <= 1 est faux	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	3
[Pour] j <- j + 1	j <- 3 + 1	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	4
[Pour] j <= fin	4 <= 6 est vrai, la boucle continue	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	4
[Si] T(j) <= x	5 <= 1 est faux	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	4
[Pour] j <- j + 1	j <- 4 + 1	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	5
[Pour] j <= fin	5 <= 6 est vrai, la boucle continue	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	5
[Si] T(j) <= x	6 <= 1 est faux	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	5
[Pour] j <- j + 1	j <- 5 + 1	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	6
[Pour] j <= fin	6 <= 6 est vrai, la boucle continue	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	6
[Si] T(j) <= x	7 <= 1 est faux	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	6
[Pour] j <- j + 1	j <- 6 + 1	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	7
[Pour] j <= fin	7 <= 6 est faux, la boucle termine	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	7
[Si] indpiv < pospiv	0 < 0 est faux	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]	0	0	1	7

Nombre d'échanges : 0, Nombre de comparaison : 6

Tous les éléments de $I_3 = [1,2,3,4,5,6,7]$ sont déjà triés donc on effectue aucun échange. On constate qu'il y a encore $n-2=5$ comparaisons parce qu'on a traversé le tableau à partir du premier élément jusqu'a l'avant-dernier élément. Le tableau est, bien entendu, bien partitionné autor $p = 1$, tel que $T_d = [2,3,4,5,6,7]$.

2. Démontrer que la procédure `partitionBis` est correcte et analyser sa complexité.

Pour démontrer que la procédure `partitionBis` est correcte on doit prouver que donné n'importe quel instance, l'algorithme `partitionBis` renvoie un tableau qui est partitionné. Pour procéder, on définit donc un tableau partitionné est celui dont tous les éléments à gauche d'un élément dit pivot est inférieure au pivot, et tout élément à droite du pivot est supérieure au pivot. Afin d'analyser si le programme est correcte ou pas, on va s'orienter autour de deux questions principales : Est-ce que l'élément qu'on a choisit d'être le pivot finit d'être dans la bonne place ? Si oui, est-ce que tous les éléments à gauche sont inférieurs au pivot et respectivement supérieurs pour les éléments à droite. Commençons avec la question de la position du pivot.

Si on observe notre suivie à la trace pour les trois instances, on voit que l'algorithme parcours le tableau à partir du deuxième élément (le premier est choisi pour être le pivot), jusqu'à la fin. Si la valeur qu'on visite est inférieur au pivot, on incrémente `pospiv`. En effet, on parcours le tableau et on compte le nombre d'éléments qui sont inférieurs au pivot. En d'autre termes, on compte le nombre de valeurs qui doivent être à gauche du pivot dans la configuration finale. Pour prouver que le pivot se trouve *toujours* dans la bonne place, on considère l'effet de la dernière condition `if`. La condition est : Si indpiv < pospiv, échange le pivot avec l'élément à T(pospiv). Il n'est pas évident mais avec un peu de reflexion on raisonne que indpiv reste 0 pendant l'exécution de l'algorithme, donc le seule fois où cette condition n'est pas satisfaite c'est si pospiv n'est jamais incrémenté. Quand est-ce que cela se passe ? On a vu que pour l'instance I_3, il n'y a aucun élément entre $T(1)$ et $T(fin)$ qui est moins que le pivot, 1. Donc, la condition $T(j)$ n'est jamais satisfaite et du coup on incrémente jamais la variable pospiv. Comme $0 < 0$ est faux, on fais pas bouger le pivot quand il est deja à la bonne position. Comme on choisi le premier élément pour chaque appel à `partitionBis`, on effectue un échange du pivot si et seulement si il n'est pas dans la bonne place. Et donc, où est-ce qu'on fait bouger le pivot si cette condition est vérifiée ? On le met à T(pospiv), la position dans le tableau avec pospiv éléments à gauche, qu'on va démontrer qu'ils sont tous inférieurs au pivot. Par conséquent, la procédure `partitionBis` assure que le pivot finit toujours dans la bonne position.

Procédons pour démontrer que tous les éléments à gauche du pivot sont inférieurs au pivot. Pour un tableau de taille n, on peut distinguer les deux cas suivants :

- ☞ le pivot x est dans la bonne position au début
- ☞ le pivot x n'est pas dans la bonne position au début

3. Quels changements, s'ils existent, à apporter au pseudo-code du tri rapide ?

La valeur de sortie de la procédure `partitionBis` est exactement la même chose que pour `partition` parce que toutes les deux renvoient l'indice de la position finale de l'élément choisit comme le pivot. Si on donne en entrée ~~le même tableau et on choisit le même élément comme pivot, on renvoie la même position finale. Donc, le seul~~

changement que l'on doit apporter au pseudo-code du tri rapide est de changer la ligne 10 pour affecter le résultat de `partitionBis(T, deb, fin)` à π, au lieu de lui affecter le résultat de `partition`. Pour être clair, à la place d'appeler la procédure `partition` afin de partitionner notre tableau, on choisit le schématique de `partitionBis`.

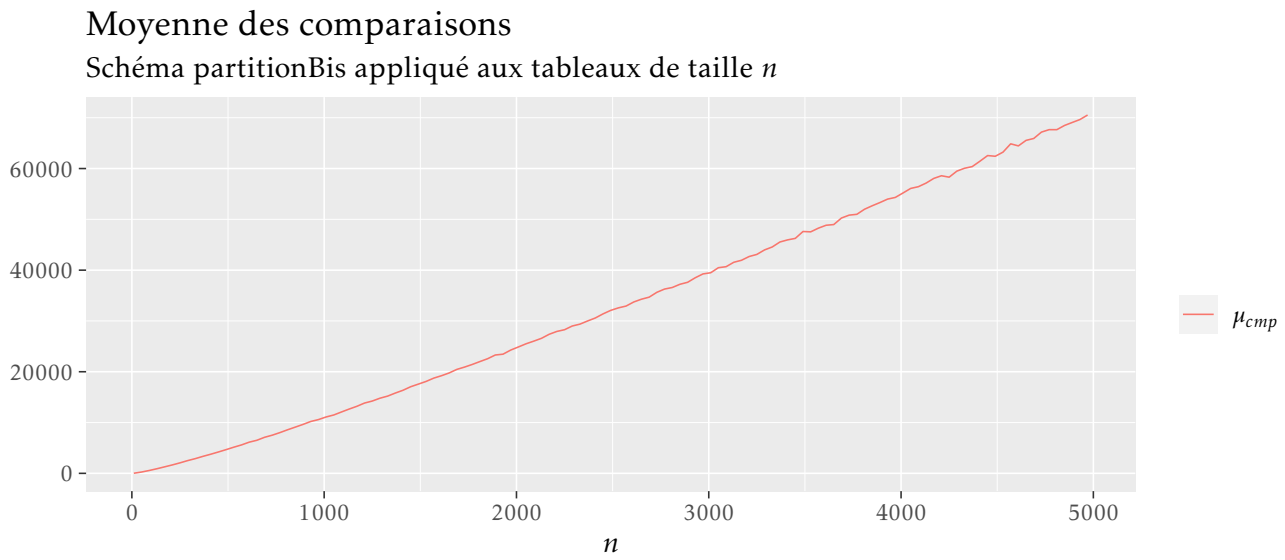
4. Conduire une analyse de complexité en moyenne du tri rapide utilisant la procédure `partitionBis` à la place de la procédure `partition`.

Commençons l'analyse de complexité de la procédure `partitionBis` en étudiant la moyenne du nombre de comparaisons pour trier m tableau de taille n dont les éléments sont $\{0, 1, ..., n-1\}$ mélangés selon le battage de Fisher-Yates. Fixons $m = 100$ et $n = \{10, 50, 110, ..., 4950\}$ Il est facile à comptabiliser le nombre de comparaisons μ_{cmp} pour exécuter le tri rapide avec le schéma de partition `partitionBis`. Pour ce faire, on observe qu'il y a un comparaison chaque passage du boucle. Donc, on écrit le code suivant en C

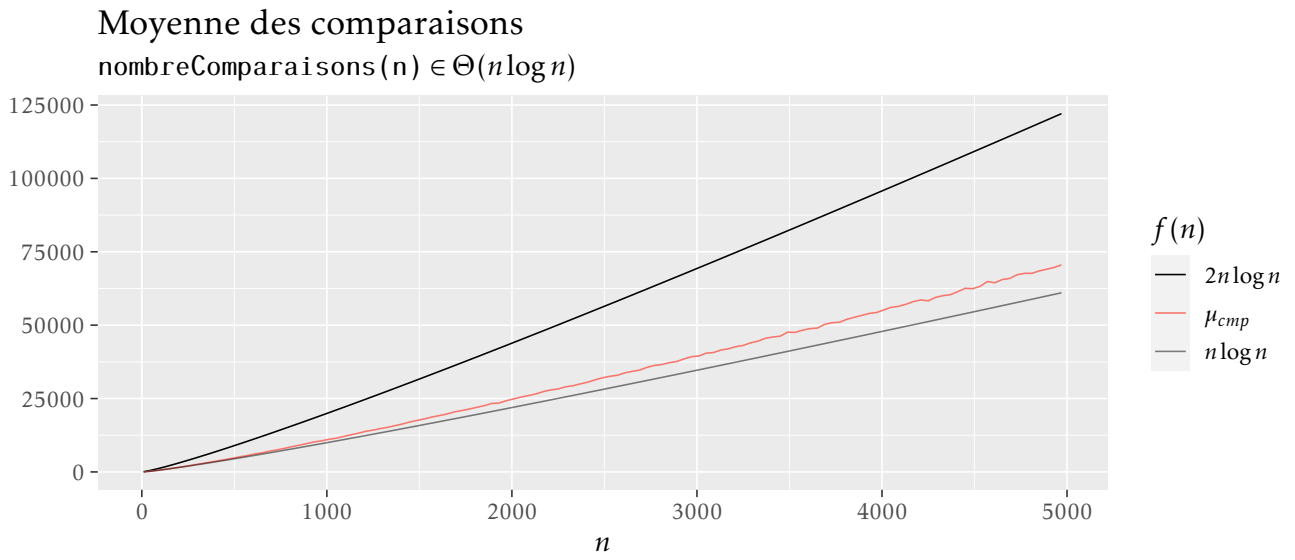
```c
int partition_bis_count(int *__arr, int __lo, int __hi, int *__ncmp, int *__nech) {

    int i = __lo;
    int ipivot = __lo;
    int pivot = __arr[__lo];

    for (int j = __lo + 1; j <= __hi; j++) {
        if (__arr[j] <= pivot) {
            ipivot ++;
            if (j > ipivot) exchange_count(__arr, ipivot, j, __nech);
        }
        inc(__ncmp, 1); // increment once per check
    }

    if (i < ipivot) exchange_count(__arr, i, ipivot, __nech);
    return ipivot;

}
```

FIGURE 1 – Définition de la procédure `partition_bis_count` qui incrémente le nombre de comparaisons une fois par boucle. La comparaison des éléments du tableau est souligné en violet.

Pour $n_{min} = 10, n_{max} = 5000, \Delta n = 40$, on trie 100 tableau générés automatiquement et on comptabilise le nombre d'échanges n_{cmp} effectué après m tries. Avec $m = 100$, on calcule $\mu_{cmp} = \frac{n_{cmp}}{100}$



Il nous semble que le graphe n'explose pas lorsque n augmente. On peut tracer les courbes de la forme $\alpha n \log n$ pour établir des fonctions qui dominent, et qui sont dominé par, μ_{cmp}.



On estime que la moyenne nombre de comparaisons est une fonction de n qui est dominé par $2n\log n$ et qui domine $n\log n$. Alors, par définition, $\texttt{nombreComparaison}(n) \in \Theta(n\log n)$. On peut préciser la valeur de α dans l'équation $\texttt{nombreComparaison}(n) = \alpha n\log n$ si on exécute une regression linéaire de μ_{cmp} par rapport a $n\log n$.

Avec un coefficient de correlation $r = 0.9999282$, on trouve la regression linéaire par rapport à $x = n\log n$ est : $L(n\log n) = L(x) = 1.16x - 549.56$.

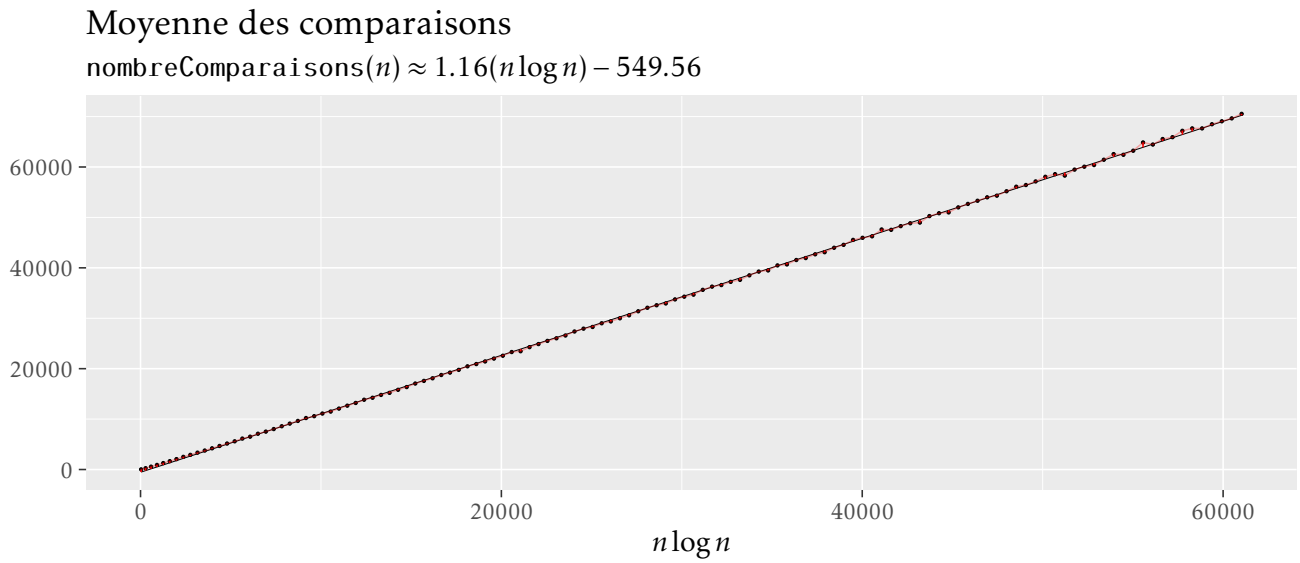


Figure 2 – Regression linéaire du variable μ_{cmp} par rapport à $n\log n$. Cette regression linéaire a un MSE = 63167 et un RMS = 251.3314

Maintenant, on va analyser comment la moyenne nombre d'échanges varie avec les mêmes paramètres n_{min}, n_{max}, Δn, et m définis au-dessus. Pour ce faire, on incrémente une variable n_{ech} à chaque fois qu'on échange deux éléments du tableau. Examinons la définition de la procédure exchange_count comme il est appelé dans Figure 1.

```
void exchange_count(int *__arr, int __i, int __j, int *__nech) {
    int temp = __arr[__i];
    __arr[__i] = __arr[__j];
    __arr[__j] = temp;
    inc(__nech, 1); // Once again, we only care about array assignments.
                    // increment the number of exchanged by 1 per call
}
```

Figure 3 – Implémentation d'une procédure qui échange deux éléments d'un tableau et qui incrémente une variable (*__nech) qui stocke le nombre d'échanges effectués jusqu'au présent.

En accord avec nos suivis à la trace de la procédure partitionBis, on remarque qu'il y a, en moyenne, moins d'échanges que de comparaisons au cours du tri. Cela n'est pas étonnant. On a constaté que la procédure vérifie $(n-2)$

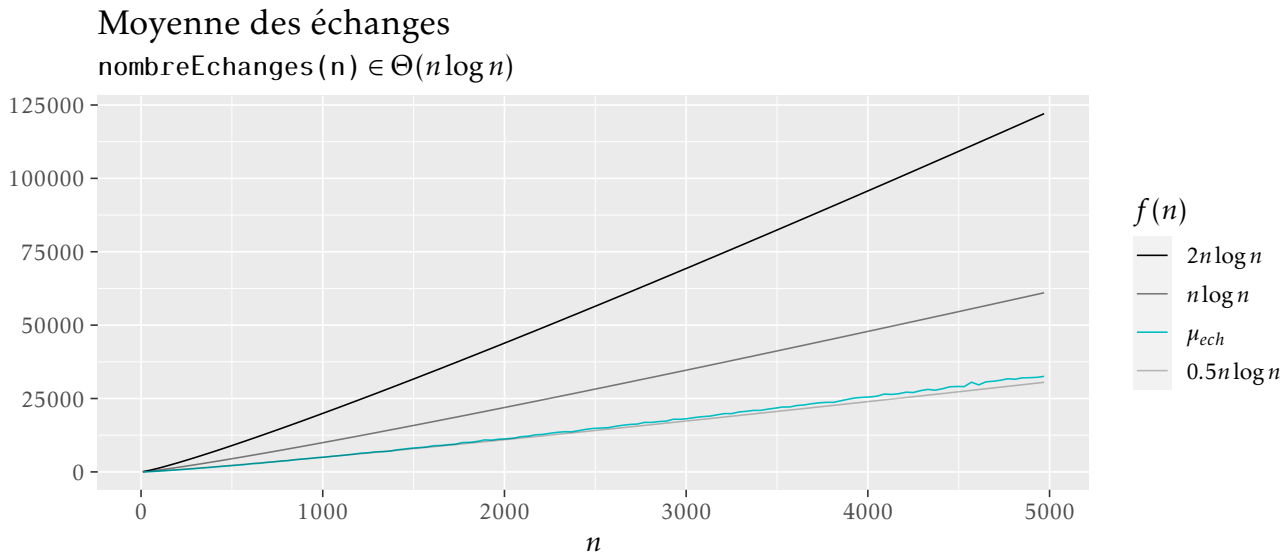


FIGURE 4 – Le moyenne nombre d'échanges se situe entre $n \log n$ et $\frac{1}{2} n \log$. En réalisant une regression linéaire on trouve que $\texttt{nombreEchanges}(n) \approx 0.5399(n \log n) - 370.9022$ avec un coefficient de correlation $r = 0.999788$, erreur moyenne carré (MSE) = 40429.08, RMS = 201.0698.

comparaisons pour **chaque** appel à `partitionBis`. Cependant, il se peut qu'on effectue aucun échange pourvu que le tableau donné en entrée est déjà trié. Ce déséquilibre explique la difference de valeurs de α dans la regression linéaire.

Pour procéder, on analyse

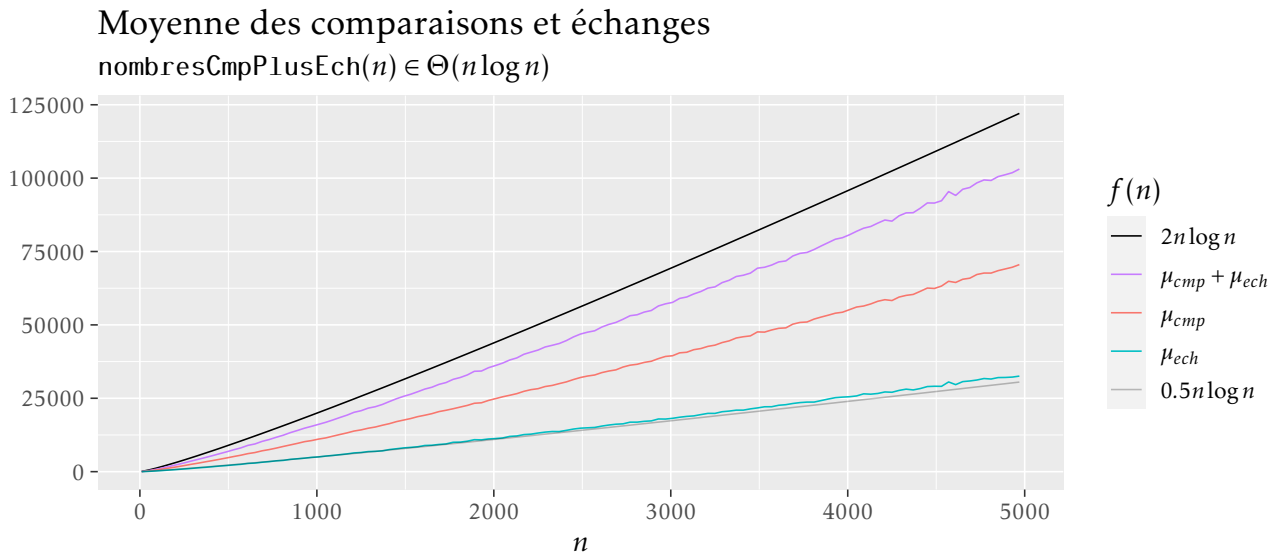


FIGURE 5 – Une regression linéaire revèle que $\texttt{nombresCmpPlusEch}(n)$ a une valeur de $\alpha_{sum} = 1.7$, $\texttt{nombresComparaisons}(n)$ a $\alpha_{cmp} = 1.16$, et $\texttt{nombresEchanges}(n)$ a $\alpha_{ech} = 0.54$.

Toujours bornés par $2n \log n$, on trouve que la valeur de alpha pour la moyenne du somme des comparaisons et échanges est en effet le somme des pentes de moyenne comparaisons et de moyenne échanges. Autrement dit, $1.7 = 1.16 + 0.54$.

5. D'après votre expérimentation, laquelle des deux méthodes `partition` et `partitionBis` est la plus efficace ?

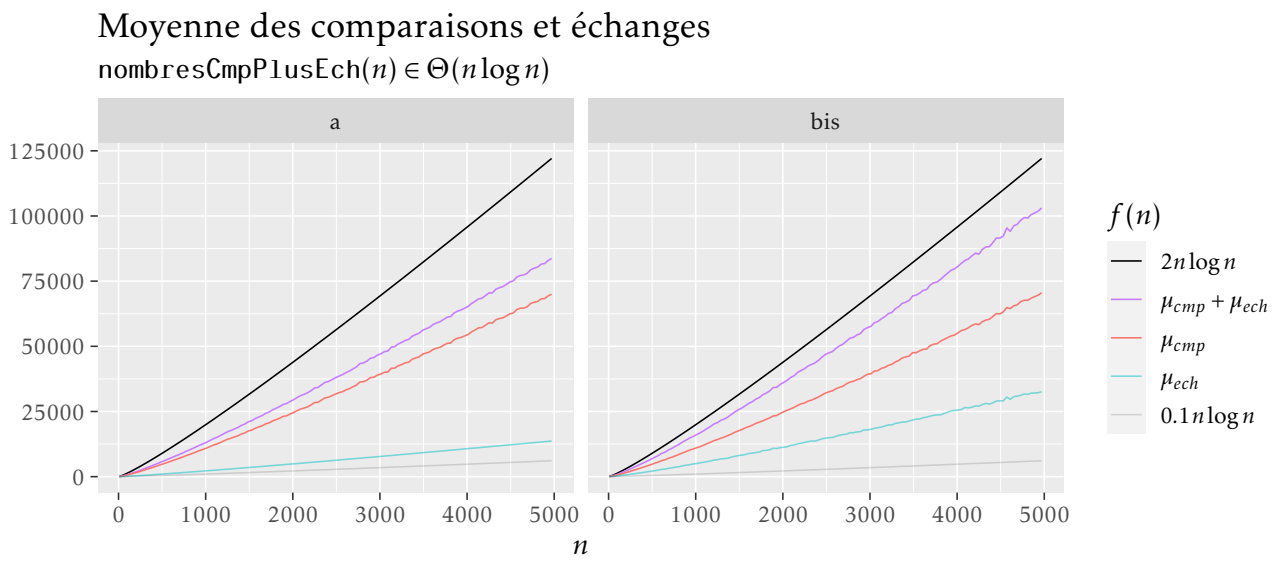


Figure 6 – caption