TP2 Theorèmes limites

Evan Voyles

15 Avril, 2022

Exercice 1 Illustration de la LFGN.

1. Simuler un échantillon de taille 1000 de variables aléatoires X_i de loi exponentielle de paramètre 2.

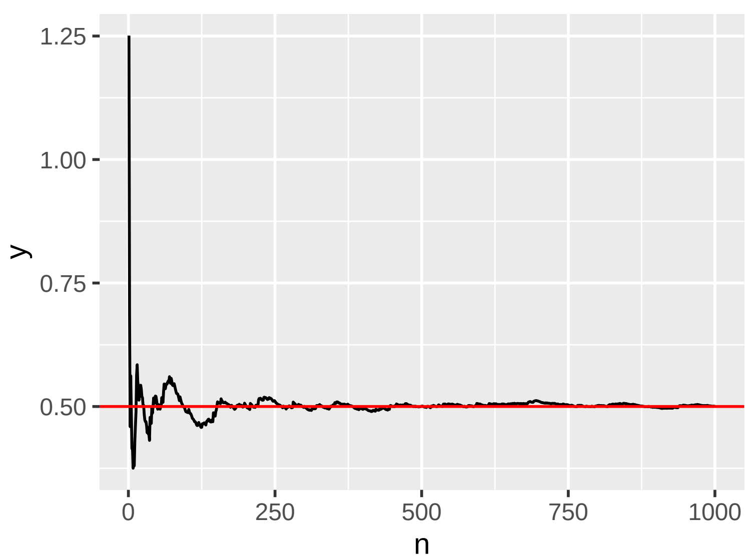
```
rate <- 2; n <- 1000

x <- rexp(n, rate)
```

2. En déduire les moyennes empiriques $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ pour $n = 1, \dots, 1000$.

```
moyenne_empiriques <- cumsum(x) / seq(n)
```

3. Tracer une trajectoire de la moyenne empirique, i.e $n \mapsto \bar{X}_n$ pour $n = 1, \dots, 1000$. Superposer la droite d'équation $y = 1/2$ (utiliser la fonction `abline`). D'où vient 1/2?

```
df <- tibble(n = seq(n), y = moyenne_empiriques)
df |> ggplot(aes(n, y)) + geom_line() + geom_hline(yintercept = 0.5, col = "red")
```

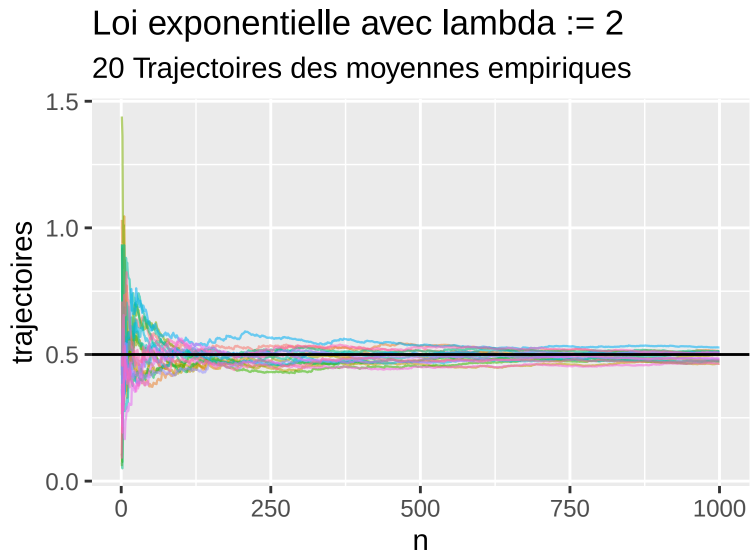


1/2 est l'espérance de notre loi exponentielle ($\frac{1}{\lambda}$)

4. Superposer 20 autres trajectoires de la moyenne empirique.

```
sim <- function(n) { rexp(n, 2) }
# draw_traj est une fonction montrée en fin de document
draw_traj(sim,
          n_trials = 1000,
          n_traj = 20,
```

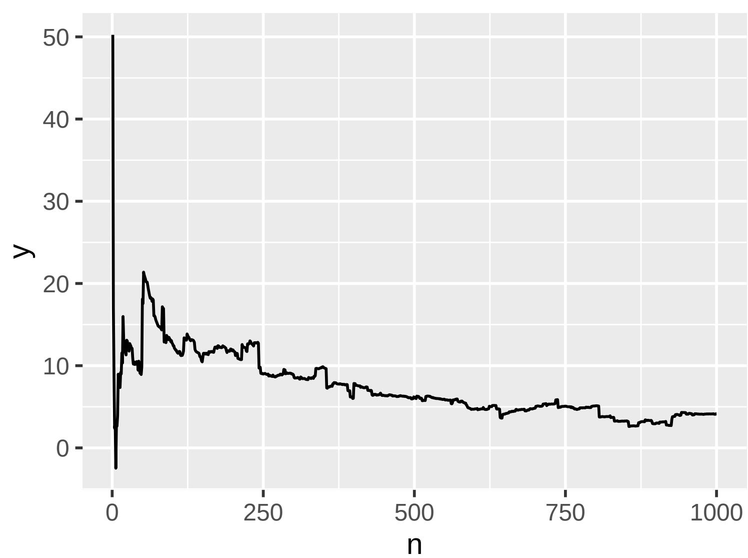
```
        title = "Loi exponentielle avec lambda := 2",
        subtitle = "20 Trajectoires des moyennes empiriques")
```



Tous les trajectoires tendent vers 0.5

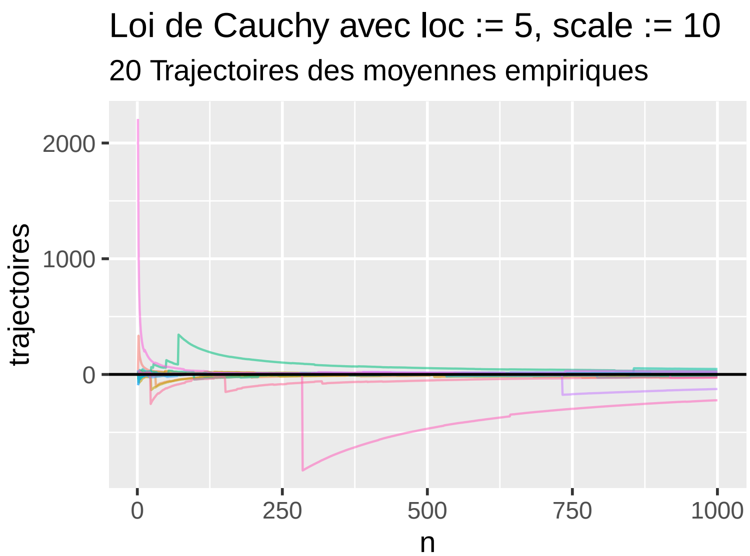
5. Reprendre les mêmes questions pour une loi de Cauchy. Que remarque-t-on?

```
loc   <- 5
scale <- 10
n     <- 1000

cauch <- rcauchy(n, loc, scale)
moyenne_empiriques <- cumsum(cauch) / seq(n)

df.cauchy <- tibble(n = seq(n), y = moyenne_empiriques)
df.cauchy |> ggplot(aes(n, y)) + geom_line()
```



On suppose que lorsque $n \to \infty$, les moyennes empiriques tendront vers la "location" (endroit) de la loi de Cauchy.

```r
sim <- function(n) { rcauchy(n, loc, scale) }
draw_traj(sim,
          n_trials = 1000,
          n_traj = 20,
          "Loi de Cauchy avec loc := 5, scale := 10",
          "20 Trajectoires des moyennes empiriques")
```

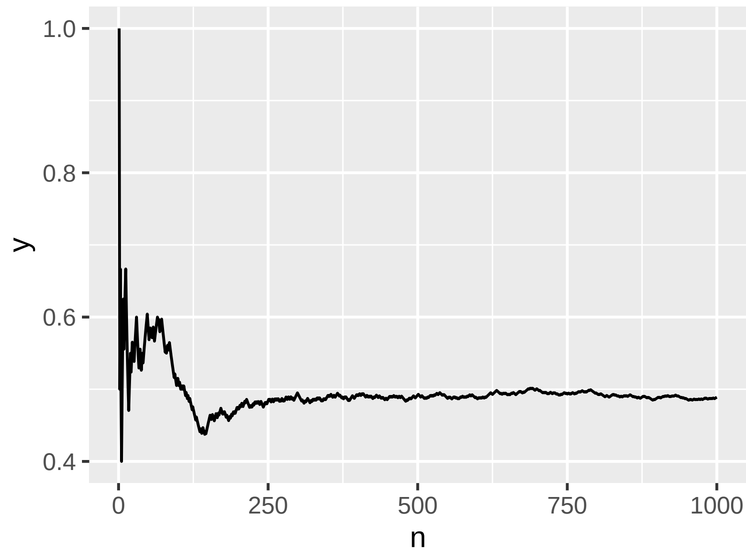


On observe la même tendance que les moyennes empiriques tendent vers l'endroit (5 dans ce cas). Cependant, on remarque que - grace au fait que la loi de Cauchy a des "queues" (tail) qui sont rélativement fort par rapport à des autres lois comme la loi normale, par exemple. Donc, il est possible de tomber sur une quantité dont la valeur absolue est extrêment large. C'est pour cela qu'on peut observer des pics.

Exercice 2 Loi d'une variable aléatoire discrète.

1. Illustrer la LFGN lorsque les X_i sont i.i.d de loi de Bernouille $\mathcal{B}(p)$ avec $p = 0.5$

```r
n <- 1000
p <- 0.5

bern <- rbinom(n, size = 1, prob = p)
moyenne_empiriques <- cumsum(bern) / seq(n)

df.bern <- tibble(n = seq(n), y = moyenne_empiriques)
df.bern |> ggplot(aes(n, y)) + geom_line()
```




```
sim <- function(n) { rbinom(n, size = 1, prob = p) }
draw_traj(sim,
          n_trials = 1000,
          n_traj = 20,
          title = "Loi Bernouilli avec p := 0.5",
          subtitle = "Trajectoires des moyennes empiriques")
```