Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

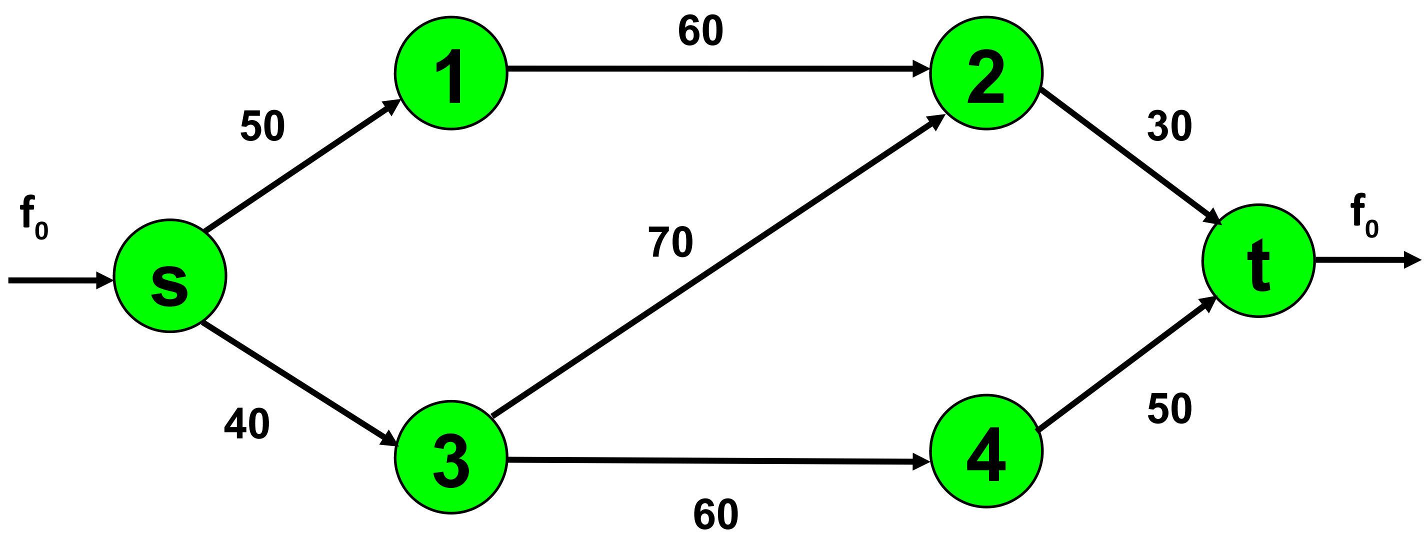
GRAFOS

Fluxo Máximo em Redes

Nelson Cruz Sampaio Neto
nelsonneto@ufpa.br

Definição

- Dada uma rede, com 1 (um) nó de entrada e 1 (um) nó de saída, com <u>capacidades</u> associadas a cada aresta, pretende-se saber qual é o fluxo máximo que se pode enviar da entrada para a saída.
- Exemplo: Maximizar o fluxo de água de um sistema de aquedutos. O valor das arestas é a capacidade de cada tubulação.



Definição

- Uma rede com fluxo será representada por **D = (V, E, *f*)**, onde ***f*** é um vetor de dimensão **e + 1**, sendo **e** o número de arestas:

$$\boldsymbol{f = (f_0 , f_1 , f_2 , \dots , f_e)} \text{ , onde } \boldsymbol{f_0} \text{ é o fluxo máximo e}$$

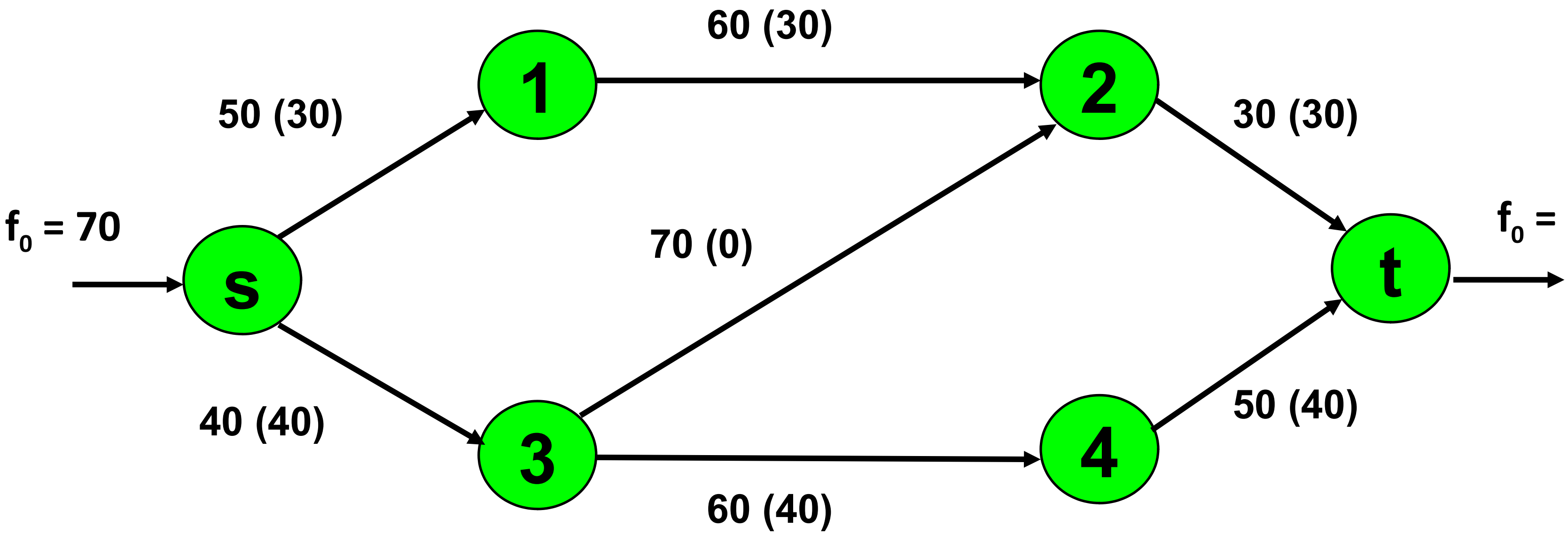
$$\mathbf{0} \le \boldsymbol{f_i} \le \mathbf{c}_i \text{ , onde } \mathbf{c}_i \text{ é a capacidade da aresta } \mathbf{i}$$

- O fluxo é considerado linear, ou seja, seu valor não muda ao longo do percurso. Sabe-se que todo fluxo linear é conservativo.

- Lei da conservação: Todo fluxo que chega a um vértice sai dele.

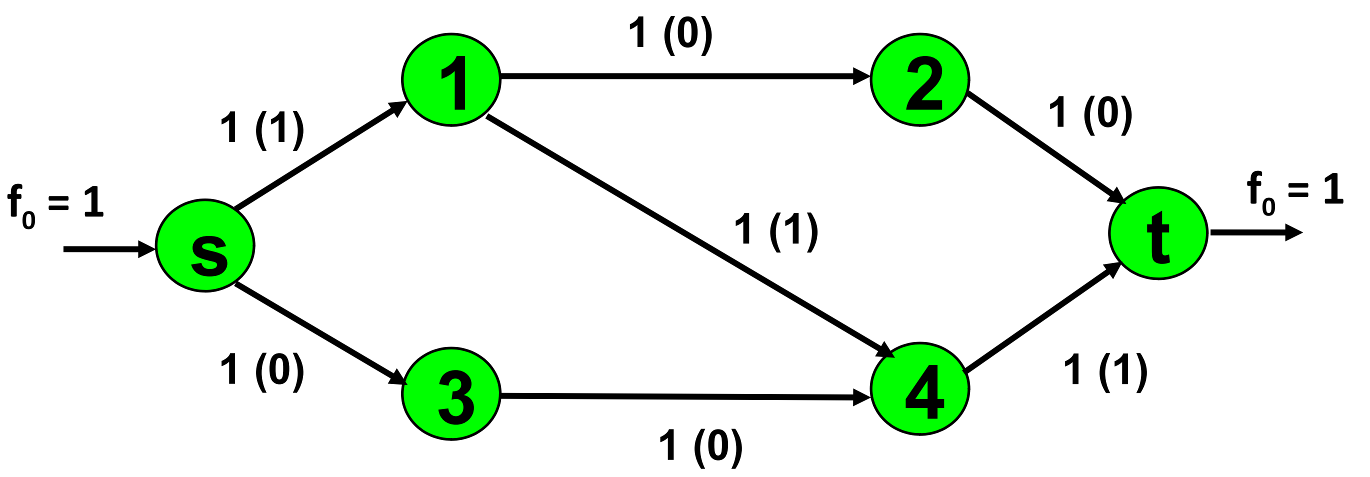
$$\sum_{\mathbf{w}} \boldsymbol{f}\,(\mathbf{w} , \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{y}} \boldsymbol{f}\,(\mathbf{v} , \mathbf{y})$$

Definição



Definição

- Não confundir fluxo maximal com fluxo máximo.
- Um fluxo é dito maximal quando todo caminho entre a fonte e o sumidouro contém alguma aresta saturada.
- Todo fluxo máximo é maximal, mas a recíproca não é verdadeira.

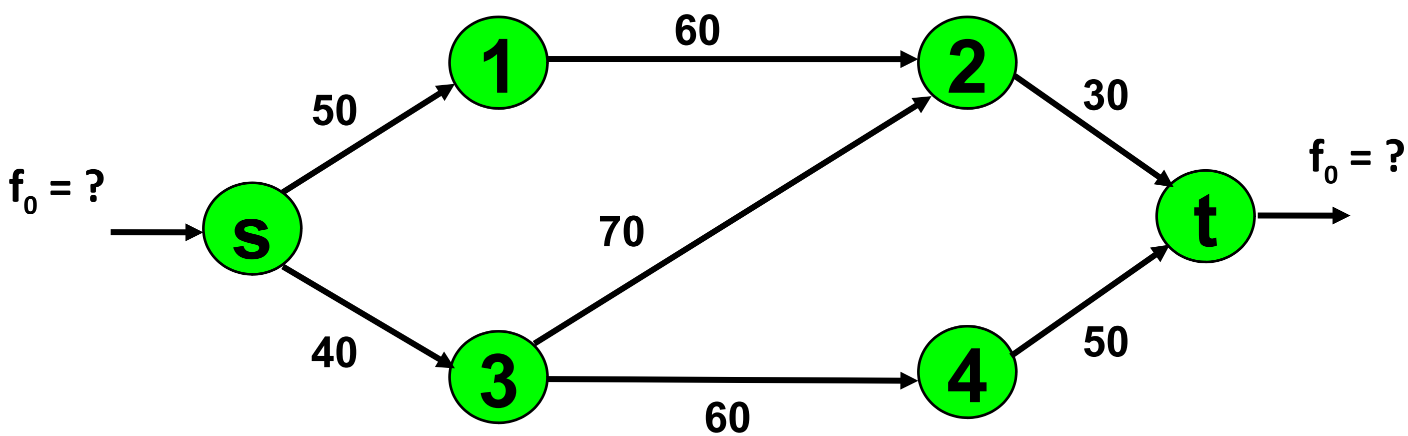


Rede com fluxo maximal, mas não máximo

Definição

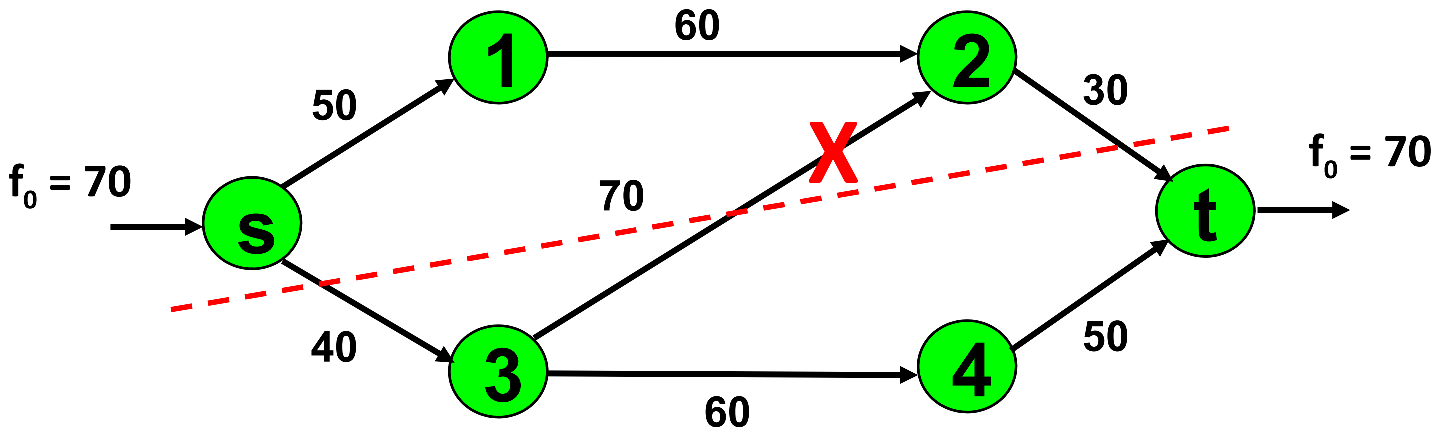
- Seja **D = (V, E, *f*)** uma rede com fluxo e um subconjunto de vértices **X** ⊂ **V**, tal que **s** ∈ **X** e **t** ∉ **X**.

- Então, um <u>corte</u> **(X , V – X)** em **D** é o conjunto de arestas de **D** com extremidade inicial em **X** e extremidade final em **V – X**.



Corte Mínimo vs Fluxo Máximo

- Em resumo, para encontrar o fluxo máximo de uma rede basta descobrir seu corte mínimo.



Teorema de Ford e Fulkerson

- **Teorema de Ford e Fulkerson:**

  "O valor do fluxo máximo em uma rede **D** é igual a capacidade do corte mínimo de **D**".

  $$f_0 = \mathbf{c}_{\mathbf{min}} \mathbf{(X, V - X)}$$

- O corte mínimo é o "gargalo" da rede, ou seja, o ponto de passagem mais estreito entre os vértices **s** e **t**. Só vai passar pela rede o fluxo que couber nesse gargalo.

- Algoritmo de Ford e Fulkerson ou algoritmo do fluxo máximo: http://ranger.uta.edu/~weems/NOTES5311/ffLab.c

Algoritmo de Ford-Fulkerson

função Ford-Fulkerson(G, s, t)

para cada (u, v) em E[G]

fluxo(u, v) := 0

enquanto existir caminho **p** de **s** para **t** na rede residual

Cf(p) := menor folga entre os arcos do caminho **p**

// Cf(p) = Min [capacidade(u,v) – fluxo(u,v)]

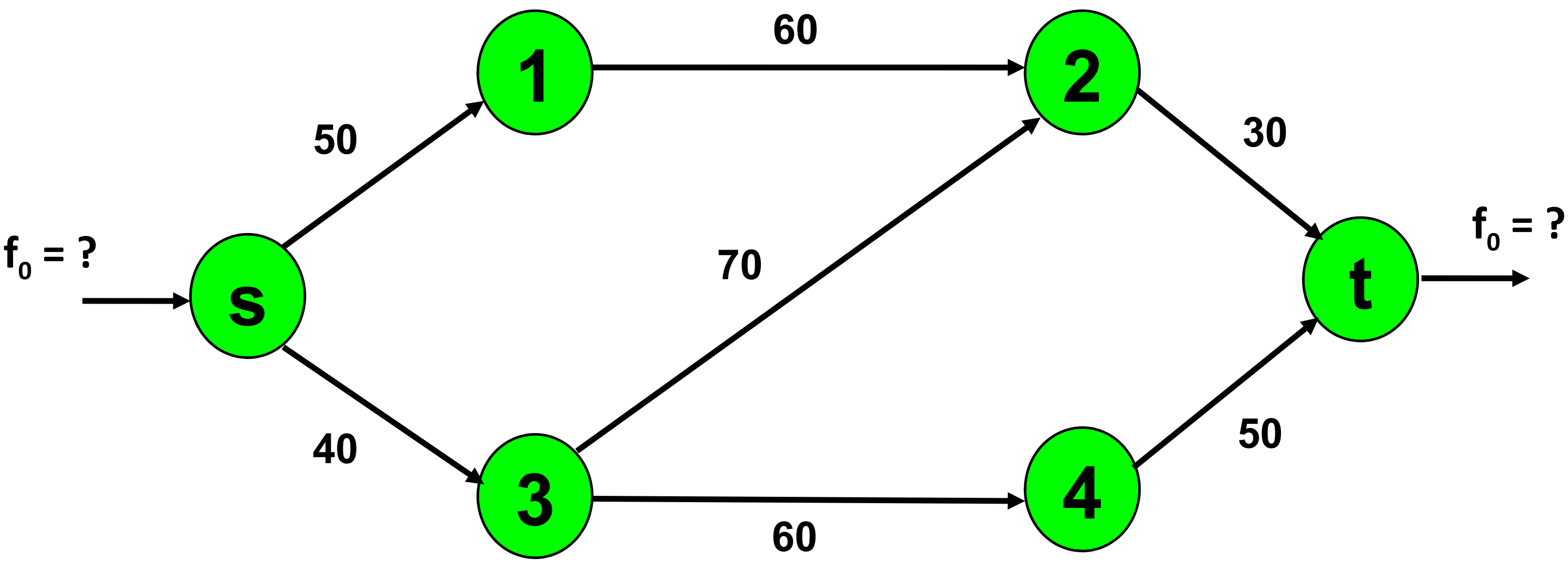
para cada (u, v) no caminho **p**

fluxo(u, v) := fluxo(u, v) + Cf(p)

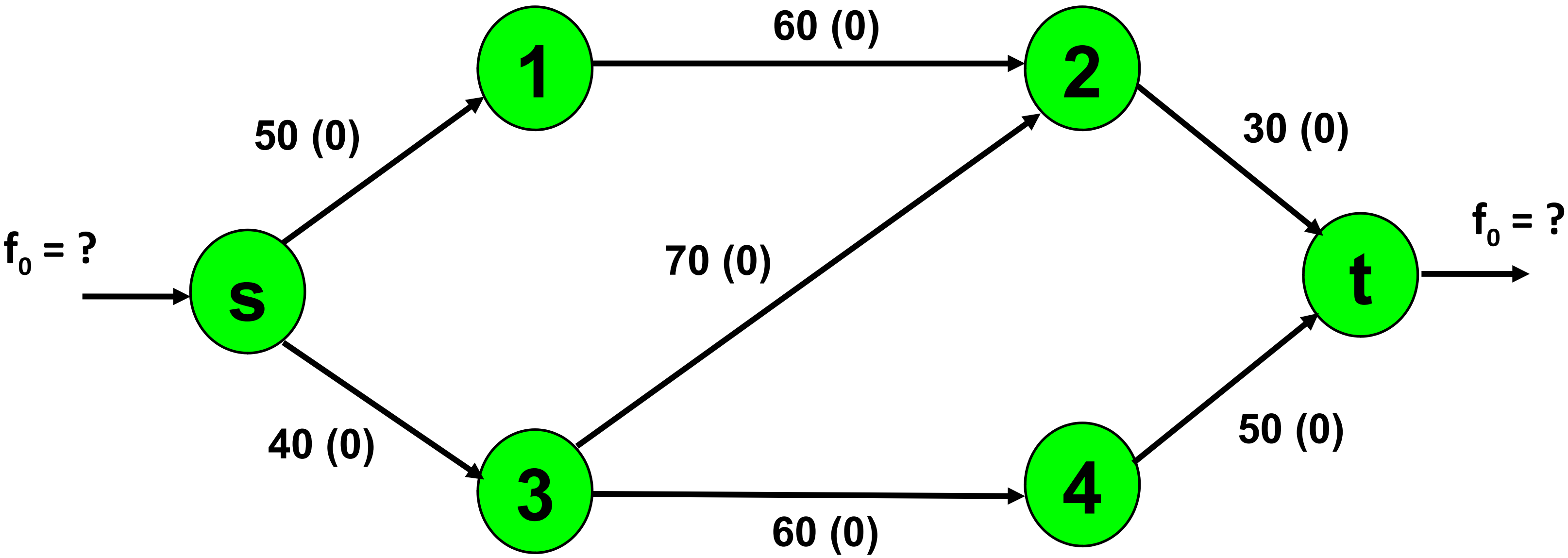
Fo = Fo + Cf(p)   // valor do fluxo máximo

atualizar a rede residual

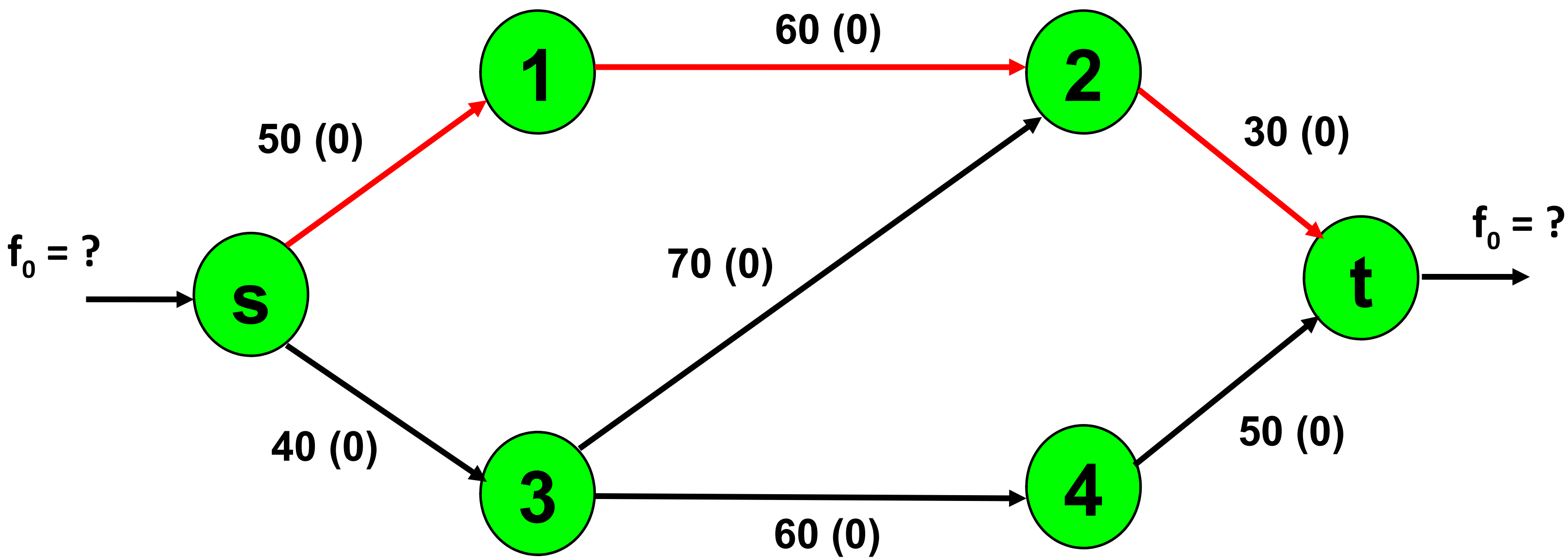
Algoritmo de Ford-Fulkerson



Algoritmo de Ford-Fulkerson

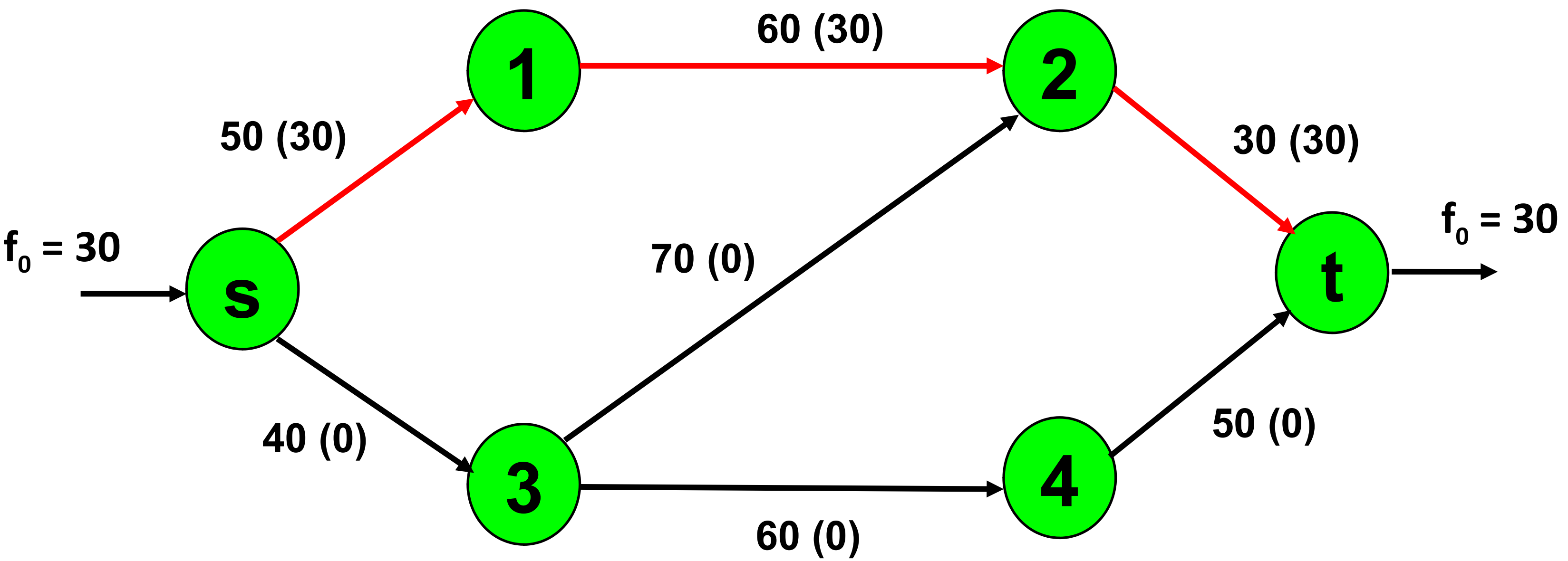


Algoritmo de Ford-Fulkerson



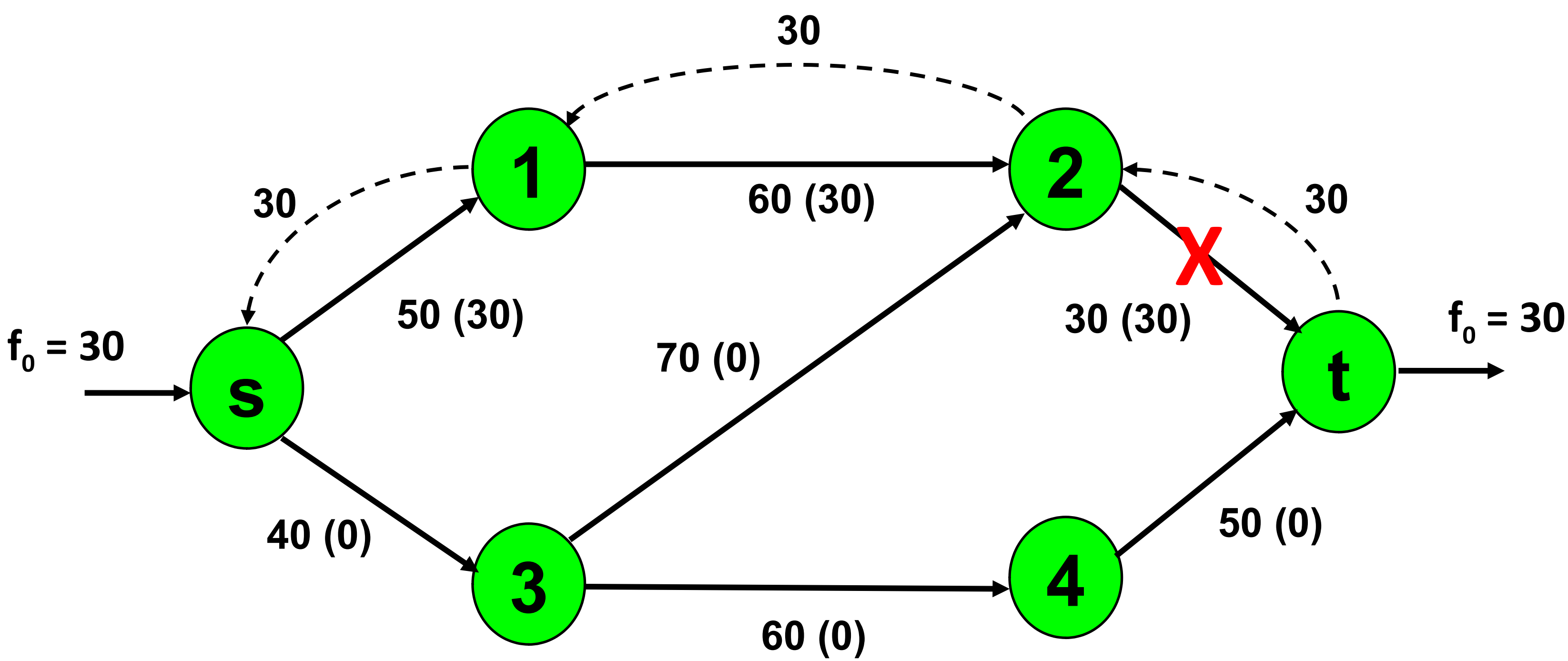
- Usando busca em largura, escolher sempre o caminho de menor comprimento, isto é, com menor número de arestas.

Algoritmo de Ford-Fulkerson



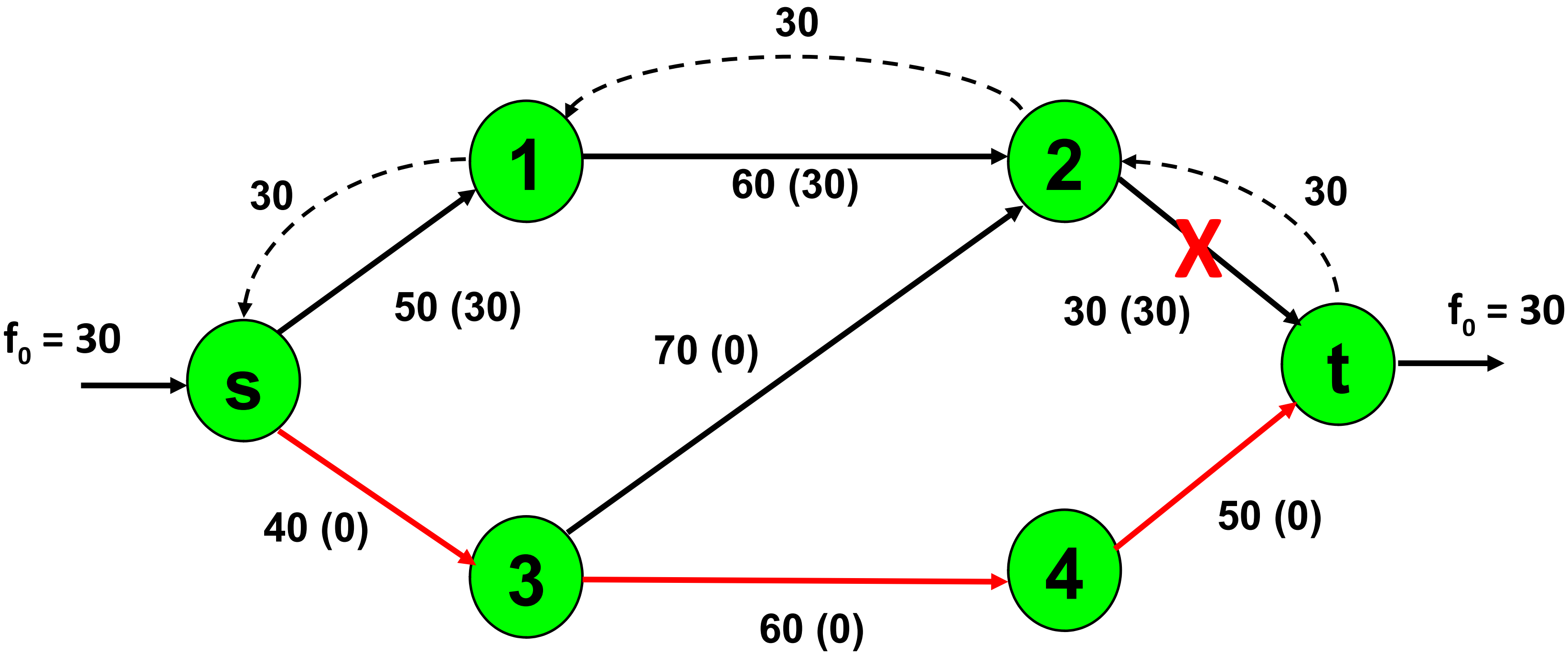
- Atualizar o fluxo máximo e o fluxo das arestas que compõem o caminho com base na menor folga do caminho.

Algoritmo de Ford-Fulkerson

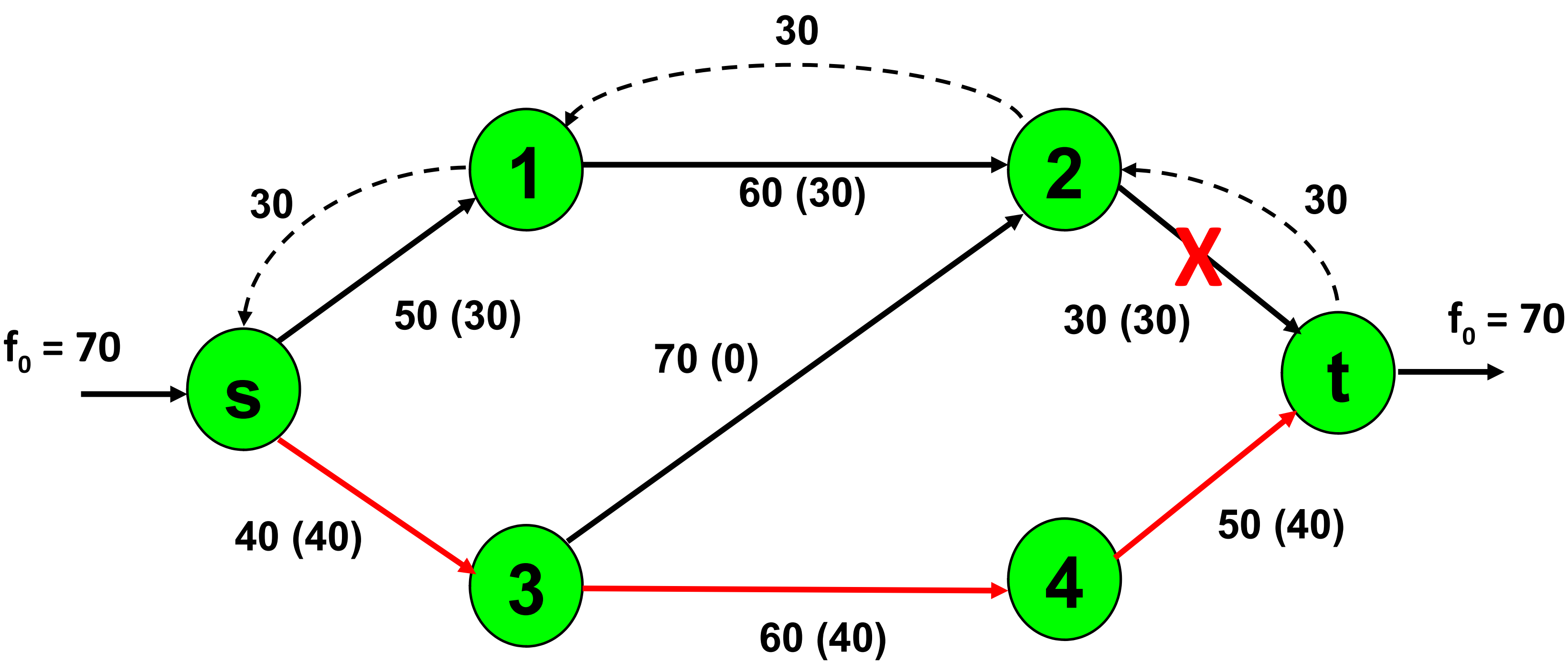


- Montar a rede residual. En seguida, o mesmo procedimento deve ser realizado enquanto existir um caminho entre **s** e **t**.

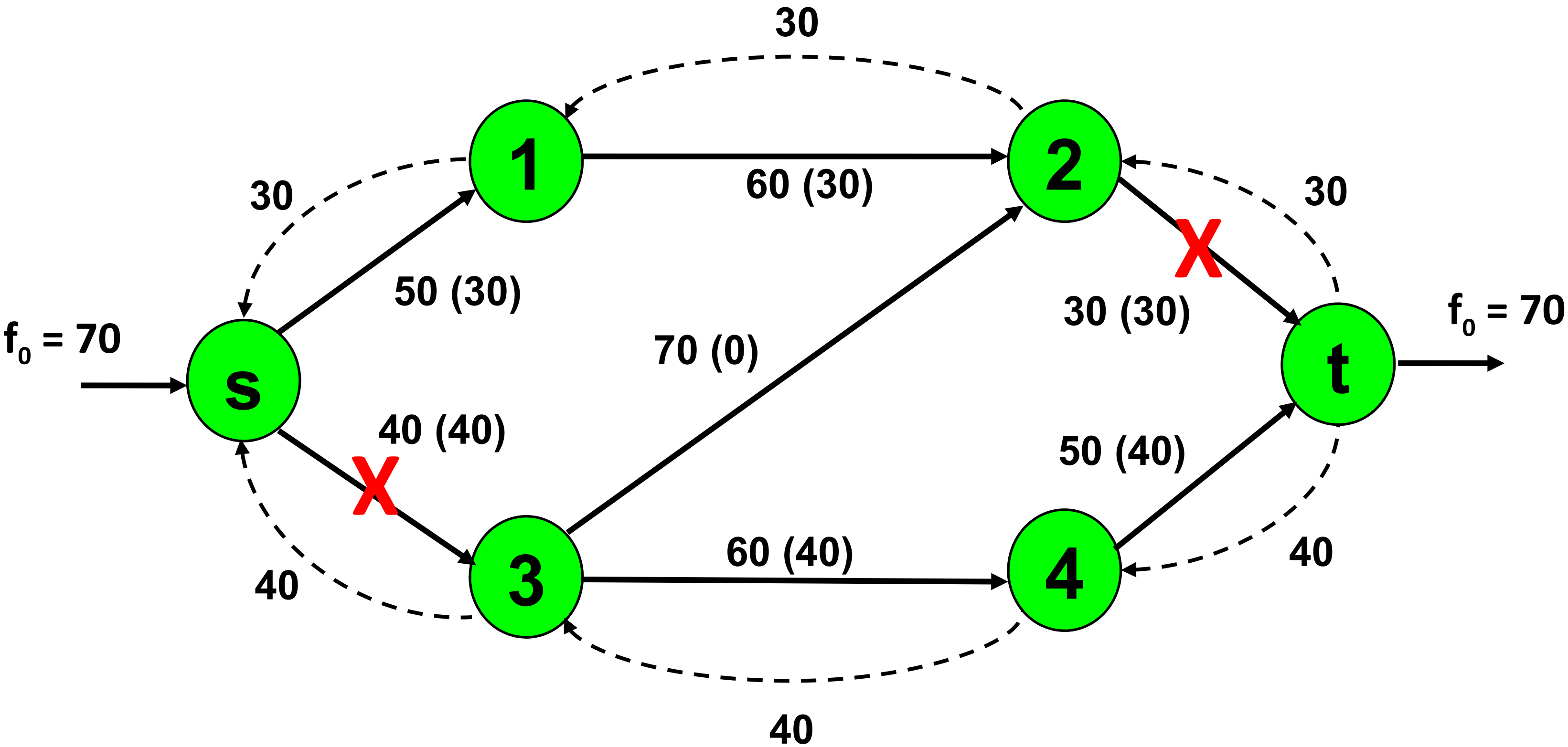
Algoritmo de Ford-Fulkerson



Algoritmo de Ford-Fulkerson

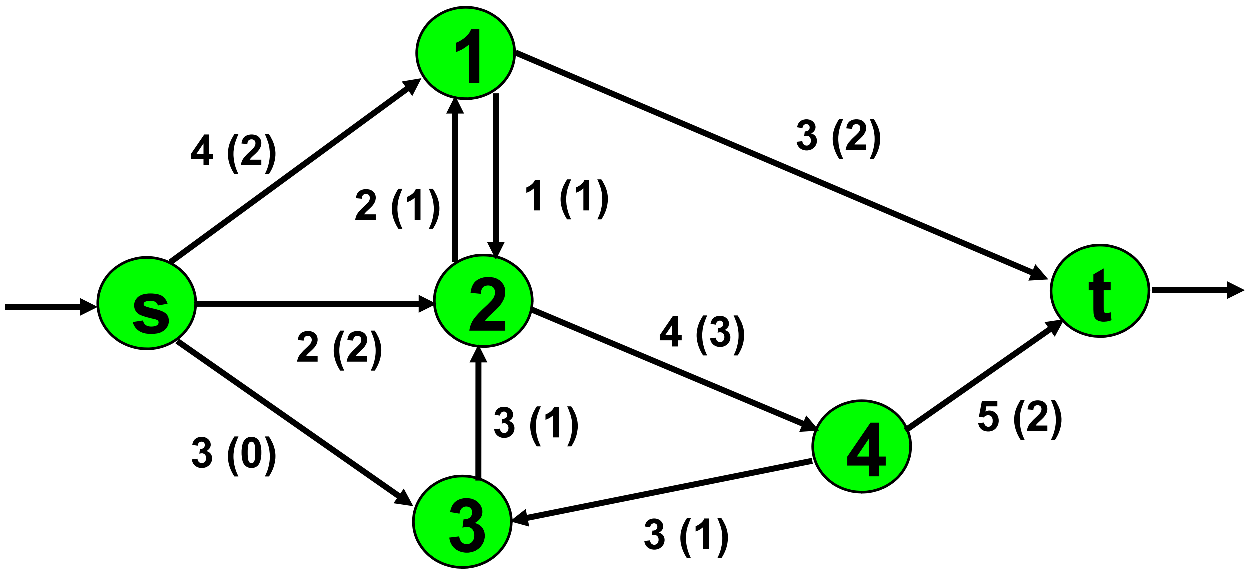


Algoritmo de Ford-Fulkerson



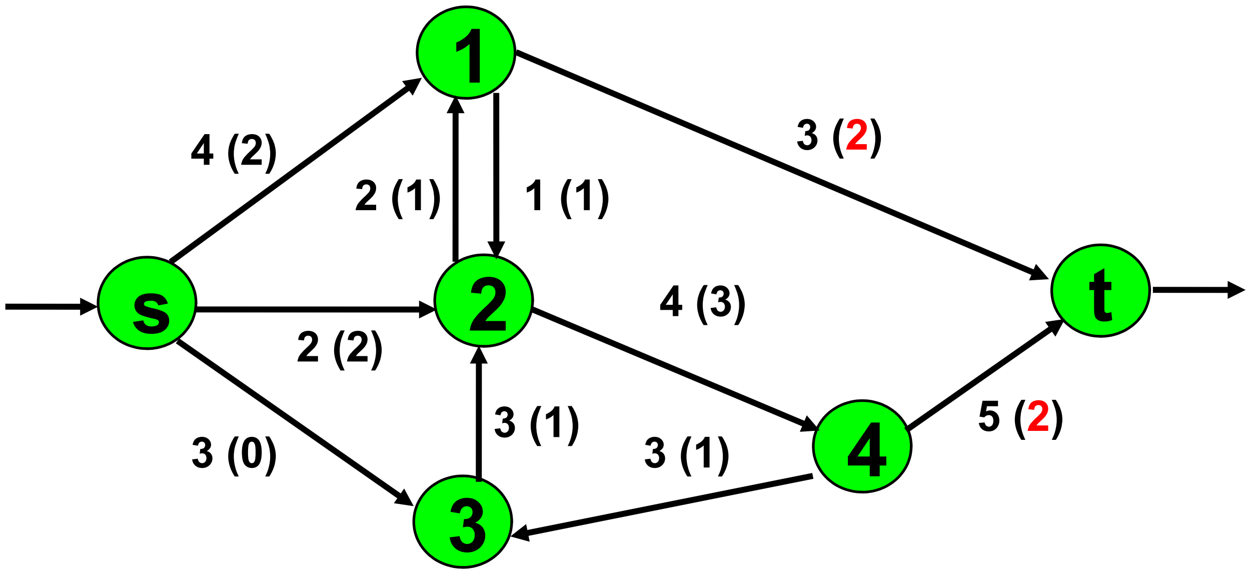
Exemplo

- Verifique qual foi o fluxo estipulado para a rede abaixo? Esse valor estipulado é máximo? Caso negativo, encontre o valor ótimo para o fluxo máximo da rede.



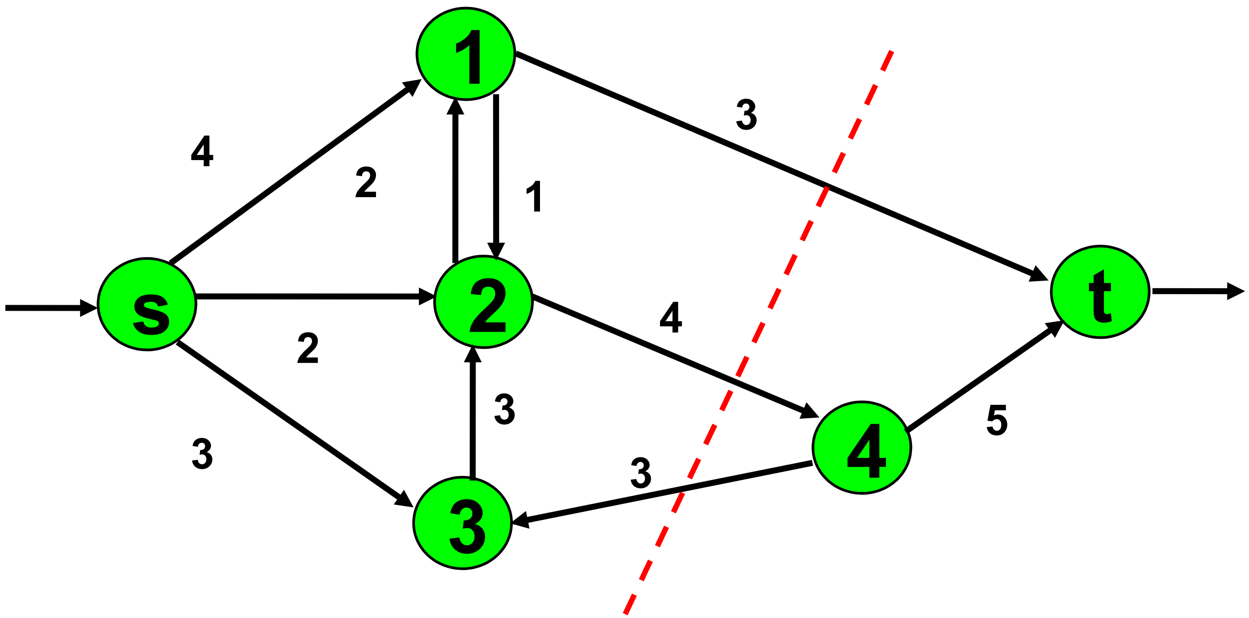
Exemplo

- O fluxo estipulado para a rede foi **4**.

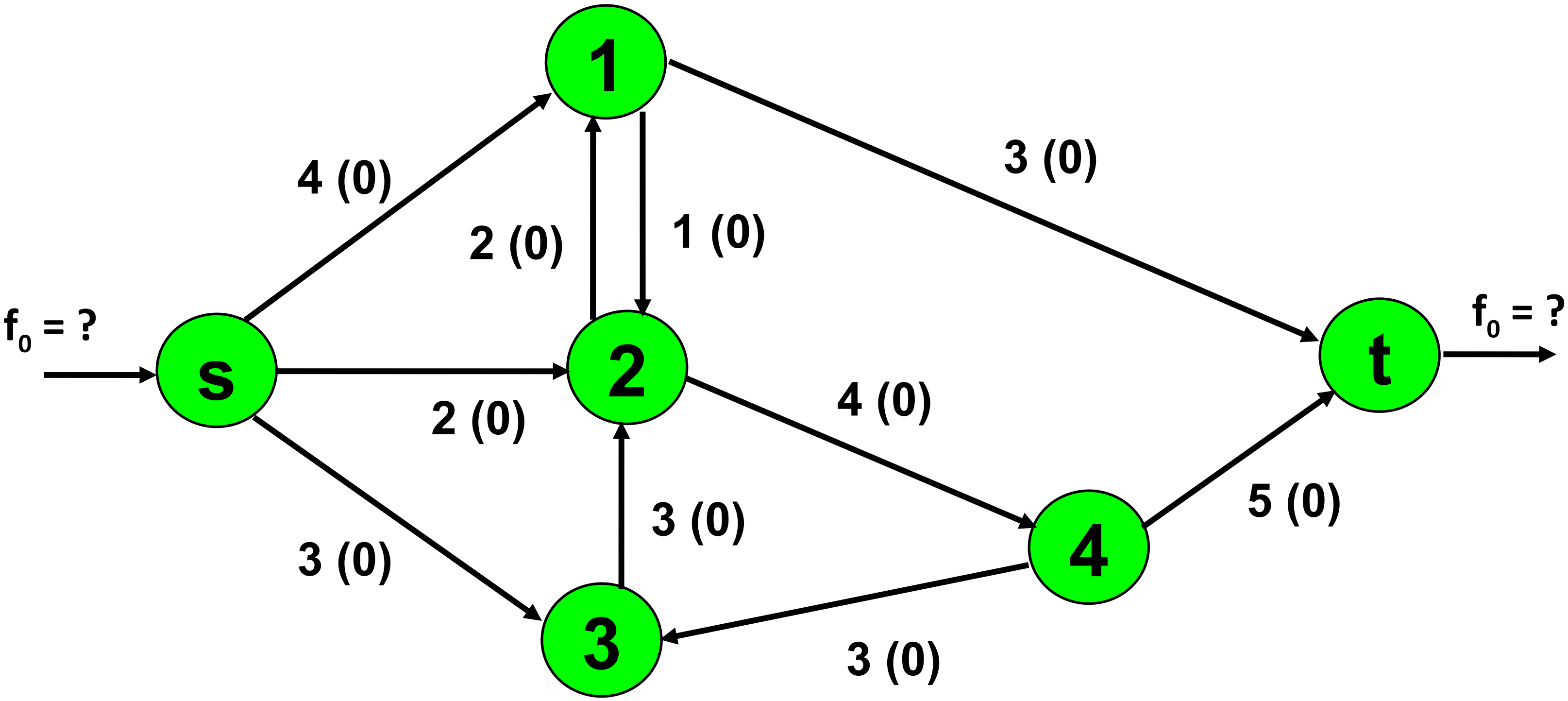


Exemplo

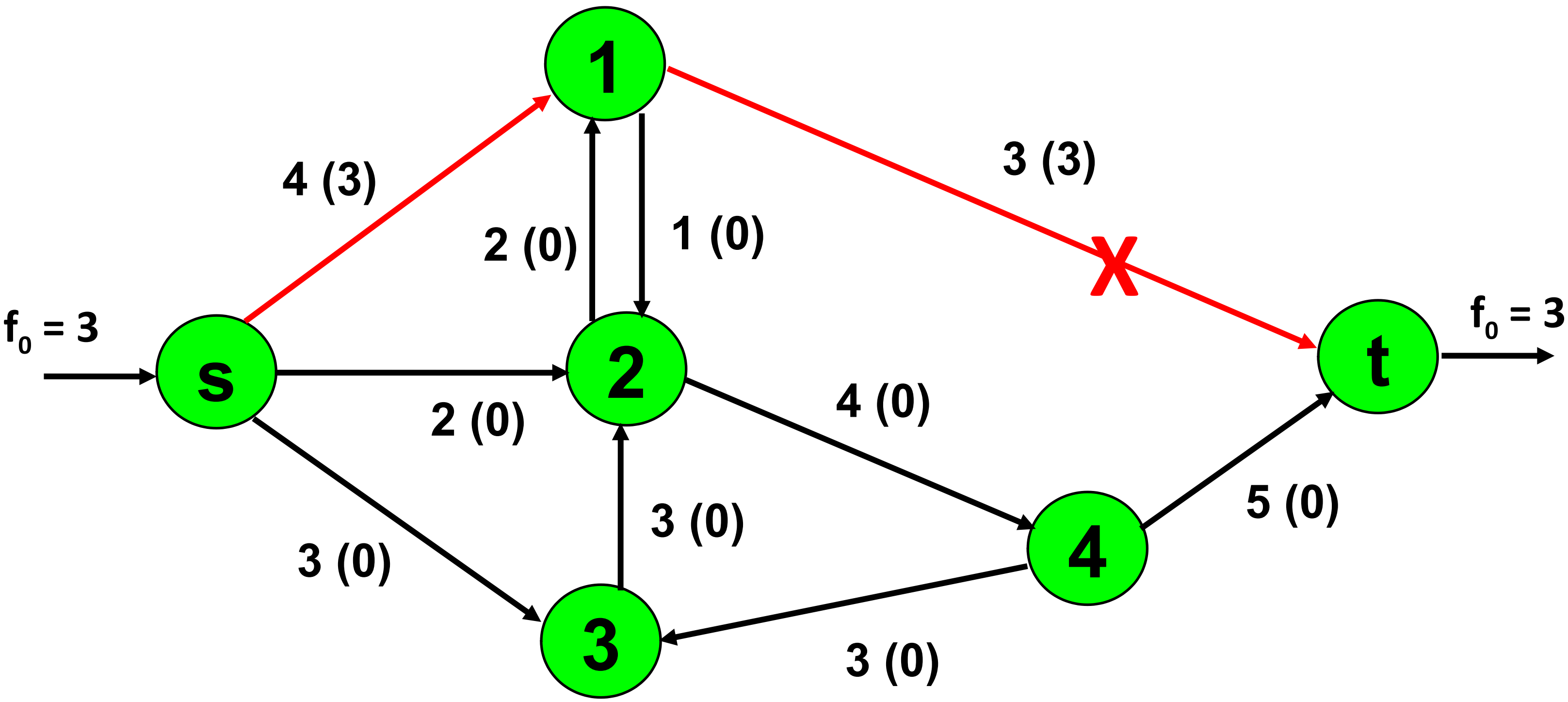
- Contudo, esse fluxo estipulado não é máximo.
- O fluxo máximo da rede é igual a **7** dado pelo corte mínimo abaixo.



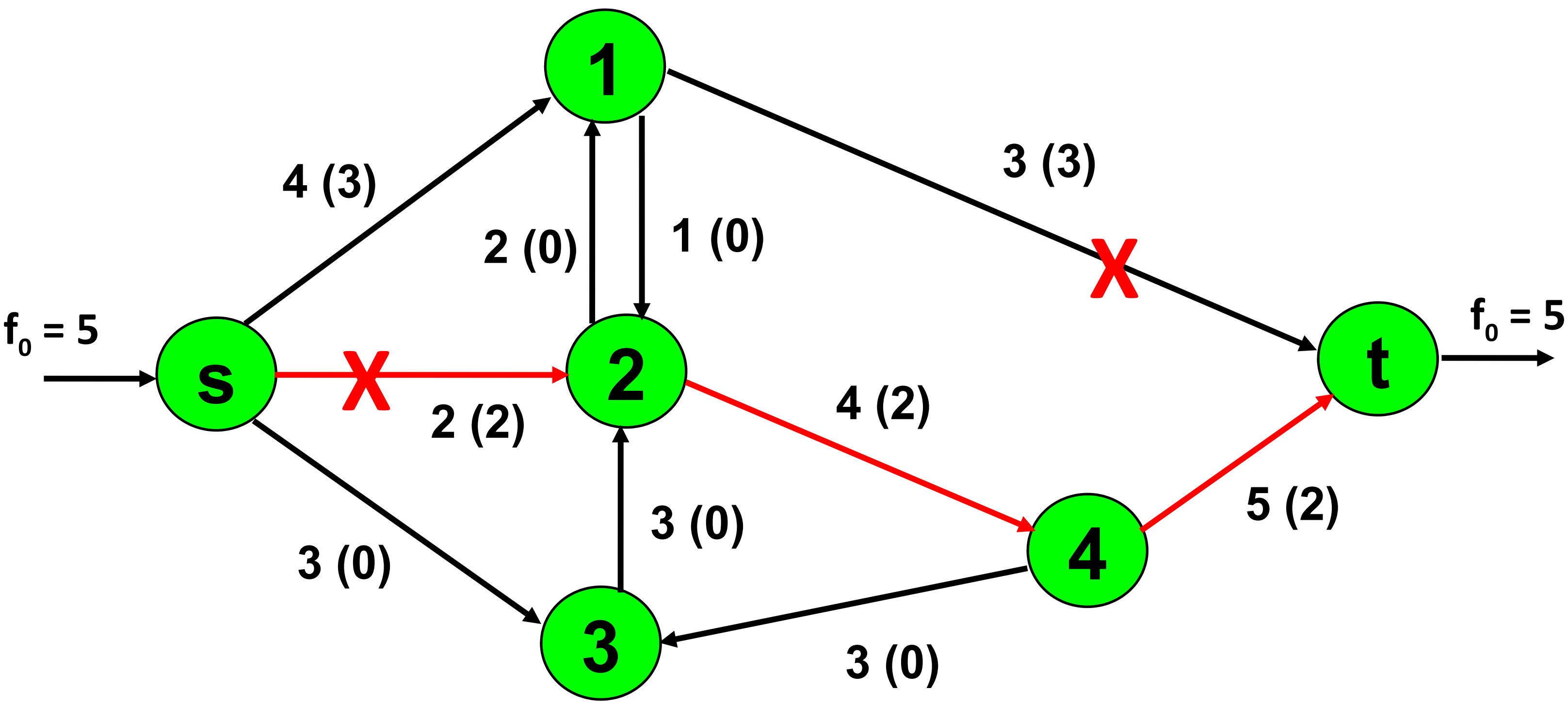
Exemplo



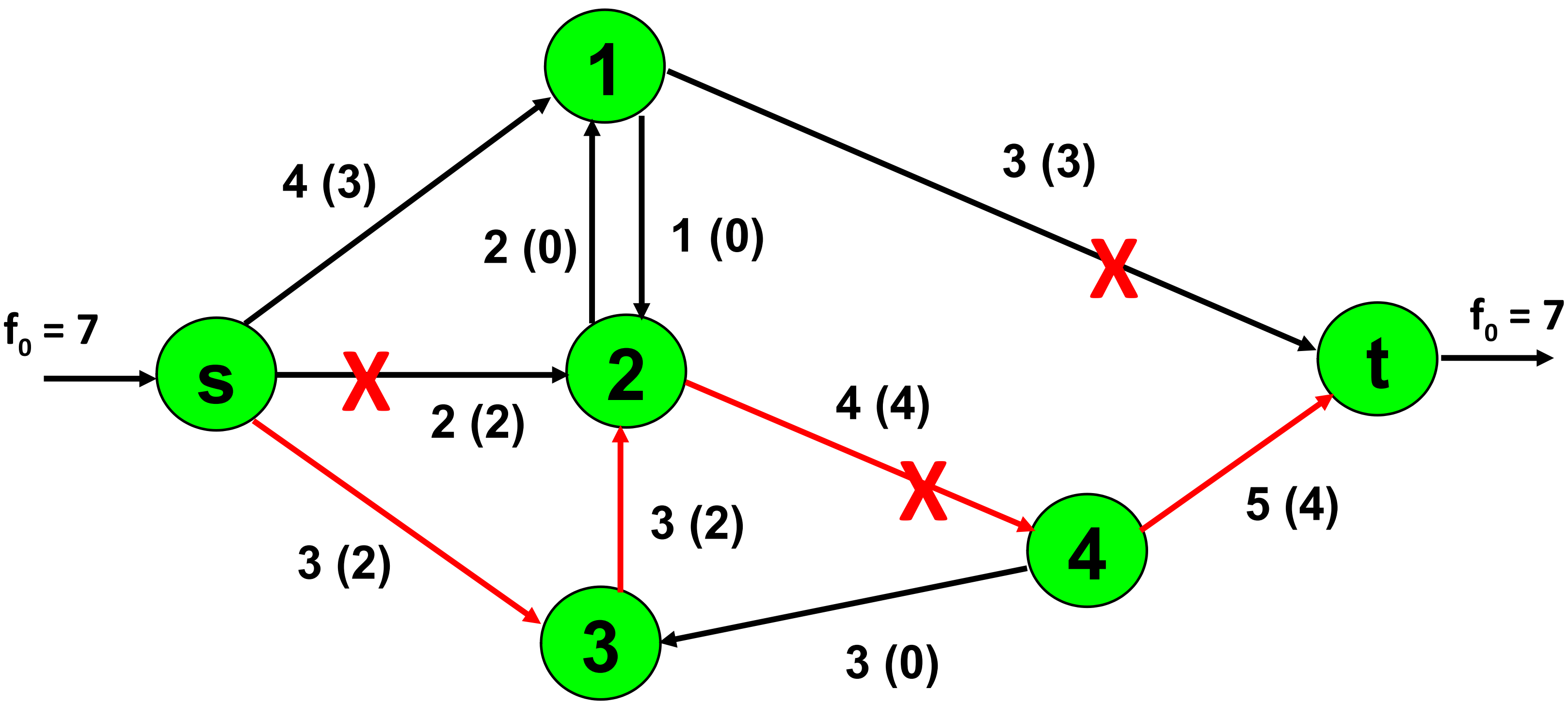
Exemplo



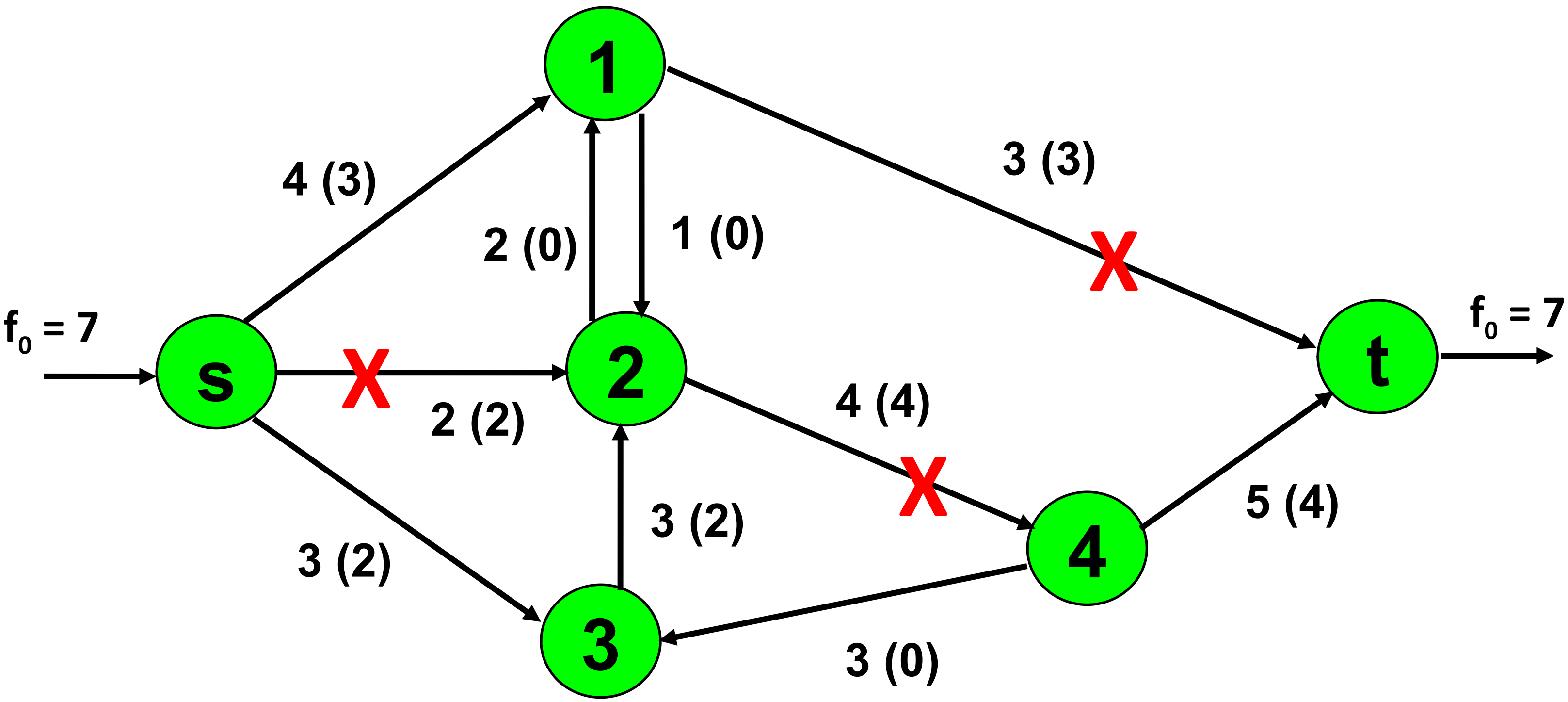
Exemplo



Exemplo



Exemplo



Conclusão

- A cada iteração busca-se um caminho por onde passar o fluxo. Passamos o fluxo por aí e montamos uma rede residual.

- A ideia é fazer uma busca na rede residual por caminhos com arestas onde **f(u,v) < c(u,v)**.

- O que muda nos diversos algoritmos que se baseiam em Ford-Fulkerson é o modo de achar o "augmenting path".

- O algoritmo que emprega busca em largura para selecionar o caminho mais curto (conhecido como algoritmo de Edmonds-Karp) tem complexidade $\boldsymbol{O(v\, e^2)}$.

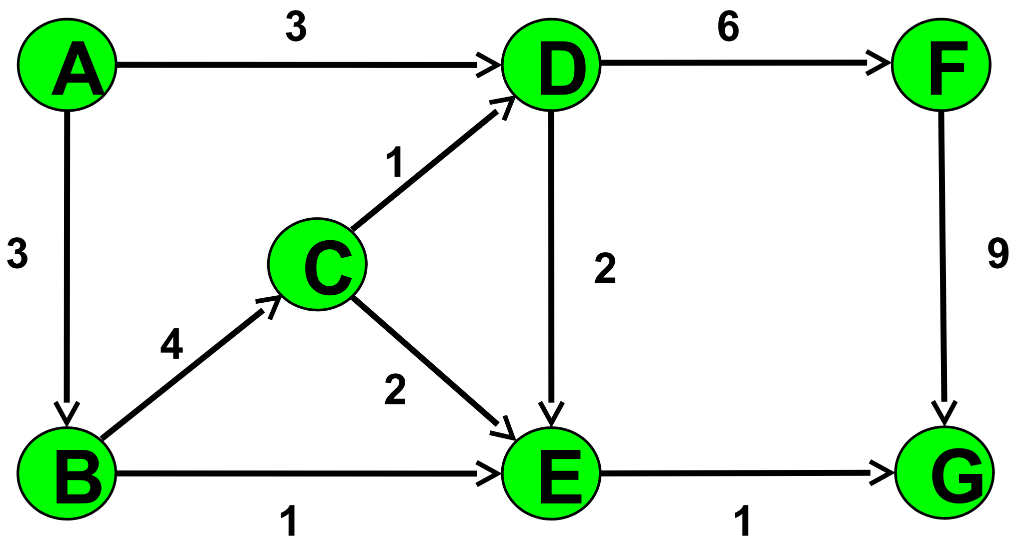
Conclusão

Algoritmo	Complexidade no tempo
Ford e Fulkerson [1962]	-
Dinic [1970]	$O(v^2\ e)$
Edmonds e Karp [1972]	$O(v\ e^2)$
Karzanov [1974]	$O(v^3)$
Galil [1978]	$O(v^{5/3}\ e^{1/2})$
Galil e Naamad [1980]	$O(v\ e \log^2 v)$
Sleator e Tarjan [1983]	$O(v\ e \log v)$
Gabow [1985]	$O(v\ e \log u)$
Ahuja, Orlin e Tarjan [1989]	$O(v\ e + v^2 \log^{1/2} u)$

u : valor máximo permitido para as capacidades das arestas.

Exercício 1

Use o algoritmo de Edmonds-Karp para encontrar o fluxo máximo da rede abaixo. A valoração da aresta indica sua capacidade. O vértice **A** é a fonte e o vértice **G** é o sumidouro.

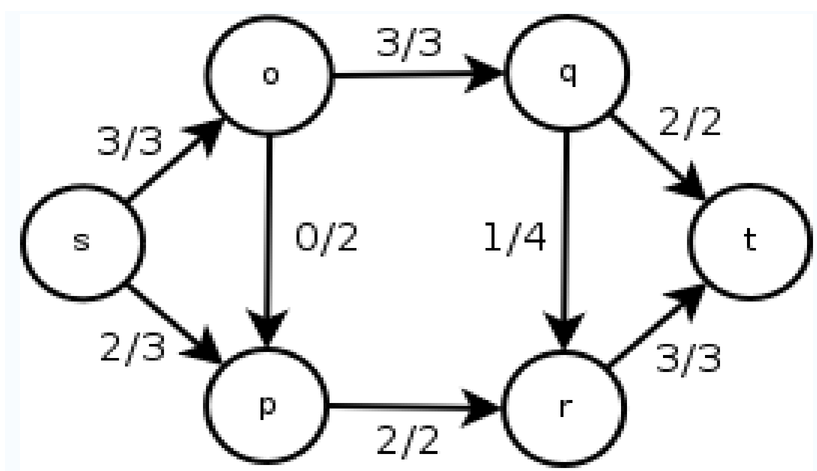


Exercício 2

Encontre a vazão máxima da rede abaixo. Em seguida, suponha que a vazão das tubulações não está sendo suficiente. Assim, um engenheiro decide construir uma nova tubulação de **p** para **t** com uma vazão 3.

1) Em quanto a vazão máxima do sistema irá aumentar com essa nova tubulação? Por quê?

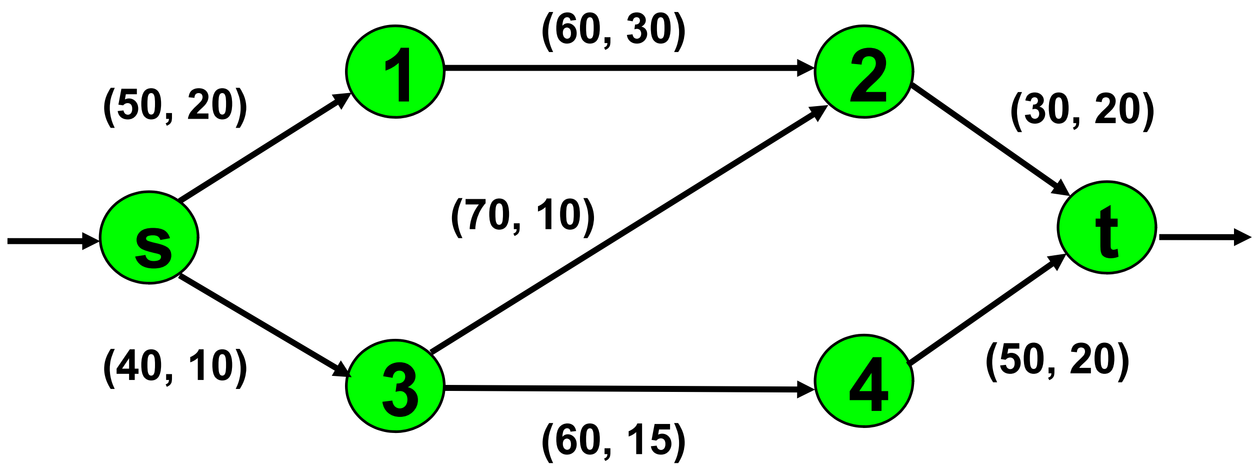
2) Dada essa nova tubulação, que outra tubulação você alteraria para aumentar a vazão máxima do sistema para 8? Por quê?



Exercício 3

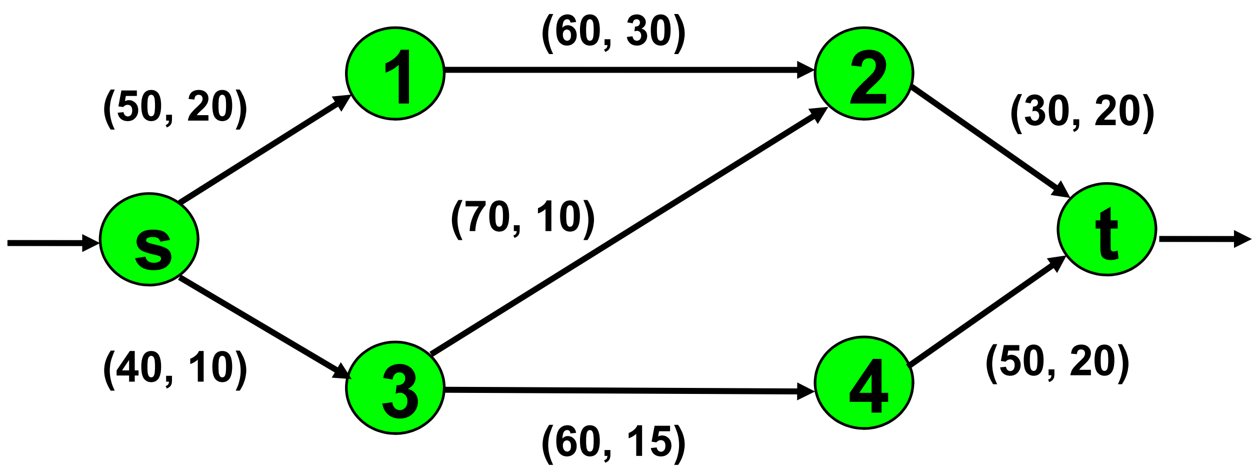
Quanto custaria no mínimo enviar o fluxo máximo da rede abaixo tendo como origem sua fonte e destino seu sumidouro? Explique de forma detalhada sua resposta.

Note que além da capacidade, cada aresta também é valorada com o custo unitário associado ao transporte. Por exemplo, a aresta **(s, 1)** tem capacidade de 50 a um custo unitário de 20.



Exercício 4

Responda os itens a seguir de acordo com a rede abaixo.



a) Quanto custaria no mínimo passar 25 unidades de fluxo pela rede?

b) Quanto custaria no mínimo passar 35 unidades de fluxo pela rede?

c) Se eu dispuser de 2.600 unidade de transporte, quantas unidades de fluxo no máximo poderei passar?

Exercício 5

- O problema de alocação linear pode ser aplicado a escolha de **n** pessoas a serem contratadas para executar **n** serviços, levando-se em conta que a pessoa **i** cobra um preço $\mathbf{c_{ij}}$ para executar o serviço **j**, de tal modo que o custo total seja mínimo.

- Ele pode ser resolvido considerando-se o grafo bipartido **G = (P U S, E)**, onde **P** = {pessoas}, **S** = {serviços} e o arco $\mathbf{(p_i , s_j)}$ tem custo $\mathbf{c_{ij}}$ e capacidade 1. Adiciona-se uma fonte fictícia ligada aos vértices de **P** e um sumidouro fictício ligado aos vértices de **S**, onde todos os novos arcos têm custo zero e capacidade 1.

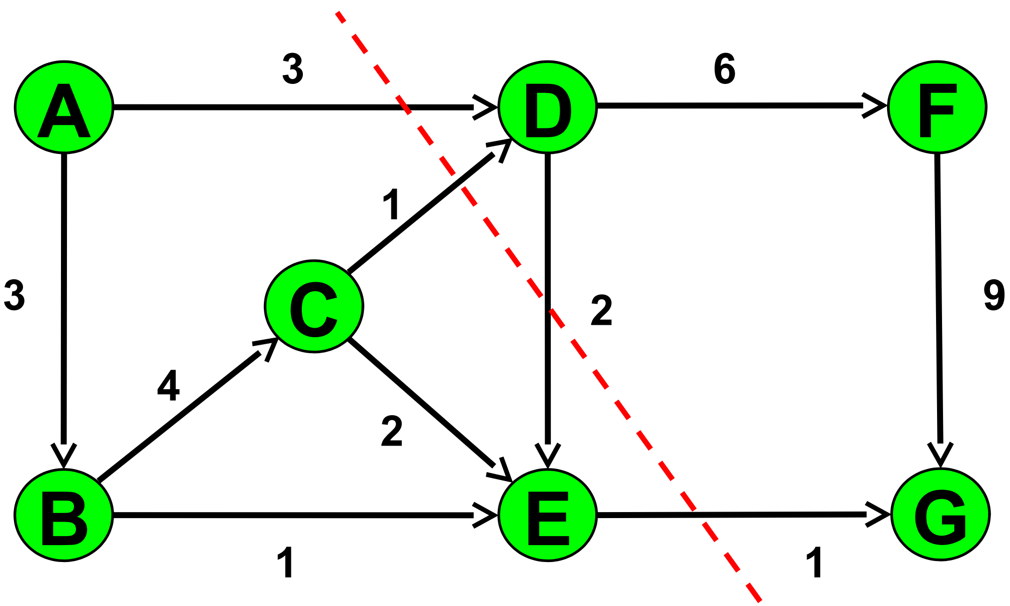
- Assim, um fluxo máximo de custo mínimo fornecerá uma alocação de custo mínimo e seu valor respectivo.

Exercício 5

- Agora, aplique o algoritmo apresentado no slide anterior para calcular a alocação de custo mínimo usando os dados da tabela abaixo.

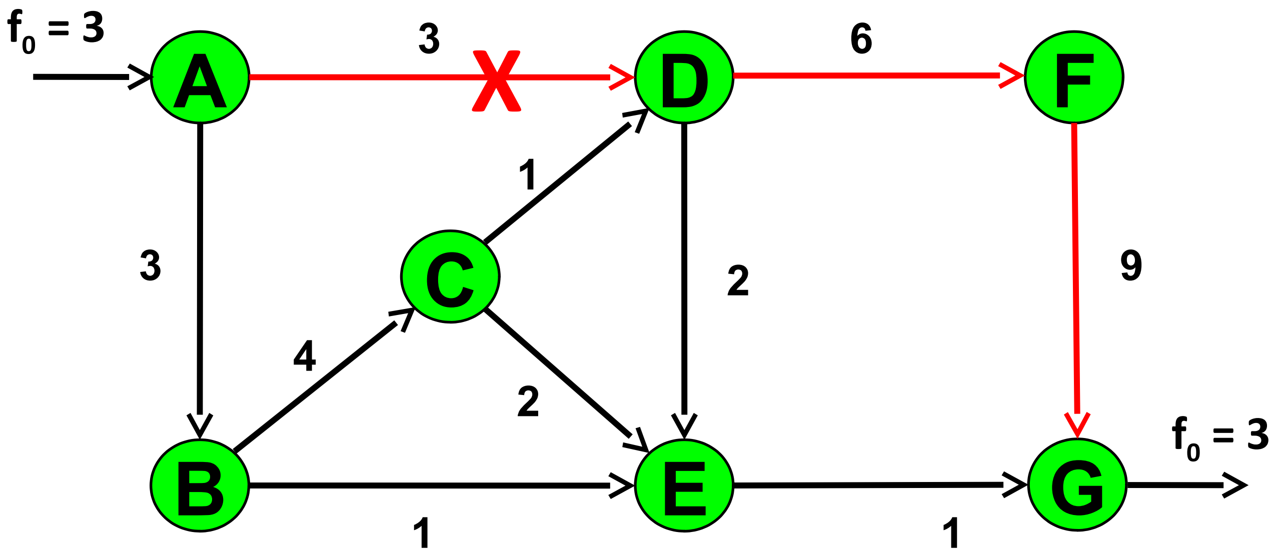
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	18	11	7	9	13
2	7	4	9	15	14
3	6	12	13	17	18
4	13	10	12	14	17
5	12	9	9	14	14

Exercício 1

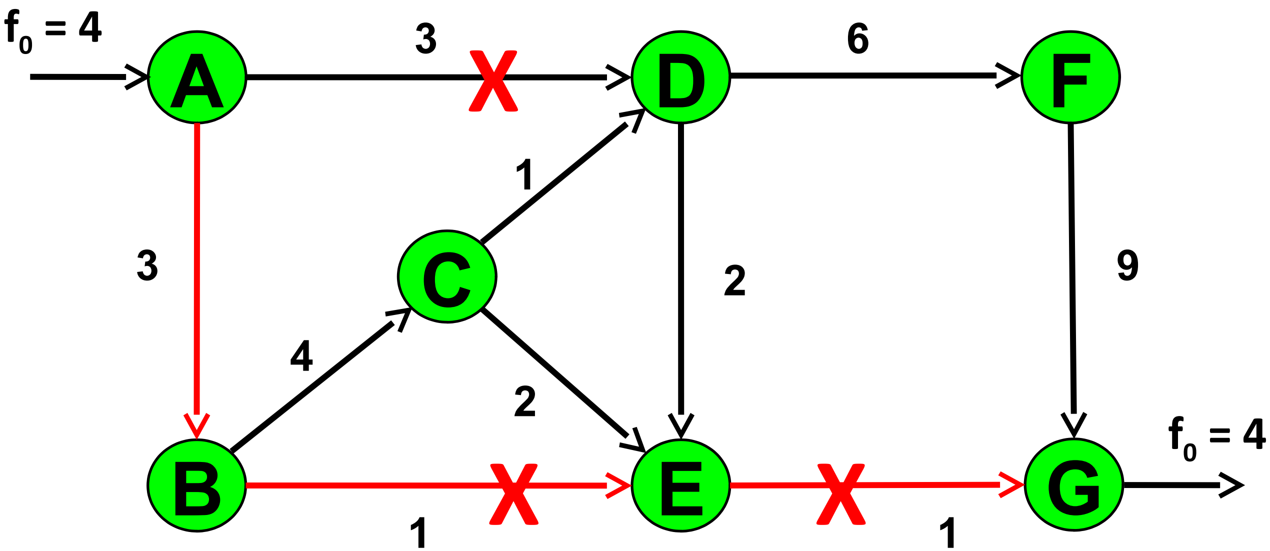


- Dado o corte mínimo acima, o fluxo máximo é igual a 5 (cinco).
- A aresta (D, E) não é considerada no cálculo da capacidade do corte.

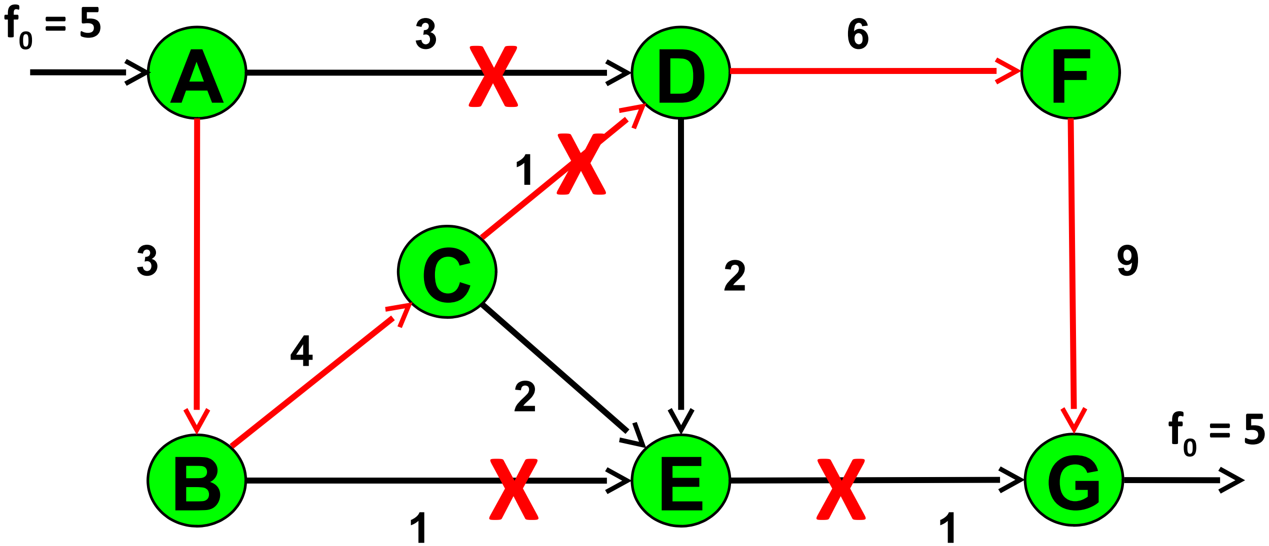
Exercício 1



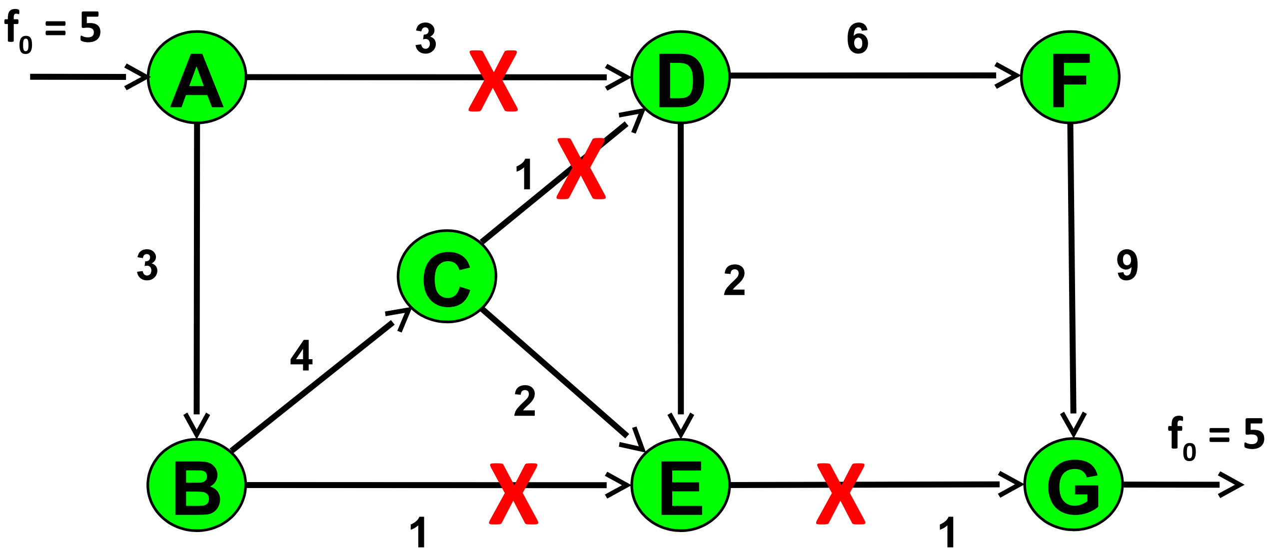
Exercício 1



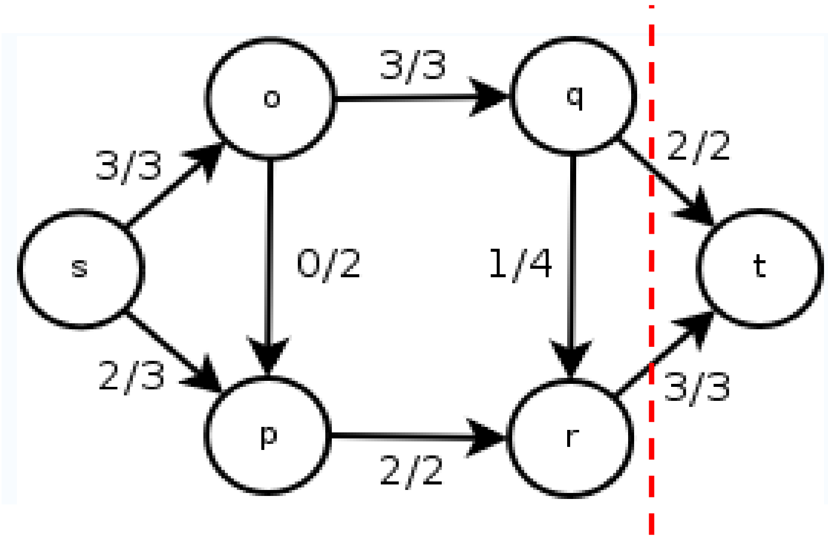
Exercício 1



Exercício 1



Exercício 2

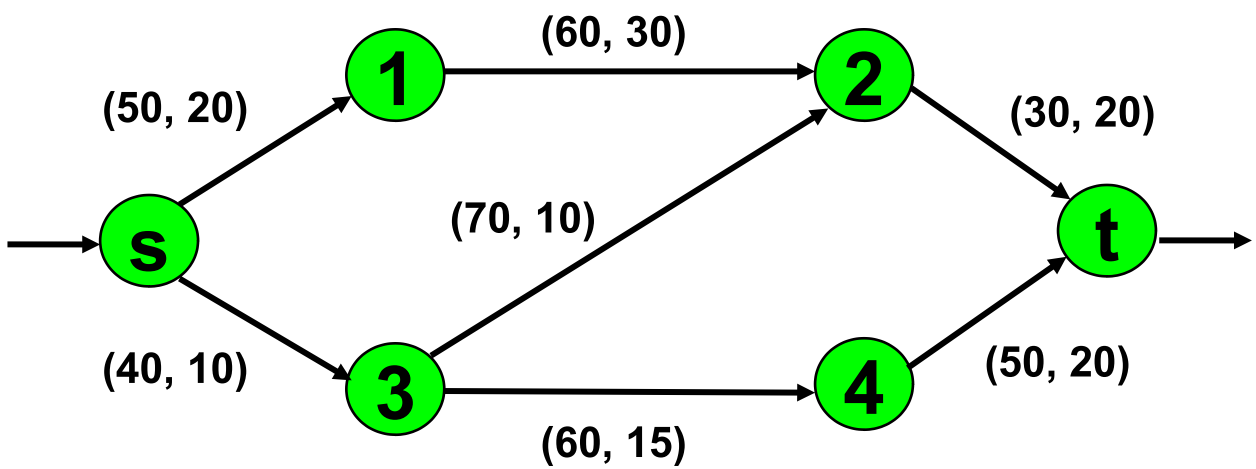


- A vazão máxima da rede é 5, de acordo com o corte mínimo.

- Acrescentando a aresta (p,t), de vazão 3, o corte mínimo passa a ser formado pelas arestas (s,o) e (s,p); e a vazão máxima passa a ser 6, ou seja, seria aumentada apenas de uma unidade.

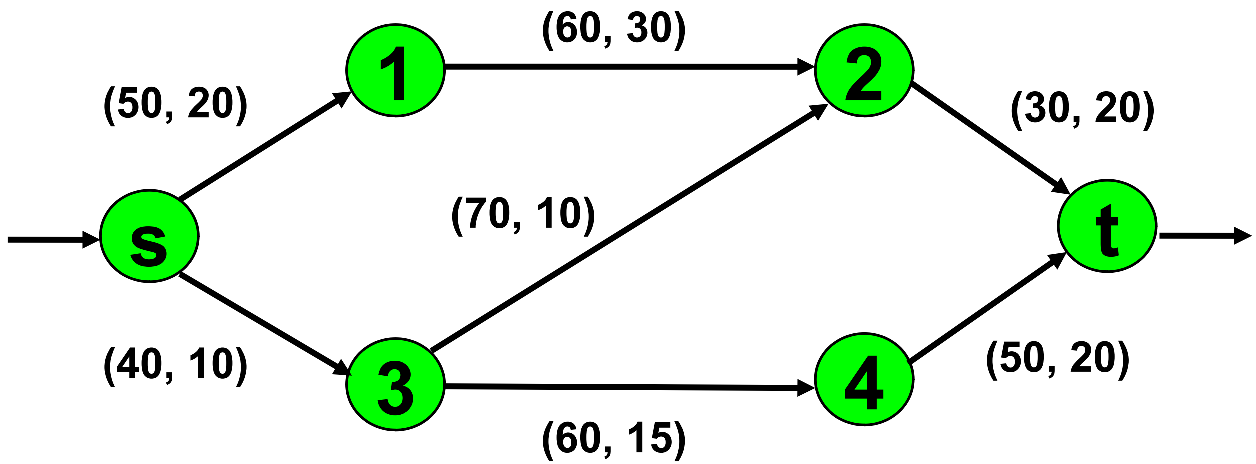
- Mantendo a aresta (p,t) (3) e aumentando a vazão da aresta (s,p) para 5, a vazão máxima da rede passaria a ser igual a 8, por exemplo.

Exercício 3



- O fluxo máximo da rede acima é igual a 70 usando dois únicos caminhos.
- O caminho **s – 1 – 2 – t** entrega um fluxo de 30 a um custo de 70 (= 2.100) e o caminho **s – 3 – 4 – t** entrega um fluxo de 40 a um custo de 45 (= 1.800).
- Com isso, o custo mínimo para enviar o fluxo máximo é igual a 3.900.

Exercício 4



a) Primeiro caminho mínimo: **s – 3 – 2 – t** com custo 40 e fluxo 30. Logo, passar 25 unidades de fluxo custa no mínimo 1.000.

b) Segundo caminho mínimo: **s – 3 – 4 – t** com custo 45 e fluxo 10. Logo, passar 35 unidades de fluxo custa no mínimo 1.200 + 225 = 1.425.

c) Terceiro caminho mínimo: **s – 1 – 2 --- 3 – 4 – t** com custo 75 e fluxo 30. Logo, com 2.600 é possível passar no máximo 52 unidades de fluxo com custo 1.200 + 450 + 900 = 2.550.

Exercício 5

- Montando a rede, alocação mínima é igual a 4 + 6 + 7 + 14 + 14 = 45

	1	2	3	4	5
1	18	11	7	9	13
2	7	4	9	15	14
3	6	12	13	17	18
4	13	10	12	14	17
5	12	9	9	14	14