Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

Tabelas de Dispersão (ou Hash)

Nelson Cruz Sampaio Neto
nelsonneto@ufpa.br

23 de setembro de 2018

Introdução

- Em geral, os métodos de pesquisa existentes são baseados na comparação da chave de busca com as chaves já armazenadas na estrutura, ou mesmo na utilização de *bits* da chave de pesquisa para escolher o caminho a seguir.

- **Conceito de hash**: Os registros armazenados em uma tabela são endereçados a partir de uma transformação aritmética sobre a chave de pesquisa.

- **Objetivo**: Ter **eficiência média de *O*(1)** nas operações de busca, inserção e remoção. Para isso, a distribuição das chaves na tabela deve ser uniforme e as operações não devem provocar grandes variações na quantidade de registros armazenados.

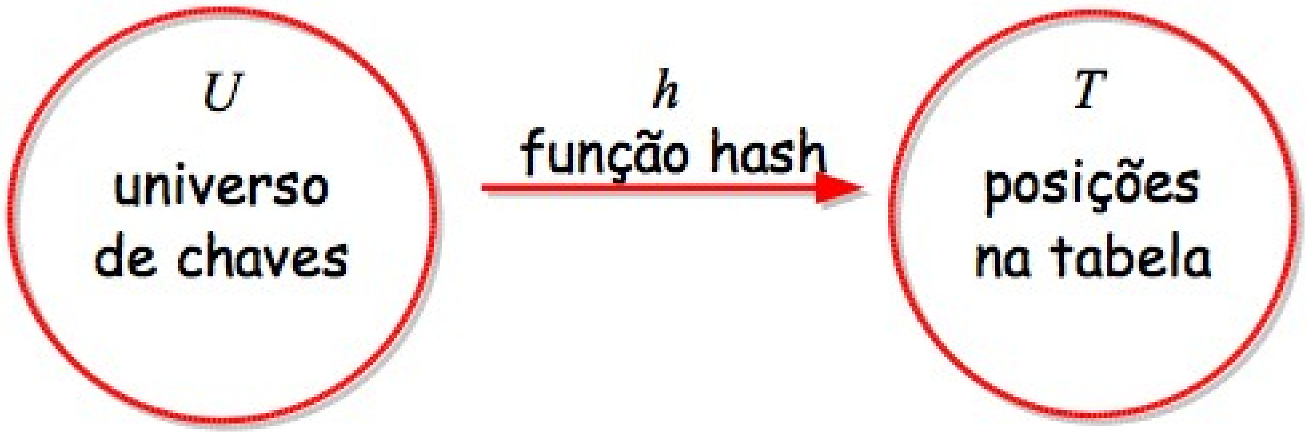
Introdução

- O método de pesquisa conhecido como hash (ou tabela de dispersão) é constituído de duas etapas principais:

1. Computar o valor da **função hash** (também conhecida como função de dispersão), que transforma a chave de pesquisa em um endereço da tabela.

2. Dado que duas ou mais chaves podem ser transformadas em um mesmo endereço de tabela, é necessário existir um método para lidar com as **colisões**.

Introdução

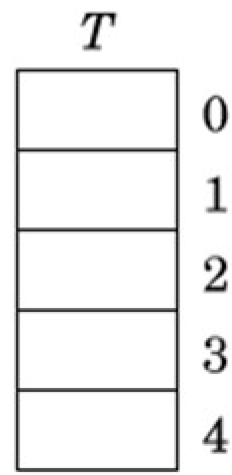


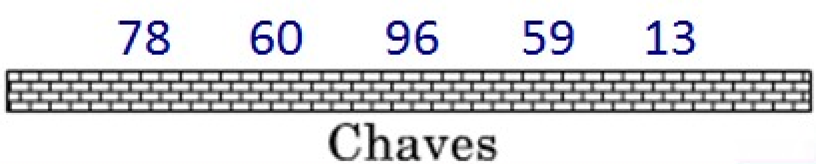
Exemplo

- <u>Idéia</u>: transformar a chave x num <u>endereço-base</u> $h(x)$, que é um valor entre 0 e m-1.
  h é chamada <u>função de dispersão</u>.

- <u>Exemplo</u>

$$h(x) = x \bmod 5$$



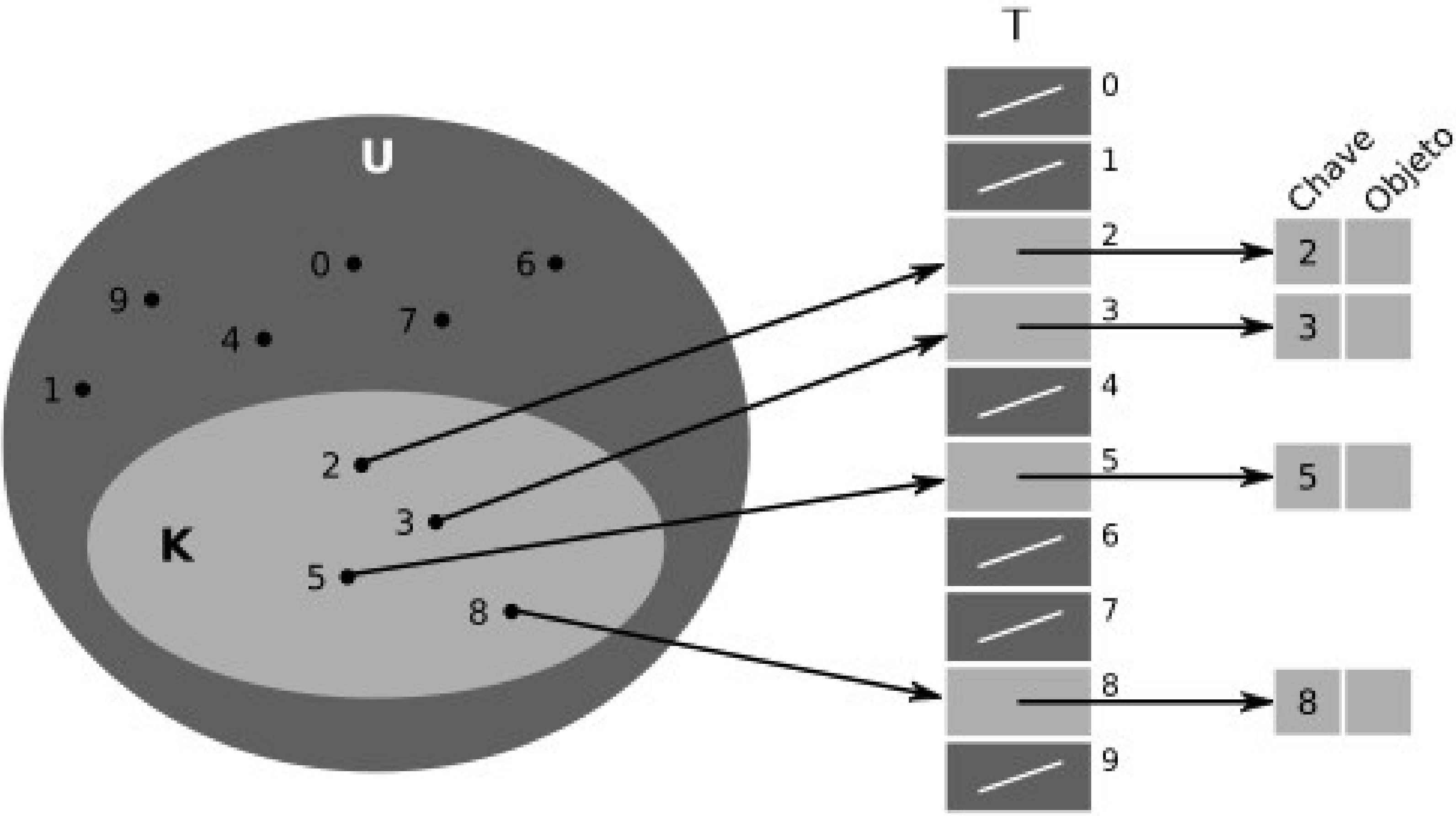


Endereçamento direto

- Quando o universo de chaves *U* é pequeno, podemos alocar uma tabela com uma posição para cada chave, ou seja, $|T| = |U|$.

- Então, cada posição da tabela, que pode ser implementada como um vetor, representa uma chave de *U* e armazena um elemento ou um ponteiro para o elemento.

Endereçamento direto



Endereçamento direto

- Os códigos são simples e apresentam tempo de execução constante no pior caso.

```
Insere(Elemento e, Chave c)
1:    T[h(c)] := e

Remove(Chave c)
1:    T[h(c)] := null

Elemento Recupera(Chave c)
1:    return T[h(c)]
```

Problema

- Contudo, nem sempre *U* é pequeno!
- Suponha que a chave seja a matrícula de um aluno da UFPA...
  - Trata-se de um número inteiro de 7 dígitos.
  - Logo, são 10.000.000 chaves.
  - Se cada posição da tabela ocupar míseros 127 bytes, precisamos de mais de 1 Gbyte de memória apenas para a tabela... mesmo que ela não esteja cheia.

Tabelas Hash

- Chamaremos de K o conjunto de chaves que serão efetivamente armazenadas na tabela.
- Logo, nossa tabela deveria ter dimensão $|K|$, mais que isso seria desperdício de memória.
- **Problema**: Na prática, os elementos de K não são conhecidos e $|U| >> |K|$.
- Então, como podemos fazer isso?

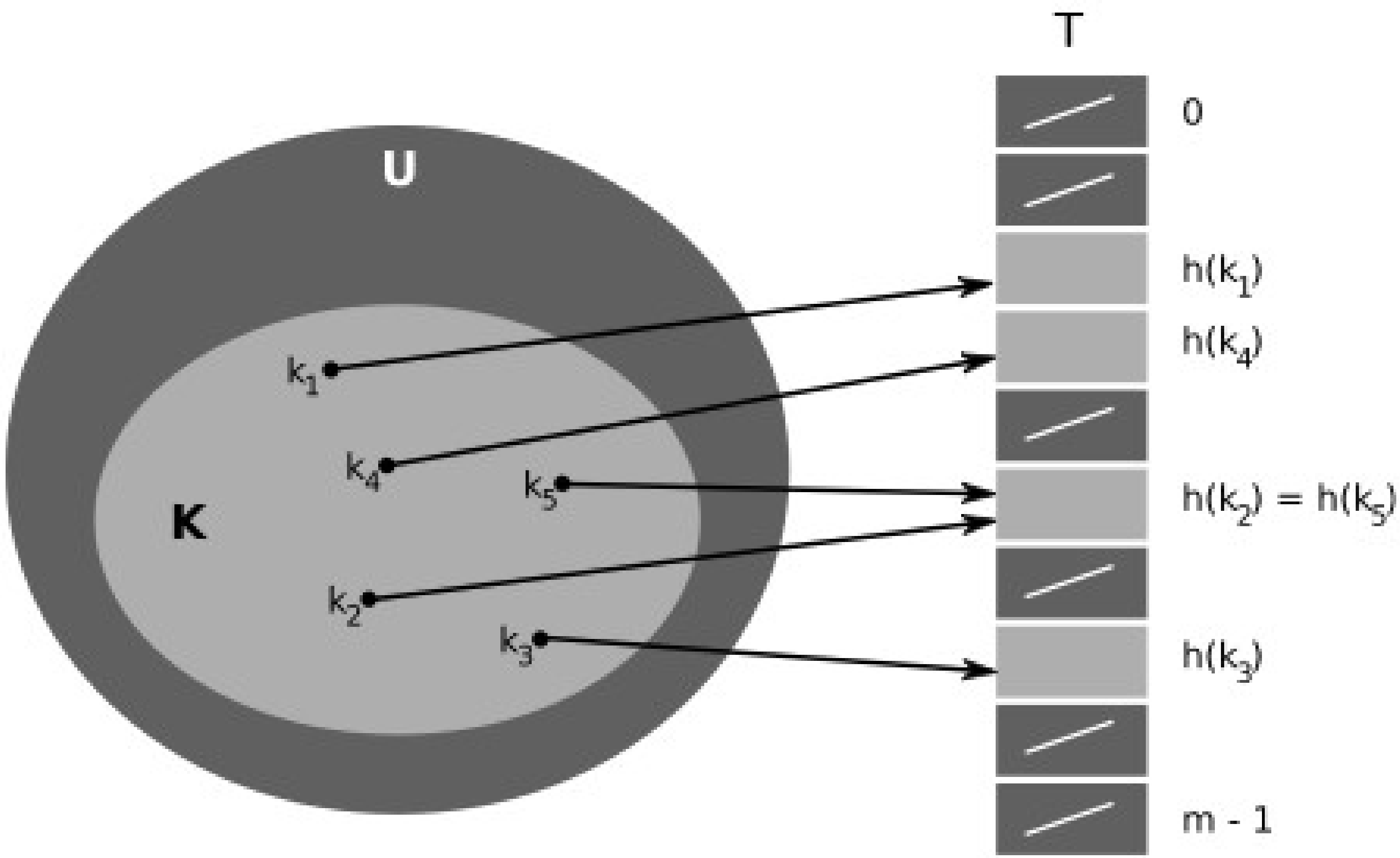
Tabelas Hash

- **Solução**: Usar uma **função hash** *h* para mapear as chaves em inteiros dentro do intervalo $[0...m - 1]$, no qual *m* é o tamanho da tabela.

- A tabela é implementada como um vetor em que cada posição armazena um subconjunto de *U*.

- Logo, é possível que mais de uma chave seja mapeada para a mesma posição da tabela, o que resulta no que chamaremos de **colisão**.

Tabelas Hash

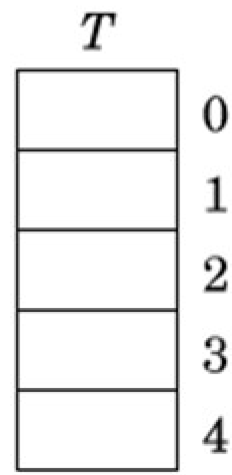


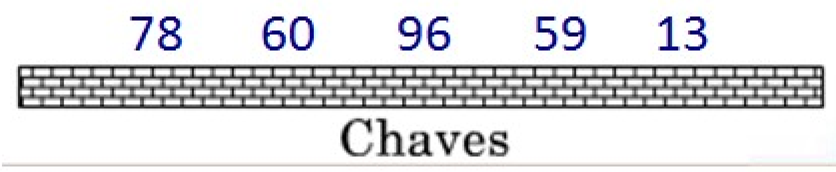
Tabelas Hash

- Idéia: transformar a chave x num endereço-base $h(x)$, que é um valor entre 0 e m-1.
  h é chamada função de dispersão.

- Exemplo

$$h(x) = x \bmod 5$$

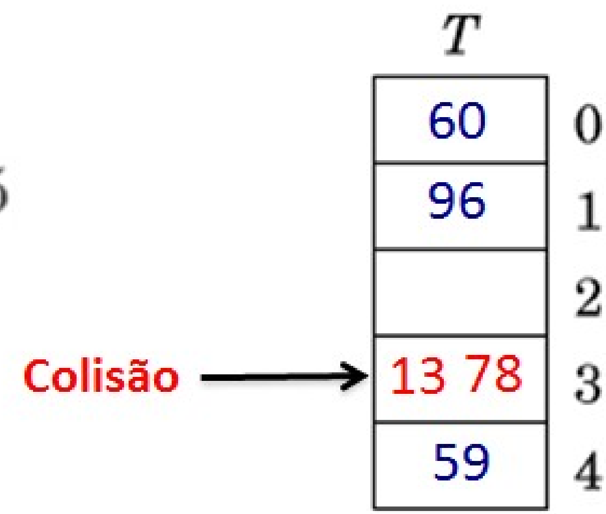




Tabelas Hash

- Exemplo

$$h(x) = x \bmod 5$$



Método da divisão: Para números reais *x* e *y*, a operação binária **mod** é definida como *x* mod *y* = *x* – *y* * piso(*x*/*y*), se *y* ≠ 0.

O que faz uma função hash de boa qualidade?

- Uma função hash de boa qualidade satisfaz (aproximadamente) à hipótese do **hash uniforme simples**:

  "Cada chave tem igual probabilidade de efetuar o hash para qualquer das *m* posições, não importando a posição para onde foi feito o hash de qualquer outra chave".

- Em geral, não é possível verificar essa condição, pois, é raro conhecer a distribuição de probabilidades segunda a qual as chaves são obtidas, e as chaves não podem ser obtidas de forma independente.

O que faz uma função hash de boa qualidade?

- Na prática, podem ser usadas técnicas heurísticas para criar funções hash que provavelmente terão bom desempenho.

- Uma boa tática é derivar a tabela hash de um modo supostamente independente de quaisquer padrões que possam existir nos dados.

- **Método da divisão**: A chave é dividida por um número primo, que não deve ser potência de 2, e o resto da divisão é usado como valor hash.

- Existem outras funções de dispersão: dobra, multiplicação, análise dos dígitos, etc. Abordaremos aqui apenas o método da divisão.

Como evitar colisões?

- Claramente, o número de colisões depende de como a função hash mapeia as chaves na tabela.
- Por exemplo, um número primo não muito próximo a uma potência exata de 2 normalmente é uma boa escolha para o tamanho da tabela no método da divisão.
- O fato é que como $|U| > m$, a escolha da função hash apenas minimiza o número de colisões.
- **Solução**: As colisões remanescentes serão tratadas de forma algorítmica, aplicando as técnicas de **endereçamento aberto** ou **encadeamento**.

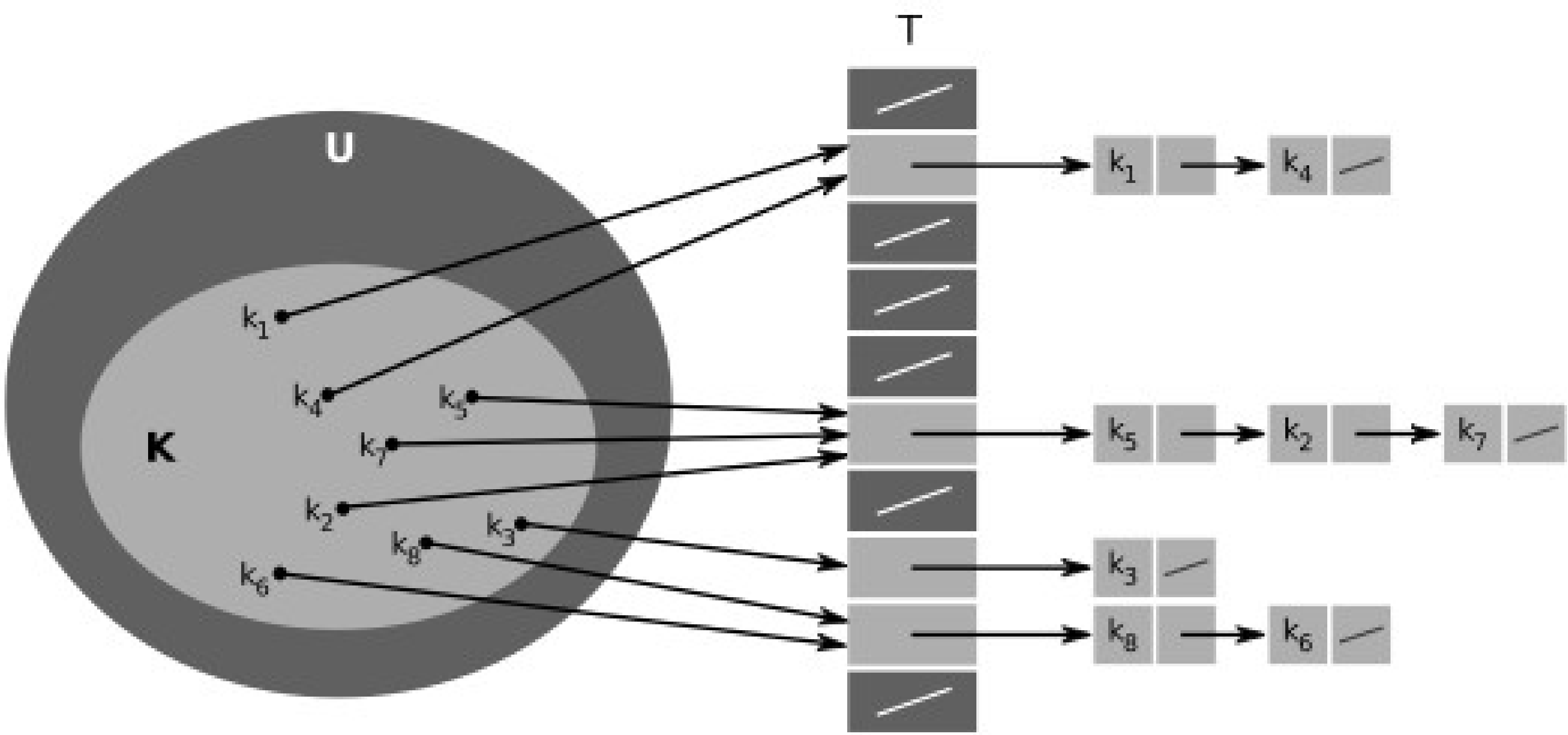
Encadeamento

- Uma das formas de resolver colisões é construir uma **lista encadeada** para cada endereço da tabela.

- Assim, todas as chaves com mesmo endereço são encadeadas em uma lista linear.

- Desvantagem: manutenção de uma estrutura de dados exterior à tabela de dispersão.

Encadeamento



Exercícios

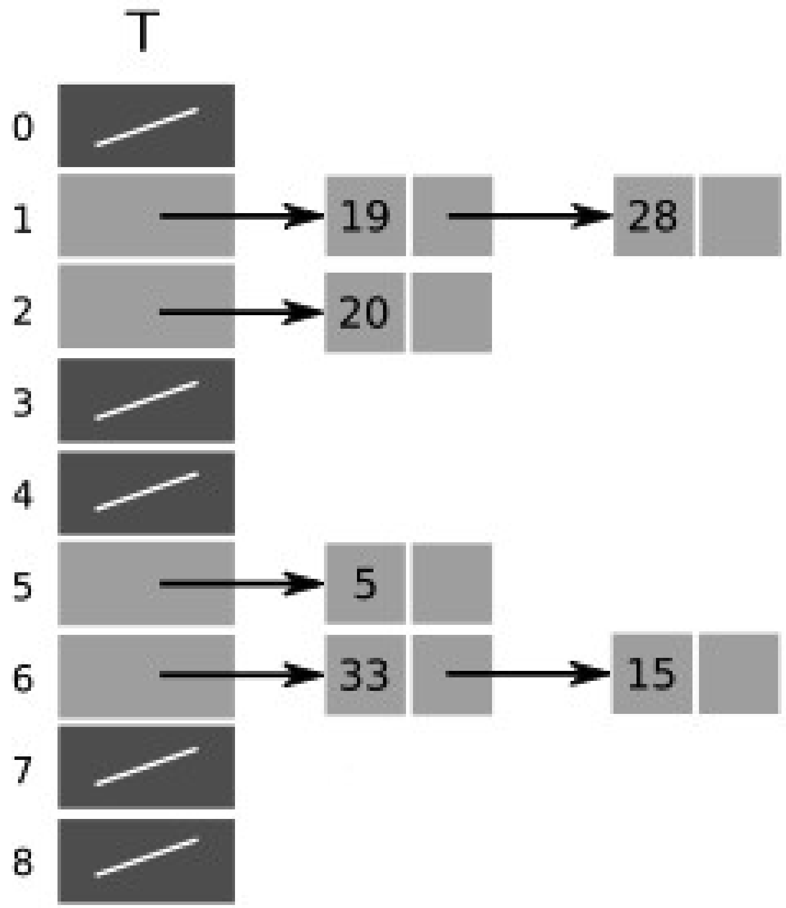
1. Insira as chaves {5, 28, 19, 15, 20, 33} em uma tabela *T* com 9 posições [0...8], utilizando a função hash: $\boldsymbol{h(k) = k}$ **mod 9**.

2. Se a *i*-ésima letra do alfabeto é representada pelo número *i* e a função dispersão ***h*(chave) = chave mod *M*** é utilizada para *M* = 7, então mostre o resultado da inserção das seguintes chaves na tabela: P E S Q U I S A.

Obs: Para números reais *x* e *y*, a operação **mod** é definida por:

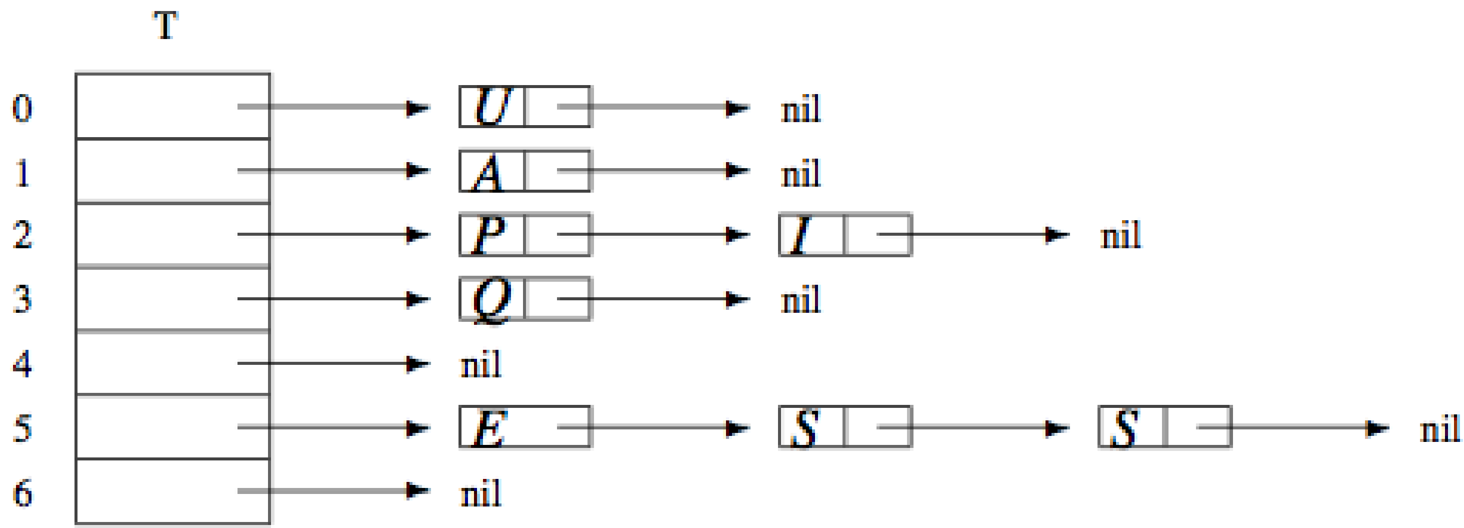
***x* mod *y* = *x* – *y* * piso(*x*/*y*)**.

Exercício 1



Exercício 2

- Por exemplo, $h(A) = h(1) = 1$, $h(E) = h(5) = 5$, $h(S) = h(19) = 5$, e assim por diante.



Encadeamento

- É usual efetuar-se a inclusão de uma nova chave x no final ou mesmo no início da lista correspondente ao endereço $h(x)$.

- A ideia é que a lista será percorrida de qualquer maneira, para assegura que x não pertence à mesma, independentemente da posição de inclusão de x.

Encadeamento

- **Análise**: Numa tabela de dispersão *T* com hash uniforme e na qual as colisões são tratadas com encadeamento externo, o número médio de comparações efetuadas numa busca sem sucesso é igual a $\alpha = n/m$, chamado de **fator de carga**,

  onde *n* representa o número de chaves na tabela e *m* o tamanho da tabela.

Encadeamento

- **Prova:** Como o hash é uniforme, existe a mesma probabilidade $1/m$ de a busca ser efetuada em qualquer uma das m listas encadeadas.

  Para $i = 0, 1, \ldots, m - 1$, vamos denotar o comprimento da lista $T[i]$ por n_i . Então,

  $n = n_0 + n_1 + \ldots + n_{m-1}$

  e o valor esperado de n_i é $E[n_i] = \alpha = n/m$.

Encadeamento

- Pela análise anterior, as operações pesquisa, insere e retira custam $O(1 + n/m)$ **em média**, sendo que a constante 1 representa o tempo para encontrar a entrada da tabela (ou seja, calcular a função hash), e n/m o tempo para percorrer a lista.

- Para valores de m próximos de n, a eficiência torna-se **constante**, isto é, independente de n.

Encadeamento

- No **pior caso**, todas as chaves são mapeadas para a mesma posição e a busca custa $O(n)$ mais o cálculo da função hash.

- Qual a validade dessa análise?
  - A função hash tem que ser terrível.
  - Pouquíssimas chances de ocorrer na prática.

Encadeamento interior

- Em algumas aplicações não é desejável a manutenção de uma estrutura exterior à tabela de dispersão.

- Nessa situação, ainda é possível resolver as colisões usando listas encadeadas, desde que estas compartilhem o mesmo espaço de memória que a tabela.

Encadeamento interior

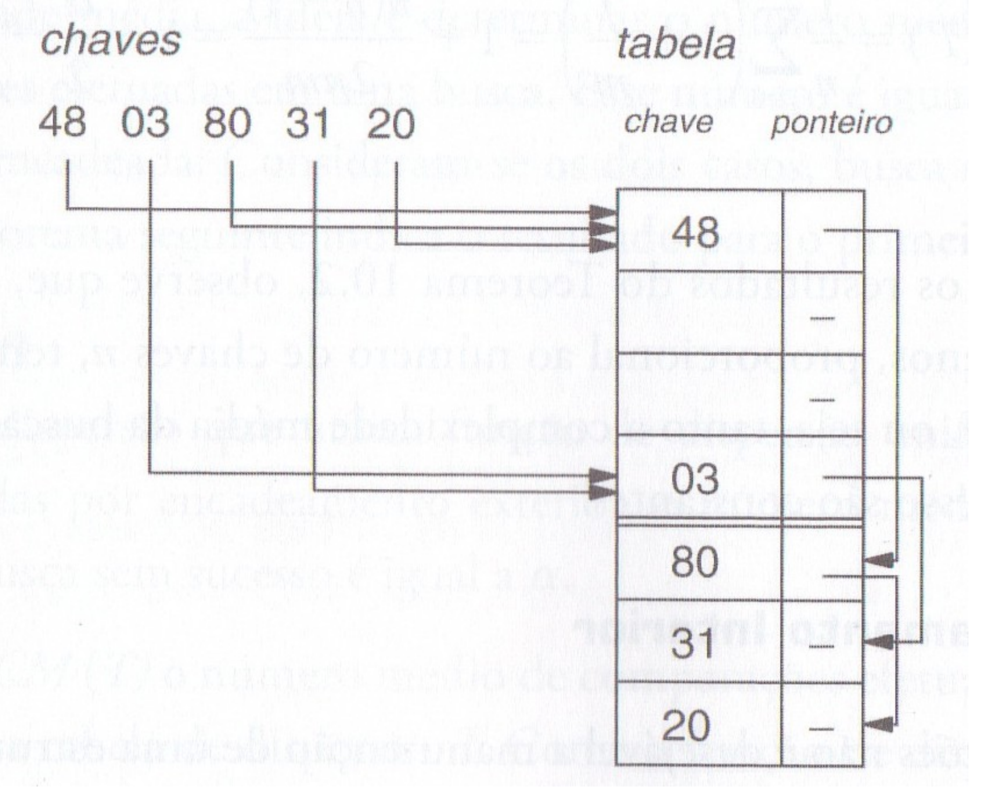
- O encadeamento interno prevê a divisão da tabela em duas zonas, uma de endereços-base (tamanho p) e outra de colisões (tamanho s).

- Naturalmente, tem-se que $p + s = m$, e os valores de p e s são fixos.

- Nesse caso, o fator de carga n/m é necessariamente menor ou igual a 1.

Encadeamento interior

- Exemplo: Há um total de n = 5 chaves, com uma tabela de tamanho m = 7, sendo dividida em p = 4 e s = 3. Sendo $h(x) = x \bmod 4$.



Encadeamento interior

- Aumentando-se o espaço destinado a zona de colisões pela correspondente diminuição da zona de endereços-base, diminui a possibilidade de ocorrência de “falso” *overflow*.

- Por exemplo, na tabela do *slide* anterior, uma nova inclusão com endereço-base 0 ou 3 provocará a condição de *overflow*, apesar da zona de endereços-base ainda apresentar espaços vazios.

- Contudo, a eficiência da tabela de dispersão também diminui.

- No caso limite de $p = 1$ e $s = m - 1$, a tabela se reduz a uma lista encadeada, cujo tempo de busca é $O(n)$.

Encadeamento interior

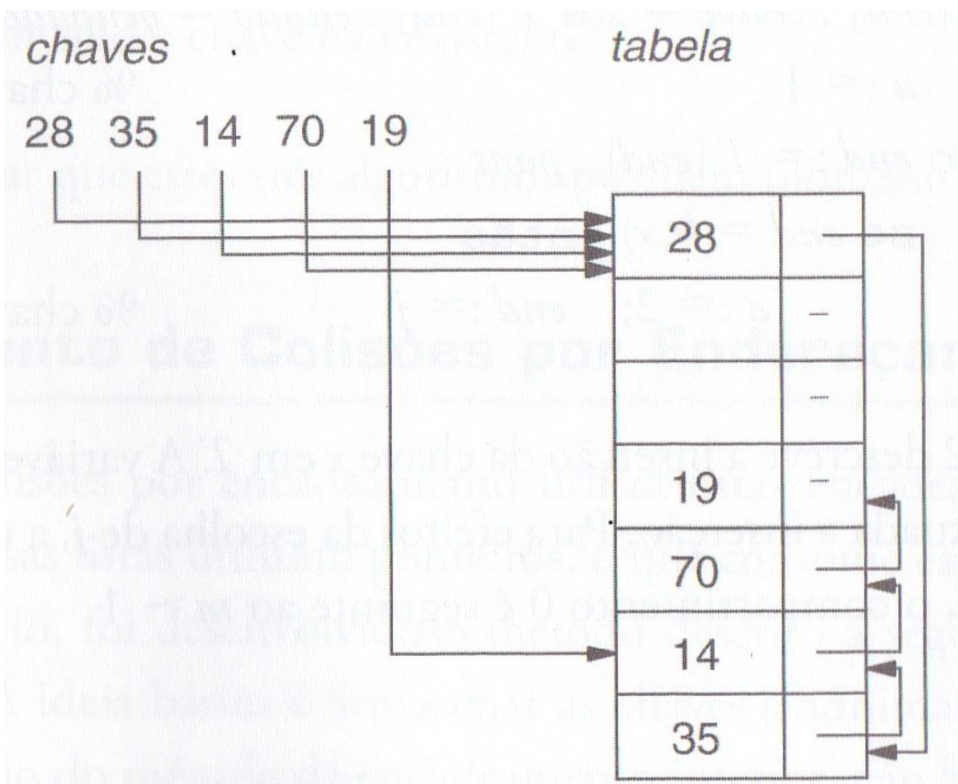
- Uma outra técnica consiste em não diferenciar as duas zonas da tabela, ou seja, qualquer endereço da tabela pode ser de base ou de colisão.

- Essa técnica pode gerar o efeito indesejado chamado **colisões secundárias**, ou seja, aquelas provenientes da coincidência de endereços para chaves que não possuem a mesma reposta para a função hash.

- Esse fato provoca a necessidade de fusão das duas listas, o que implica uma diminuição de eficiência.

Encadeamento interior

- Exemplo: A colisão secundária se verifica na inclusão da chave 19. Existe a fusão de listas que contêm chaves com diferentes endereços-base. Considerar $h(x) = x \bmod 7$.



Encadeamento interior

- As operações de busca, inserção e remoção possuem pior caso igual a $O(n)$, sendo que a operação de **remoção** exige mais cuidados!

- O fato é que não se pode, simplesmente, remover uma chave x de uma lista encadeada sem reorganizar a tabela.

- Suponha que x pertença à lista encadeada L, sendo y a chave seguinte a x em L. A simples remoção da chave x de L provocaria o funcionamento errôneo da tabela, p.e., a busca por y seria, erradamente, sem sucesso.

- Para contornar esse problema, considera-se que cada espaço da tabela pode estar em um dos três estados: **vazio**, **ocupado** ou **liberado**.

Endereçamento aberto

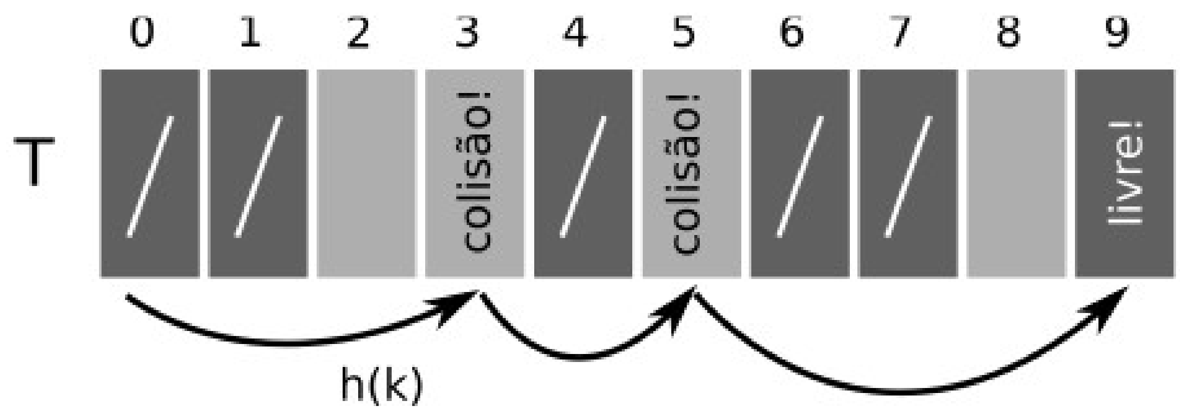
- Em uma tabela de hash com endereçamento aberto, todos os elementos são armazenados na própria tabela sem o uso de listas encadeadas.

- Logo, o fator de carga não pode exceder o valor 1.

- O espaço gasto com encadeamento é economizado e a colisão é tratada com a busca de uma posição vazia na própria tabela para inserção.

Endereçamento aberto

- Quando uma chave *k* é endereçada para uma entrada da tabela que já esteja ocupada (**colisão**), uma sequência de localizações alternativas $h_1(k)$, $h_2(k)$, ... é escolhida.



- Mas se nenhuma das $h_1(k)$, $h_2(k)$, ... posições está vazia, então a tabela está cheia e não podemos inserir *k*.

Endereçamento aberto

- Existem várias propostas para a escolha de localizações alternativas.
- A mais simples é a **hash linear**, na qual a posição h_j na tabela é dada por:

$$h_j = (\ h(k) + j\ ) \bmod m, \text{ para } 1 \leq j \leq m - 1.$$

- Desvantagem: É suscetível ao **agrupamento primário**, isto é, são construídas longas sequências de posições ocupadas, o que degrada o desempenho da busca.

Exercícios

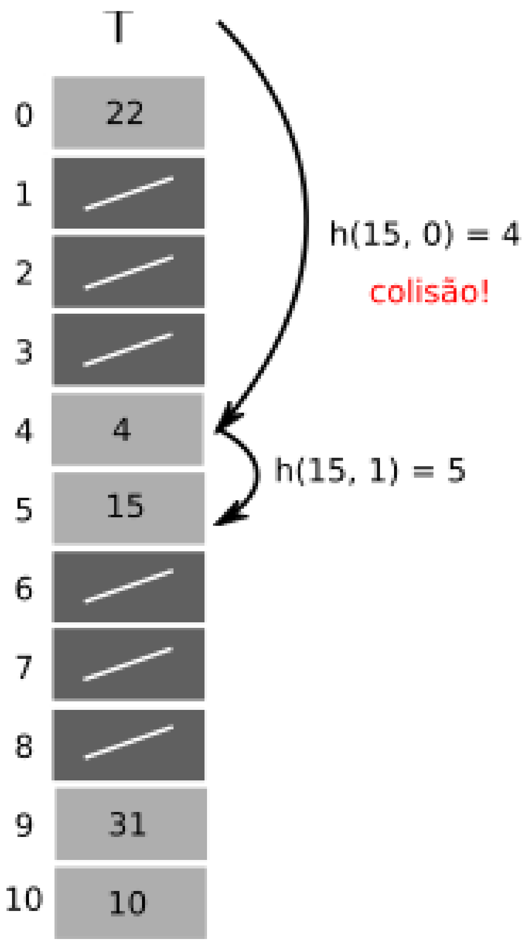
1. Insira as chaves {10, 22, 31, 4, 15, 28, 59} em uma tabela T de tamanho 11 com hash linear e função: $\boldsymbol{h(k) = k}$ **mod 11**.

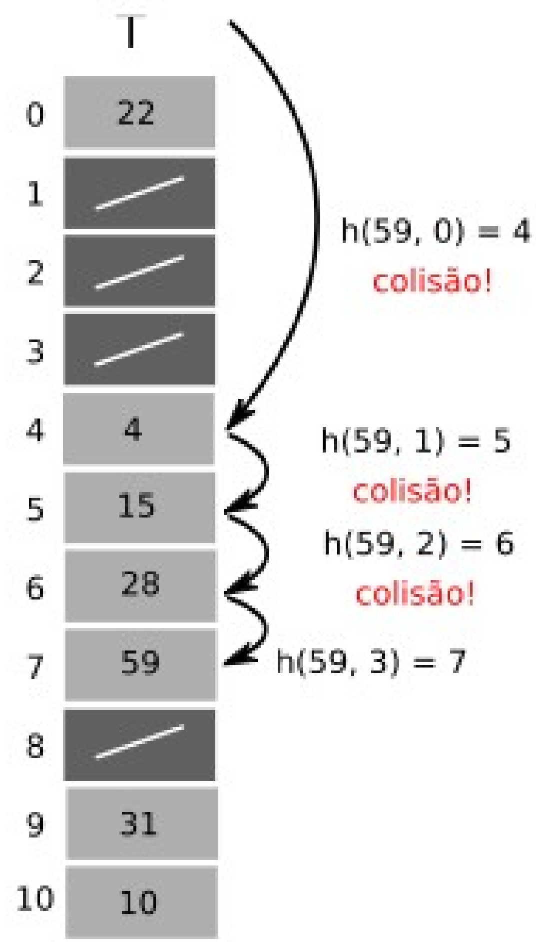
2. Se a i-ésima letra do alfabeto é representada pelo número i e a função dispersão $\boldsymbol{h}$**(chave) = chave mod** $\boldsymbol{M}$ é utilizada para M = 7, então apresente a inserção das chaves L U N E S na tabela usando hash linear para resolver colisões.

Obs: Para números reais x e y, a operação **mod** é definida por:

$$x \bmod y = x - y * \mathrm{piso}(x/y).$$

Exercício 1


T
0
22
1
2
3
4
4
5
15
6
7
8
9
31
10
10
h(15, 0) = 4
colisão!
h(15, 1) = 5


T
0
22
1
2
3
4
4
5
15
6
28
7
59
8
9
31
10
10
h(59, 0) = 4
colisão!
h(59, 1) = 5
colisão!
h(59, 2) = 6
colisão!
h(59, 3) = 7

Exercício 2

- Por exemplo, $h(L) = h(12) = 5$, $h(U) = h(21) = 0$, $h(N) = h(14) = 0$, $h(E) = h(5) = 5$, e $h(S) = h(19) = 5$.

T

0	U
1	N
2	S
3	
4	
5	L
6	E

Endereçamento aberto

- Outro método bastante conhecido para encontrar as localizações alternativas é o **hash quadrático**:

$$h_j = (\ h(k) + c_1 j + c_2 j^2\ ) \text{ mod } m, \text{ para } 1 \leq j \leq m - 1,$$

sendo c_1 e c_2 constantes e $c_2 \neq 0$.

- Evita o agrupamento primário. Porém, as sequências de teste ainda são idênticas para duas chaves com o mesmo mapeamento, é o chamado **agrupamento secundário**.

- Contudo, a degradação introduzida pelo agrupamento secundário é menor que a do primário.

Endereçamento aberto

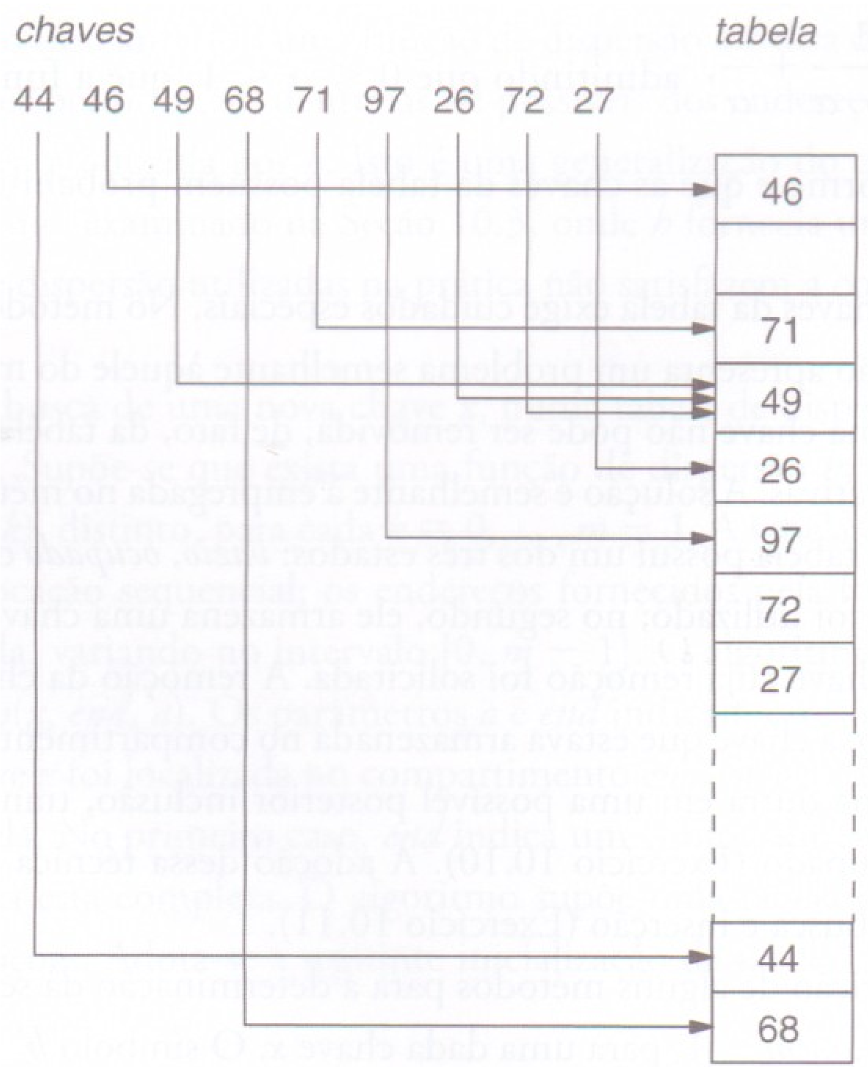
- Os valores de m, c_1 e c_2 devem ser escolhidos de tal forma que as localizações alternativas correspondam a varrer toda a tabela.

- A equação abaixo fornece uma maneira de calcular, diretamente, esses endereços:

$$h_j = (h_{j-1} + j) \bmod m, \text{ para } 1 \leq j \leq m - 1.$$

- Se m for potência de 2, os endereços obtidos por essa equação correspondem à varredura de toda a tabela.

Endereçamento aberto



Exemplo: Observe que as chaves 26, 72 e 27, que provocam colisões, são alocadas por tentativa linear após, respectivamente, 2, 4 e 4 tentativas, enquanto, ao serem alocadas por tentativa quadrática, as tentativas são em número de 2, 3 e 3.

Tabela de dispersão com dimensão 23.

Exercício

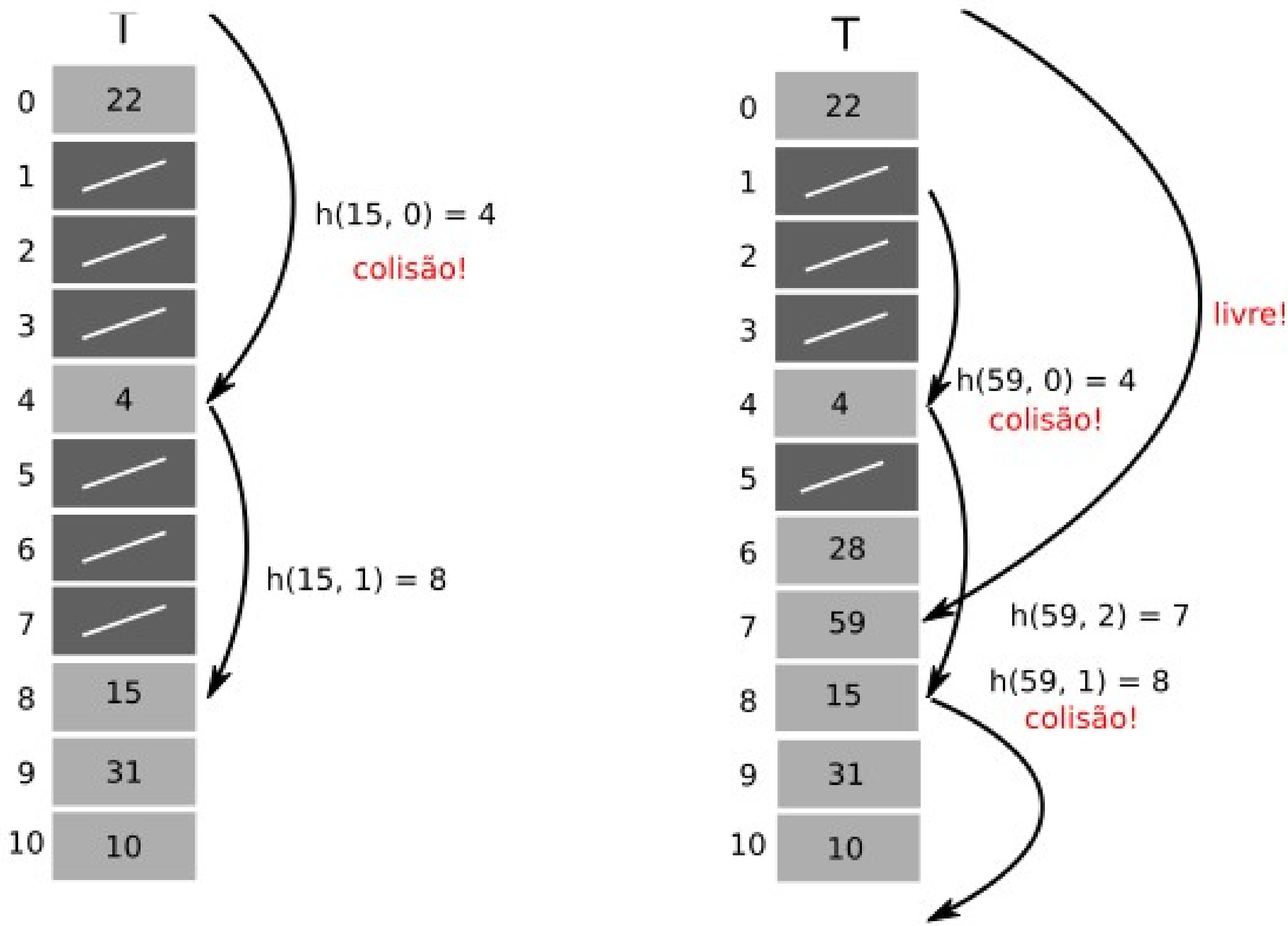
- Insira as chaves {10, 22, 31, 4, 15, 28, 59} em uma tabela *T* de tamanho 11 com hash quadrático e função: $\boldsymbol{h(k) = k}$ **mod 11**.

  As constantes c_1 e c_2 são iguais a 1 e 3, respectivamente.

Obs: Para números reais *x* e *y*, a operação **mod** é definida por:

$$\boldsymbol{x \bmod y = x - y * \mathrm{piso}(x/y)}.$$

Exercício


T
0 22
1
2
3
4 4
5
6
7
8 15
9 31
10 10
h(15, 0) = 4
colisão!
h(15, 1) = 8
T
0 22
1
2
3
4 4
5
6 28
7 59
8 15
9 31
10 10
livre!
h(59, 0) = 4
colisão!
h(59, 2) = 7
h(59, 1) = 8
colisão!

Endereçamento aberto

- Outro método é o **hash duplo**:

$$h_j = (\ h(k) + j\ d(k)\ ) \bmod m, \text{ para } 1 \leq j \leq m - 1.$$

- Projeto e implementação mais difíceis que os métodos apresentados anteriormente.

- No entanto, não causa agrupamento do tipo produzido pelo teste linear ou pelo teste quadrático, e apresenta melhor desempenho na média.

Endereçamento aberto

- Para varrer toda a tabela, é necessário que $d(k)$ e m sejam primos entre si, ou seja, o único divisor comum a eles é o número 1.

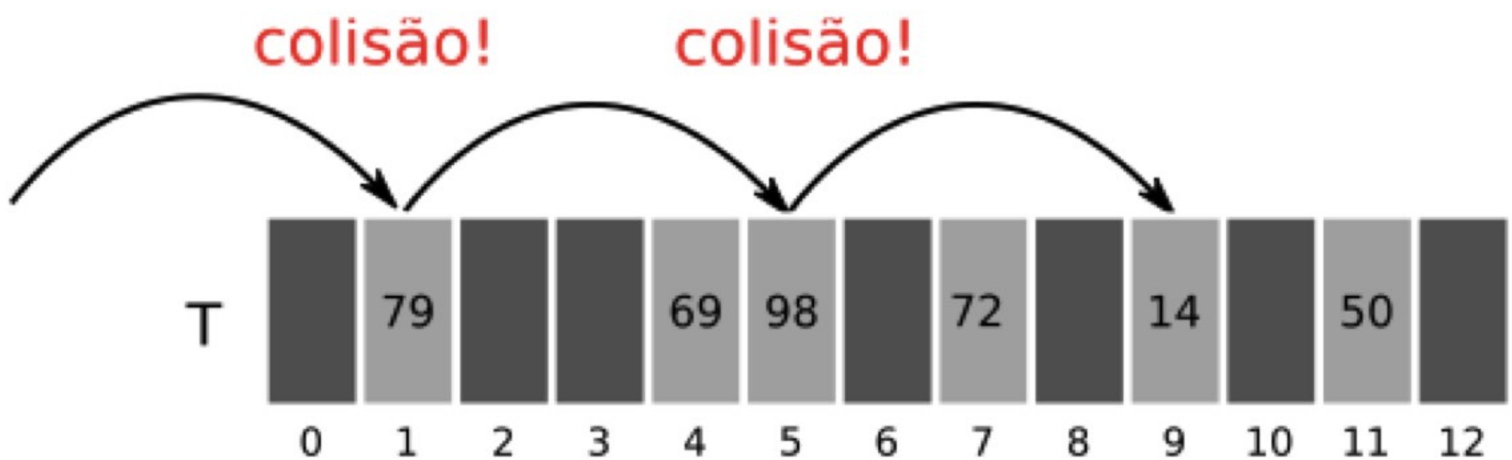
- Por exemplo, se m for potência de 2, basta definir $d(k)$ de forma a produzir números ímpares.

- Ou então, mais simples ainda, basta definir m como um número primo e projetar $d(k)$ de forma que ele sempre retorne um inteiro positivo menor que m.

Exemplo

Sejam $h\ (k) = k \bmod 13$ e $\mathrm{d}\,(k) = 1 + (k \bmod 11)$.

Então $h(14,0) = 1$, $h(14,1) = 5$ e $h(14,2) = 9$.



Endereçamento aberto

- O algoritmo de pesquisa (ou busca) percorre a mesma sequência de posições examinada pelo algoritmo de inserção quando a chave *k* foi inserida.

- Após a remoção, a posição **não** pode ser deixada como uma célula vazia, pois pode interferir nas buscas.

- A posição deve ser marcada de alguma maneira (com uma variável booleana, por exemplo) para que na busca possa-se saber que havia algo lá.

Endereçamento aberto

- Considerando um mapeamento uniforme, o **número médio de comparações** em uma busca sem sucesso é

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1} = \frac{1}{1-\alpha} = O(1).$$

sendo $\alpha = n/m < 1$ o fator de carga da tabela.

- O aspecto negativo está relacionado com o **pior caso**, que é $O(n)$, caso a função hash não consiga espalhar os registros de forma razoável pelas estradas da tabela, o que provoca a formação de longas sequências de busca.

Conclusões

- Considerando um mapeamento uniforme, cada operação toma tempo constante na média. Mas é raro conhecer a distribuição de probabilidade segundo a qual as chaves são obtidas.

- Na prática, existem heurísticas de fácil implementação para criar uma função hash que provavelmente terá um bom desempenho.

- Para resolver colisões, encadeamento é o método mais simples, mas gasta mais espaço.

- Endereçamento aberto tem implementação mais difícil ou que pode ser suscetível a efeitos de agrupamento.

Conclusões

- **Vantagens**:
  - Simplicidade de implementação.
  - Considerando *K* o conjunto de chaves armazenadas, a tabela requer espaço $\theta(|K|)$ ao invés de $\theta(|U|)$.
  - A busca na tabela requer $O(1)$ no caso médio.

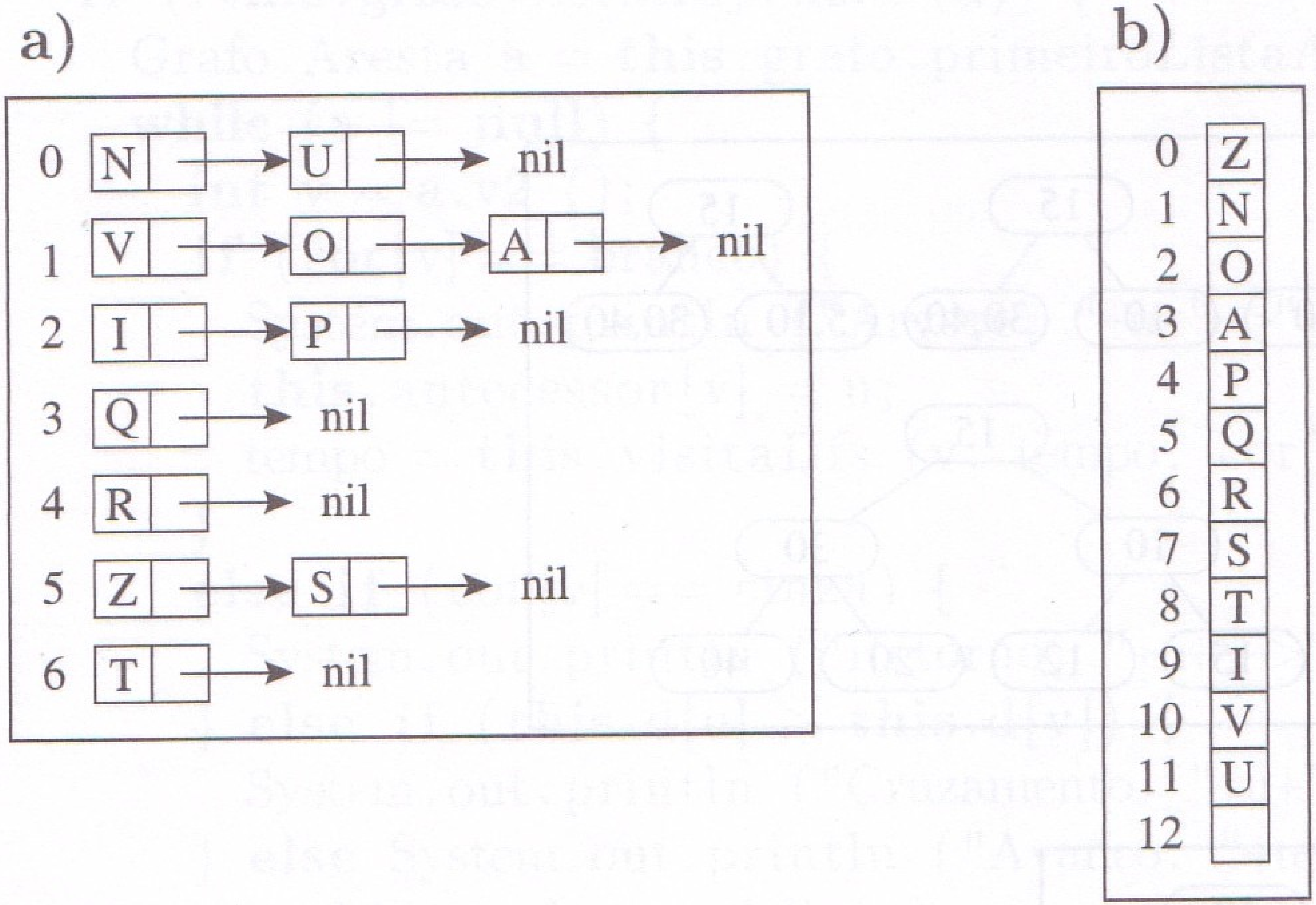
- **Desvantagens**:
  - Colisão: Efeito que acontece quando duas chaves são mapeadas para a mesma posição na tabela.
  - A busca na tabela requer $O(|K|)$ no pior caso.

Exercícios

a) Desenhe o conteúdo da tabela hash resultante da inserção de registros com as chaves N I V O Z A P Q R S T U, nesta ordem, em uma tabela inicialmente vazia de tamanho 7 (sete), usando listas encadeadas. Use a função hash $\boldsymbol{h(k) = k \text{ mod } 7}$ para a k-ésima letra do alfabeto.

b) Desenhe o conteúdo da tabela hash resultante da inserção de registros com as chaves N I V O Z A P Q R S T U, nesta ordem, em uma tabela inicialmente vazia de tamanho 13 (treze), usando endereçamento aberto e hash linear para resolver as colisões. Use a função $\boldsymbol{h(k) = k \text{ mod } 13}$ para a k-ésima letra do alfabeto.

Soluções


a)
0 N U nil
1 V O A nil
2 I P nil
3 Q nil
4 R nil
5 Z S nil
6 T nil
b)
0 Z
1 N
2 O
3 A
4 P
5 Q
6 R
7 S
8 T
9 I
10 V
11 U
12