Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

# GRAFOS

# Representações Computacionais

Nelson Cruz Sampaio Neto
nelsonneto@ufpa.br

# Representações

- Dentre os tipos mais adequadas para representar grafos em computador, destacam-se:

  - Matrizes; e

  - Listas.

- Tais representações servem tanto para grafos orientados quanto para grafos não orientados.

# Alguns Conceitos

- <u>Grafos densos</u>: possuem muitas ligações, ou seja, um grafo é denso quando **|E|** é assintoticamente proporcional a **$|V^2|$**.

- <u>Grafos esparsos</u>: possuem poucas ligações, ou seja, um grafo é esparso quando **|E|** é assintoticamente proporcional a **|V|**.

- O complemento de um grafo esparso é um grafo denso.

# Matriz de Adjacência

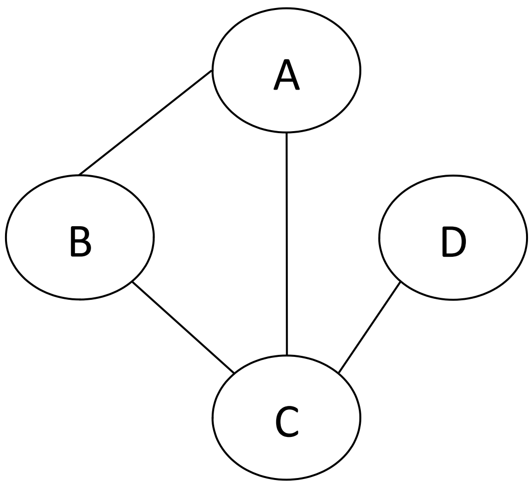
- Seja **G = (V, E)** um grafo com ***n*** vértices, a matriz de adjacência **A** de **G** é um arranjo bidimensional ***n x n***, com as seguintes propriedades:

1. A[i, j] = 1, se existe uma aresta do vértice ***i*** ao vértice ***j*** (ou incide em ***j***, no caso de grafos orientados).

2. A[i, j] = 0, caso contrário.

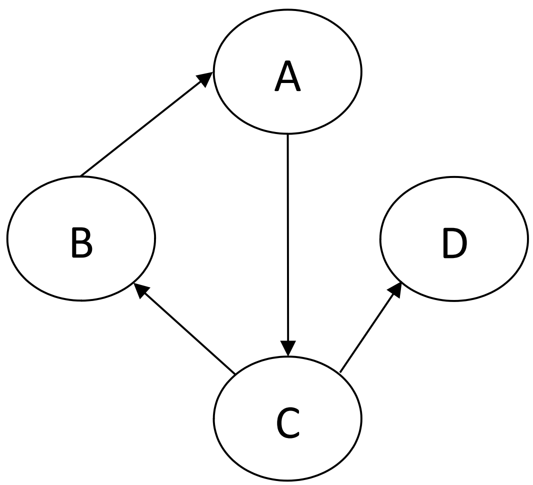
3. Em casos de grafos ponderados ou valorados, o valor a ser inserido refere-se ao peso da aresta.

# Exemplo




Matriz simétrica

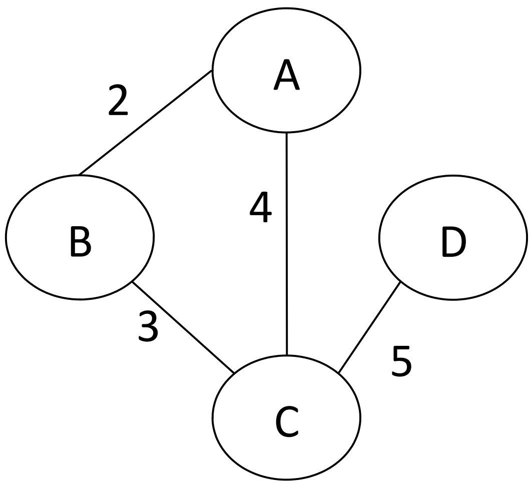
| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 1 | 0 |
| B | 1 | 0 | 1 | 0 |
| C | 1 | 1 | 0 | 1 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 |



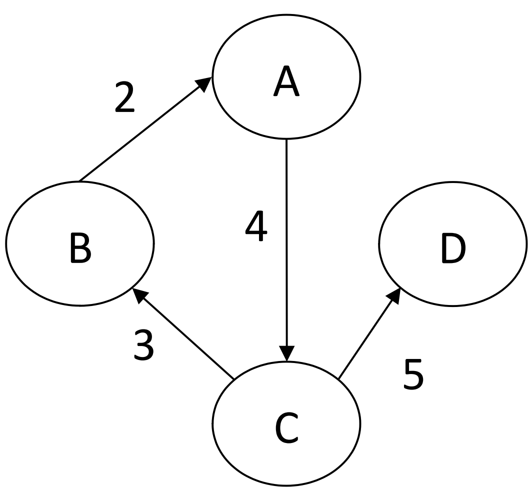

Matriz pode não ser simétrica

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 1 | 0 |
| B | 1 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 1 | 0 | 1 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Exemplo




| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 4 | 0 |
| B | 2 | 0 | 3 | 0 |
| C | 4 | 3 | 0 | 5 |
| D | 0 | 0 | 5 | 0 |




| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 4 | 0 |
| B | 2 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 3 | 0 | 5 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Características

- Cálculo do grau do vértice:
  - Em grafos não orientados: quantidade de 1's na coluna ou linha correspondente ao vértice.
  - Em grafos orientados:
    - Grau de saída: soma do número de 1’s da linha.
    - Grau de entrada: soma do número de 1’s da coluna.
- Espaço de armazenamento: $O(|V|^2)$.
- Ideal para grafos densos, onde **|E|** é próximo de $|V|^2$, pois evita que a matriz contenha muitos zeros (espaço inútil).

# Matriz de Incidência

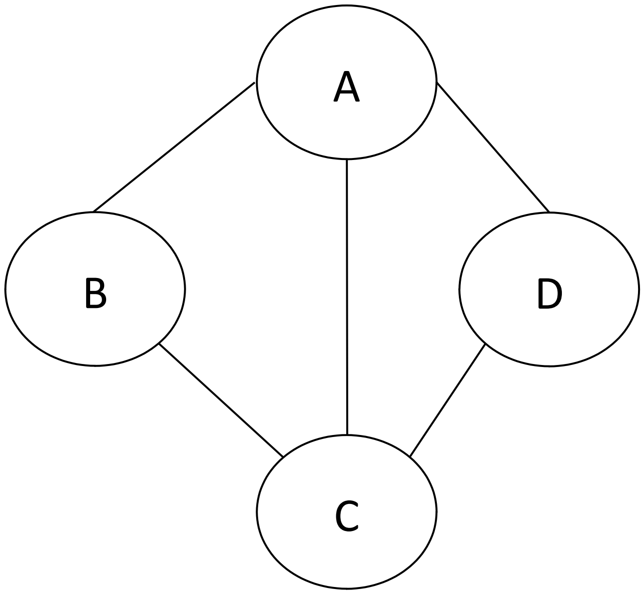
- Seja **G = (V, E)** um grafo <u>não orientado</u> com ***n*** vértices e ***m*** arestas, a matriz de incidência é um arranjo bidimensional ***n x m***, com as seguintes propriedades:

1. A[i, j] = 1, se existe uma aresta ***j*** que incide no vértice ***i***.

2. A[i, j] = 0, caso contrário.

3. Em casos de grafos ponderados ou valorados, o valor a ser inserido refere-se ao peso da aresta.

# Exemplo




| | A,B | A,C | A,D | B,C | C,D |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| B | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

# Matriz de Incidência

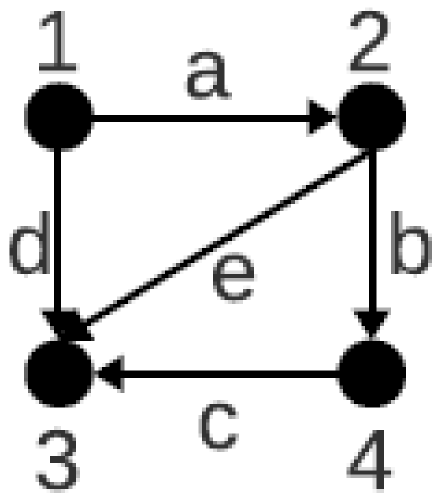
- Seja **G = (V, E)** um grafo orientado com ***n*** vértices e ***m*** arestas, a matriz de incidência é um arranjo bidimensional ***n x m***, com as seguintes propriedades:

1. A[i, j] = +1, se existe uma aresta ***j*** "saindo" no vértice ***i***.

2. A[i, j] = -1, se existe uma aresta ***j*** "chegando" no vértice ***i***.

3. A[i, j] = 0, caso contrário.

# Exemplo




| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +1 | 0 | 0 | +1 | 0 |
| 2 | -1 | +1 | 0 | 0 | +1 |
| 3 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| 4 | 0 | -1 | +1 | 0 | 0 |

# Características

- Cada aresta incide em dois vértices. Dois 1’s em cada coluna.

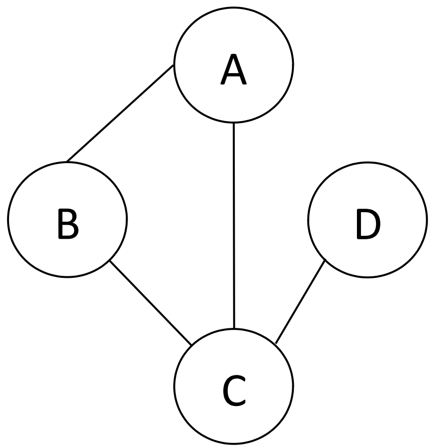
- Grau do vértice: número de 1’s na linha. Uma linha contendo apenas zeros significa um vértice isolado.

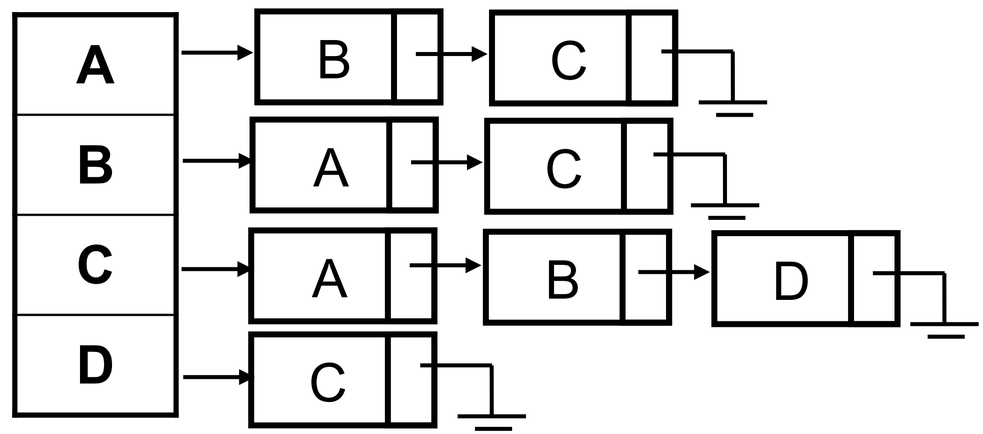
- Espaço para armazenamento: ***O* (|V| |E|)**.

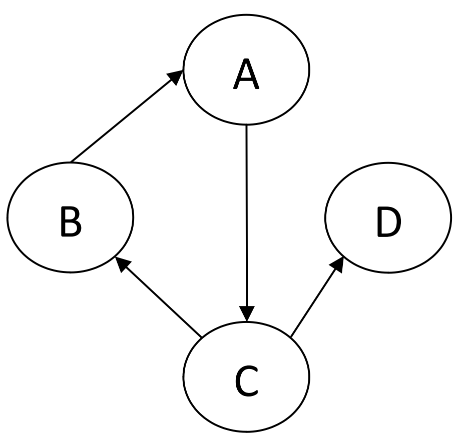
- A complexidade de espaço da matriz de incidência é, quase sempre, maior do que a da matriz de adjacência.

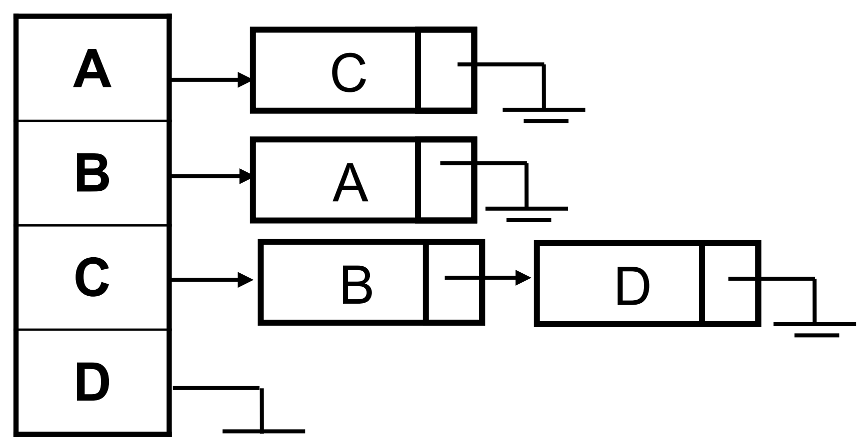
# Lista de Adjacência

- A representação do grafo **G = (V, E)** consiste de um arranjo de **|V|** listas, uma para cada vértice **v** $\in$ **V**, contendo os vértices **w** adjacentes a **v**.



# Características

- Espaço para armazenamento: ***O*** **(|V| + |E|)**.
- Ideal para grafos esparsos, onde **|E|** é bem menor que $|V|^2$.
- Grau do vértice em grafos não orientados: número de elementos na lista do referido vértice.
- Grau do vértice em grafos orientados:
  - Grau de saída: quantidade de elementos na lista.
  - Grau de entrada: deve-se pesquisar em todos os vértices de **V** se existe alguma referência ao vértice em questão.
- Desvantagem: verificar a existência de uma ligação pode levar a um tempo assintoticamente proporcional ao número de vértices.