Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

GRAFOS

Conceitos Básicos

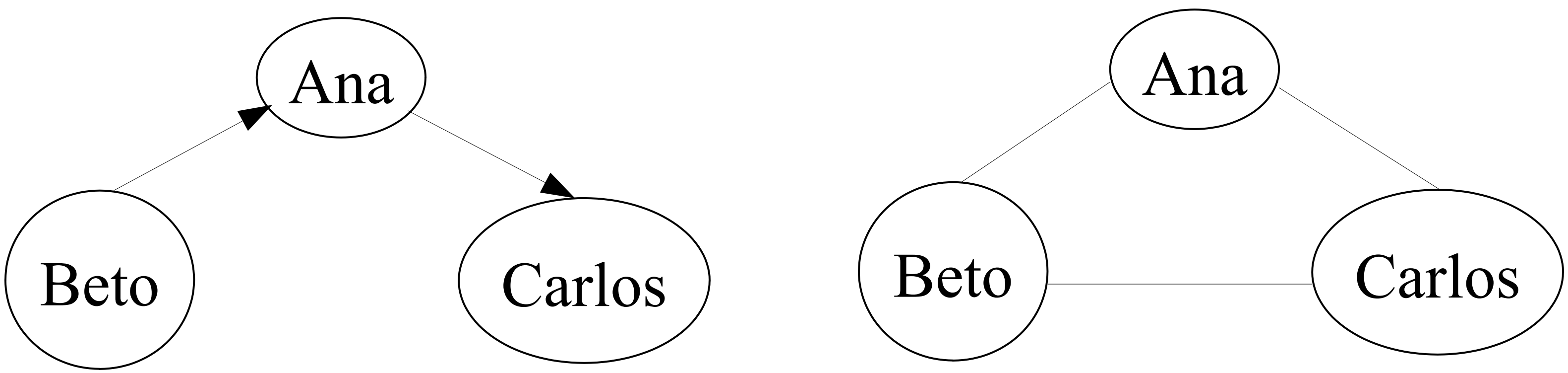
Nelson Cruz Sampaio Neto
nelsonneto@ufpa.br

28 de setembro de 2017

Relações

- Existem dois tipos de relações: simétricas ("ser irmão de") e não simétricas ("gostar de").

- Exemplo:

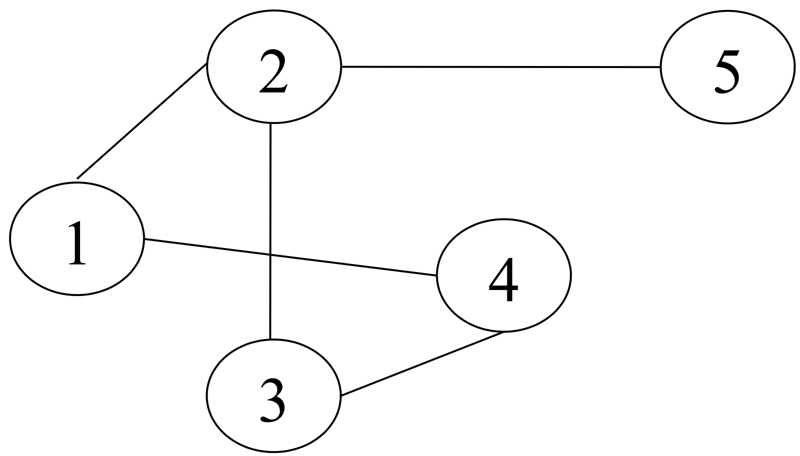


- Analogia com a representação gráfica:
  - Relação simétrica: representação não orientada; e
  - Relação não simétrica: representação orientada.

Definição

- Um grafo **G** consiste de dois conjuntos **V** e **E**, tal que:
  - **V** é um conjunto discreto, finito e não vazio de vértices.
  - **E** é um conjunto definido em função dos elementos de **V**, em duas formas possíveis: estruturas não orientadas (arestas) e estruturas orientadas (arcos).
  - Definição matemática*:* **G = (V, E)**.
  - A caracterização de **V** como discreto possibilita a identificação dos vértices. São os chamados <u>grafos rotulados</u>.

Exemplo



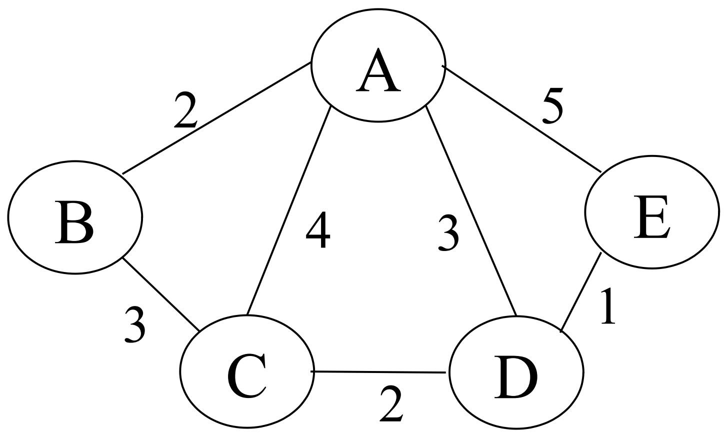
O grafo **G = (V, E)** acima é não orientado, tal que:

V = { 1, 2, 3, 4, 5 } e **|V|** = 5

E = { (1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 4) } e **|E|** = 5

Grafos Ponderados ou Valorados

- São grafos com pesos (ou valores) associados a seus arcos ou arestas.



- Exemplo de valores associados: custo de transporte, tempo de viagem, distância, entre outros.

Exemplo

- Os turistas Jorge, Alan, Hans, Carla e Maria se encontraram em um bar e começaram a conversar. As línguas disponíveis eram: Inglês, Francês, Português e Alemão.

- Jorge fala todas as línguas; Alan não fala apenas Português; Hans fala Francês e Alemão; Carla fala Inglês e Português; e Maria fala apenas Português.

- <u>Problema</u>: Represente por meio de um grafo **G = (V, A)** todas as possibilidades de um deles dirigir a palavra a outro, sendo compreendido.

Exemplo

- Uma empresa produz os produtos químicos **C1, C2, …, Cn**. Alguns desses produtos podem explodir se colocados em contato com outros.

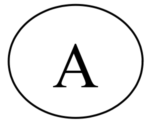
- Como precaução contra acidentes, a empresa quer construir **k** armazéns para armazenar os produtos de tal forma que os incompatíveis fiquem em armazéns diferentes.

- <u>Problema</u>: Encontre o menor número **k** de armazéns que devem ser construídos.

Como resolver este problema com a ajuda de grafos?

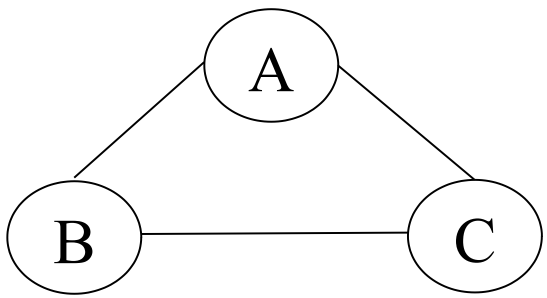
Exemplos de Grafos

1:



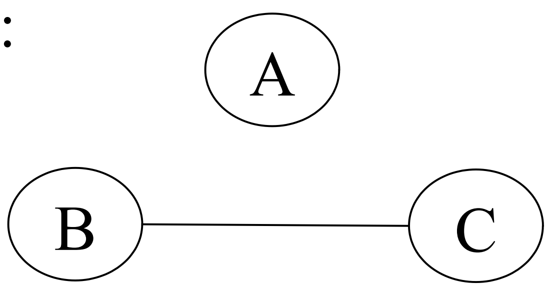
Grafo trivial

2:



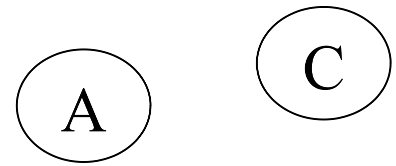
Grafo não orientado e completo

3:



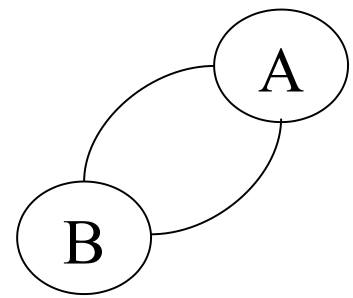
Grafo desconexo

4:



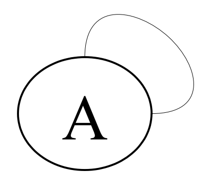
Grafo totalmente desconexo

5:



Multi-grafo

6:

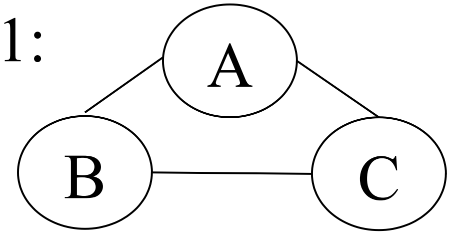


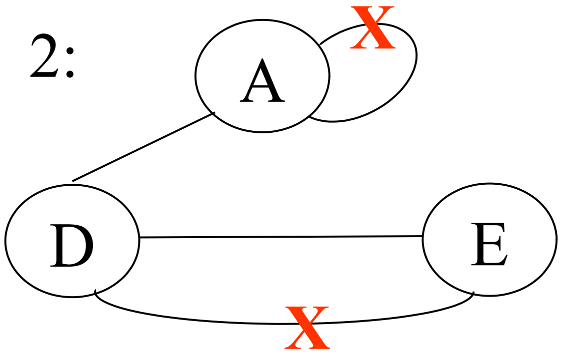
Grafo com *self-loop* ou laço

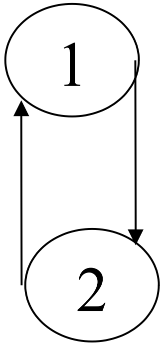
Tipos

- Grafos não orientados:
  - São grafos onde as ligações não possuem direcionamento, ou seja, a aresta **(v_1, v_2)** é a mesma aresta **(v_2, v_1)**.

- Grafos orientados (ou dígrafos):
  - São grafos onde as ligações possuem direcionamento, ou seja, o arco **(v_1, v_2)** é diferente do arco **(v_2, v_1)**.

1:


2:


3:


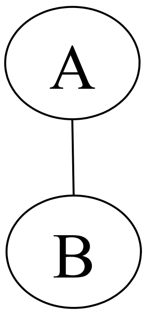
As estruturas 1 e 2 são grafos não orientados, mas apenas o grafo 1 é <u>simples</u>

Grafo orientado e simples

Ordem e Tamanho

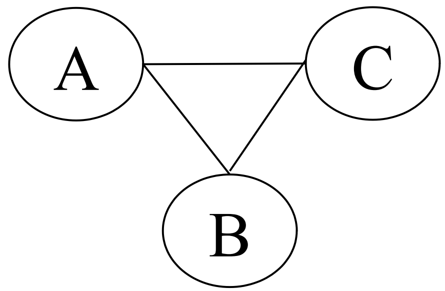
- Exemplos:

1:



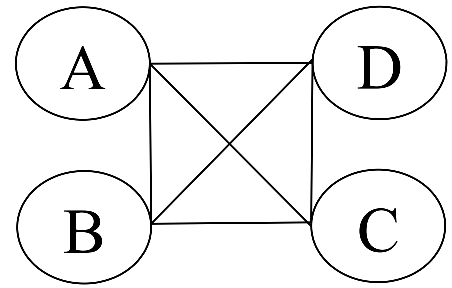
R.: Ordem 2
Tamanho 1

2:



R.: Ordem 3
Tamanho 3

3:

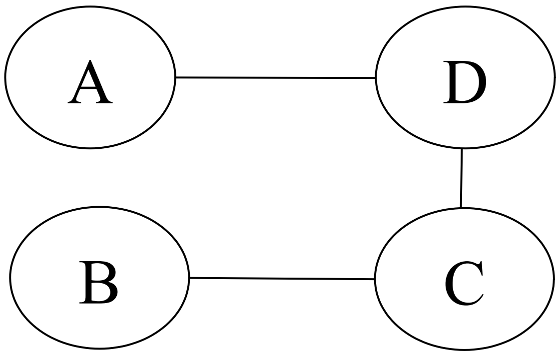


R.: Ordem 4
Tamanho 6

- As estruturas acima são <u>grafos completos</u> (**K_2, K_3, K_4**), com uma ligação associada a cada par de vértices.

Vizinhança

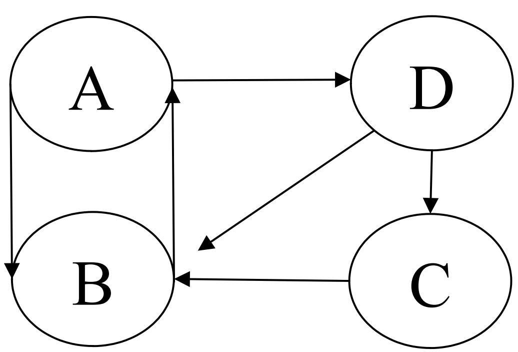
- Vizinhança (também chamada adjacência) diz respeito aos vértices diretamente ligados a um dado vértice.
- Em grafos não orientados, a vizinhança **N(v)** é o conjunto de vértices que possuem ligação direta com o vértice **v**.
- É possível definir uma adjacência na qual **v** está incluído, chamada de vizinhança fechada.



1. $N(A) = \{A, D\}$
2. $N(C) = \{C, B, D\}$

Vizinhança

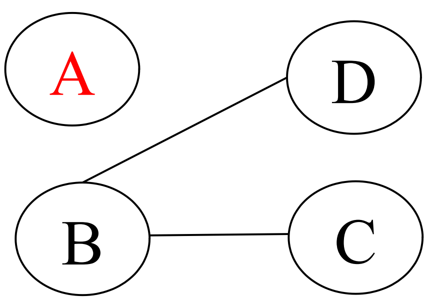
- No grafo orientado **G = (V, E)**, diz-se que **w** $\in$ **V** é sucessor de **v** $\in$ **V**, quando existe **(v, w)** $\in$ **E**.
- Da mesma forma, diz-se que **v** é antecessor de **w**.
- Os conjuntos de sucessores e antecessores do vértice **v** são denotados, respectivamente, **N⁺(v)** e **N⁻(v)**.



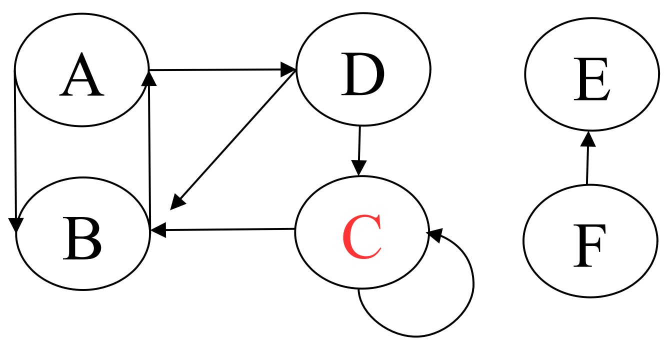
1. $N^{+}(A) = \{A, B, D\}$
2. $N^{-}(B) = \{B, A, C, D\}$

Grau

- Em grafos não orientados, define-se que o grau é o número de arestas que incidem sobre o vértice.
- Já em grafos orientados, o grau é o número de arcos que saem do vértice <u>mais</u> o número de arcos que chegam nele.
- Um vértice é dito <u>isolado</u> quando seu grau é zero.



Grau(A) = 0 Grau(C) = 1
Grau(B) = 2 Grau(D) = 1
Vértice A é dito isolado



Grau(A) = 3 Grau(D) = 3
Grau(B) = 4 Grau(E) = 1
Grau(C) = 4 Grau(F) = 1

Caminho e Comprimento

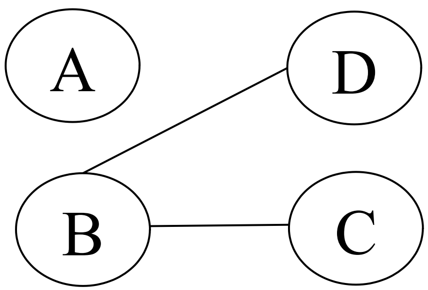
- Um caminho $\mathbf{v_1}$ a $\mathbf{v_k}$ é uma seqüência de vértices $\mathbf{(v_1, v_2, ..., v_k)}$ tal que $\mathbf{(v_i , v_{i+1})} \in \mathbf{E}$, para $\mathbf{i = 1, 2, ..., k - 1}$.

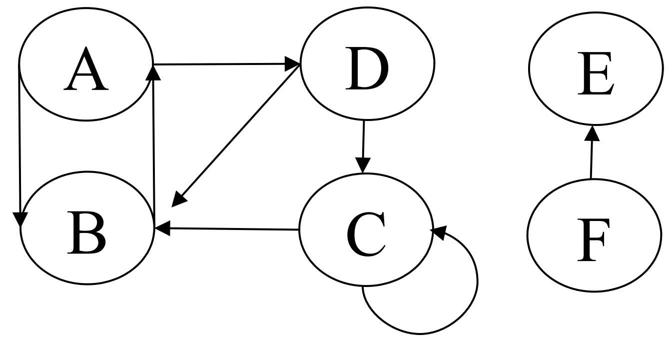
- Um caminho de **k** vértices possui **k – 1** ligações. O valor **k – 1** é o <u>comprimento</u> do caminho.

- Se existir pelo menos um caminho entre $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_k}$, então é dito que $\mathbf{v_1}$ <u>alcança</u> $\mathbf{v_k}$.

- Um caminho é dito <u>simples</u> quando não repete vértices. Já um caminho que não repete ligações é chamado de <u>trajeto</u>.

Exemplos





1. Caminho simples: (C, B, D) de comprimento igual a 2.

2. D é alcançável a partir de C.

3. A não é alcançável a partir de nenhum vértice.

1. Caminho simples: (A, D, C, B) de comprimento igual a 3.

2. C é alcançável a partir de A, mas E não é.

3. O caminho (A, B, A, B) não é simples.

Ciclos

- Grafos sem ciclos são <u>acíclicos</u>, e <u>cíclicos</u>, caso contrário.

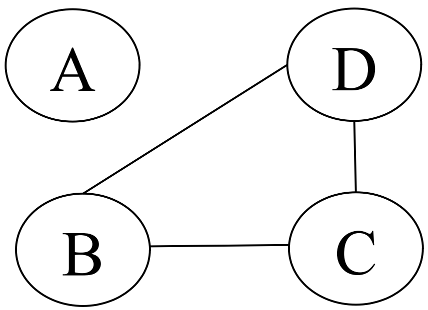
- O ciclo é um caminho $(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}, \mathbf{v_{k+1}})$ sendo $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_{k+1}}$.

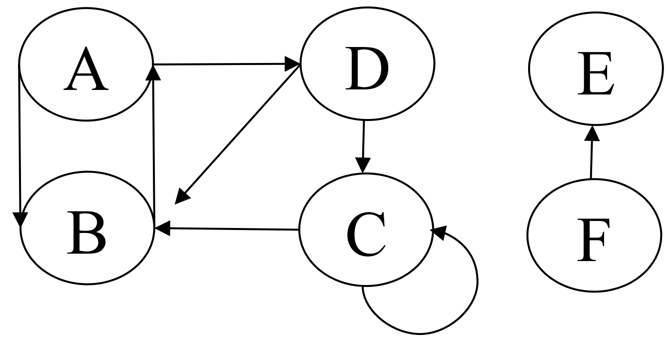
- Se o caminho $(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k})$ for simples, então o ciclo também é <u>simples</u>. Note que o elemento $\mathbf{v_{k+1}}$ não é considerado.

- O <u>*self-loop*</u> (ou laço) é um ciclo de comprimento igual a 1.

- <u>Observação</u>: Um grafo simples e não orientado é cíclico caso apresente ciclo(s) simples de comprimento maior que 2.

Exemplos





1. Ciclo simples: (B, C, D, B).
2. Os caminhos (B, C, D, B), (C, D, B, C) e (D, B, C, D) formam o mesmo ciclo.

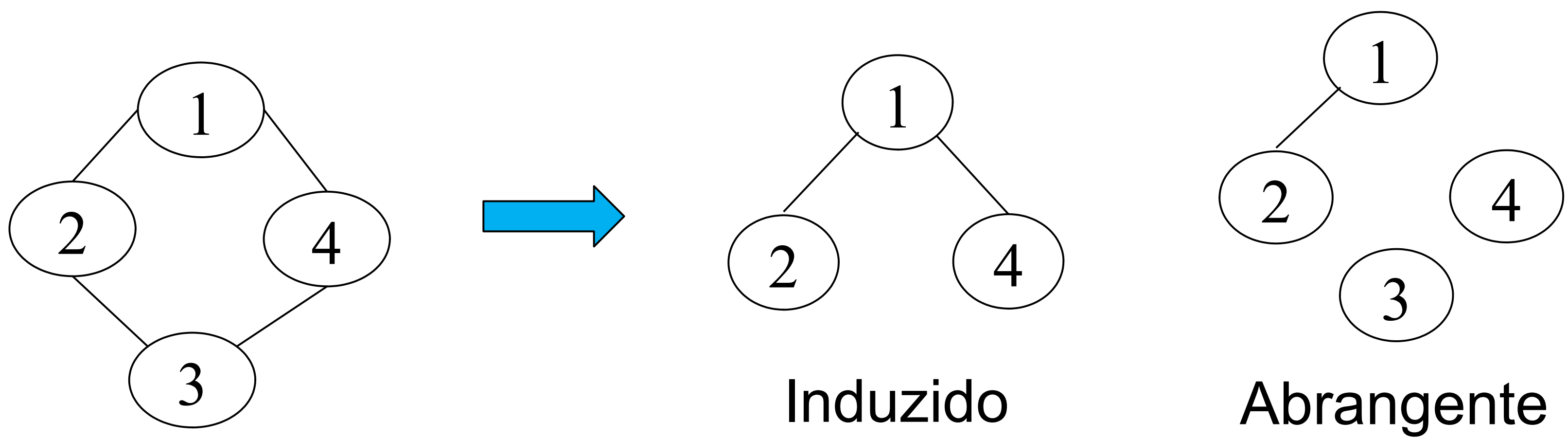
1. Ciclo simples: (A, D, C, B, A).
2. *Self-loop*: (C, C).
3. Os caminhos (A, D, B, A), (D, B, A, D) e (B, A, D, B) formam o mesmo ciclo.

Subgrafos

- Dados dois grafos **G' = (V', E')** e **G = (V, E)**, então **G'** é um subgrafo de **G** se **V'**$\subseteq$ **V** e **E'**$\subseteq$ **E**.

- <u>Subgrafo abrangente</u>: Contém o mesmo conjunto de vértices do grafo original, mas não necessariamente todas as ligações.

- <u>Subgrafo induzido</u>: Contém todas as ligações que aparecem no grafo original sobre o mesmo conjunto de vértices.

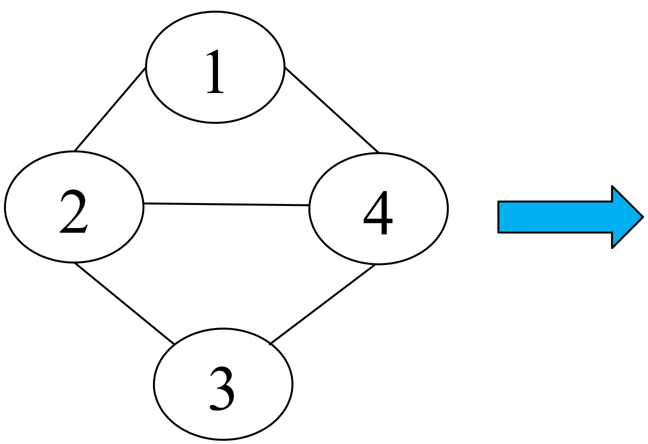


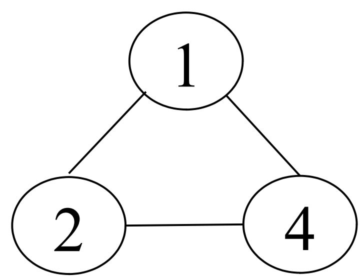
Induzido

Abrangente

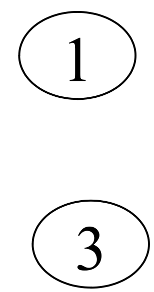
Subgrafos

- O <u>clique</u> de um grafo **G** é um subgrafo completo de **G**.
- <u>Conjunto independente de vértices</u> é um subgrafo induzido do grafo **G** onde os vértices não possuem ligações entre si.





Clique de ordem 3



Conjunto independente de ordem 2

Subgrafos – C.I. de Vértices

- Aplicação: Modelar problemas de dispersão. Em geral, evitam conflitos entre elementos.

- Exemplo: Suponhamos que em um parque pensássemos em instalar o máximo de barracas para venda de sorvete. Sendo que a operadora das barracas faz as seguintes restrições:

  - Uma barraca deve ser localizada em uma esquina (vértice);

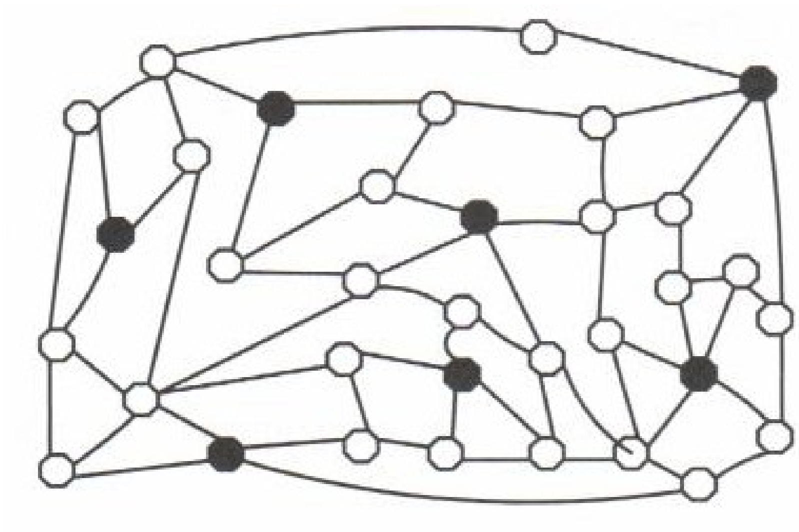
  - Esquinas próximas (adjacentes) só admitem uma barraca.

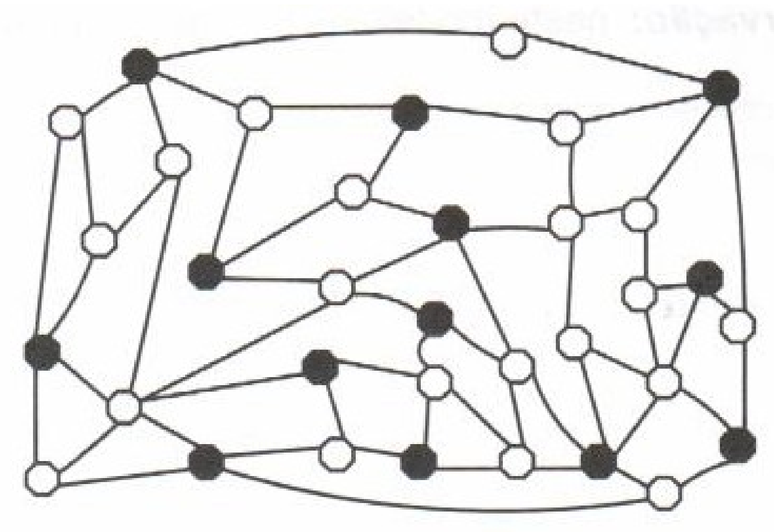
Como resolver este problema com a ajuda de grafos?

Subgrafos – C.I. de Vértices

- Os vértices (barracas) em preto formam um conjunto independente de vértices, satisfazendo a condição.

- Note que existe mais de um c.i. de vértices. Mas, para o problema, a solução é o conjunto com o maior número de vértices.

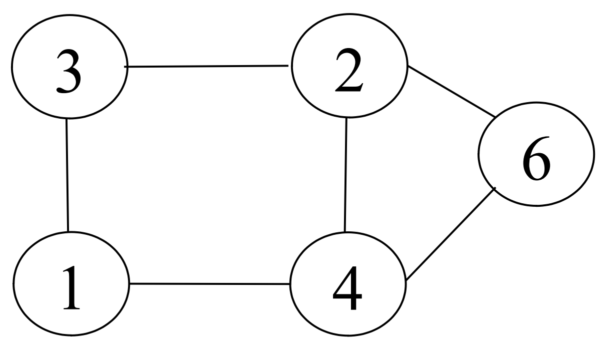




Subgrafos – Clique

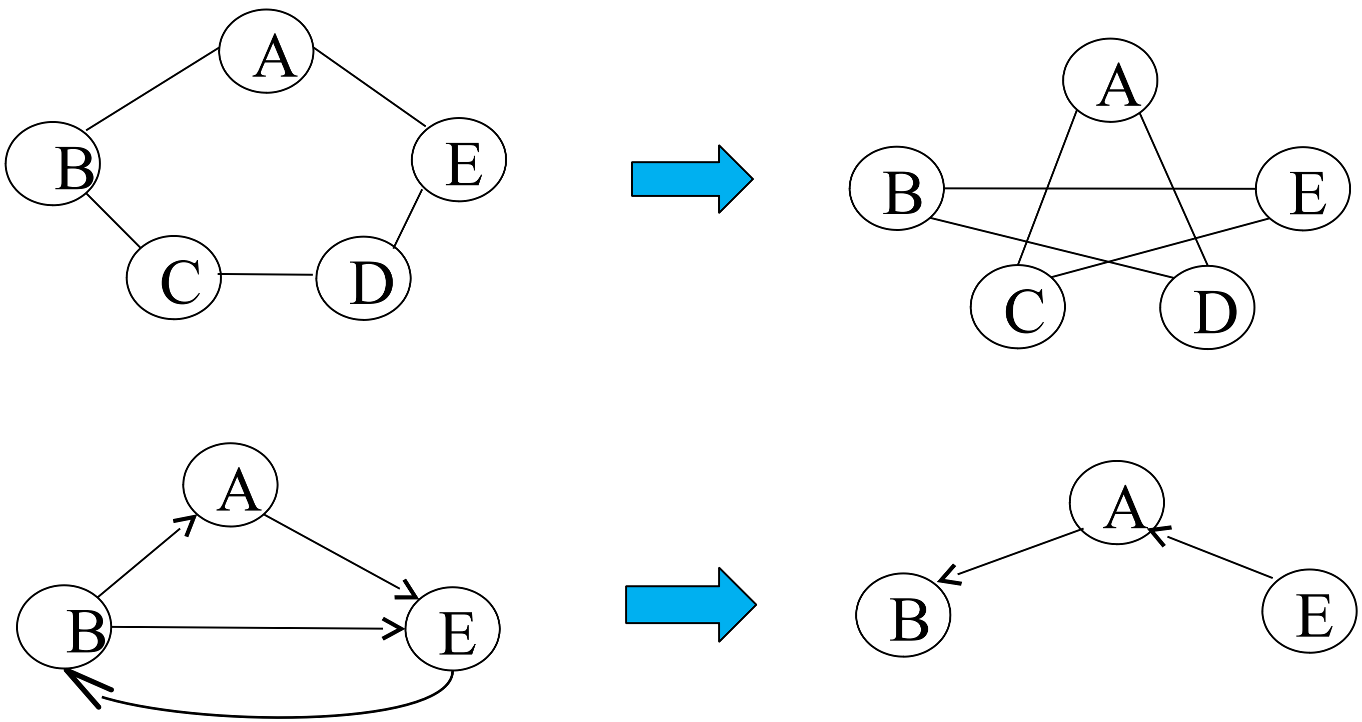
- Aplicação: Problemas clássicos que exigem a identificação de agrupamentos de objetos relacionados.

- Exemplo: Problema do armazenamento de produtos químicos. O grafo abaixo mostra a compatibilidade entre os produtos. O maior clique tem ordem 3 (vértices 2, 4 e 6), restando outro de ordem 2 (vértices 1 e 3), o que nos leva a construir dois armazéns.



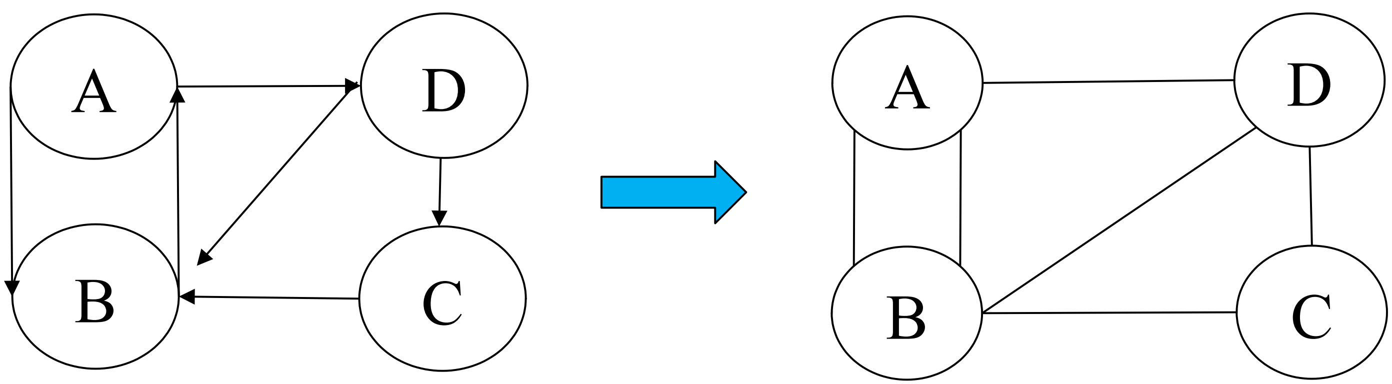
Grafo Complementar

- É um grafo G^c que possui o mesmo número de vértices e as ligações não existentes de um grafo **G**.



Grafo Subjacente

- Se forem retiradas as direções dos arcos de um dígrafo **G** obtém-se um grafo (aceita-se arestas paralelas e laços) não direcionado, chamado de grafo subjacente.

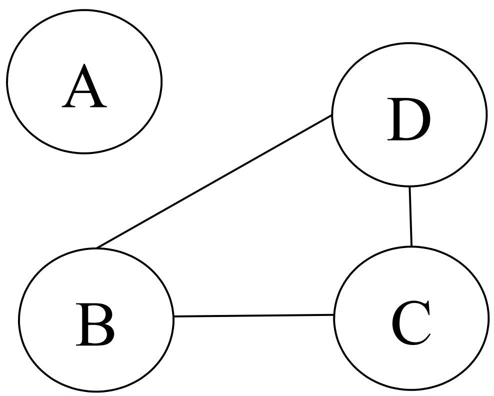


Dígrafo **G** Grafo subjacente de **G**

Conexidade

- Um grafo não orientado é <u>conexo</u> se cada par de vértices está conectado por pelo menos um caminho.

- Exemplo:



1. O grafo ao lado é <u>desconexo</u>, pois A não está ligado a outro vértice.

2. O subgrafo {C, D, B} é um <u>componente conexo</u> do grafo original.

3. Se a aresta (A, B) fosse inserida, o grafo passaria a ser conexo. Por conseguinte, essa aresta é chamada de <u>ponte</u>.

Conexidade em Dígrafos

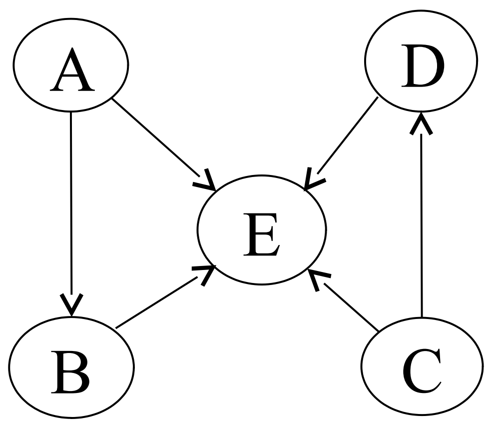
- Um grafo orientado é dito <u>fortemente conexo</u> se para todo par de vértices **(u, v)** existe um caminho de **u** até **v** e existe um caminho de **v** até **u**.

- Se ao menos um desses caminhos existir para todo **v, u** $\in$ **V** então o grafo orientado é <u>unilateralmente conexo</u>.

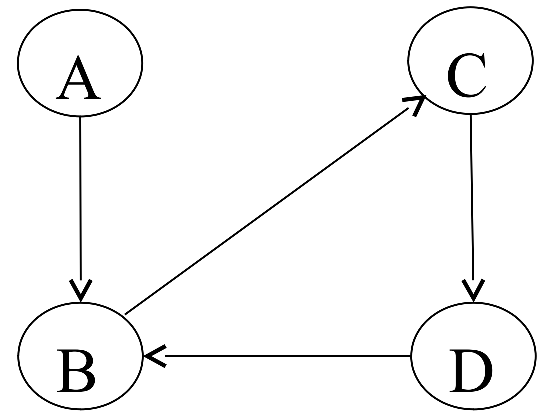
- Um grafo orientado é <u>fracamente conexo</u> ou <u>desconexo</u>, conforme seu grafo subjacente seja conexo ou desconexo, respectivamente.

- Observe que se um dígrafo é fortemente conexo então ele também é unilateralmente e fracamente conexo.

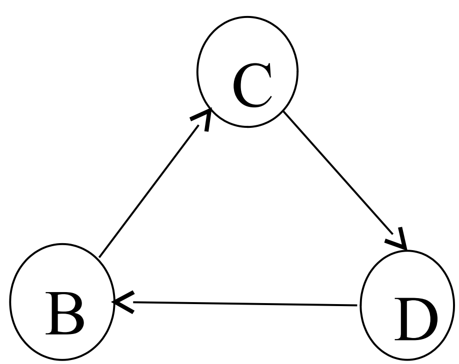
Exemplos



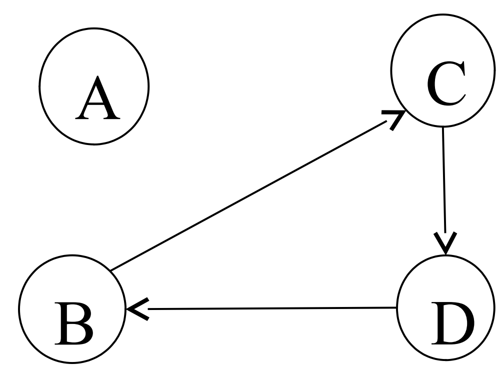
Fracamente ou simplesmente conexo



Unilateralmente ou semi-fortemente conexo

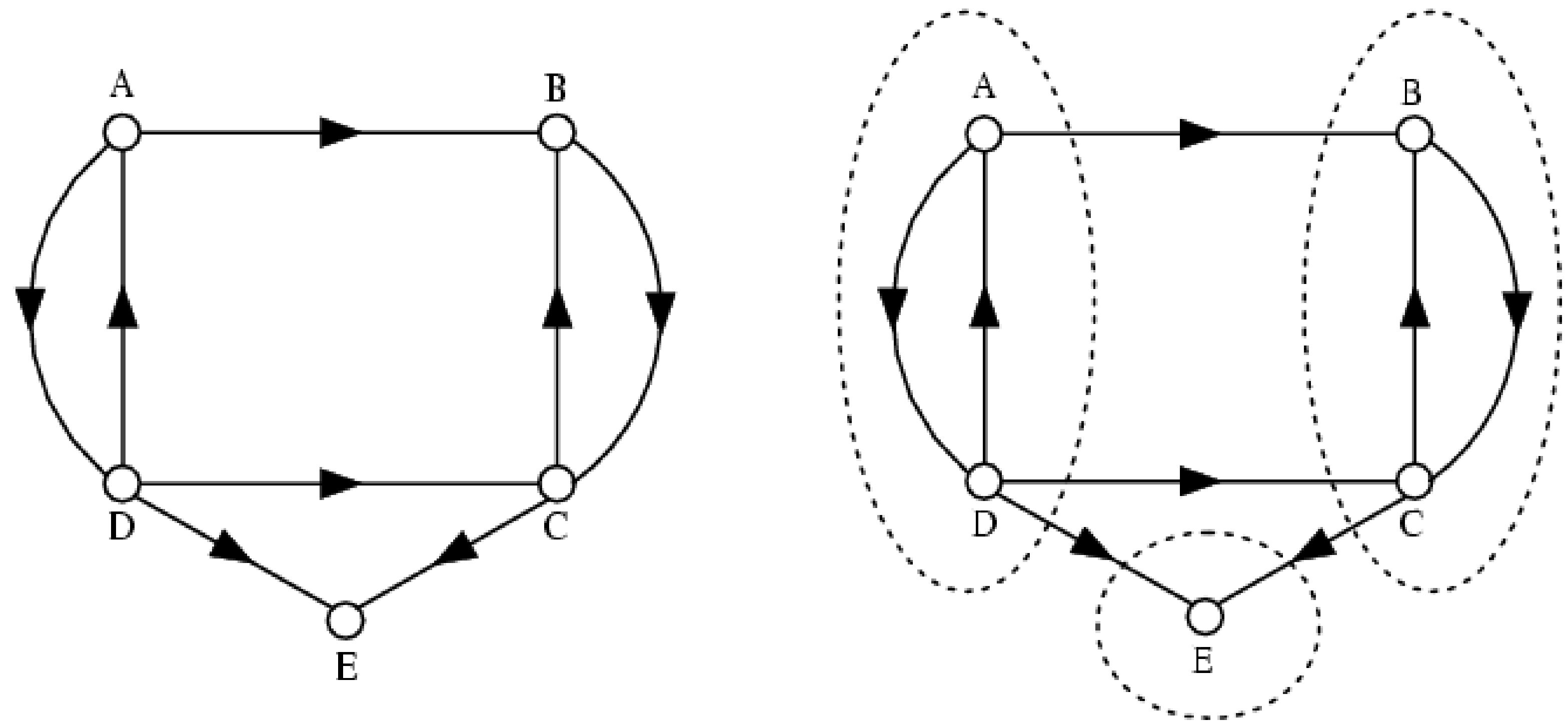


Fortemente conexo



Desconexo

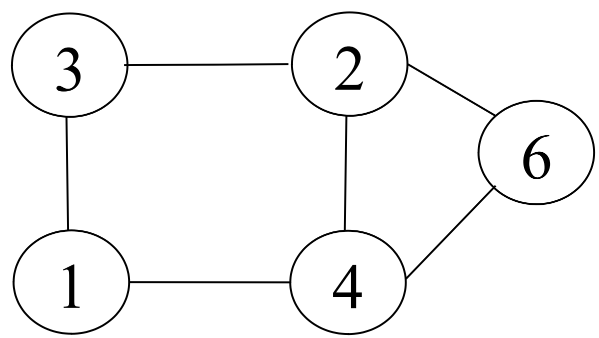
Componentes Fortemente Conexos



Conectividade ou Menor Corte

- A conectividade de vértices é definida pelo menor número de vértices que deve ser retirado do grafo para desconectá-lo ou torná-lo trivial.

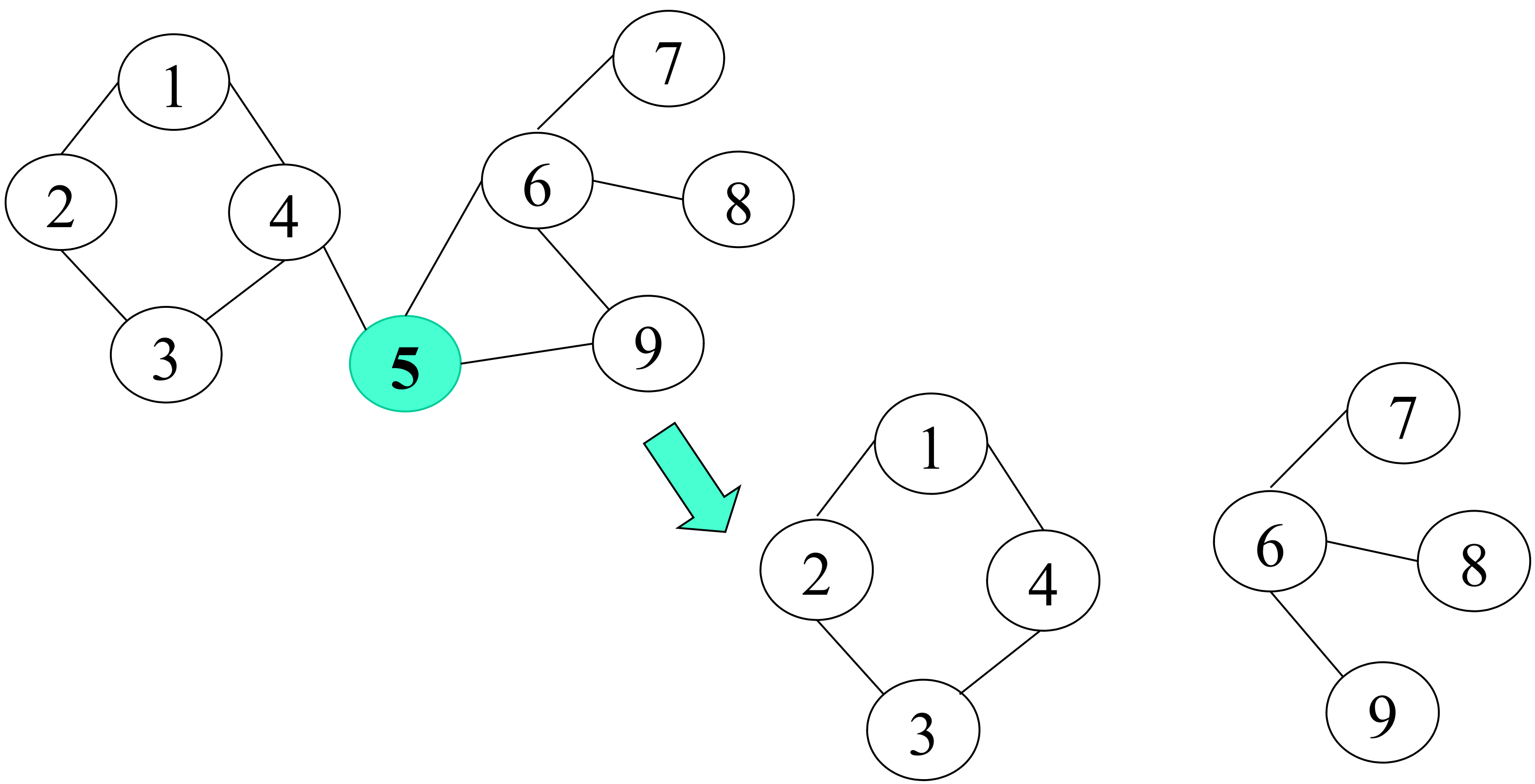
- A conectividade de arestas é dada pelo menor número de arestas que deve ser retirado do grafo para desconectá-lo.



Grafo acima: Conectividade de vértices e arestas é igual a 2

Ponto de Articulação

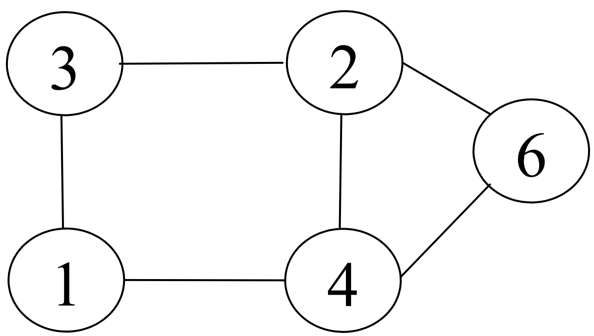
- É um vértice que se retirado de um grafo conexo **G** o torna desconexo. Considerando **|V| > 2**.



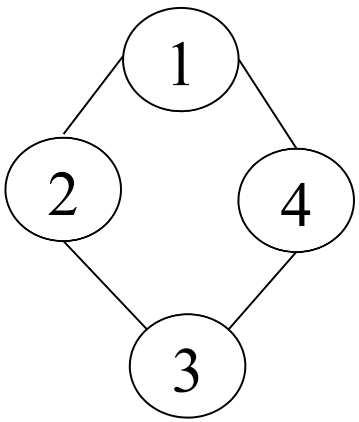
Grafo Biconexo (ou 2-conexo)

- É um grafo sem ponto de articulação.
- É preciso remover <u>pelo menos 2 vértices</u> do grafo biconexo para que ele deixe de ser conexo ou se torne trivial.

1:



2:

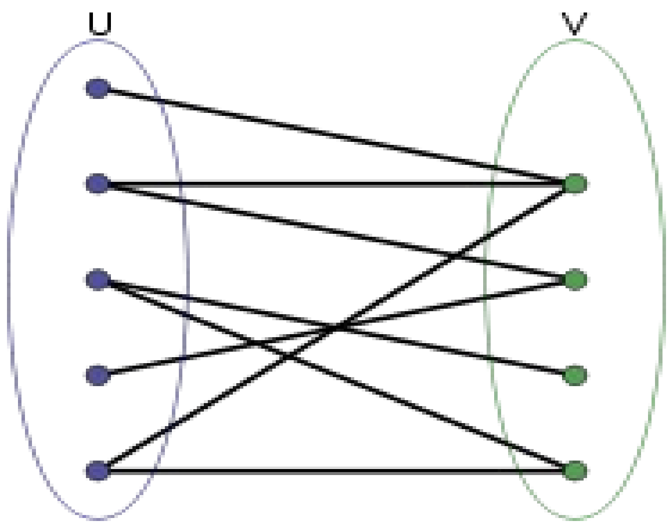


Os grafos 1 e 2 são biconexos, ou seja, a conectividade de vértices é ≥ 2

Grafo Bipartido

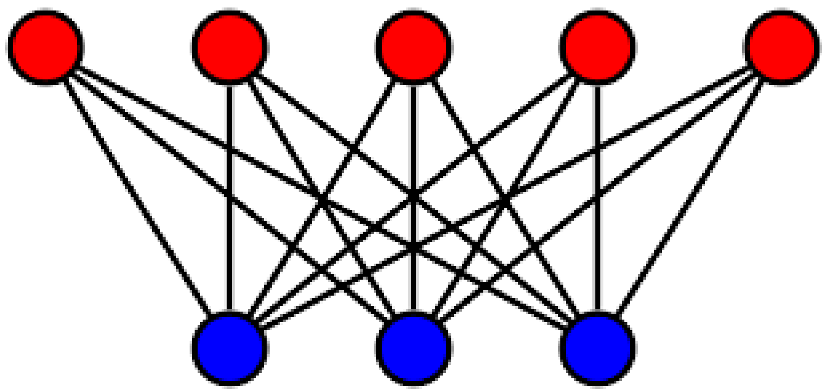
- São grafos cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos **U** e **V**, tais que toda ligação existente no grafo conecta um vértice de **U** a outro de **V.**

- Os subgrafos **U** e **V** são <u>conjuntos independentes de vértices</u>.



Grafo Bipartido

- Um grafo bipartido completo ($\mathbf{K}_{|U|,|V|}$) possui uma ligação para cada par de vértices **u** e **v**, sendo **u** $\in$ **U** e **v** $\in$ **V**.

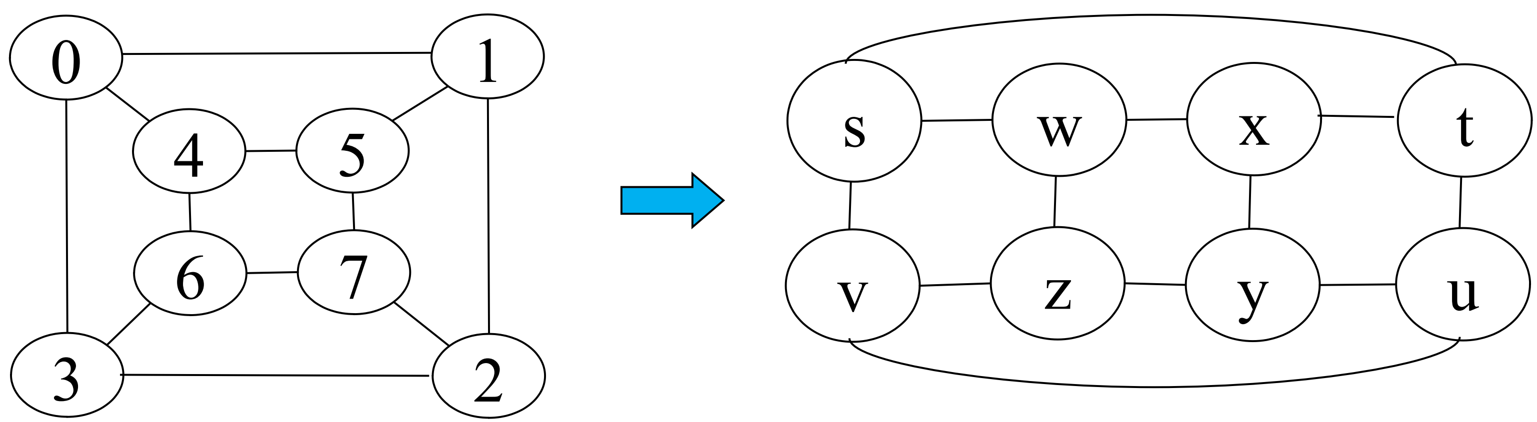


- Um grafo **G = (V, E)** bipartido se e somente se todo ciclo de **G** possuir comprimento par.

Isomorfismo

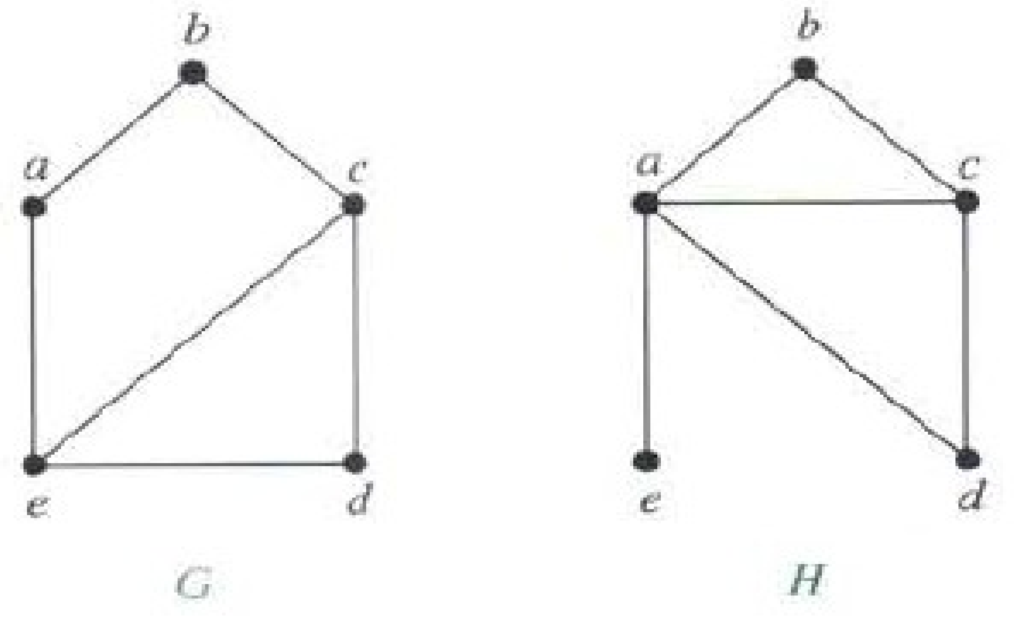
- O grafos **G = (V, E)** e **G' = (V', E')** são isomorfos se existir uma função **f : V → V'**, tal que **(u, v)** $\in$ **E** se e somente se **(f(u), f(v))** $\in$ **E'**.

- Ou seja, existe uma função bijetora entre seus conjuntos de vértices **|V| = |V'|**, que preserve suas relações de adjacência.



Isomorfismo

- Por exemplo, os grafos da figura abaixo não são isomorfos.
- Note que o grafo **H** tem um vértice de grau 4, o que não existe no grafo **G**.



Isomorfismo

- É desconhecido se existe, ou não, algum algoritmo eficiente para o problema geral de isomorfismo de grafos.
- Poderíamos tentar todas as permutações possíveis, mas isso daria um algoritmo de complexidade em $O(n!)$ (muito grande).
- O que pode ser comparado entre os grafos:
  - Mesmo número de vértices e arestas;
  - A quantidade de vértices de mesmo grau deve ser igual;
  - Os subgrafos induzidos contendo os vértices de mesmo grau devem ser isomorfos;
  - Tamanho do clique máximo;
  - ....

Definições Importantes...

- Grafo com apenas um vértice e sem arestas é dito trivial.

- Grafo simples não possui laços e permite no máximo uma ligação entre quaisquer dois vértices (ou seja, sem arestas ou arcos paralelos).

- Multi-grafos são grafos que permitem a existência de mais de uma ligação entre o mesmo par de vértices.

Definições Importantes...

- Grafo regular é um grafo em que todos os vértices tem o mesmo grau. Logo, é verdade que

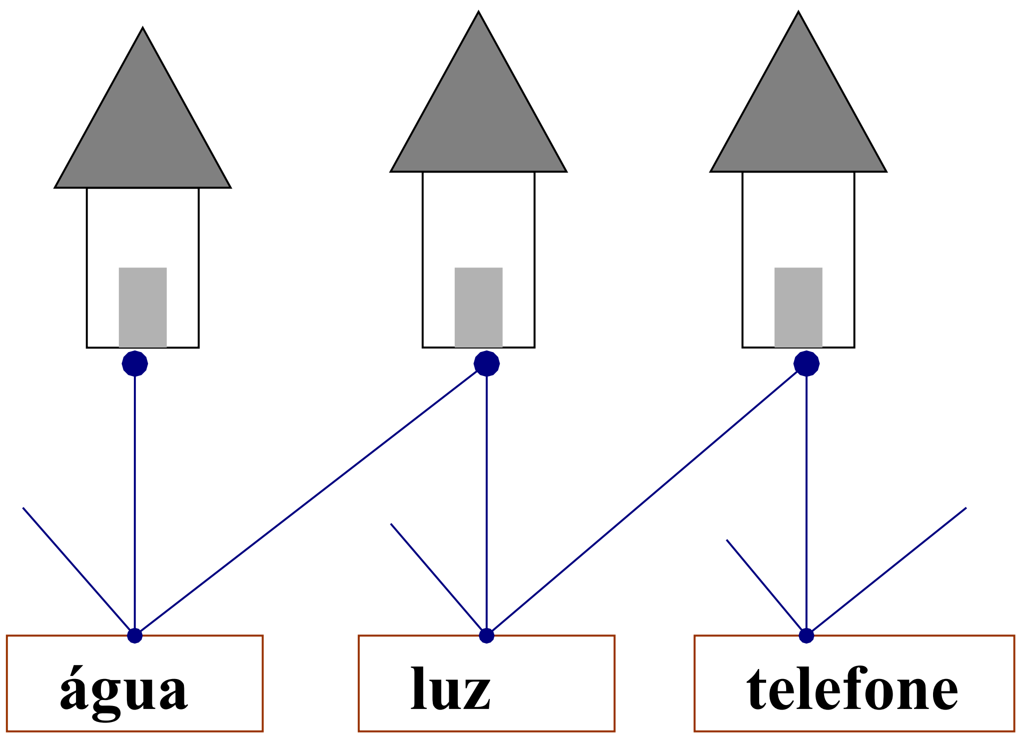
$$\Delta \,.\, |V| = 2 \,.\, |E| \text{ , onde } \Delta \text{ é o grau dos vértices}$$

- Por exemplo, em um grafo 4-regular todos os vértices possuem grau igual a 4.

- Todo grafo completo é regular e simples.

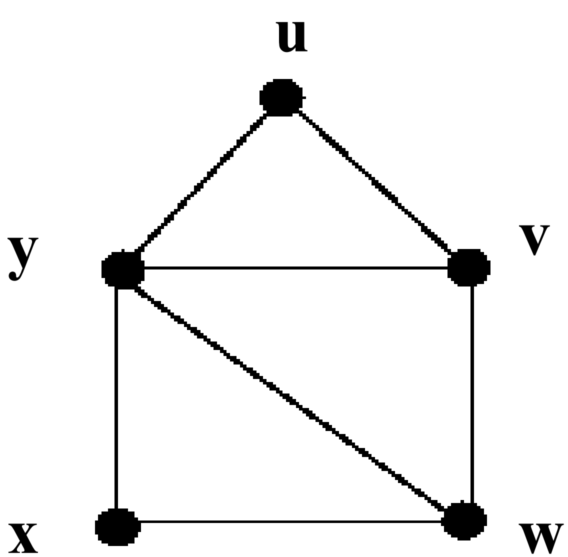
O Problema das 3 Casas

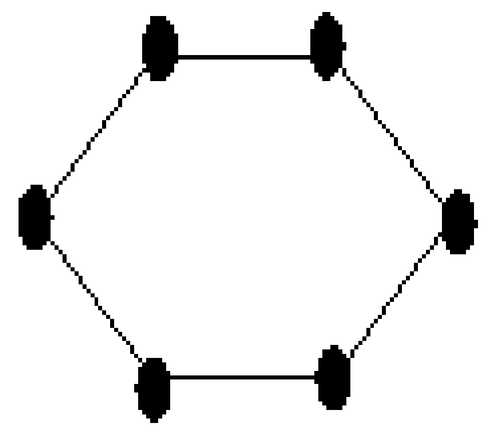
- É possível conectar os 3 serviços às 3 casas sem haver cruzamento de tubulação?



Grafos Planares

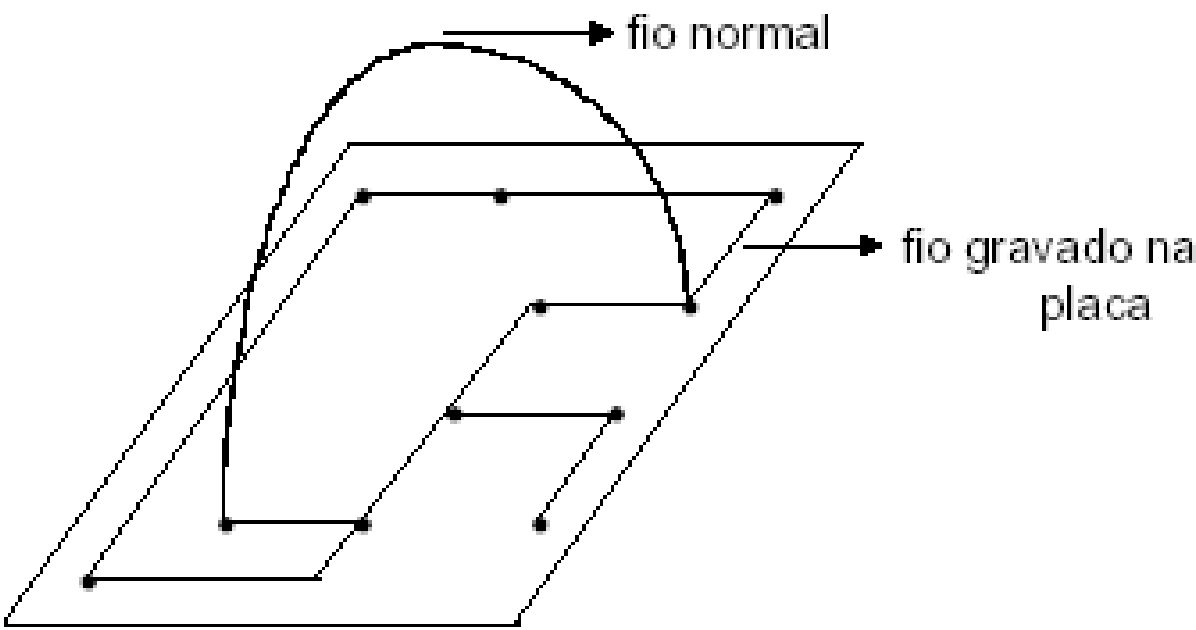
- Definição: São grafos que <u>podem</u> ser desenhados no plano sem cruzamentos, ou seja, duas arestas somente se encontram nos vértices onde são incidentes.





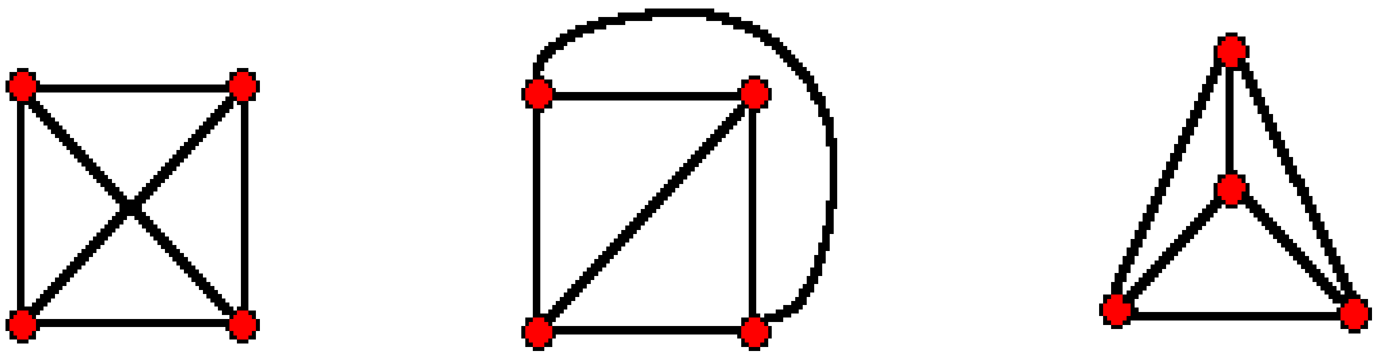
Grafos Planares

- Uma aplicação que utiliza o conceito de grafos planares é a disposição de circuitos impressos numa placa.



Grafos Planares

- Três representações gráficas distintas para um K_4 :



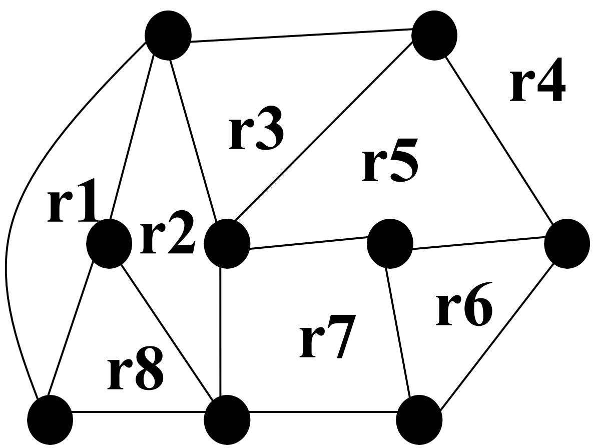
K_4 é um grafo planar pois admite <u>pelo menos uma</u> representação **R** num plano **P** sem que haja cruzamento de arestas (representação planar).

As linhas de **R** dividem **P** em regiões, chamadas <u>faces</u> de **R**.

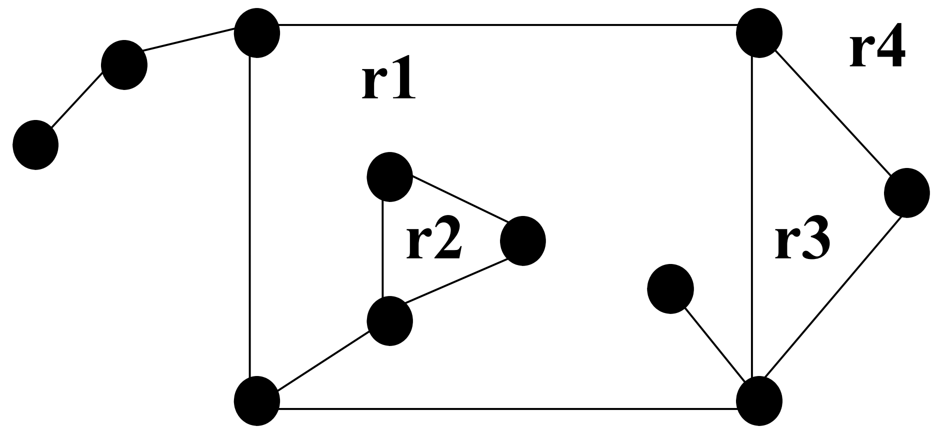
Um grafo K_4 possui <u>4 faces</u>. Observe que sempre uma dessas faces não é limitada. Esta é chamada <u>face externa</u>.

Grafos Planares

- Se **G** é um grafo planar, a representação planar **R** de **G** divide o plano em regiões ou faces.



8 regiões



4 regiões

r_4 é a região externa

Fórmula de Euler (1750)

Seja G um grafo simples, planar e conexo com e arestas e v vértices, sendo f o número de regiões na representação planar de G.

Então,

$$f = e - v + 2$$

Demonstração por indução sobre o número de arestas.

Toda árvore é planar com uma região. O acréscimo de um ciclo separa o plano em duas regiões, uma dentro do ciclo e outra fora dele, contudo, não altera a formulação.

Existe um limite máximo para o número de arestas do grafo planar G, dado pela condição necessária, mas não suficiente:

$$e \leq 3v - 6 \quad \text{com} \quad e > 1$$

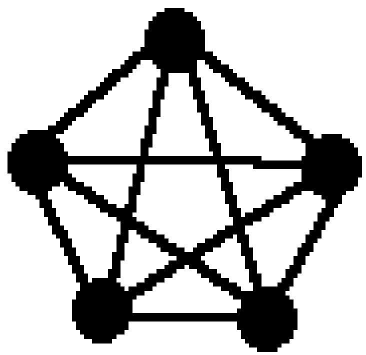
Prova: Considerando que cada face é delimitada no mínimo por 3 arestas (o menor ciclo em G tem comprimento 3) e cada aresta pertence a exatamente duas faces. Logo, $2e \geq 3f$. Agora, basta substituir essa inequação na fórmula de Euler.

Quando $2e = 3f$ significa que o grafo é maximal planar, ou seja, não podemos acrescentar arestas sem comprometer a planaridade do grafo e cada fase é delimitada por 3 arestas.

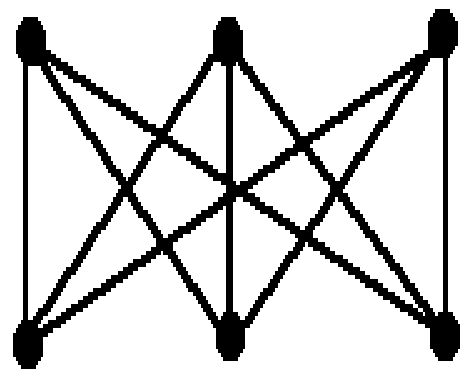
Em um grafo planar bipartido vale a relação $e \leq 2v - 4$, isso porque nesses grafos o menor ciclo tem comprimento 4.

Grafos não Planares

- Nem todos os grafos são planares.



K_5



$K_{3,3}$

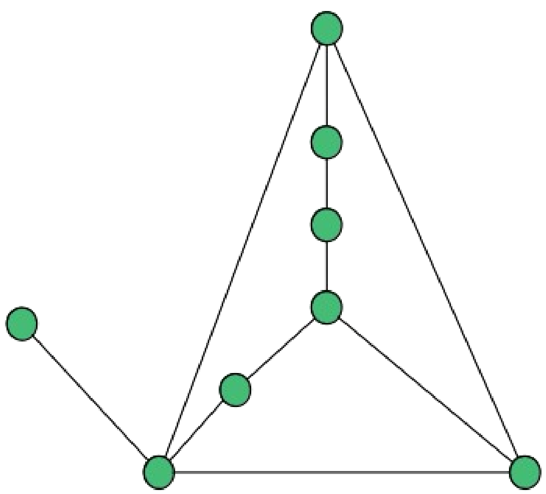
- Os grafos $\boldsymbol{K_5}$ e $\boldsymbol{K_{3,3}}$ <u>não</u> são planares.

- Observe que $\boldsymbol{K_5}$ e $\boldsymbol{K_{3,3}}$ são os grafos não planares com menor número de vértices e arestas, respectivamente.

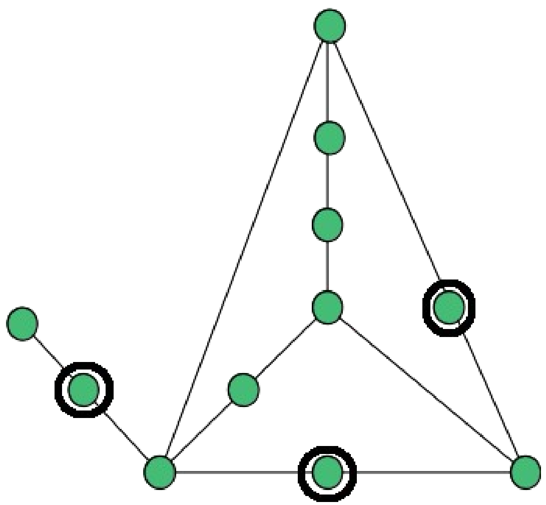
Homeomorfismo

- Uma subdivisão do grafo **G** é o grafo **G'**, que é obtido pela <u>inserção de vértices de grau 2</u> no lugar de uma aresta de **G**.

- Um grafo **G'** é dito <u>homeomorfo</u> ao grafo **G** se **G'** puder ser obtido de **G** por sucessivas operações de subdivisão.



G



G'

Planaridade

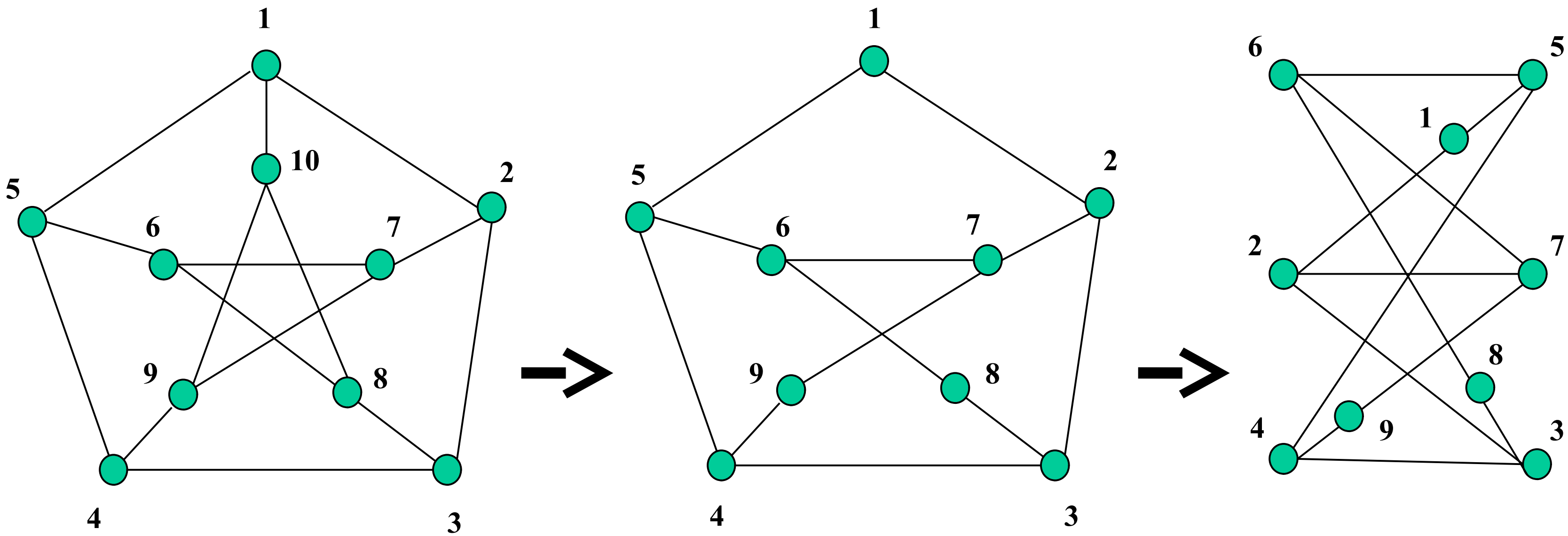
Teorema de Kuratowski (1930)

Um grafo é planar se e somente se não contém nenhum subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ou K_5 .

- A partir do Teorema de Kuratowski, surgiram diversos algoritmos de teste de planaridade lineares no tamanho do grafo, ou seja, da ordem $O(V + E)$.

- O primeiro desses algoritmos a ser publicado foi desenvolvido por Hopcroft e Tarjan (ganhadores do Prêmio Turing em 1986).

Planaridade



- Por exemplo, o grafo de Petersen, acima, <u>não</u> é planar.
- Retirando o vértice 10, seu subgrafo é homeomorfo a $\boldsymbol{K_{3,3}}$.

Planaridade

- Todo subgrafo de um grafo planar é planar.
- Todo grafo que tem um subgrafo não planar é não planar.
- Todo grafo com subgrafos $K_{3,3}$ ou K_5 é não planar.

Coloração

- A empresa X quer construir **k** armazéns para armazenar os produtos químicos de tal forma que os produtos incompatíveis fiquem em armazéns diferentes.

Produtos	Incompatibilidade
A	B C D
B	A C D
C	A B D E
D	A B C E
E	C D

Qual é o menor número **k** de armazéns que devem ser construídos?

Coloração

- Existem problemas onde é preciso particionar o conjunto de vértices **V** de um grafo **G = (V, E)** em subconjuntos de vértices não adjacentes entre si, ou seja, <u>independentes</u>.

- A Figura 1 divide o conjunto de produtos do slide anterior em subconjuntos que contêm apenas elementos não adjacentes.

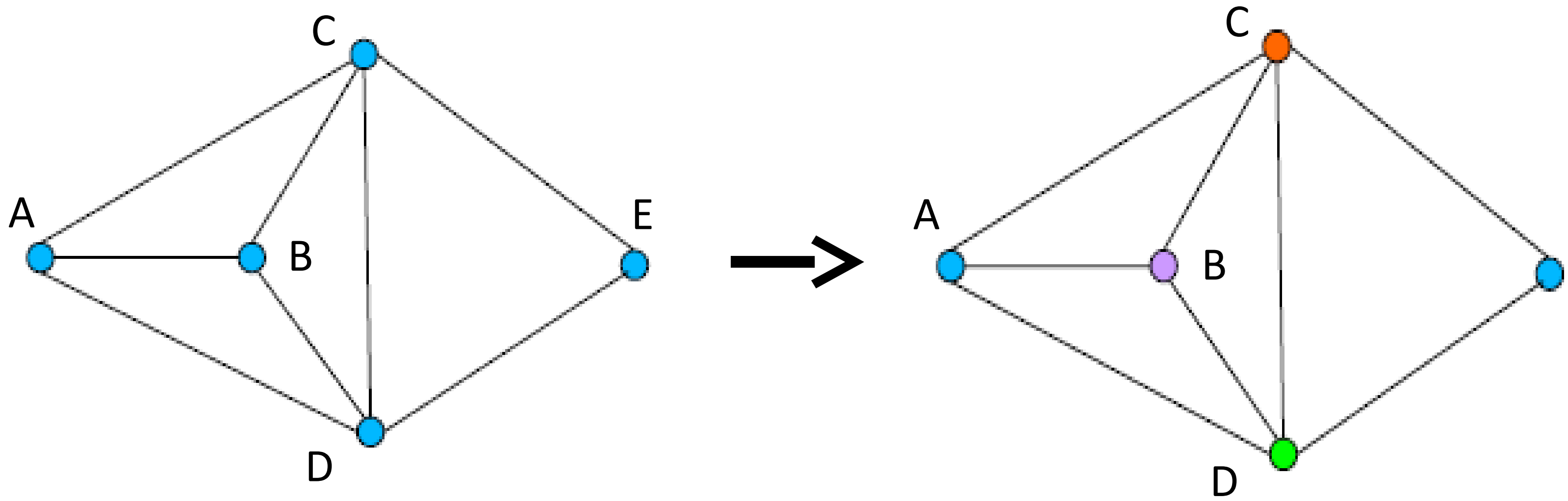


Figura 1

Exemplo

A tabela a seguir mostra a alocação de um grupo de 16 alunos aos exames de recuperação que eles devem prestar em um colégio. Duas disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não envolverem alunos em comum.

Pergunta: Qual é a quantidade mínima de horários diferentes que precisam ser reservados para a realização dos exames?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Matemática	X							X				X			X	
Português	X			X							X					X
Inglês						X	X			X					X	
Geografia				X	X		X		X				X			
História			X							X		X		X		X
Física			X		X								X			
Química		X						X	X		X			X		
Biologia		X				X										

Coloração de Vértices

- Em teoria dos grafos, esse problema é representado como um problema de coloração.

- Coloração de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

- Um grafo **G** tem *k*-coloração quando ele puder ser colorido com **k** cores, onde **k** é um número inteiro.

- Se **G** tem *k*-coloração e não pode ter *(k-1)*-coloração, dizemos que o <u>número cromático</u> **χ(G)** é igual a **k**.

- O grafo da Figura 1 é *4*-cromático, ou seja, **χ(G) = 4**.

Encontrar o Número Cromático

- Esse problema pode ser formulado em termos de particionar o conjunto de vértices **V** em um número mínimo de conjuntos independentes de vértices.

- Encontrar **χ(G)** é uma tarefa bastante difícil e <u>não</u> é conhecido um algoritmo eficiente para realizar essa tarefa.

- O problema da determinação de **χ(G)** é NP-difícil.

- No entanto, alguns casos especiais podem ser resolvidos de forma relativamente simples.

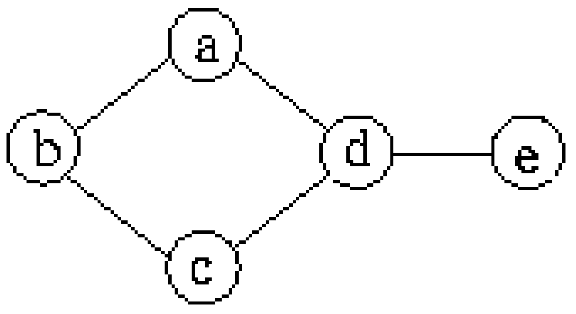
Propriedades

- Alguns cenários interessantes:

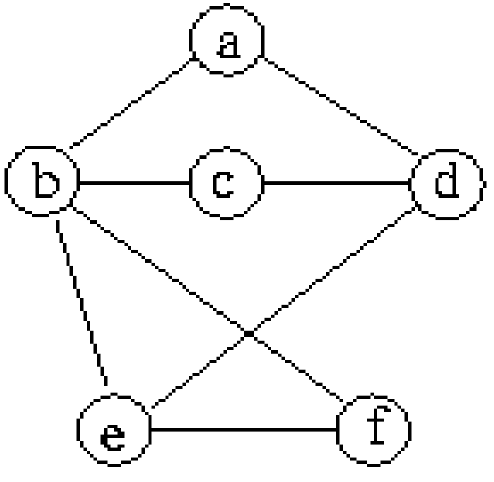
1. **$\chi(G) = 1$** : podemos afirmar que o grafo **G** não tem arestas.
2. **$\chi(G) = 2$** : podemos afirmar que o grafo **G** é bipartido.
3. Se um grafo tem **n** vértices, então **$\chi(G) \leq n$**.
4. É certo que **$\chi(G) \geq \omega(G)$**.
5. Se **G** é um grafo e **Δ** é o maior grau entre seus vértices, então podemos afirmar que **$\chi(G) \leq \Delta + 1$**.
6. <u>Teorema de Brooks</u>: Se **G** é um grafo conexo, não completo e **$\Delta \geq 3$**, então podemos afirmar que **$\chi(G) \leq \Delta$**.
7. Todo grafo planar é *4*-coloração, claro, assumindo **$n \geq 4$**.

$\omega(G)$: tamanho do maior clique do grafo **G**.

Exemplo



- O grafo não-orientado ao lado possui $\omega(G) = 2$. Então, $\chi(G) \geq 2$.
- O grafo é conexo, não completo e com $\Delta = 3$. Então, podemos afirmar que $\chi(G) \leq 3$.
- O grafo tem $\chi(G) = 2$.



- O grafo não-orientado ao lado possui $\omega(G) = 3$. Então, $\chi(G) \geq 3$.
- O grafo é conexo, não completo e com $\Delta = 4$. Então, podemos afirmar que $\chi(G) \leq 4$.
- O grafo tem $\chi(G) = 3$.

Coloração de Arestas

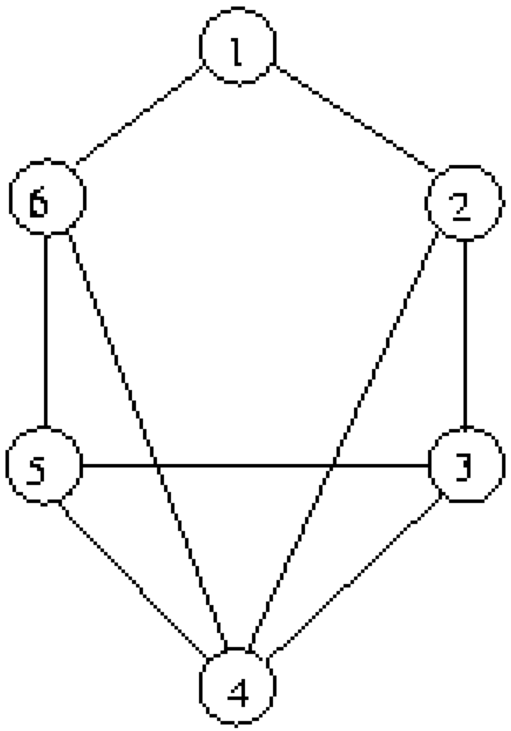
- Em teoria dos grafos, a coloração de arestas é a atribuição de "cores" às arestas de um grafo **G = (V, E)** de modo que arestas incidentes em um mesmo vértice recebam cores diferentes.

- Um grafo **G = (V, E)** tem *k*-aresta-coloração quando suas arestas puderem ser coloridas com **k** cores, onde **k** é um inteiro.

- O menor número de cores necessárias em uma coloração de arestas de um grafo **G** é o <u>índice cromático</u> **χ'(G)**.

- Então, um grafo G é *k*-aresta-cromático se **χ'(G) = k**.

Exemplo



Suponha que várias duplas devam ser formadas para realizar tarefas no laboratório. Observe que uma mesma pessoa pode ter que cumprir tarefas com diferentes parceiros.

Cada tarefa leva 1 hora para ser executada. Qual é o menor número de horas necessárias para que todas as tarefas sejam realizadas?

É preciso no mínimo 4 horas para executar todas as tarefas, visto que é necessário no mínimo 4 cores para colorir as arestas do grafo.

Exemplo

- Três professores de uma escola do ensino médio devem examinar cinco alunos, segundo a tabela abaixo:

Professor	Alunos
Professor 1	A, C, D
Professor 2	A, C, E
Professor 3	A, B, D

A cada hora, cada professor chama, em separado, um dos alunos para ser examinado. Qual o menor espaço de tempo para que todos os exames possam ser realizados?

Resposta: 3 horas.

Encontrar o Índice Cromático

- Podemos formular esse problema em termos de particionar o conjunto de arestas **E** em um número mínimo de conjuntos independentes de arestas.

- Encontrar **$\chi'(G)$** é uma tarefa bastante difícil e <u>não</u> é conhecido um algoritmo eficiente para realizá-la.

- O problema da determinação de **$\chi'(G)$** é NP-difícil.

- No entanto, alguns casos especiais podem ser resolvidos de forma relativamente simples.

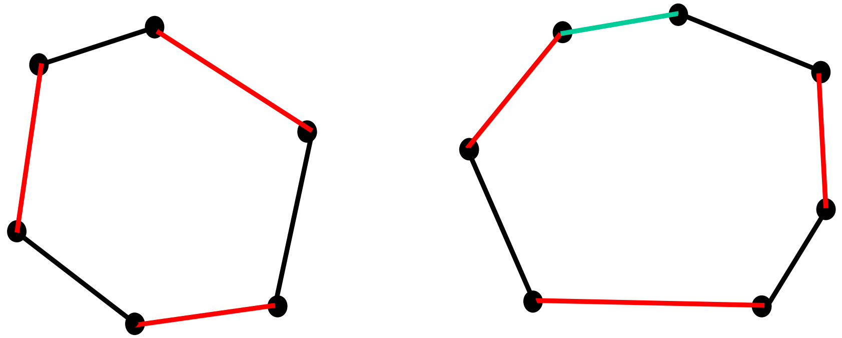
Propriedades

- Alguns cenários interessantes:

1. Claramente observável que **$\chi'(G) \geq \Delta$**

2. Teorema de König:
   Em grafos bipartidos tem-se **$\chi'(G) = \Delta$**

3. Grafo ciclo : **$\chi'(C_n) = 2$**, se **n** é par
   $\chi'(C_n) = 3$, se **n** é ímpar



Propriedades

4. Grafo completo: $\boldsymbol{\chi'(K_n) = \Delta}$, se **n** é par

   $\boldsymbol{\chi'(K_n) = \Delta + 1}$, se **n** é ímpar

5. Em 1964, Vadim G. Vizing dividiu os grafos* não-direcionados em duas classes:

   Classe 1 : Grafos com $\boldsymbol{\chi'(G) = \Delta}$

   Classe 2 : Grafos com $\boldsymbol{\chi'(G) = \Delta + 1}$

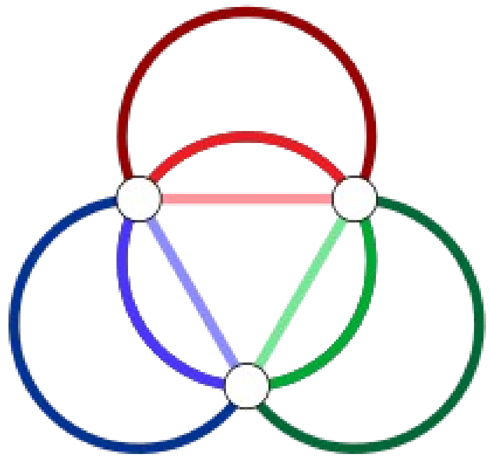
http://ranger.uta.edu/~weems/NOTES4351/edgeColor4.c

http://ranger.uta.edu/~weems/NOTES5311/misraGriesNew.c

* Multigrafos em geral não obedecem o Teorema de Vizing.

Propriedades

6. Um exemplo simples de que o Teorema de Vizing não se aplica a todos os multigrafos é o chamado multigrafo de Shannon.



$\Delta(G) = 2\mu(G) = 6$

$\chi'(G) = 3\mu(G) = 9$

Onde **μ(G)** é número máximo de arestas paralelas entre vértices.

Propriedades

- Para qualquer multigrafo **G**, Shannon[1] mostrou que:

$$\chi'(G) \leq (3/2)\,\Delta(G)$$

- Adicionalmente, para qualquer multigrafo **G**, tem-se:

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$$

Uma inequação reduzida ao Teorema de Vizing no caso de grafos simples (onde $\mu(G) = 1$).

[1] Shannon, Claude E. (1949), "A theorem on coloring the lines of a network", J. Math. Physics 28: 148–151.

Propriedades

7. Vizing (1965) provou que grafos planares de grau máximo pelo menos oito são de Classe 1.

8. Conjectura Vizing do grafo planar (1965):

"Todos os grafos simples e planares com grau máximo seis ou sete são de Classe 1."

- Sanders & Zhao[1] provaram parcialmente a conjectura do grafo planar de Vizing. Eles mostraram que todos os grafos simples e planares com grau máximo sete são da Classe 1. Ou seja,

$$\boldsymbol{\chi'(G) = \Delta(G)}, \text{ se } \mathbf{G} \text{ é simples, planar e } \boldsymbol{\Delta(G) \geq 7}$$

- Assim, o caso que permanece sem solução de grafos simples e planares é o grau máximo de 6.

[1] http://dx.doi.org/10.1006/jctb.2001.2047