Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

Grafos

Lista de Exercícios

1) Mostre que

   a) considerando um grafo não orientado e simples, então **e ≤ Cv,2**.

   b) considerando um grafo não orientado, simples e completo, então **e = Cv,2**.

   Onde:

   e = número de arestas
   v = número de vértices
   Cv,2 = número de combinações possíveis entre pares de elementos distintos de **v**

   c) o complemento de um grafo bipartido nem sempre é um grafo bipartido.

   d) todo subgrafo induzido de um grafo completo é completo.

   e) um grafo não orientado tem um número par de vértices de grau ímpar.

   f) se um grafo bipartido é regular, os dois subgrafos **X** e **Y** que o compõem têm o mesmo número de vértices.

   g) um grafo **G = (V, E)** é bipartido se e somente se todo ciclo de **G** possuir comprimento par.

   h) um grafo bipartido com número ímpar de vértices não é Hamiltoniano.

2) Responda aos questionamentos abaixo.

   a) Qual é o grau mínimo de um vértice?

   b) Qual é o grau máximo de um vértice em um grafo não orientado e simples?

   c) Qual é o número máximo de arestas em um grafo não orientado, simples e bipartido?

   d) Grafos bipartidos possuem laços? Por quê?

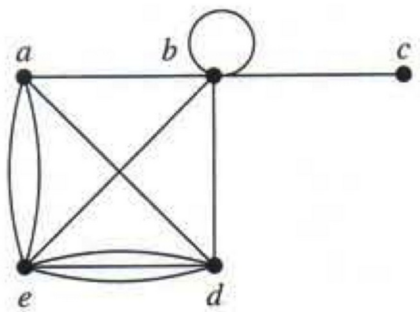
   e) Qual é o número máximo de arcos em um grafo orientado e simples?

   f) O grafo $\mathbf{K_{m,n}}$ é Euleriano desde que **m** e **n** sejam ímpares? Por quê?

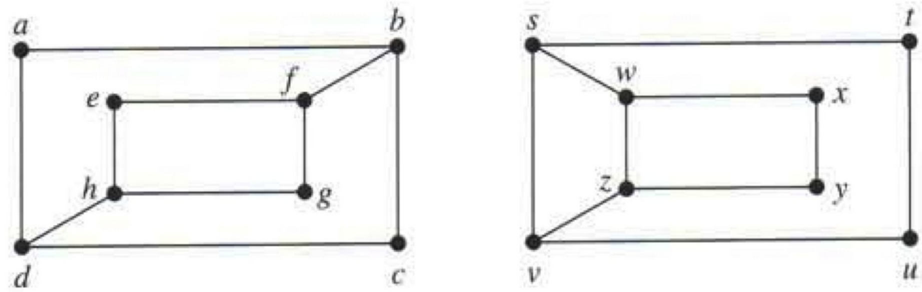
3) Dado o grafo **G = (V, E)**, prove o teorema abaixo.

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \mathbf{grau\ (v) = 2{*}e}$$, onde **e** = número de arestas.

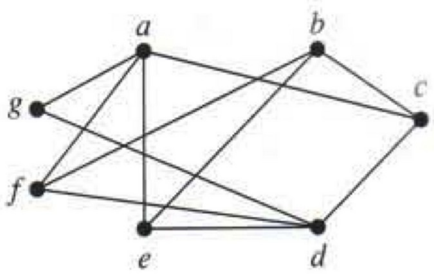
4) Encontre o grau dos vértices do multigrafo apresentado abaixo. Em seguida, indique a conectividade do grafo.



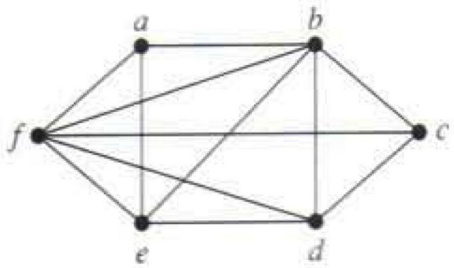
5) Os grafos da figura abaixo são isomorfos? Explique.



6) Os grafos **G** e **H** apresentados abaixo são bipartidos? Por quê?

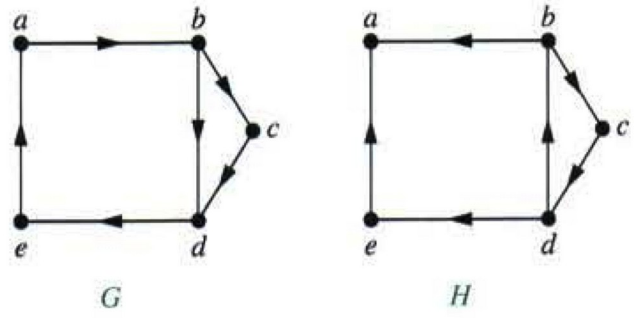


G



H

7) Faça um estudo sobre a conexidade dos dígrafos **G** e **H** apresentados abaixo.



8) Sobre conectividade de vértices ($\mathbf{c_v}$) e arestas ($\mathbf{c_e}$), prove as afirmativas abaixo.

(i) Se **G** é um grafo desconexo, então $\mathbf{c_v = c_e = 0}$.

(ii) Para todo grafo vale $\mathbf{c_v \leq c_e}$.

(iii) Se **G** é um grafo completo $\mathbf{K_n}$, então $\mathbf{c_v = c_e = n - 1}$.

9) Seja **G** um grafo direcionado e simples de **v** vértices e **e** arestas.

a) Prove que, se **G** é conexo, então $\mathbf{v - 1 \leq e \leq v*(v - 1)}$.

b) Quais são os limites inferior e superior para **e** se **G** é fortemente conexo?

10) Considere as afirmações abaixo sobre um grafo simples e conexo **G** com **n** vértices, sendo **n > 0**.

I – O número de arestas de **G** é maior ou igual a **n**.

II – **G** será acíclico se e somente se o número de arestas for menor que **n**.

III – **G** é biconexo em vértices se e somente se ele for Hamiltoniano.

IV – **G** é Euleriano se e somente se todo grau é par.

As afirmativas verdadeiras são

(A) somente I e IV.

(B) somente I e III.

(C) somente II e III.

(D) somente II e IV.

(E) somente II, III e IV.

11) Prove que, dado um grafo simples e conexo **G = (V, E)** com **|V| > 2**, então

(i) um vértice **v** que pertence a **V** é articulação de **G** se e somente se existirem vértices **w, u** $\neq$ **v** tais que v está contido em todo caminho entre **w** e **u** em **G**.

(ii) uma ligação **(p, q)** que pertence a **E** é ponte se e somente se ela for o único caminho simples entre **p** e **q** em **G**.

12) Dado que o grafo **H** é complemento do grafo **G**, assinale a alternativa correta.

(A) **G** e **H** são grafos isomorfos.

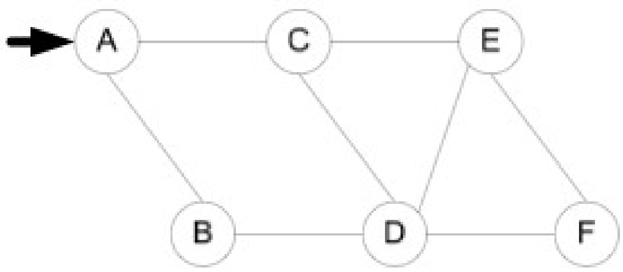
(B) Se o grafo **G** é conexo, então **H** é conexo.

(C) Se o grafo **G** não é conexo, então **H** é conexo.

(D) Se o grafo **G** não é conexo, então **H** não é conexo.

(E) Os grafos **G** e **H** têm o mesmo número de componentes conexas.

13) Considere o algoritmo de busca em largura em grafos. Dado o grafo abaixo e o vértice A como origem, a ordem em que os vértices são descobertos é dada por



(A) ABCDEF.

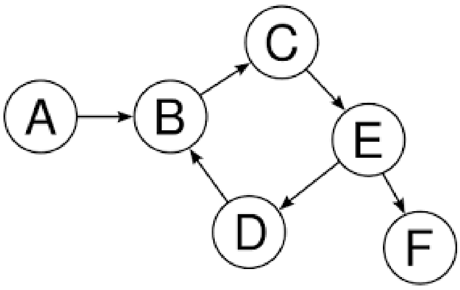
(B) ABDCEF.

(C) ACDBFE.

(D) ABCEDF.

(E) ABDFEC.

14) Considere o dígrafo abaixo e responda os itens a seguir.



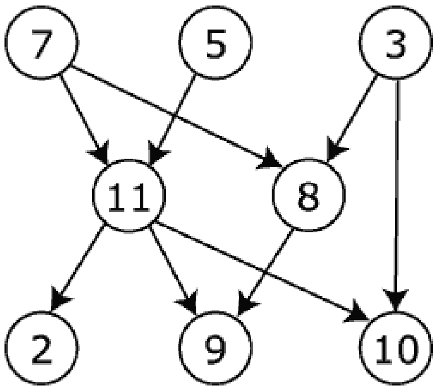
a. Informe sua conexidade.
b. Quais são os seus componentes fortemente conexos?
c. Existe um caminho de comprimento 8 do vértice “A” para o vértice “F”?
d. Quantos e quais são os seus ciclos simples?
e. Seu grafo subjacente é bipartido?
f. Seu grafo subjacente é regular?
g. Monte suas matrizes de adjacência e incidência.

15) Uma fonte é um vértice com grau de entrada nulo, enquanto que um sumidouro é um vértice com grau de saída nulo. Dados esses dois conceitos e o grafo orientado abaixo, responda os seguintes itens:

a. Represente o grafo usando lista de adjacência.

b. O que significa o total de elementos da lista de adjacência montada no item (a).

c. Como identificar um sumidouro e uma fonte numa lista de adjacência? Exemplifique usando o grafo abaixo como referência.



16) Considerando o grafo de Petersen (vide: pt.wikipedia.org/wiki/Grafo_de_Petersen), responda os itens abaixo:

a. O grafo é Hamiltoniano?

b. O grafo é 2-conexo em vértices?

c. Explique se o grafo satisfaz, ou não, as condições de Dirac e Ore.

17) Apresente a ordem dos vértices produzida pela ordenação topológica quando o algoritmo é executado sobre o grafo direcionado acíclico da Figura 7.23.

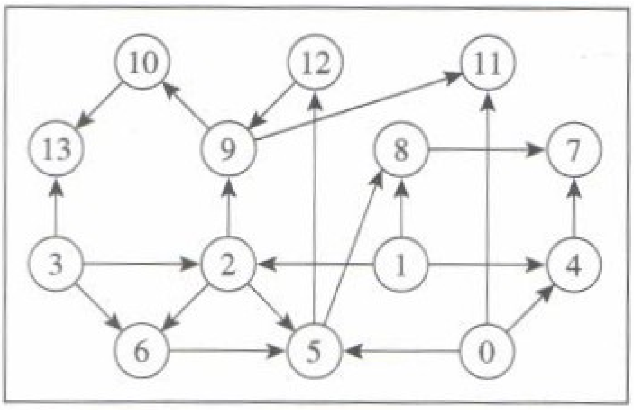


Figura 7.23 *Grafo direcionado acíclico.*

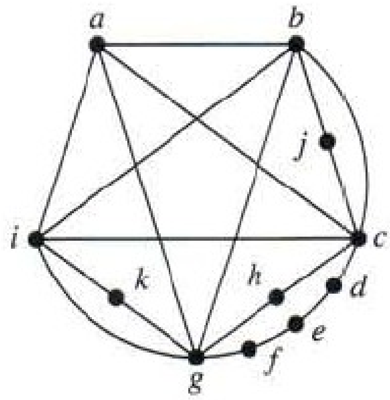
18) Seja **R** uma matriz de adjacências de um dígrafo acíclico **G**, construída segundo uma permutação de seus vértices que corresponde a uma ordenação topológica. Mostrar que **R** é uma matriz triangular. O grafo direcionado da Figura 7.23 pode ser tomado como exemplo.

19) Prove que os grafos $\mathbf{K_5}$ e $\mathbf{K_{3,3}}$ não são planares.

20) Qual a quantidade mínima de arestas que se deve remover do grafo completo com 7 vértices, $\mathbf{K_7}$, para se obter um grafo planar?

(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

21) Determine se o grafo da figura abaixo é ou não planar. Explique seu raciocínio.



22) Para o grafo abaixo, responda se ele é bipartido, 2-conexo em vértices e planar.

23) Sobre um grafo de **n** vértices e **m** arestas é correto dizer que

(A) a representação sob a forma de matriz de adjacência exige espaço $\Omega(m^2)$.

(B) a representação sob a forma de listas de adjacência permite verificar a existência de uma aresta ligando dois vértices dados em tempo $O(1)$.

(C) a representação sob a forma de matriz de adjacência não permite verificar a existência de uma aresta ligando dois vértices dados em tempo $O(1)$.

(D) a representação sob a forma de listas de adjacência exige espaço $\Omega(n + m)$.

(E) todas as alternativas estão corretas.

24) Para qualquer **k**, $\mathbf{K_{1,k}}$ é chamado de grafo estrela. Dito isso, verifique se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa: “Todos os grafos bipartidos completos que são árvores são estrelas”. Justifique sua resposta.

25) Considerando um grafo **G = (V, E)**, analise as afirmativas abaixo.

I – Todo grafo conexo **G** com **|V| - 1** arestas tem número cromático maior ou igual a 3.

II – Um grafo **G** completo possui sempre o número cromático igual a **|V|**.

III – Um grafo **G** é 2-cromático se e somente se for bipartido.

É correto afirmar que

(A) somente afirmativa II é verdadeira.

(B) somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

(C) somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

(D) somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

(E) todas as afirmativas são verdadeiras.

26) Construa um grafo conexo de 6 vértices com o maior número de independência possível. Desenvolva o raciocínio utilizado para desenhá-lo, informando o número cromático e índice cromático do mesmo.

27) Assinalar a afirmativa correta, sobre um grafo completo **G** com **n > 2** vértices.

(A) O grau de cada vértice é **n**.

(B) O índice cromático de **G** é igual ao maior grau dos vértices.

(C) **G** pode ser um grafo bipartido.

(D) **G** possui caminho Hamiltoniano.

(E) **G** possui ciclo Euleriano.

28) Qual é o índice cromático do grafo $\mathbf{K_{3,2}}$?

(A) Dois.

(B) Três.

(C) Quatro.

(D) Cinco.

(E) Seis.