Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Computação

Árvores

Autor: Nelson Cruz Sampaio Neto

Carlos Gustavo Resque dos Santos
gustavoresqueufpa@gmail.com

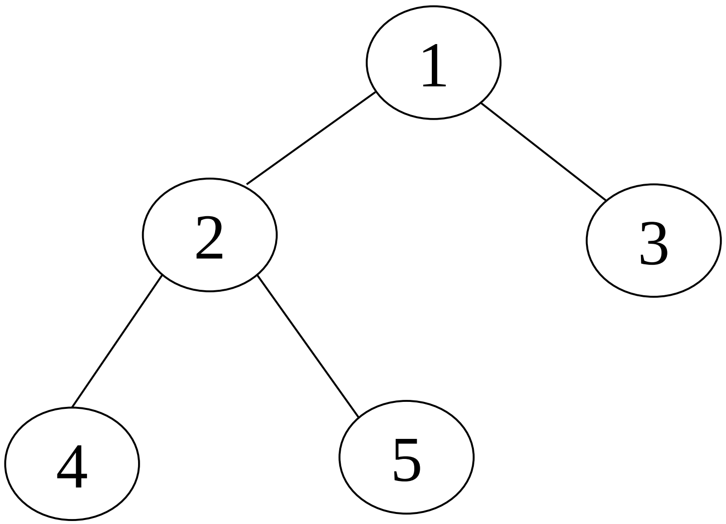
Belém, 02 de outubro de 2017

Definições

- Árvore: é um grafo **G = (V, E)** que seja acíclico e conexo.

- O conceito "acíclico" refere-se a grafos sem ciclos simples de comprimento maior que 2.

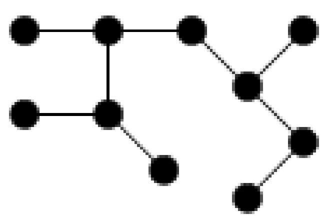
- Toda árvore com **v** vértices possui exatas **v – 1** arestas.



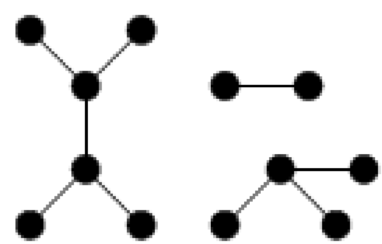
Note que a adição de mais uma aresta na árvore ao lado provoca o surgimento de um ciclo simples.

Definições

- Árvore Enraizada: quando algum vértice $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é escolhido como especial. Esse vértice é chamado de raiz da árvore.
- Árvore Livre: termo usado quando a raiz da árvore não encontra-se definida. Exemplo: Figura (a).
- Floresta: é um grafo necessariamente acíclico, podendo ou não ser conexo. Exemplo: Figura (b).



(a)



(b)

Definições

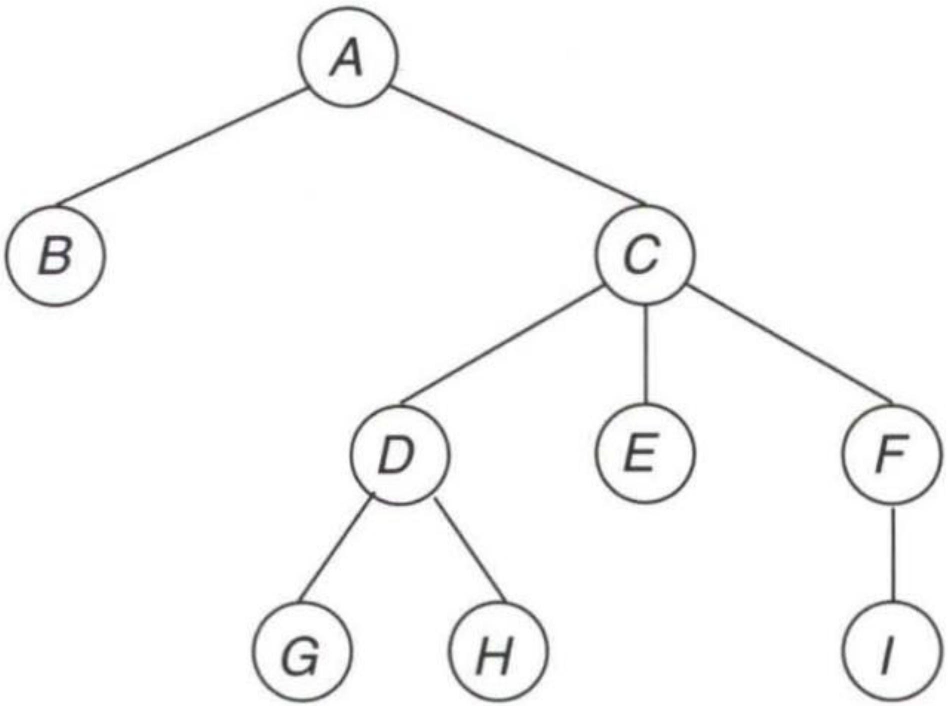
- Se **(v, w)** é uma aresta da árvore **T**, então considera-se que o vértice **v** é pai de **w**; e **w** é filho de **v**.

- O vértice raiz de uma árvore não possui pai, assim como um vértice folha não possui filhos.

- O nível de um vértice é dado pelo comprimento do caminho da raiz até ele. O nível da raiz é zero.

- A altura de uma árvore é igual ao valor máximo de nível entre os vértices que a formam.

Exemplo



- Nó A é a raiz;
- B, G, H, E, I são nós folha;
- Os nós A, C, D, F são
- internos;
- A raiz está no nível 0 e as
- folhas G, H, I no nível 3;
- Altura da árvore é 3;
- O nó C é pai de D, E, F.

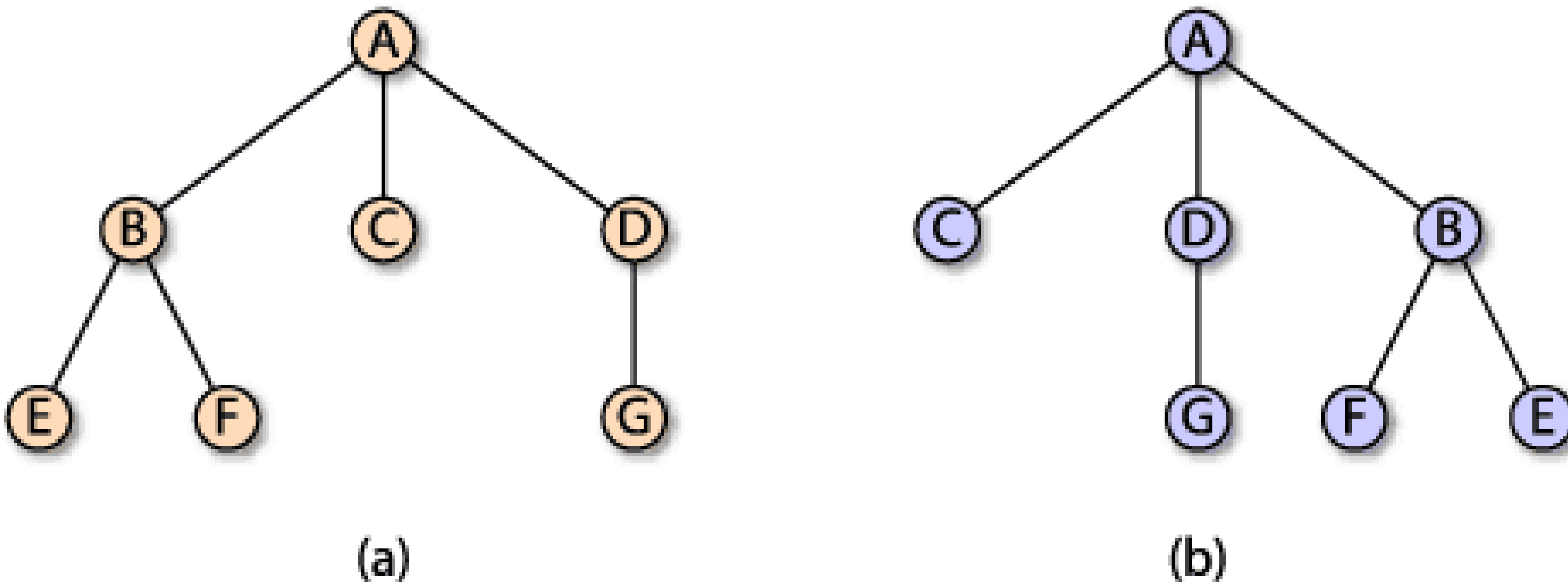
Definições

- Árvores Ordenadas: a ordem em que os filhos de cada vértice **v** $\in$ **V** são considerados é relevante.

- Assim, os filhos de um vértice **v** $\in$ **V** podem se identificados: 1º filho mais a esquerda, 2º filho mais a esquerda, etc.

- Nesse caso, o isomorfismo **deve** considerar a ordenação.

Exemplo

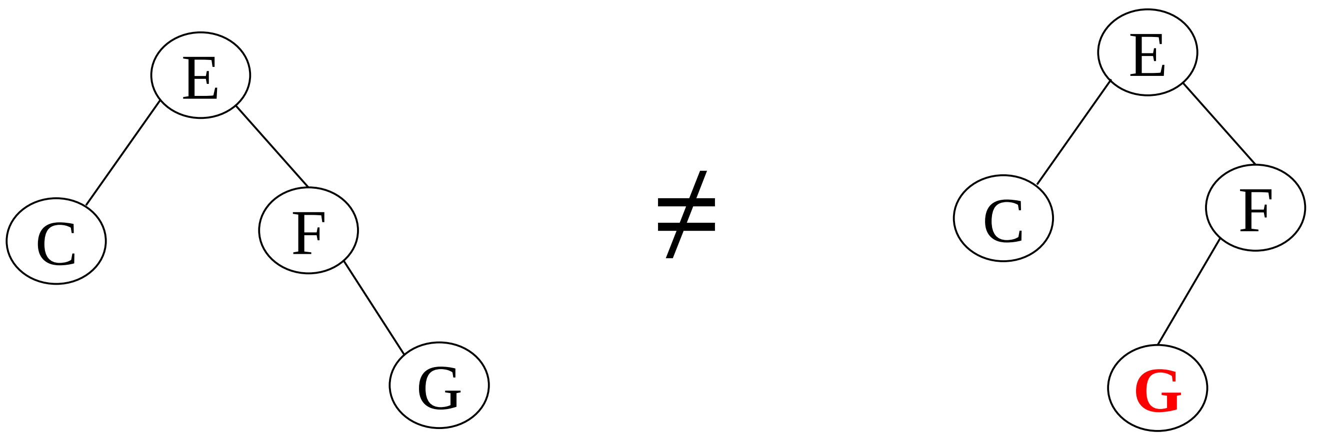


Se as árvores acima forem ordenadas, então **não** são equivalentes.
Ou seja, não são isomorfos.

Árvores Binárias

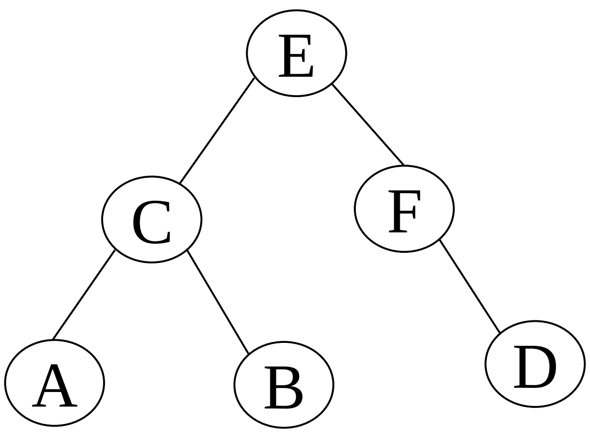
- Uma <u>árvore binária</u> é uma árvore ordenada onde cada pai pode ter no máximo dois filhos.

- Os filhos devem ser identificados como esquerdo ou direito. Tal ordem influencia no isomorfismo.



Árvores Binárias

- Lema: O número de subárvores esquerdas e direitas vazias em uma árvore binária com **n > 0** nós é **n + 1**.



Exemplo: Árvore binária com 6 nós e 7 subárvores vazias: as subárvores esquerda e direita dos nós A, B, D; e a subárvore esquerda do nó F.

Árvores Binárias

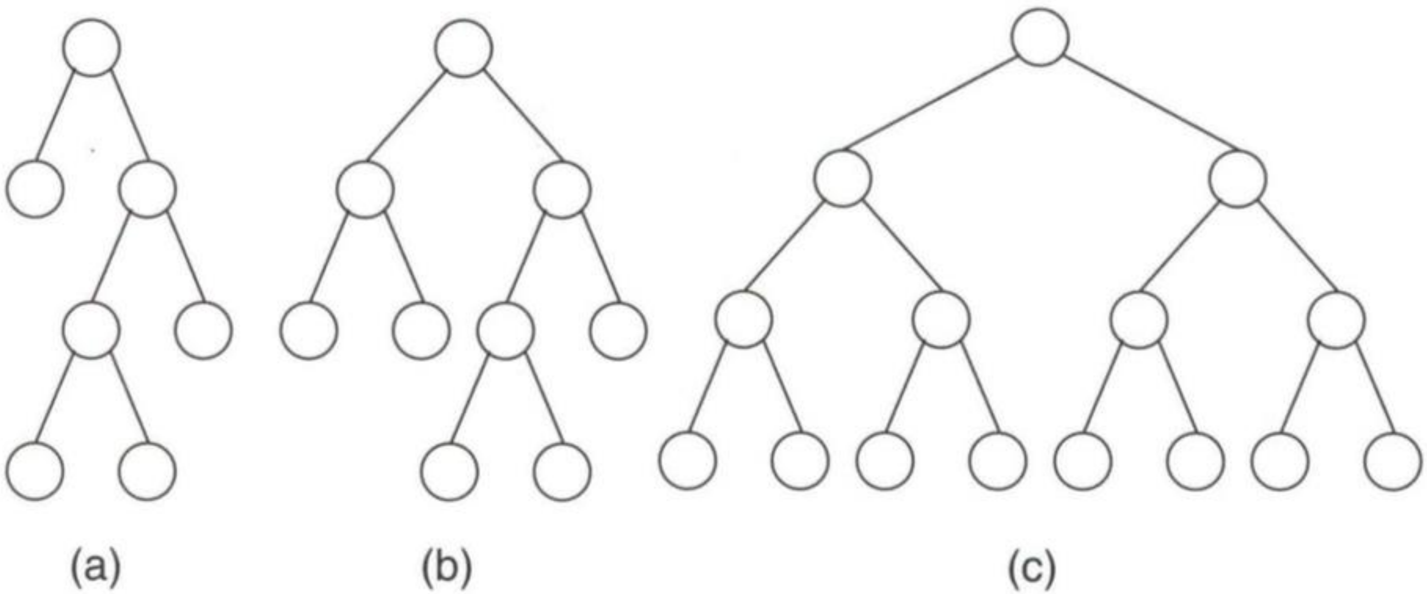
- <u>Árvore estritamente binária</u>: é uma árvore binária em que cada nó possui 0 ou 2 filhos.

- <u>Árvore binária completa</u>: se **v** é um nó tal que alguma subárvore de **v** é vazia, então **v** se localiza ou no último (maior) ou no penúltimo nível da árvore.

- <u>Árvore binária cheia</u>: se **v** é um nó com alguma de suas subárvore vazias, então **v** se localiza no último nível da árvore.

- Com isso, tem-se que toda árvore binária cheia é completa e estritamente binária.

Exemplo



Árvores estritamente binárias, no entanto, apenas (b) e (c) são completa, e somente a (c) é cheia.

Árvores Binárias

- A relação entre a altura da árvore binária e o seu número de nós é um dado importante para várias aplicações.

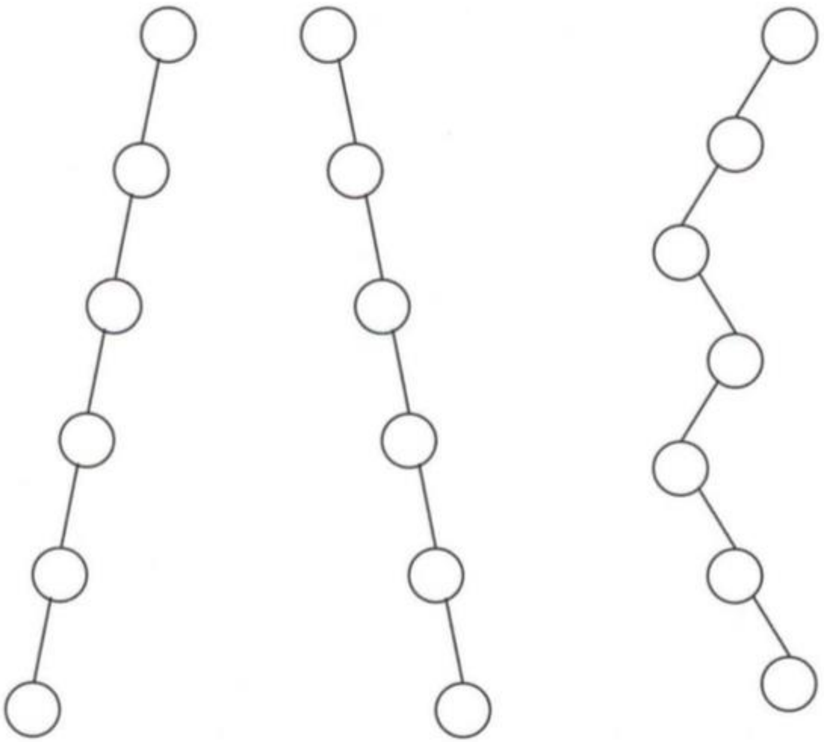
- Para um valor fixo de **n**, quais são as árvores binárias que possuem altura **h** máxima e mínima?

.

- Altura máxima: árvore degenerada ou *zigue-zague,* com altura igual a **n**.

- Altura mínima: árvore completa, com altura igual a **log(n)**.

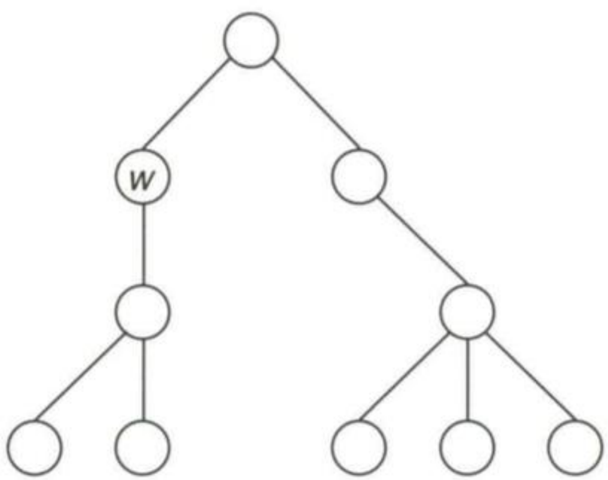
Exemplo

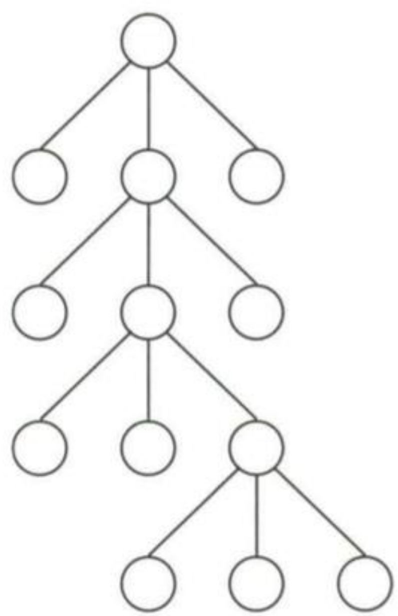


- Exemplos de árvores degeneradas (pior caso), onde a altura **h = O(n)**.
- Já o melhor caso da altura da árvore ocorre quando a árvore é completa: **h = O(log(n))**.

Árvore *m*-ária

- Uma árvore *m*-ária, **m ≥ 2**, é uma generalização da árvore binária em que cada nó possui no máximo **m** subárvores.
- Analogamente às árvores binárias, podem-se definir árvores estritamente *m*-ária, árvore *m*-ária completa e cheia.





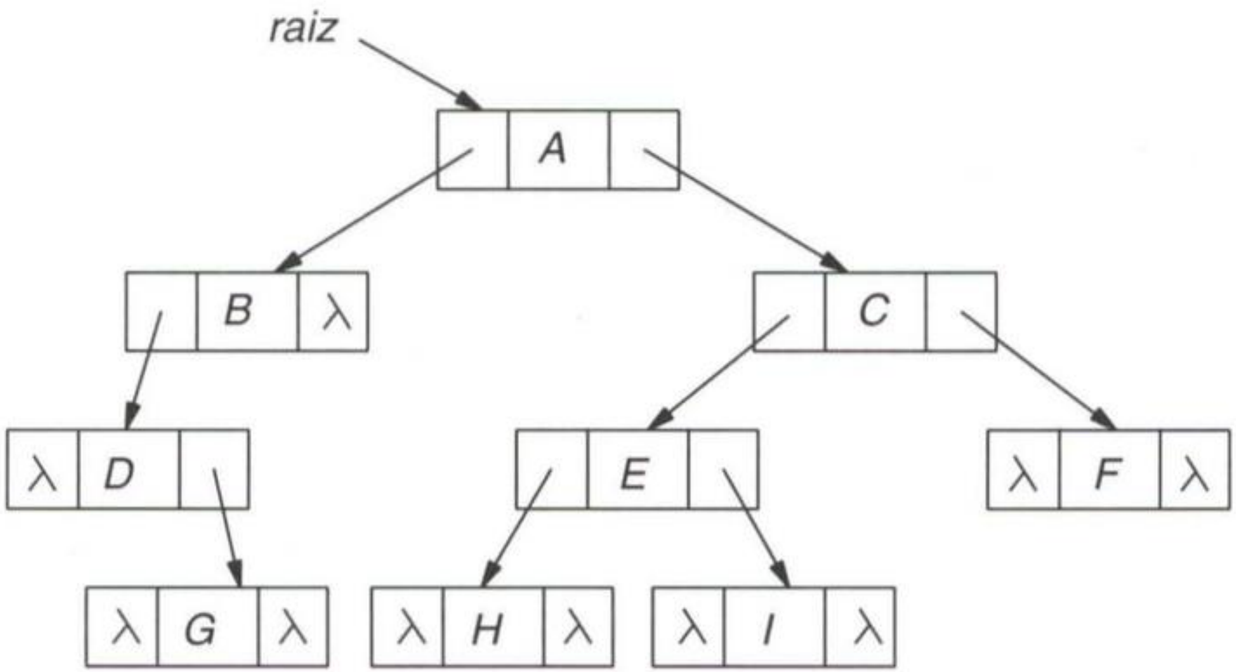
Exemplos de árvores 3-árias ou ternárias.

Mas somente a mais a direita é estritamente ternária.

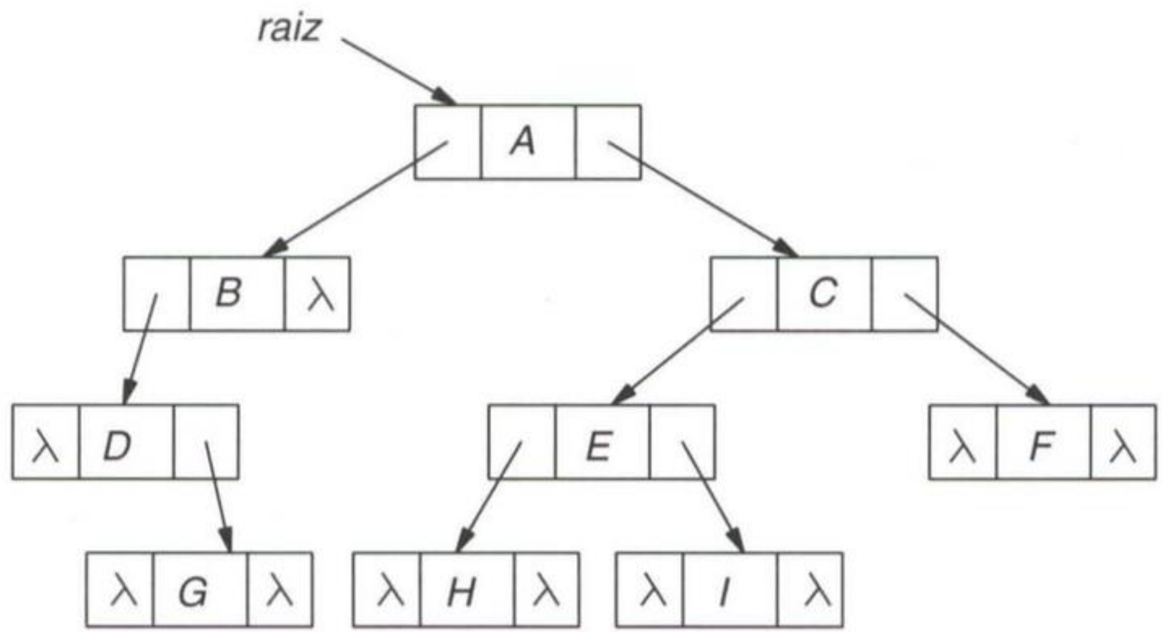
Percurso em Árvores Binárias

- Existem algoritmos bem conhecidos na literatura para efetuar um percurso em uma árvore binária.
- Por percurso entende-se uma visita sistemática a cada um dos nós da árvore; esta é uma das operações básicas relativas a manipulação de árvores.
- As principais estratégias são:
  - **Pré-ordem**: visita; esquerda; e direita
  - **Em ordem**: esquerda; visita; e direita
  - **Pós-ordem**: esquerda; direita; e visita

Exemplo



Exemplo

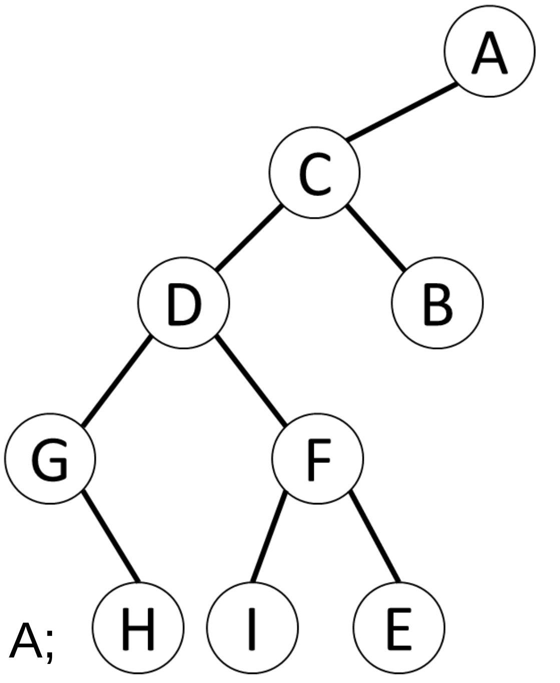


Em pré-ordem: A-B-D-G-C-E-H-I-F

Em ordem: D-G-B-A-H-E-I-C-F

Em pós-ordem: G-D-B-H-I-E-F-C-A

Exercícios



- Seja um percurso definido pelas seguintes operações:
- Ordem A:
  - Visitar a raiz;
  - Percorrer a subárvore esquerda de **v** na ordem A;
  - Percorrer a subárvore direita de **v** na ordem B.
- Ordem B:
  - Percorrer a subárvore esquerda de **v** na ordem B;
  - Visitar a raiz;
  - Percorrer a subárvore direita de **v** na ordem A.
- Supondo que o processo se inicie pela raiz da árvore, em ordem A, escrever o percurso final obtido quando o algoritmo for aplicado à árvore acima.

Exercícios

- O percurso de uma árvore em pré-ordem resultou na impressão da sequência: A B C F H D L M P N E G I, e o percurso da mesma árvore em ordem simétrica resultou em: F C H B D L P M N A I G E. Construa uma árvore que satisfaça esses percursos.

- Mostrar que o número de subárvores vazias de uma árvore *m*-ária com **n > 0** nós é **(m – 1)n + 1**.

- Mostrar que uma árvore *m*-ária completa é aquela que possui altura mínima dentre todas as árvores *m*-árias, **m > 1**, com **n > 0** nós.

- Determinar o valor das alturas máxima e mínima de uma árvore *m*-ária, **m > 1**, com **n > 0** nós.