Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

GRAFOS

Caminhos Mínimos com uma Fonte

Nelson Cruz Sampaio Neto
nelsonneto@ufpa.br

Sumário

Introdução

Cenário

- Um motorista deseja encontrar o caminho mais curto da cidade de Belém a São Paulo.

- Dado um mapa das rodovias brasileiras, como podemos determinar a rota mais curta?

Introdução

Solução possível

- Uma possibilidade consiste em enumerarmos todos os possíveis caminhos de Belém a São Paulo.
- Adicionar as distâncias em cada roda.
- Selecionar a rota mais curta.

Esse método é satisfatório?

Introdução

Definição

- Em problemas de caminhos mínimos, é dado um grafo ponderado **G = (V, E)** cujas arestas têm pesos **w**.

- O peso **w(c)** de um caminho **c = (v_0, v_1, ..., v_k)** é a soma dos pesos das arestas que o formam, ou seja,

$$w(c) = \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

Introdução

Definição

- O peso do caminho mais curto entre **u** e **v** é

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \text{Min } \{ w(c) : c \text{ é o caminho de u até v } \} \\ +\infty \text{ se não existir caminho} \end{cases}$$

Introdução

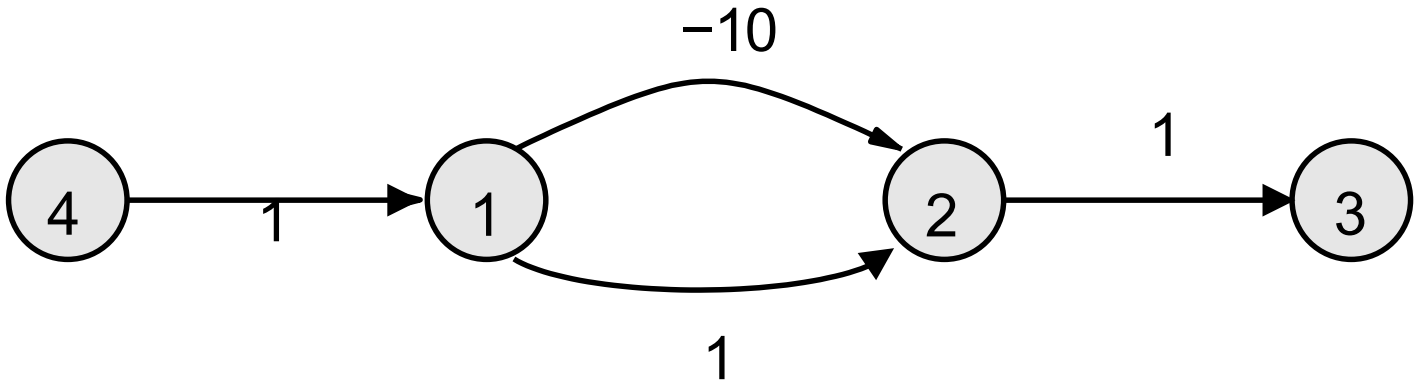
Definição

- Em algumas instâncias do problema de caminhos mínimos com uma fonte, podem existir arestas com pesos negativos.

- Se o grafo **G = (V, E)** não tem ciclo com peso negativo alcançável a partir da fonte **s**, então, **δ(s, v)** permanece bem definido para todo **v** ∈ **V**.

Introdução

Pesos negativos



Custos negativos ocorrem naturalmente em muitos problemas práticos. Por exemplo, se o custo positivo representa despesa, o custo negativo representa **lucro**. Sob custos negativos, um caminho mínimo **maximiza** lucro.

Introdução

Pesos negativos

- Alguns algoritmos, como o algoritmo de Dijkstra, assumem que todos os pesos são não-negativos.
- Algoritmos como Bellman-Ford e Floyd-Warshall, entretanto, podem operar com arestas de peso negativo.
- Tipicamente, os algoritmos que aceitam valores negativos nas arestas detectam a presença de ciclo negativo.

Introdução

Objetivo

- Obter os caminhos mais curtos a partir de uma origem.
- Dado um grafo ponderado **G = (V, E)**, desejamos obter o caminho mais curto (ou seja, de menor peso) a partir de um dado vértice origem **s** $\in$ **V** até qualquer **v** $\in$ **V**.
- No exemplo do problema Belém - São Paulo:
  - Os vértices representam as cidades;
  - As arestas representam as rodovias; e
  - Os pesos representam as distâncias entre duas cidades.

Introdução

Variantes

1. Caminhos mínimos com destino único:
   * Encontre o caminho mais curto até o vértice **v** a partir de cada vértice $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.
   * Calcule $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}$ e encontre o caminho mais curto a partir de **v**.
2. Caminhos mínimos entre um par de vértices:
   * Encontre o caminho mais curto de **u** até **v**.
3. Caminhos mínimos entre todos os pares de vértices:
   * Encontre o caminho mínimo entre cada par $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
   * Outra solução é o algoritmo de Floyd-Warshall.

Representação

- Estamos interessados não apenas na distância do caminho mais curto, mas também no caminho em si.

- A representação do caminho mais curto é similar àquela usada na busca em largura.

- Dado um grafo **G = (V, E)**, mantemos para cada vértice **v** $\in$ **V** o seu antecessor **π[v]** que é outro vértice ou *nil*.

- Os atributos **π** são definidos de tal maneira que a cadeia de antecessores originada em **v** nos dá o caminho mais curto de **s** para **v** em termos dos pesos de cada aresta de **G**.

Relaxamento

- Vários algoritmos são baseados na técnica de relaxamento.
- Para cada vértice $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, mantemos um atributo **d[v]**, que é um limite superior para o caminho mais curto entre **s** e **v**:

$$\mathbf{d[v]} \geq \boldsymbol{\delta}\mathbf{(s, v)}$$

- O atributo **d[v]** é inicializado como uma estimativa para $\boldsymbol{\delta}\mathbf{(s, v)}$.

Relaxamento

```
Initialize-Single-Source (G, s)
1)      for each v ∈ V[G]
2)              do d[v] = ∞
3)                  π[v] = nil
4)      d[s] = 0
```

Após a inicialização, $\boldsymbol{\pi[v] = nil}$ para todo $\mathbf{v \in V}$; $\mathbf{d[s] = 0}$; e $\mathbf{d[v] = \infty}$ para todo $\mathbf{v \in V - \{s\}}$.

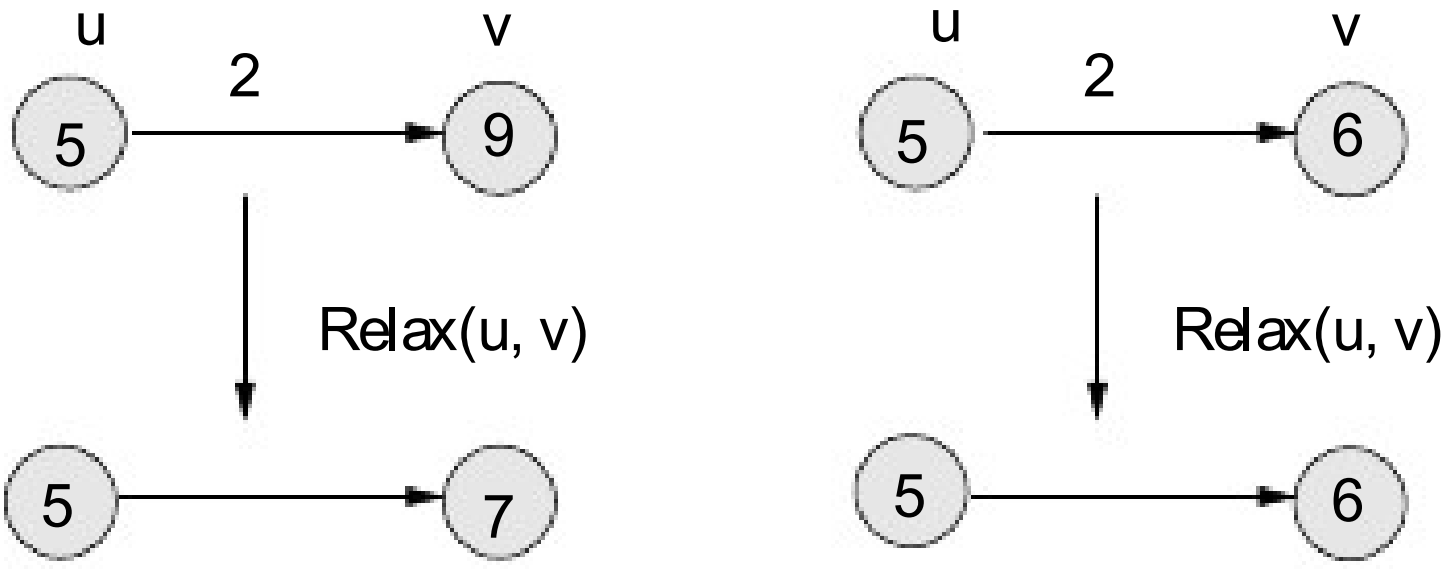
Relaxamento

```
Relax (u, v, w)
1)      if d[v] > d[u] + w(u, v)
2)          then d[v] = d[u] + w(u, v)
3)               π[v] = u
```

- O propósito de relaxar a aresta **(u, v)** consiste em testar se é possível melhorar a estimativa do caminho mais curto encontrado, até então, da fonte até o vértice **v** passando-se pelo vértice **u**.

- Para toda aresta $(u, v) \in E$, tem-se $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$.

Relaxamento



Algoritmo de Dijkstra

Princípios

- O algoritmo de Dijkstra resolve de forma ótima o problema de caminhos mínimos com uma fonte em um grafo ponderado.

- O algoritmo mantém um conjunto **S** de vértices, onde para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$, temos $\mathbf{d[v] = \delta(s, v)}$.

Algoritmo de Dijkstra

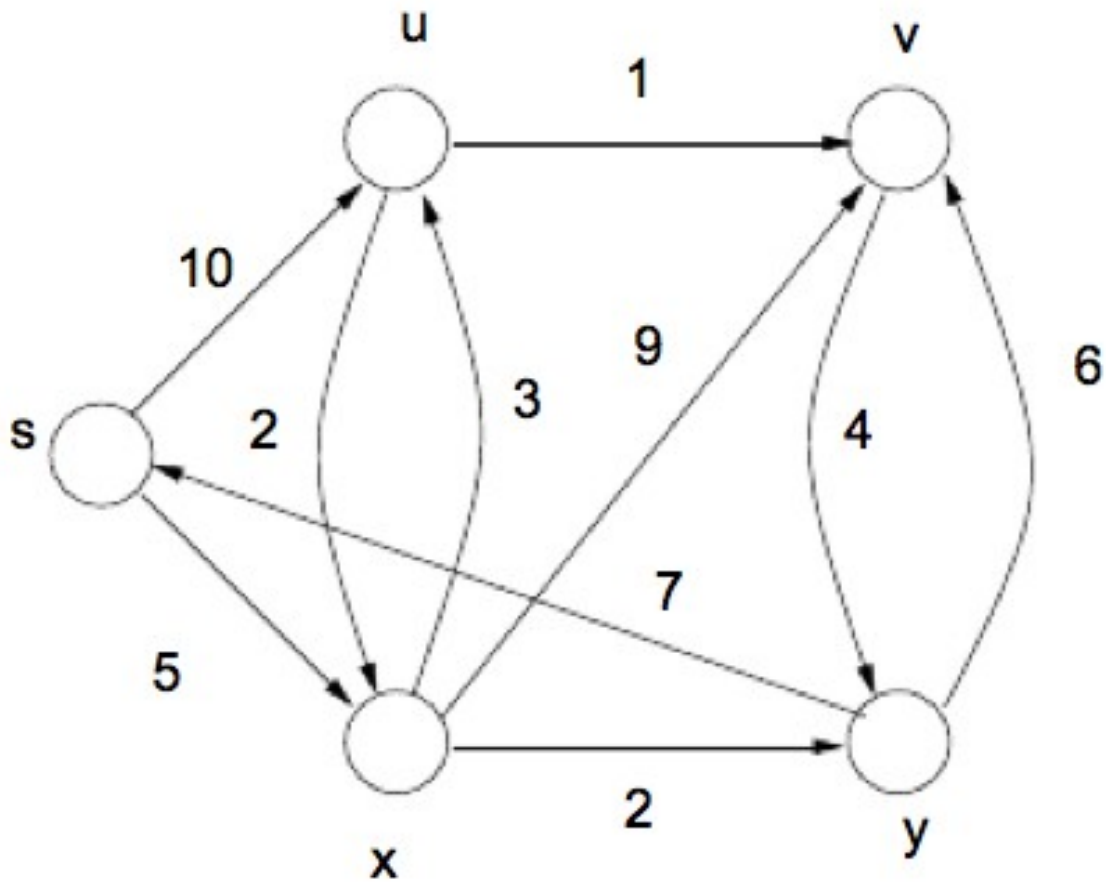
Princípios (cont.)

- O algoritmo iterativamente seleciona um vértice $\mathbf{u} \in \mathbf{V} - \mathbf{S}$ com a menor estimativa de distância e insere **u** em **S**.
- Ao mesmo tempo que "relaxa" as arestas que emanam de **u**.
- As arestas não podem apresentar pesos negativos.

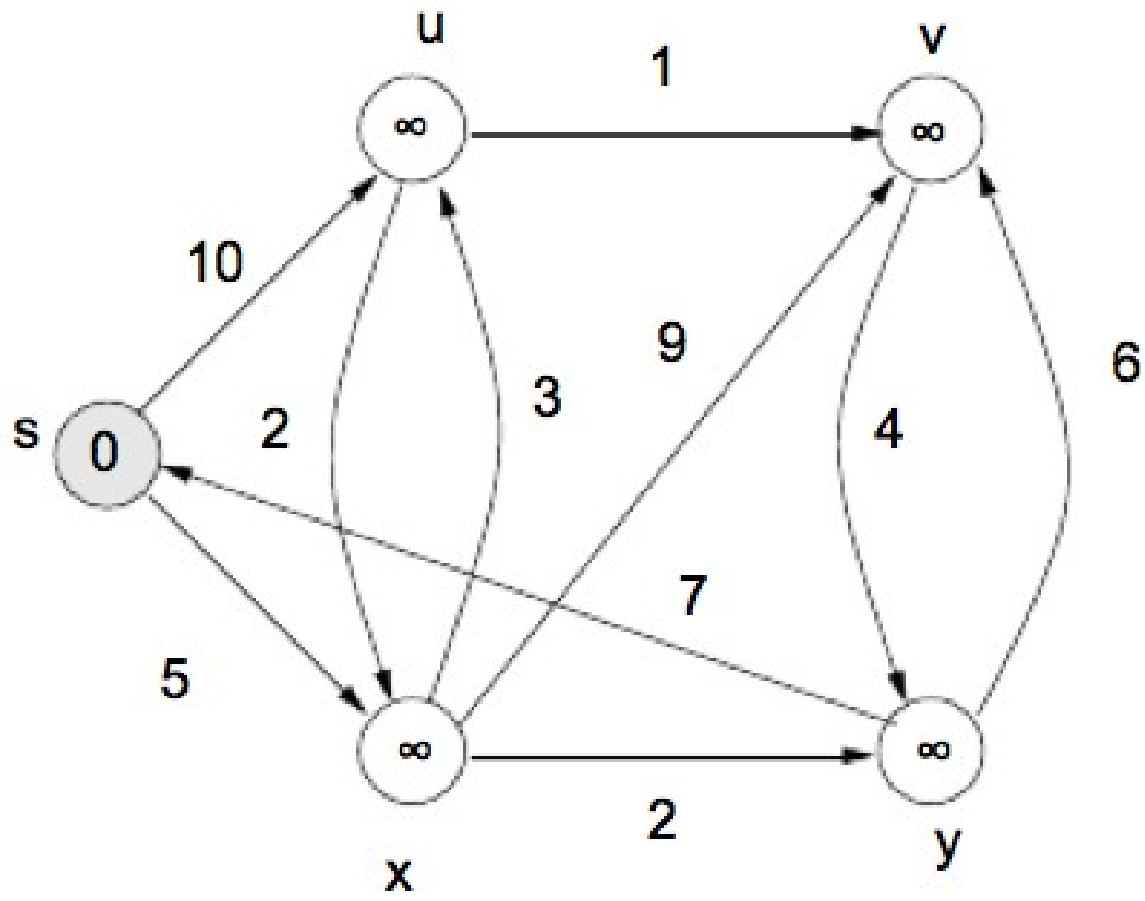
Algoritmo de Dijkstra

```
Dijkstra (G, w, s)
1)      Initialize-Single-Source(G, s)
2)      S = Ø
3)      Q = V[G]   // cria fila de prioridade Q com os vértices do grafo
4)      while (Q ≠ Ø)
5)            do u = extract-min(Q)
6)               S = S U {u}
7)               for each (u, v) ∈ Adj[u]
8)                     do Relax (u, v, w)
```

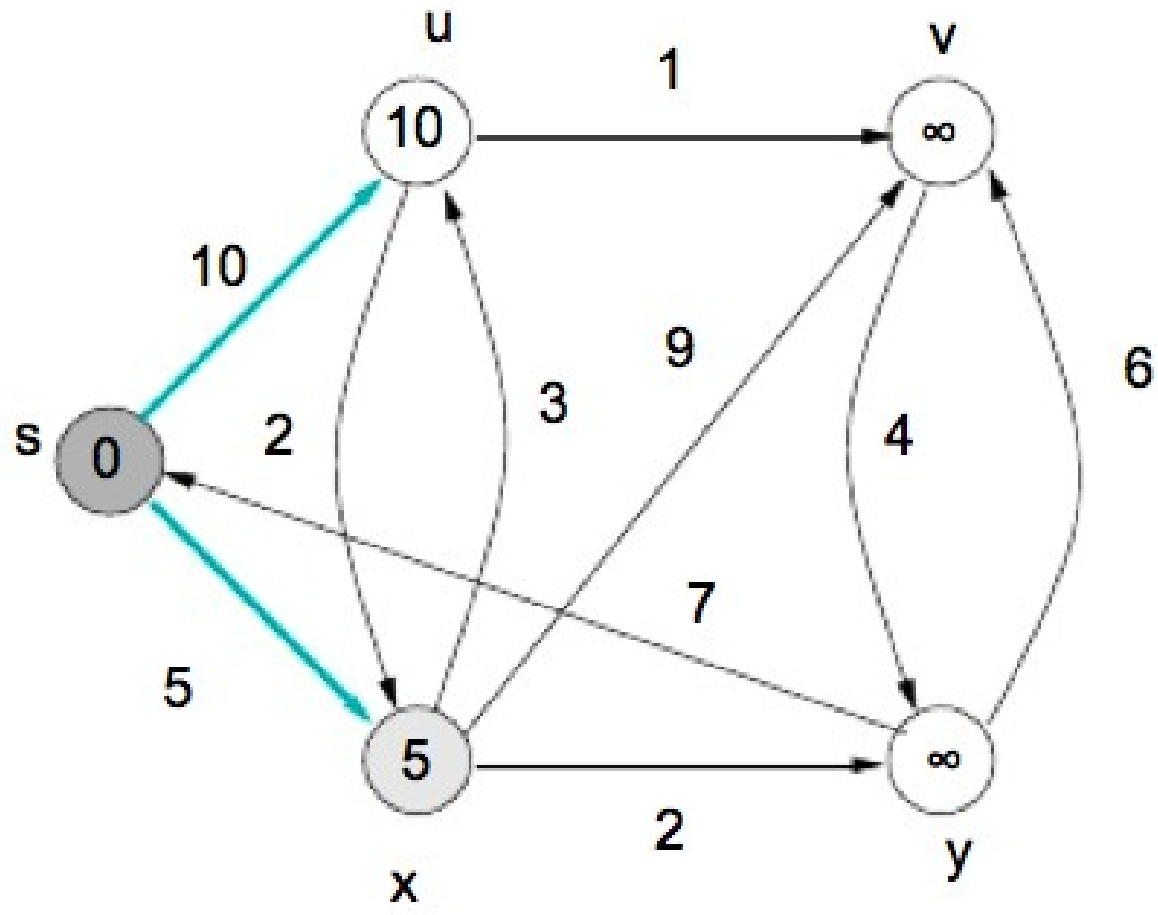
Exemplo de execução do Dijkstra



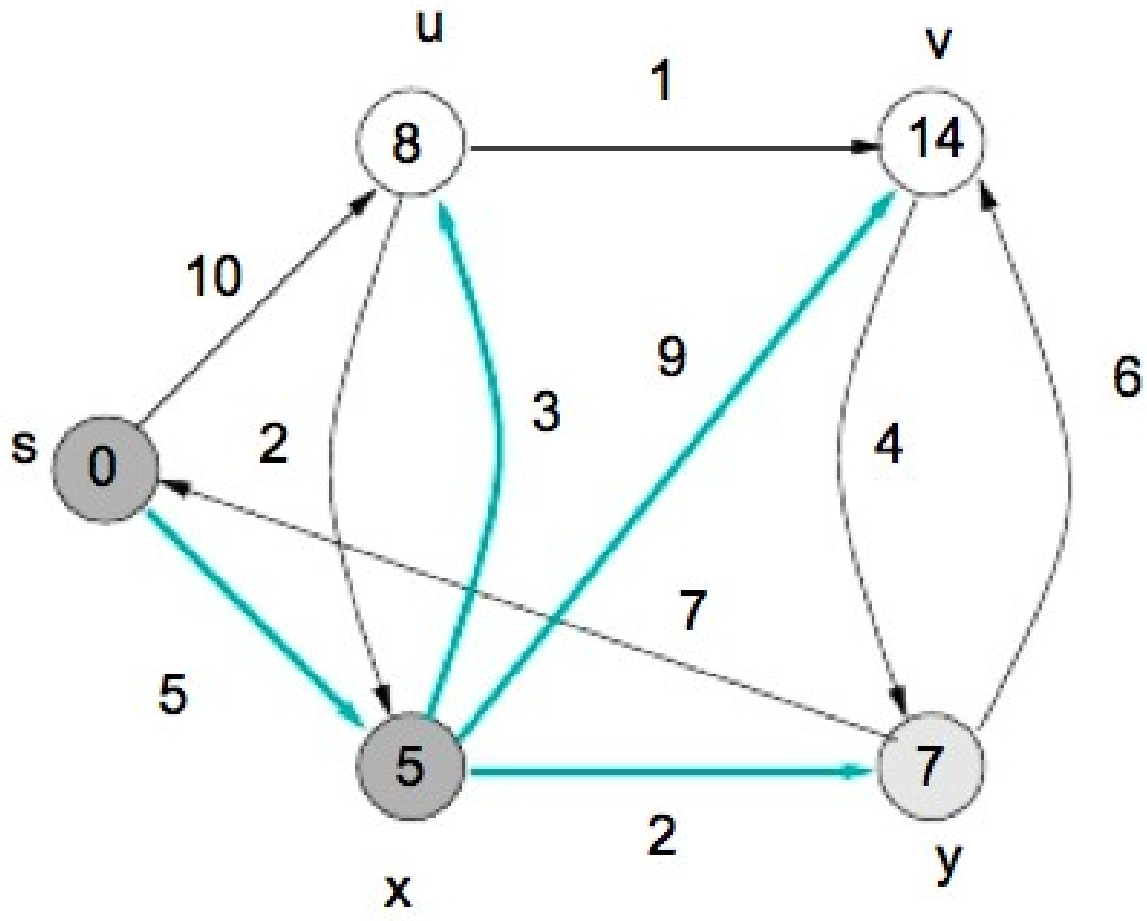
Dijkstra: inicialização



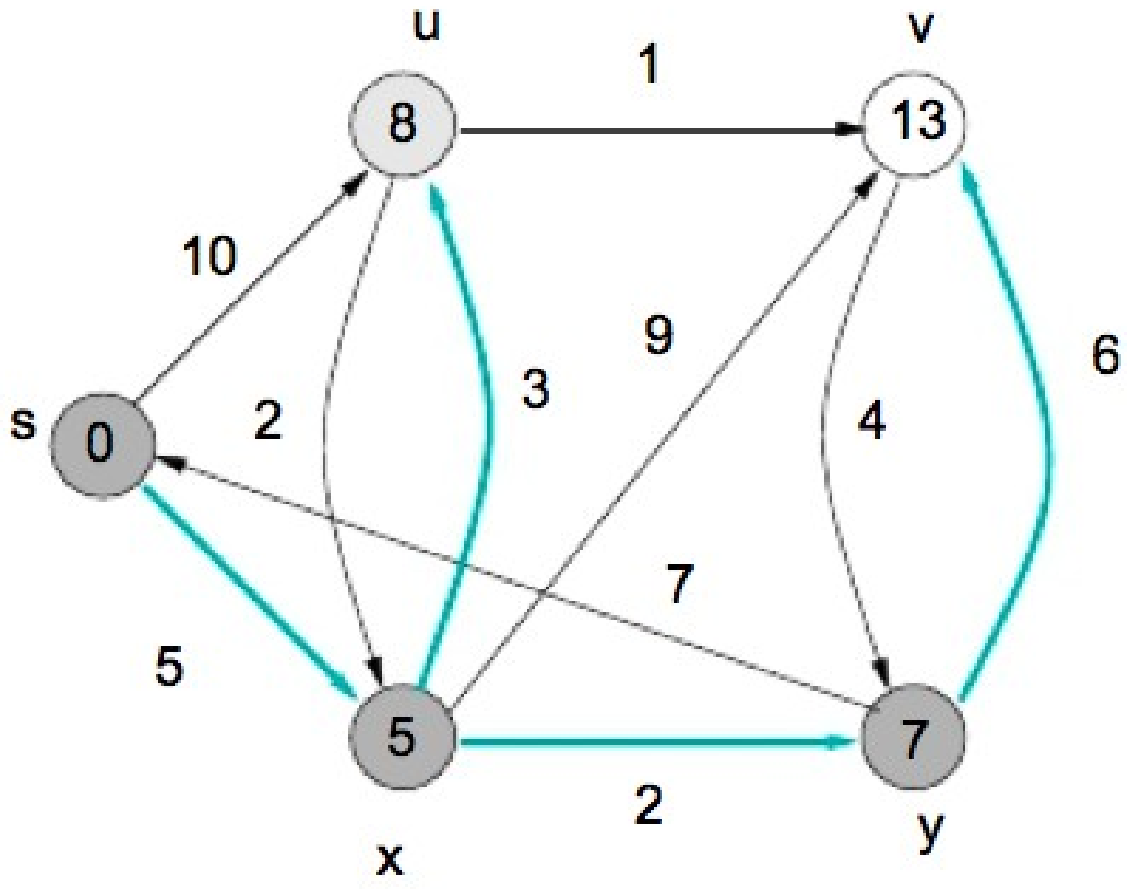
Dijkstra: iteração 1



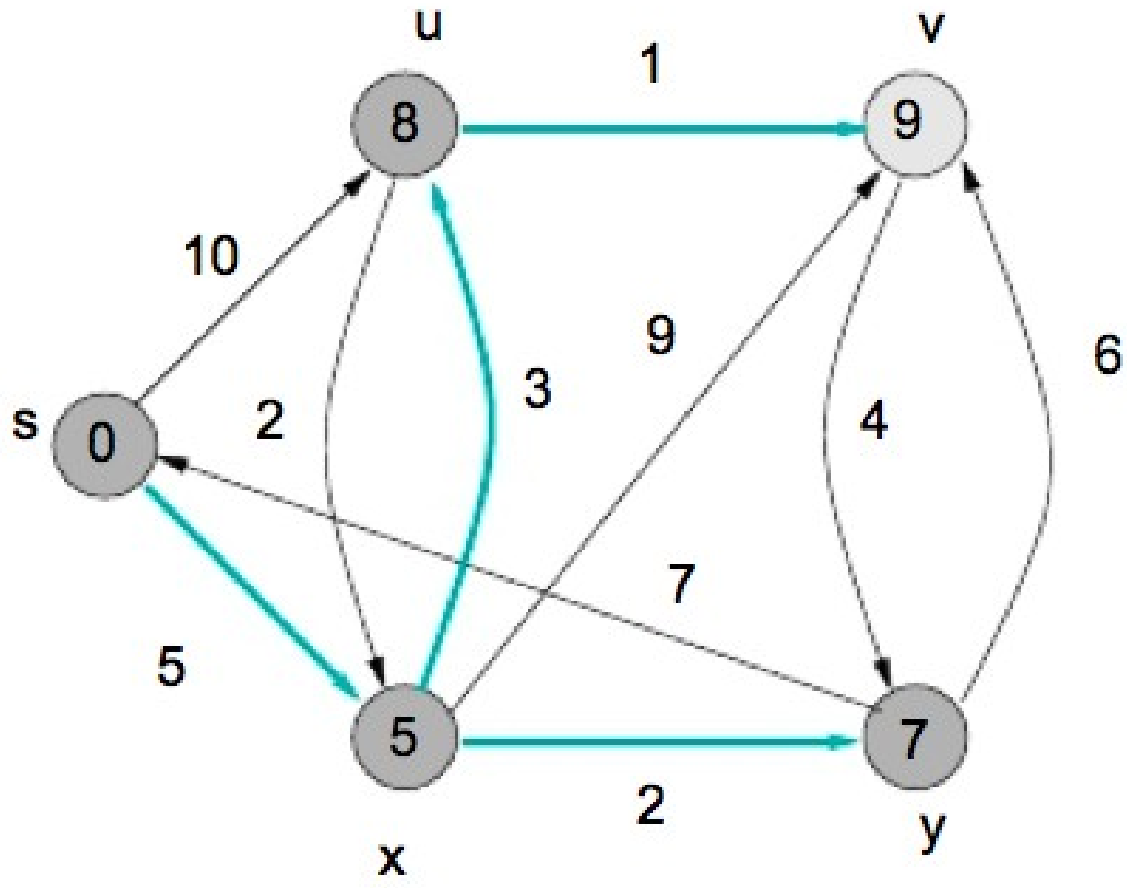
Dijkstra: iteração 2



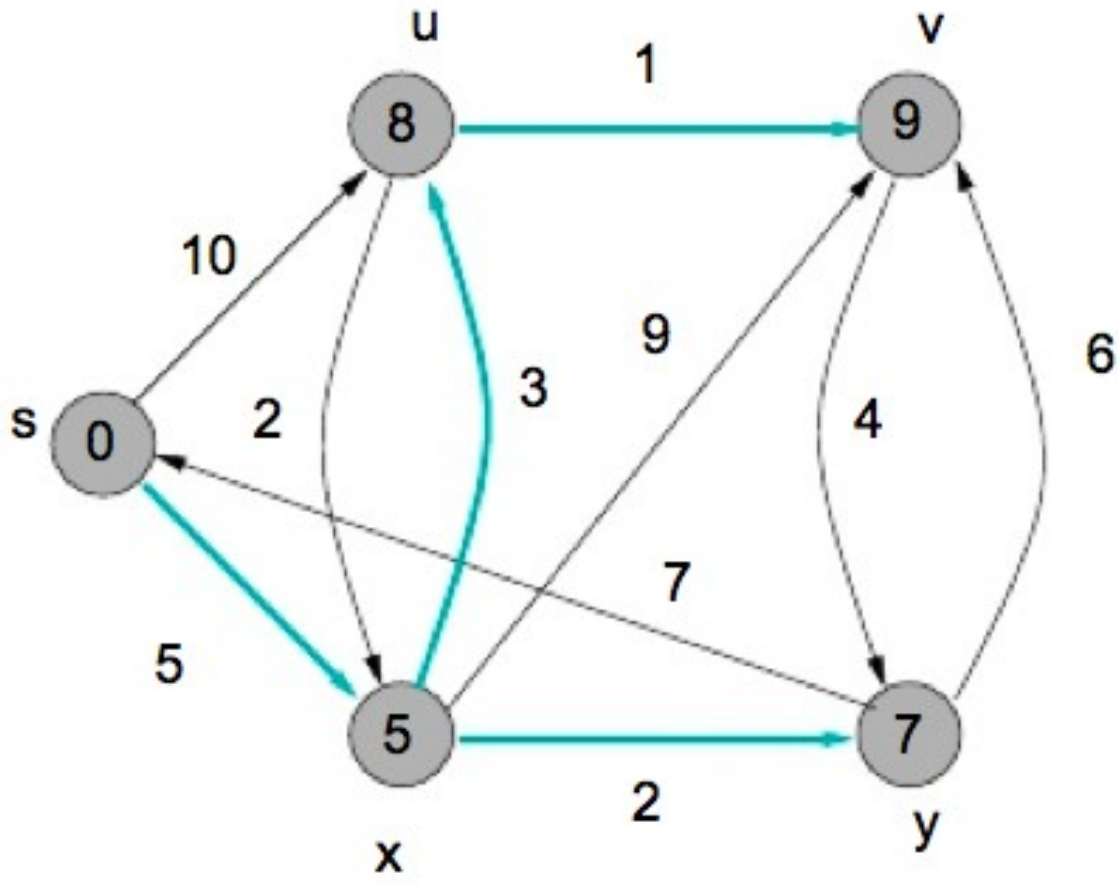
Dijkstra: iteração 3



Dijkstra: iteração 4



Dijkstra: iteração 5



Análise do algoritmo de Dijkstra

Vetor como fila de prioridades

- Neste caso, Extract-min leva tempo **O(v)** e há **|V|** operações para esse procedimento.

- Uma vez que cada aresta é examinada no máximo uma vez, a operação Relax é executada no máximo **|E|** vezes.

- Assim, algoritmo tem complexidade no tempo:

$$\mathbf{O(v^2 + e) = O(v^2)}.$$

Análise do algoritmo de Dijkstra

Heap binário como fila de prioridades

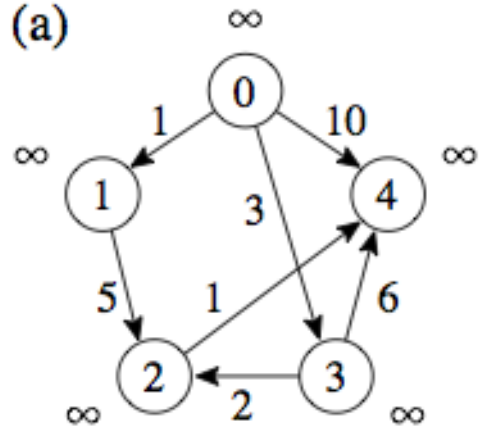
- Quando o grafo é esparso é mais prático utilizarmos uma fila de prioridades implementada p.e. com heap binário.
- O Extract-min leva tempo **O(log v)** e há **|V|** operações para esse procedimento.
- A operação Relax custa no máximo **O(log v)**, quando a distância **d[v]** for reduzida, e há **|E|** operações.
- Complexidade no tempo: **O(v log v + e log v) = O(e log v)**.

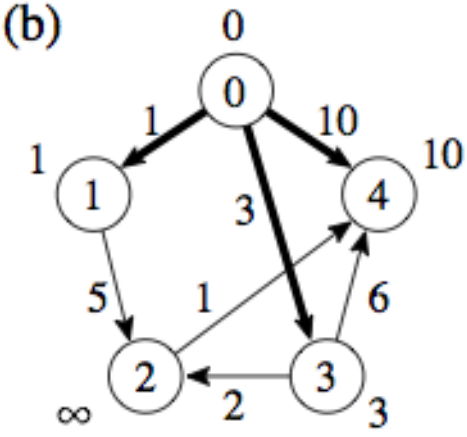
Análise do algoritmo de Dijkstra

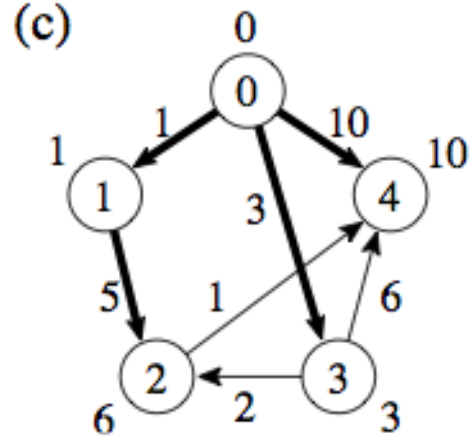
- Hoje, sabe-se que para grafos esparsos o algoritmo de Dijkstra pode ser implementado de forma mais eficiente usando lista de adjacência para armazenar o grafo e um **heap de Fibonacci** para implementar a fila de prioridade.

- Com essa estrutura, o algoritmo tem a seguinte complexidade no tempo: **O(v log v + e)**.

- Isso porque a operação de decremento no heap de Fibonacci leva **O(1)** em uma análise amortizada.

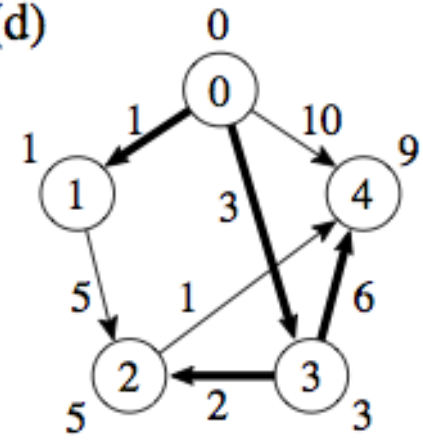




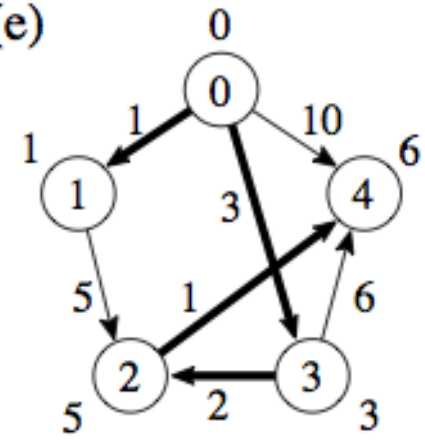


Iteração	S	d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]
(a)	$\emptyset$	∞	∞	∞	∞	∞
(b)	$\{0\}$	0	1	∞	3	10
(c)	$\{0,1\}$	0	1	6	3	10

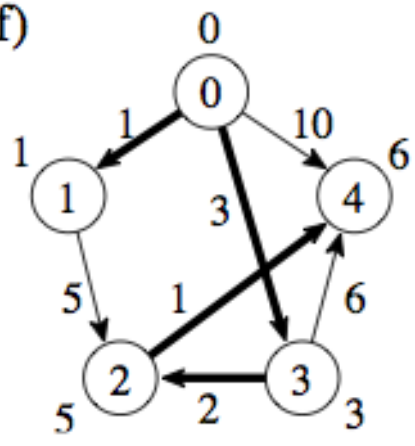
(d)



(e)

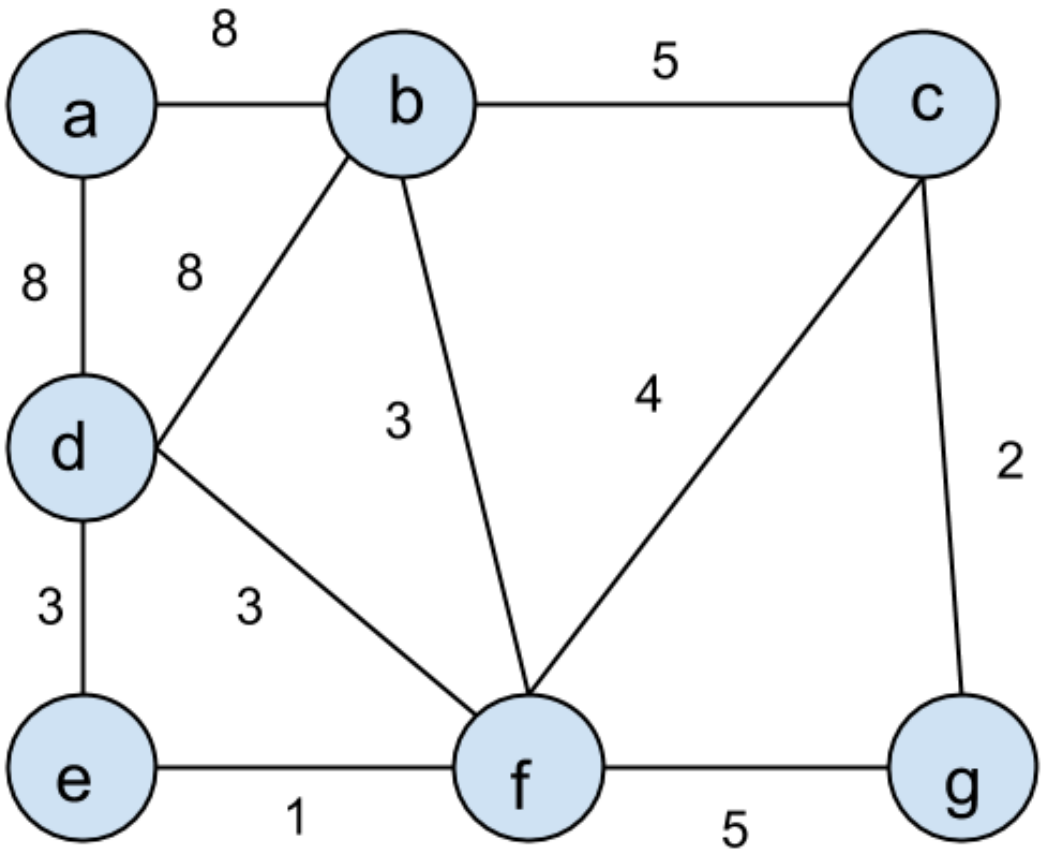


(f)



Iteração	S	d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]
(d)	$\{0, 1, 3\}$	0	1	5	3	9
(e)	$\{0, 1, 3, 2\}$	0	1	5	3	6
(f)	$\{0, 1, 3, 2, 4\}$	0	1	5	3	6

Problema: Encontrar o menor caminho entre A e F.



Algoritmo de Bellman-Ford

- O algoritmo de Bellman-Ford resolve o problema de caminhos mínimos com uma fonte no caso geral, onde as arestas podem ter peso negativo.

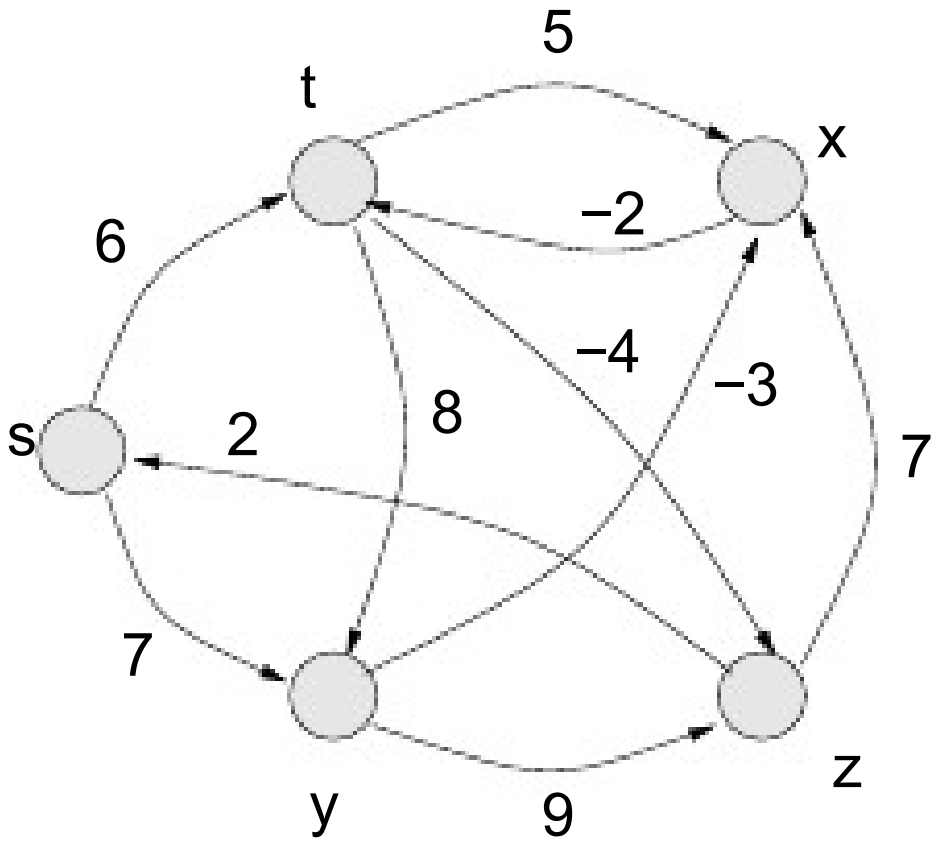
- O algoritmo retorna um valor Booleano indicando se foi, ou não, encontrado um ciclo negativo alcançável a partir de **s**.

- Caso negativo, os caminhos mínimos com raiz em **s** e seus respectivos pesos são determinados.

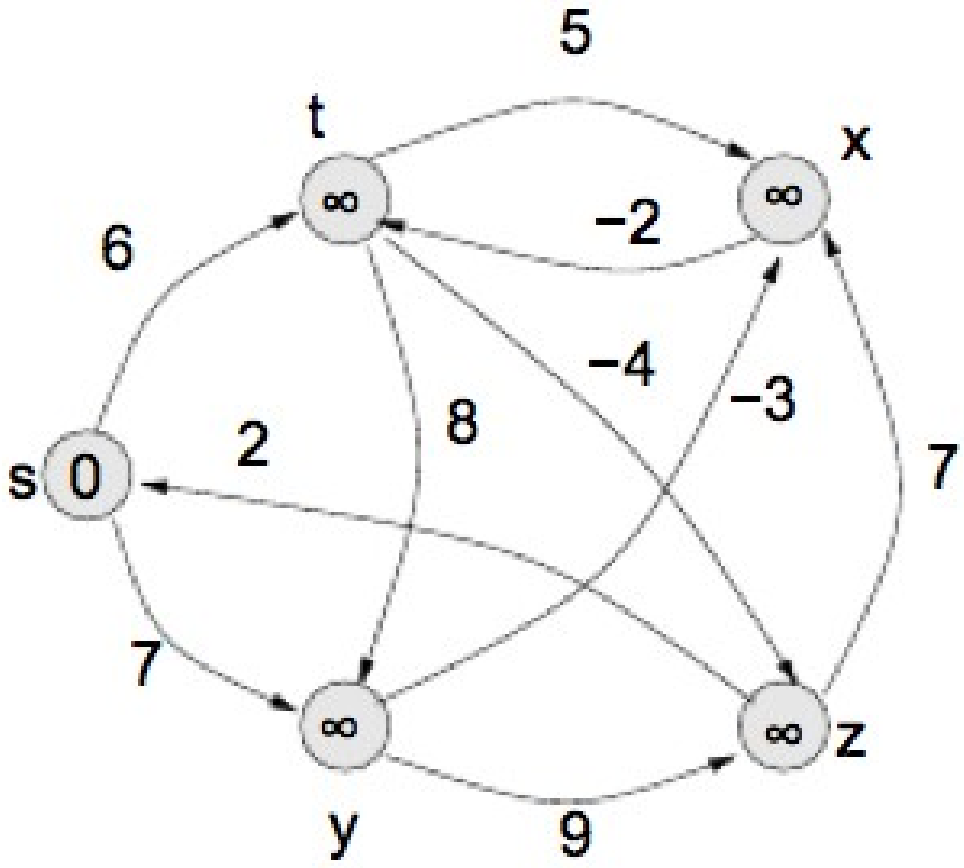
Algoritmo de Bellman-Ford

```
Bellman-Ford(G, w, s)
1)      Initialize-Single-Source(G, s)
2)      for i = 1 to |V[G]| − 1
3)           do for each (u, v) ∈ E[G]
4)                do Relax(u, v, w)
5)      for each (u, v) ∈ E[G]
6)           do if d[v] > d[u] + w(u, v)
7)                then return TRUE
8)      return FALSE
```

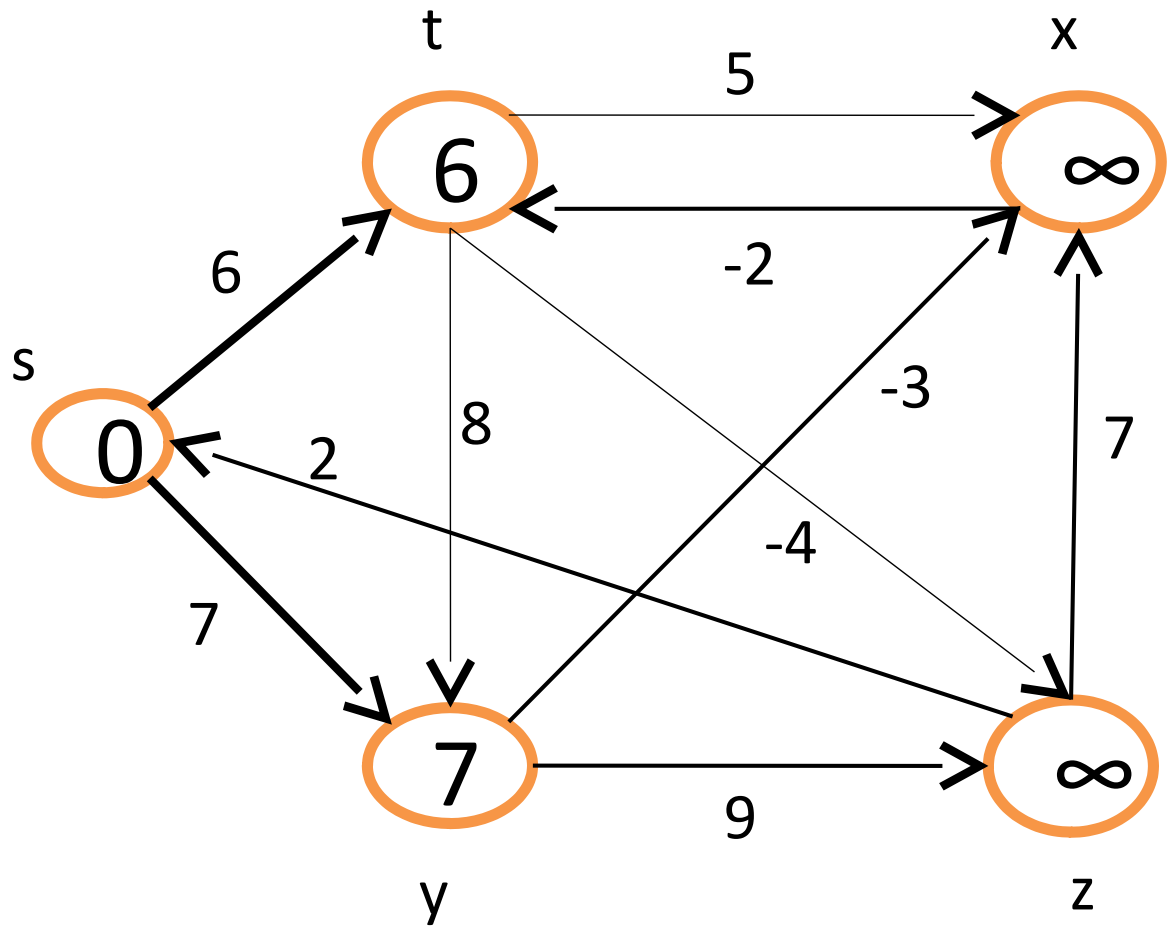
Exemplo de execução do Bellman-Ford



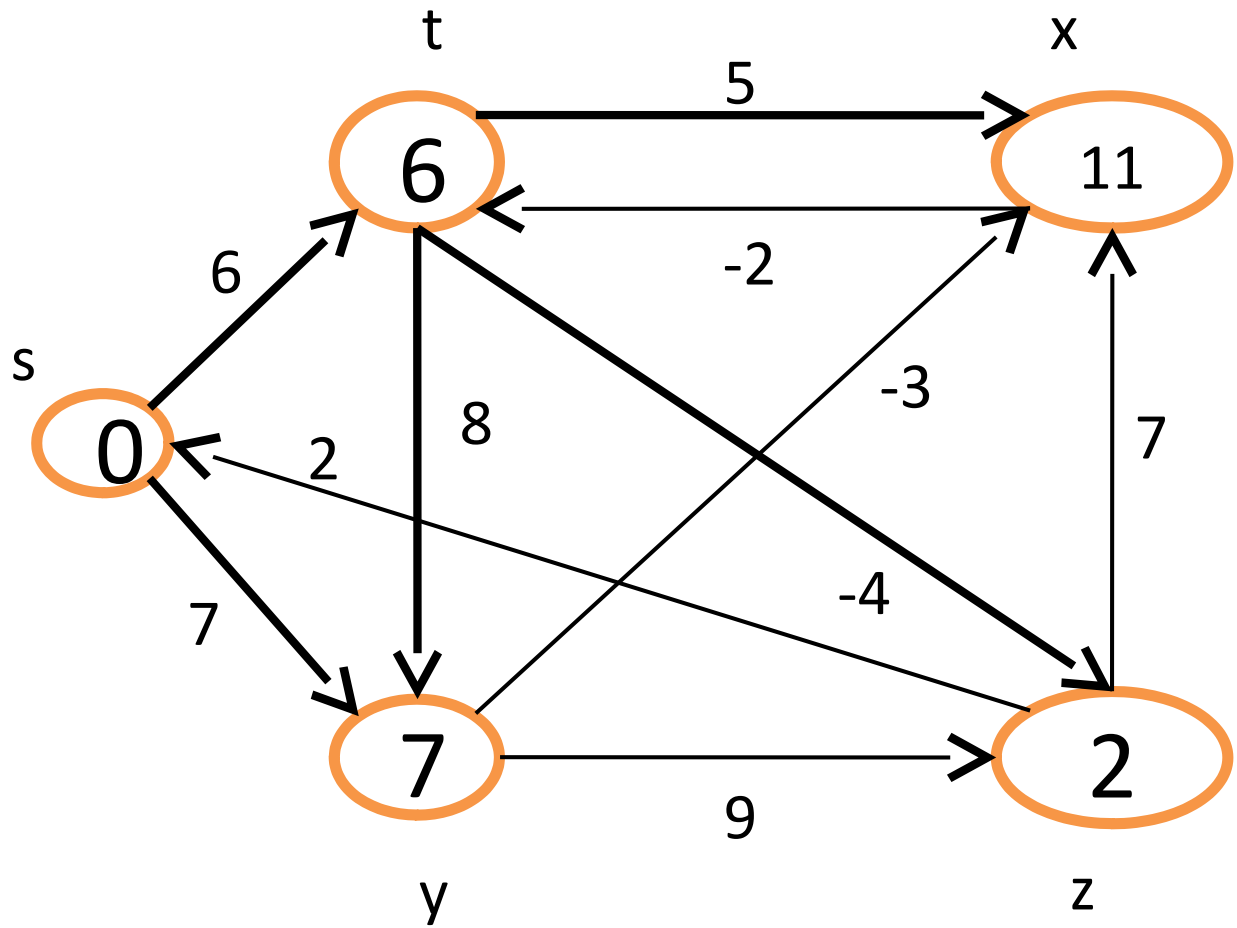
Bellman-Ford: inicialização



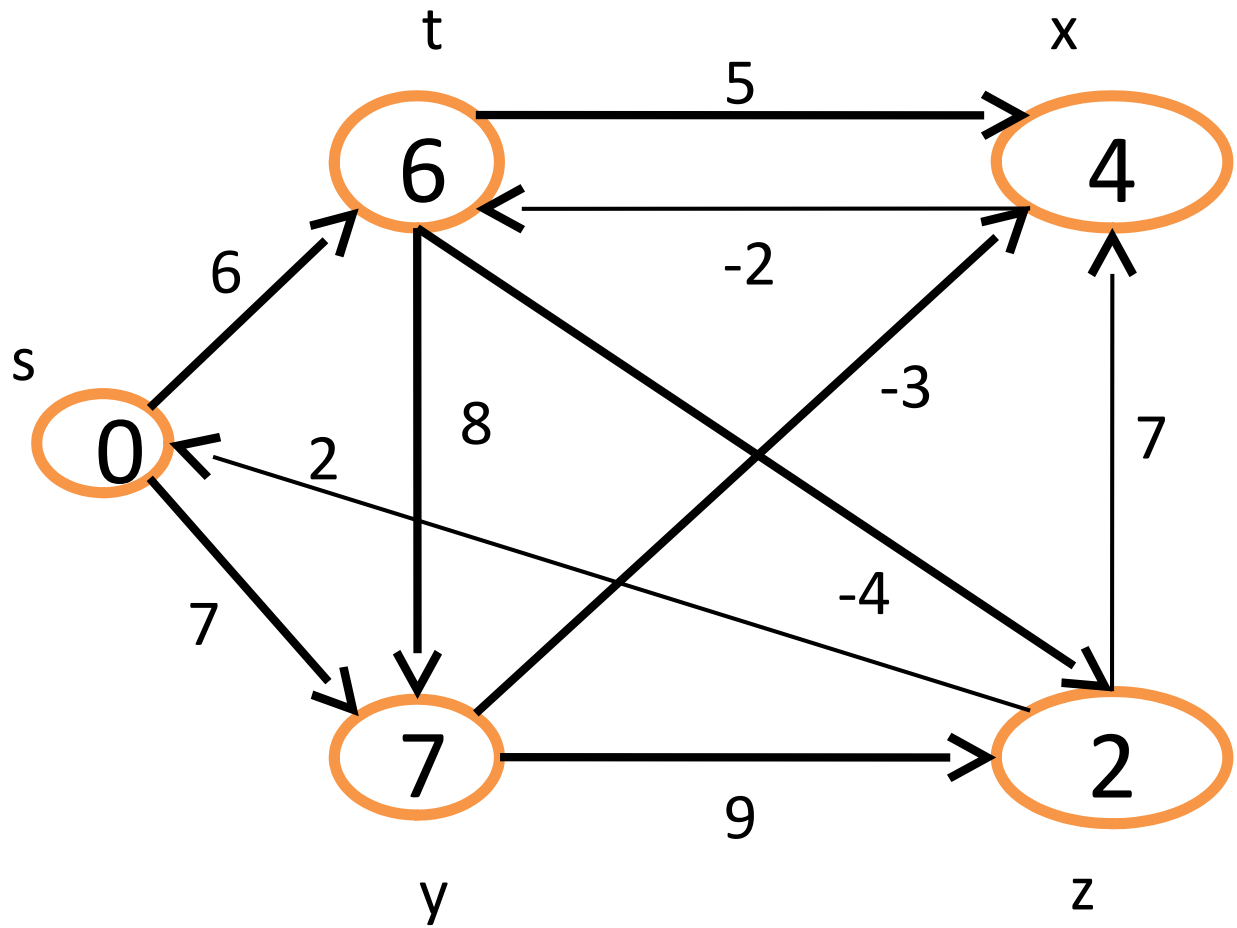
Bellman-Ford: iteração 1



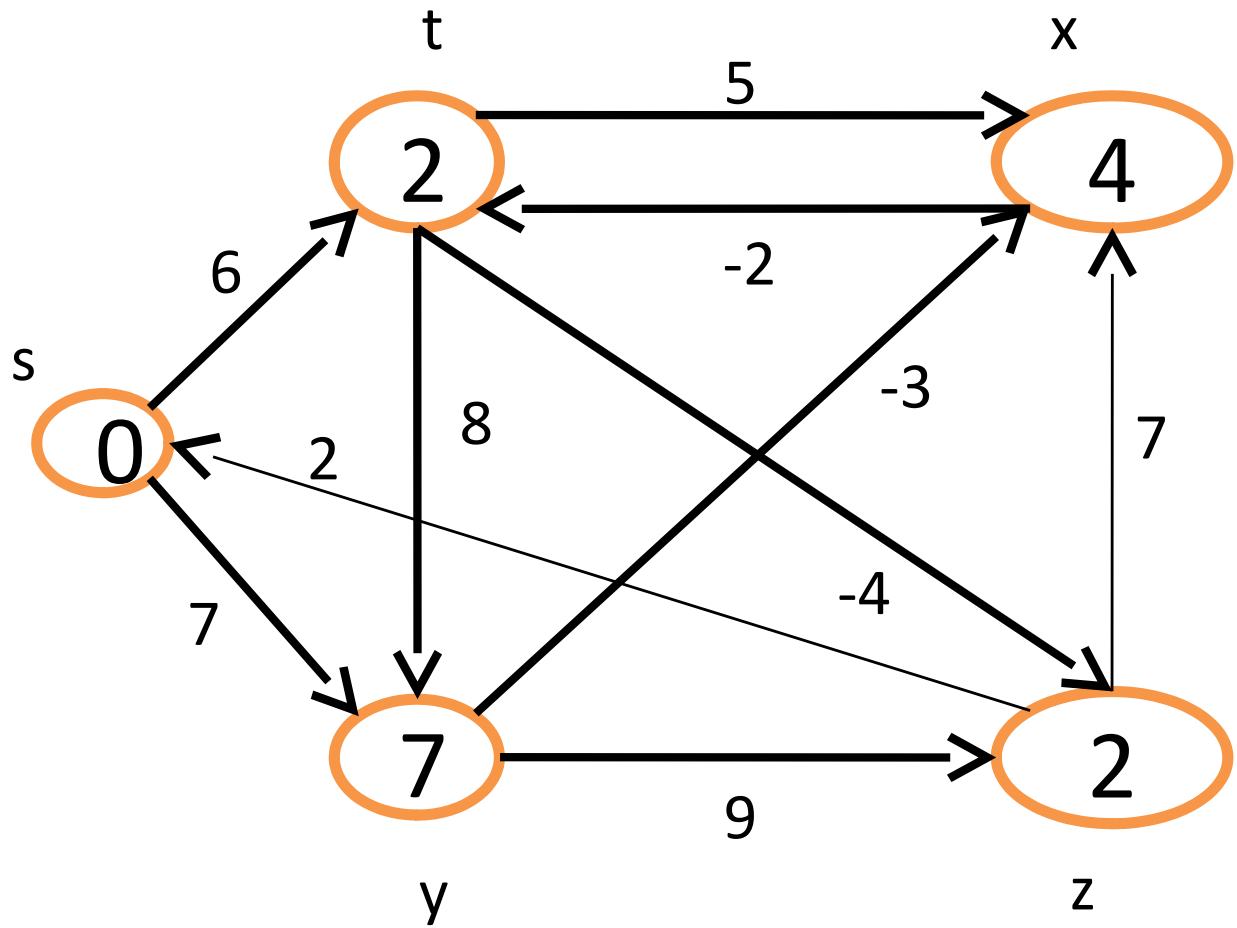
Bellman-Ford: iteração 1



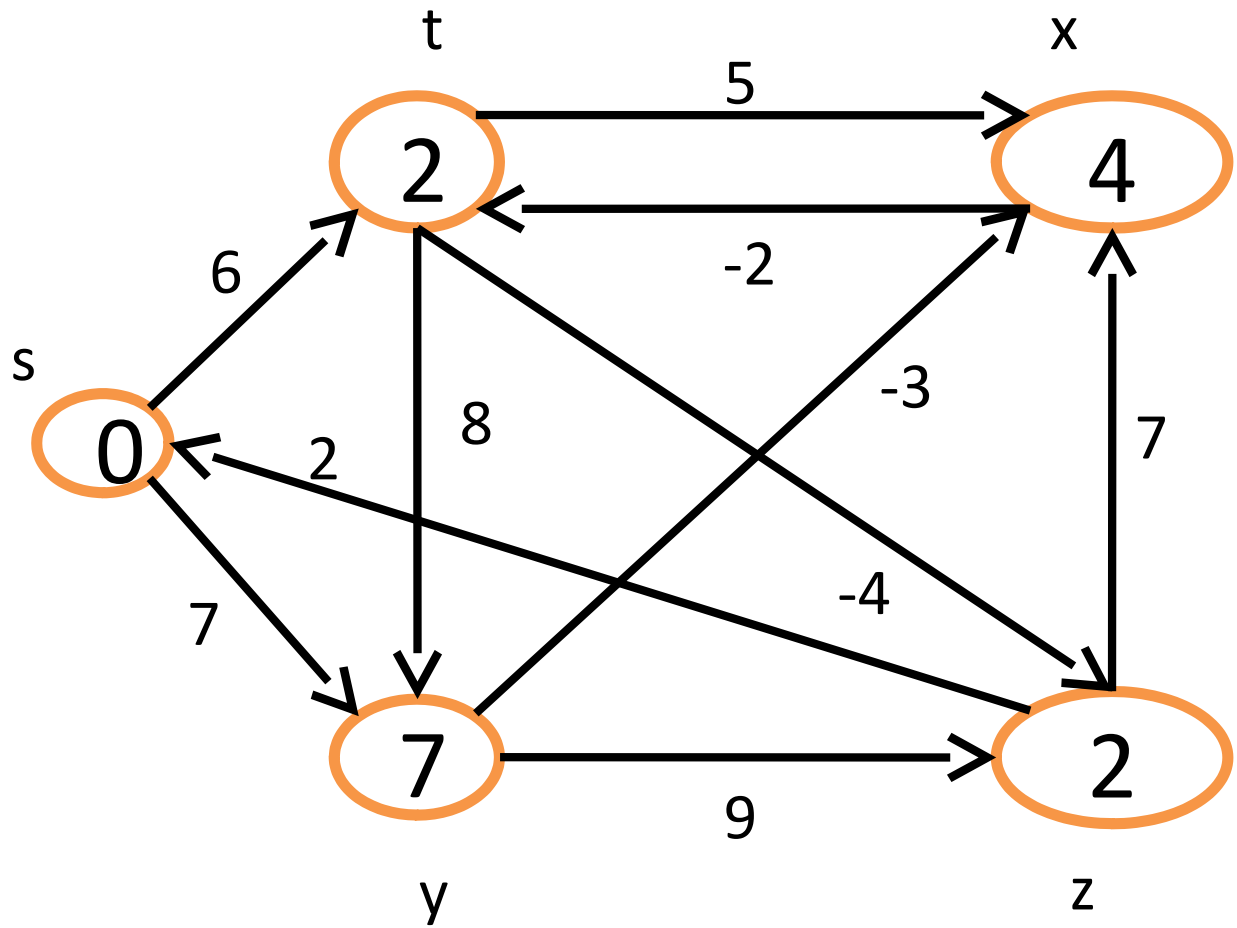
Bellman-Ford: iteração 1



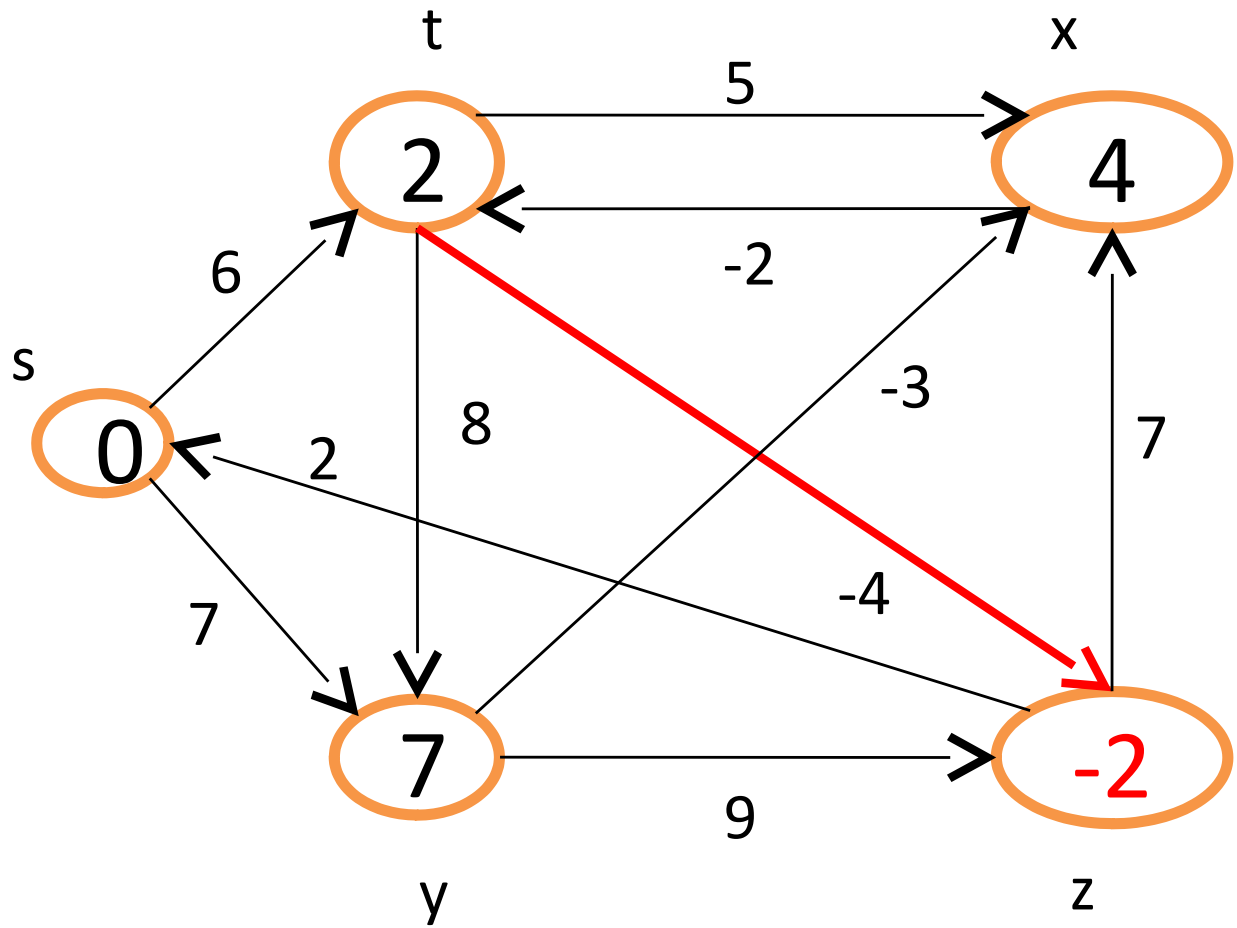
Bellman-Ford: iteração 1



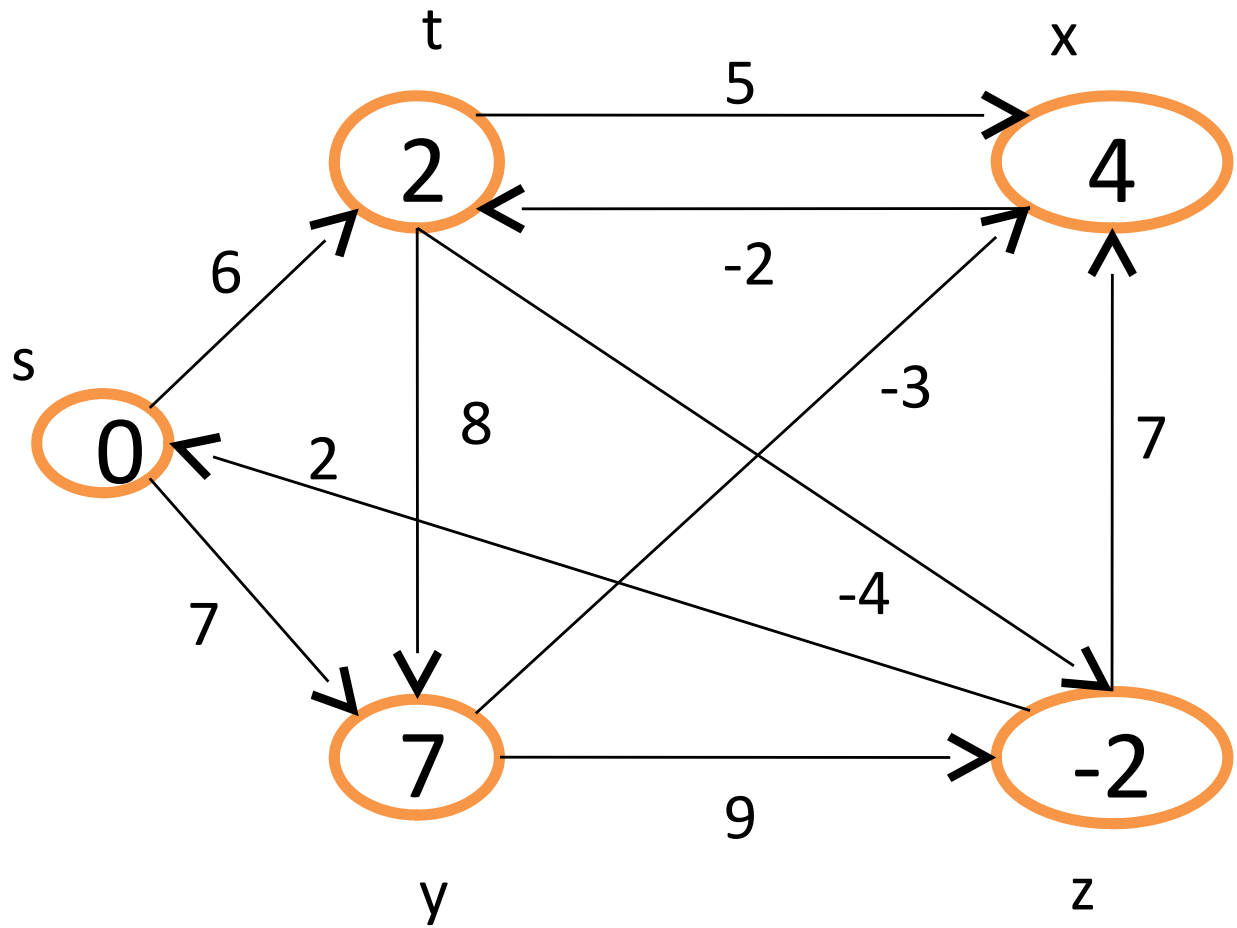
Bellman-Ford: iteração 1



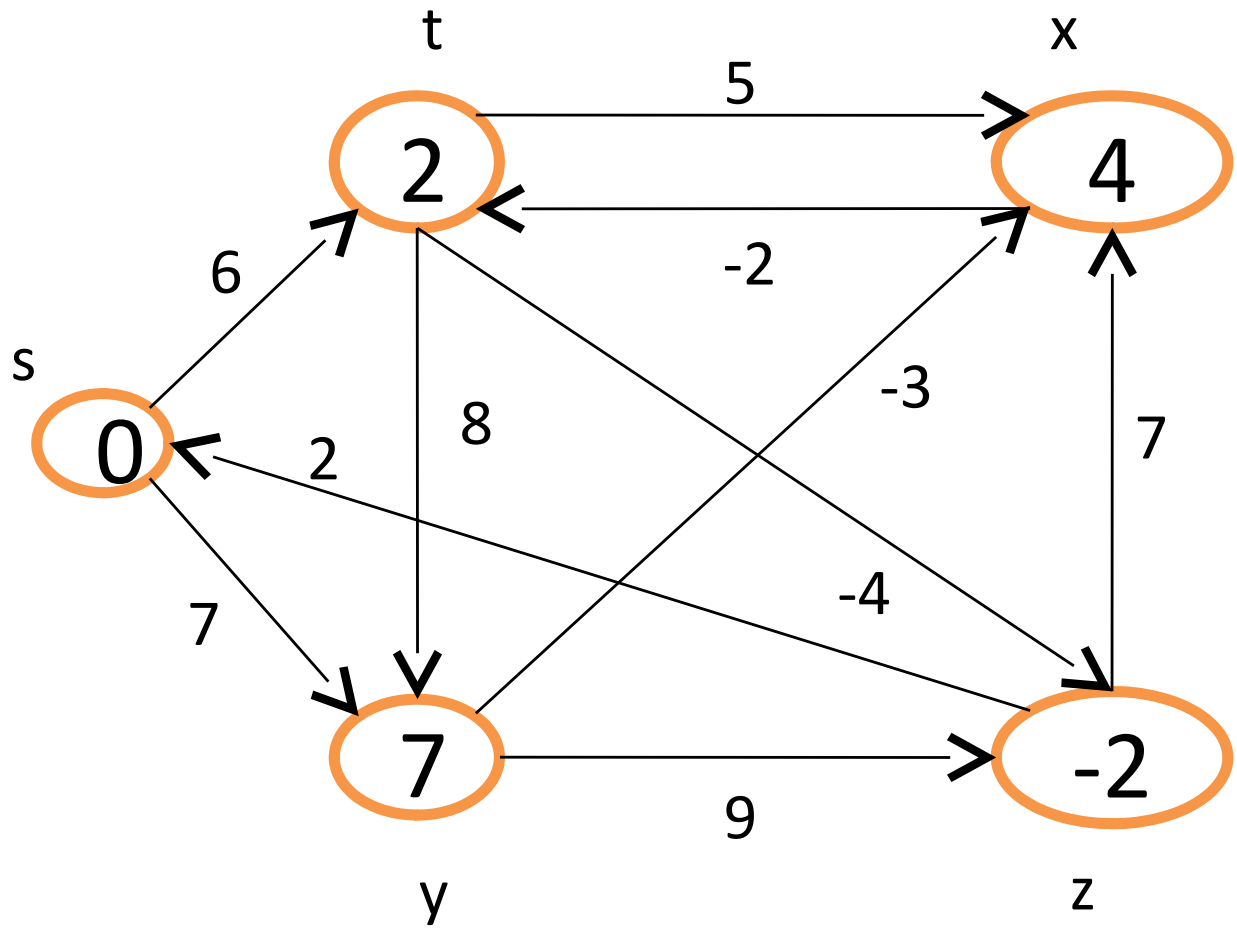
Bellman-Ford: iteração 2



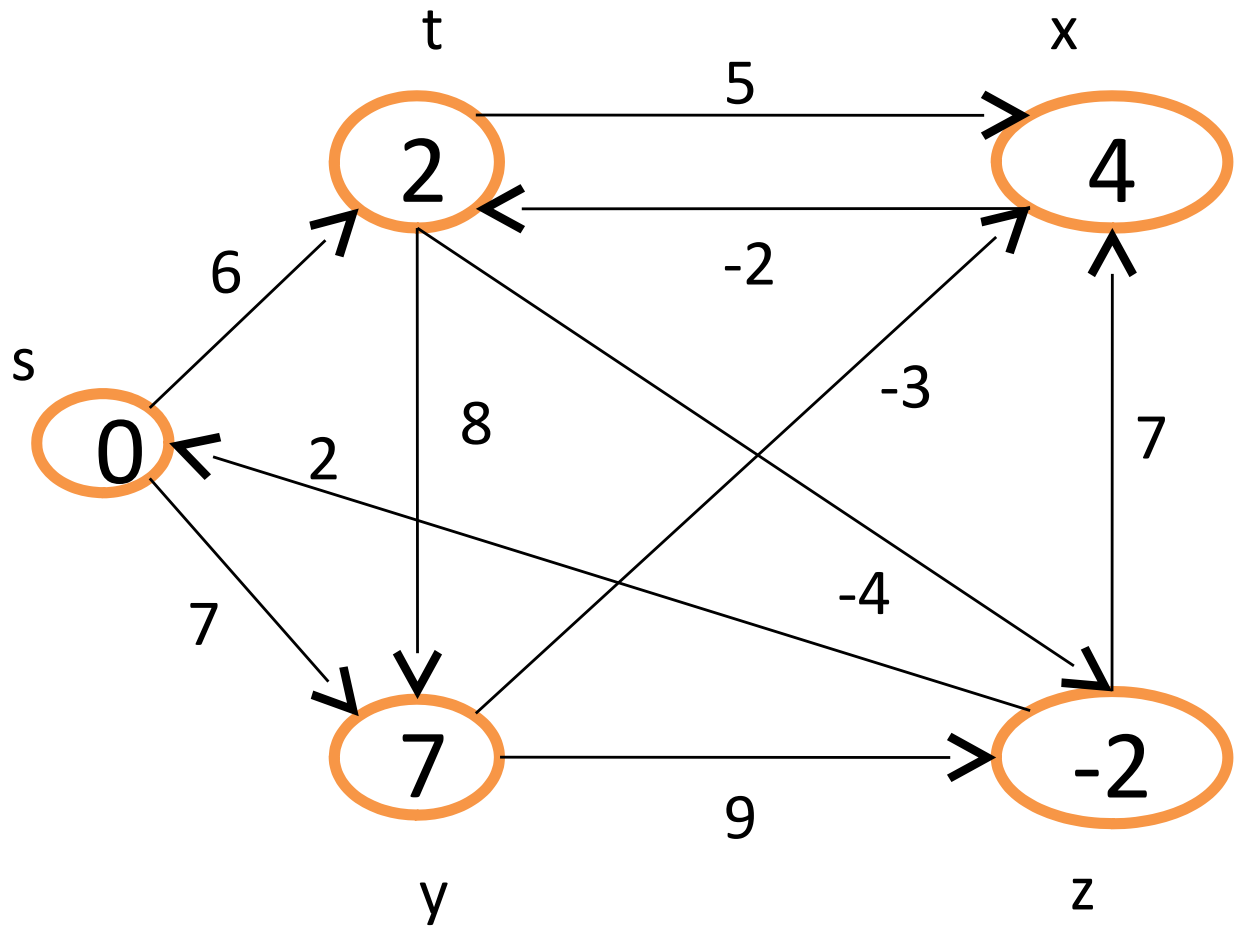
Bellman-Ford: iteração 3



Bellman-Ford: iteração 4



Bellman-Ford: iteração 5



Análise do algoritmo de Bellman-Ford

- Fazendo $|\mathbf{V}| = \mathbf{v}$ e $|\mathbf{E}| = \mathbf{e}$, podemos verificar que Bellman-Ford executa em tempo $\mathbf{O(v\ e + e) = O(v\ e)}$.

- Para um grafo denso, $\mathbf{e = O(v^2)}$, o tempo de execução do algoritmo é $\mathbf{O(v^3)}$.

- O tempo de processamento pode ser otimizado inserindo um "escape" após o laço nos passos 3-4, caso a procedure Relax no passo 4 não altere nenhum limite superior.

Algoritmo de Floyd-Warshall

- Suponha que um grafo ponderado representa as rotas de uma companhia aérea conectando diversas cidades.
- O objetivo é construir uma tabela com os menores caminhos entre todas as cidades.
- Esse é um exemplo de problema que exige encontrar os caminhos mais curtos entre todos os pares de vértices.

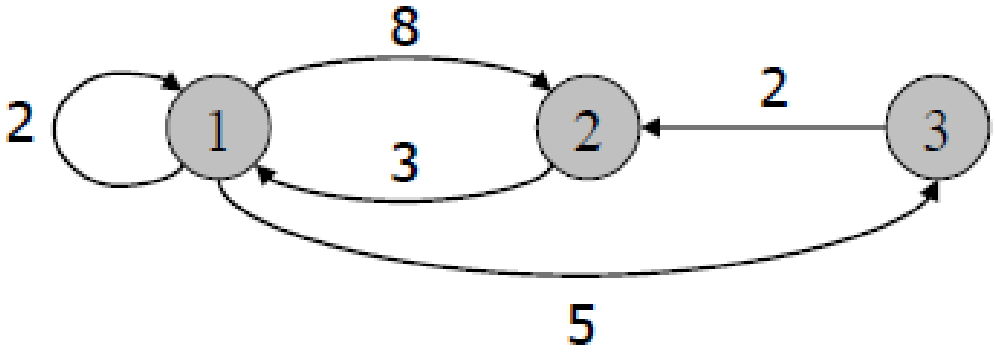
Algoritmo de Floyd-Warshall

- Uma possível solução é usar o algoritmo de Dijkstra utilizando cada vértice como origem alternadamente.

- Uma solução mais direta é utilizar Floyd-Warshall.

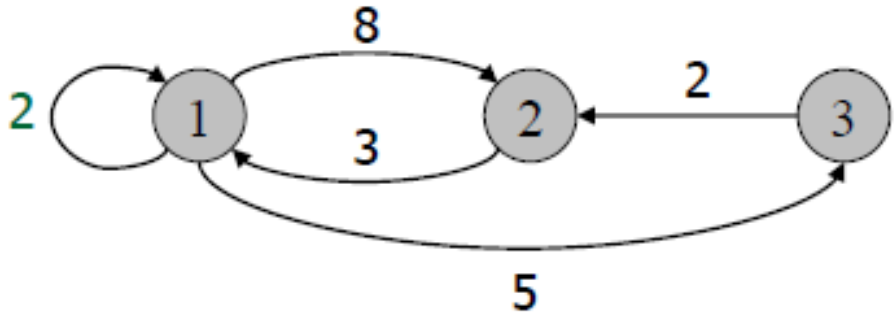
- O algoritmo de Floyd-Warshall usa uma matriz **|V| x |V|** para calcular e armazenar os tamanhos dos caminhos mais curtos.

Algoritmo de Floyd-Warshall



	1	2	3
1			
2			
3			

Algoritmo de Floyd-Warshall

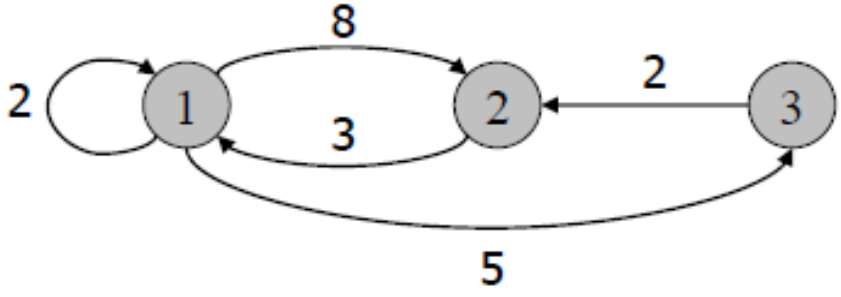


	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

- Pesos de self-loops não são considerados
- A matriz *A* é percorrida $|V|$ vezes
- A cada iteração *k*,

$$A[v,w] = \min(A[v,w], A[v,k] + A[k,w]).$$

Algoritmo de Floyd-Warshall



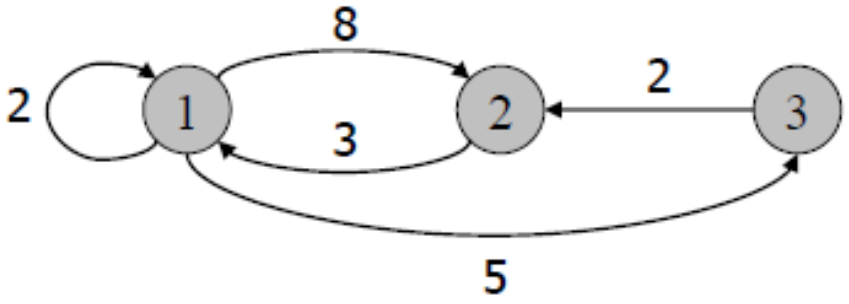
Ou seja:

A[1,1] = min(A[1,1],
A[1,1] + A[1,1]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

k = 1

Algoritmo de Floyd-Warshall



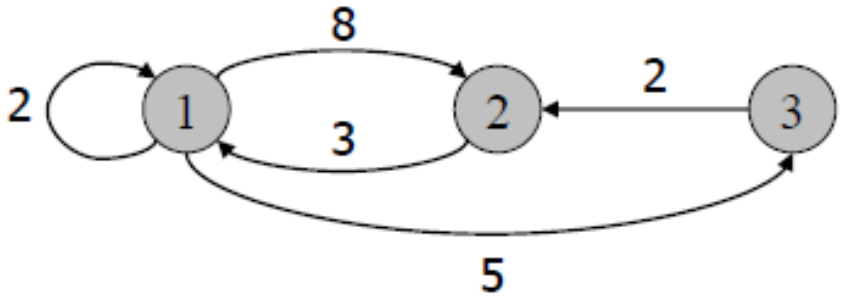
Ou seja:

A[1,2] = min(A[1,2],
A[1,1] + A[1,2]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

k = 1

Algoritmo de Floyd-Warshall



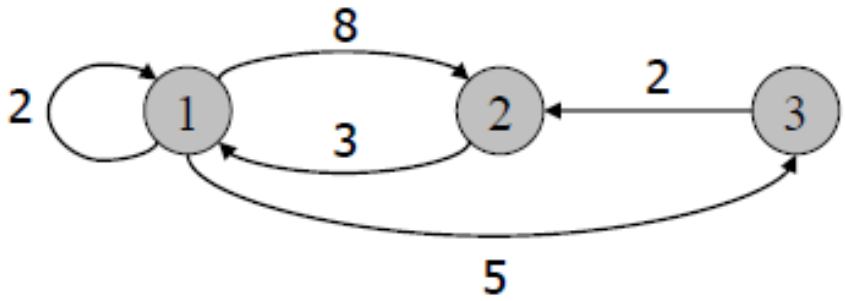
Ou seja:

A[1,3] = min(A[1,3],
A[1,1] + A[1,3]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

k = 1

Algoritmo de Floyd-Warshall



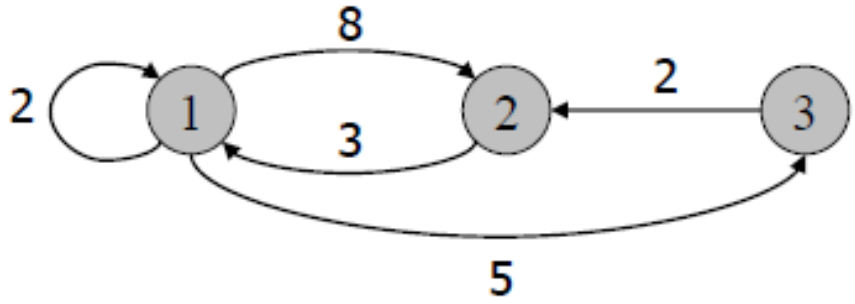
Ou seja:

A[2,1] = min(A[2,1],
A[2,1] + A[1,1]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

k = 1

Algoritmo de Floyd-Warshall



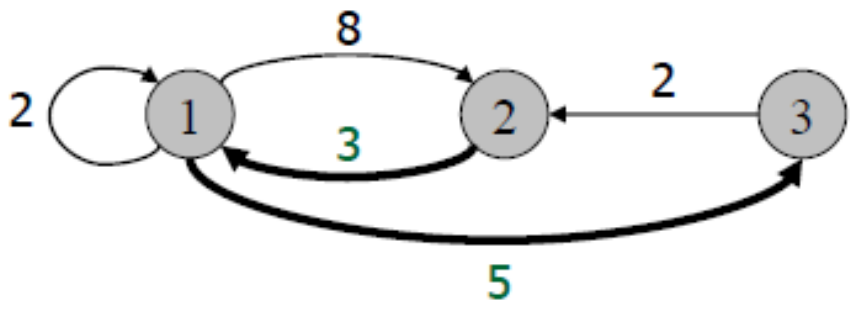
Ou seja:

A[2,2] = min(A[2,2],
A[2,1] + A[1,2]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

k = 1

Algoritmo de Floyd-Warshall



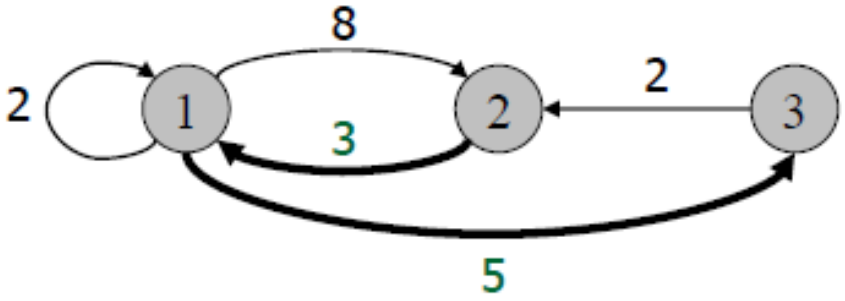
Ou seja:

A[2,3] = min(A[2,3],
A[2,1] + A[1,3]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

k = 1

Algoritmo de Floyd-Warshall



	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

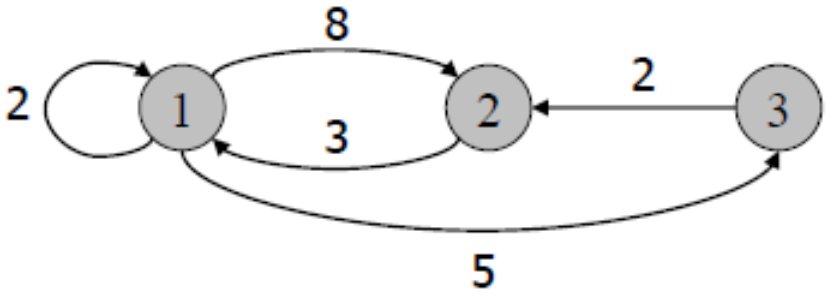
Ou seja:

A[2,3] = min(A[2,3],
A[2,1] + A[1,3]).

$\pi[3] = 1$

$k = 1$

Algoritmo de Floyd-Warshall



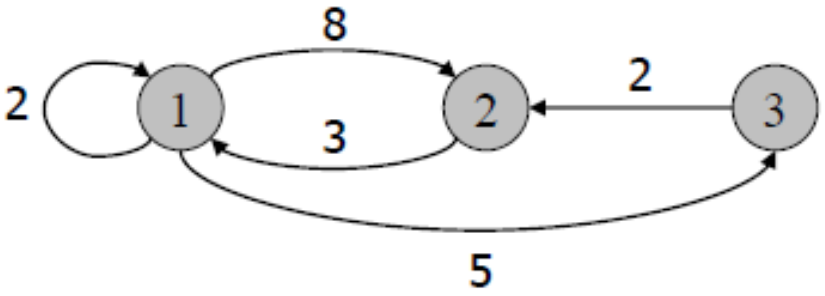
Ou seja:

A[3,1] = min(A[3,1],
A[3,1] + A[1,3]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

k = 1

Algoritmo de Floyd-Warshall



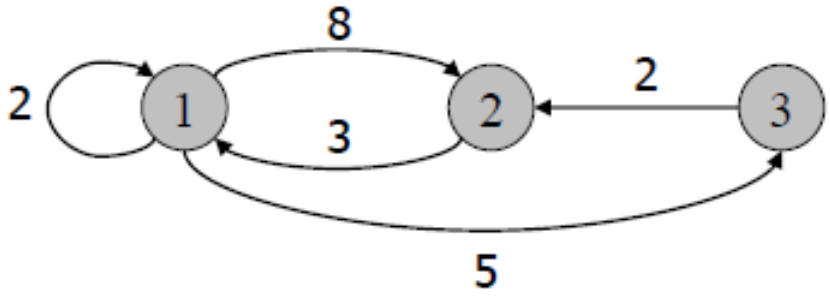
Ou seja:

A[3,2] = min(A[3,2],
A[3,1] + A[1,2]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

k = 1

Algoritmo de Floyd-Warshall



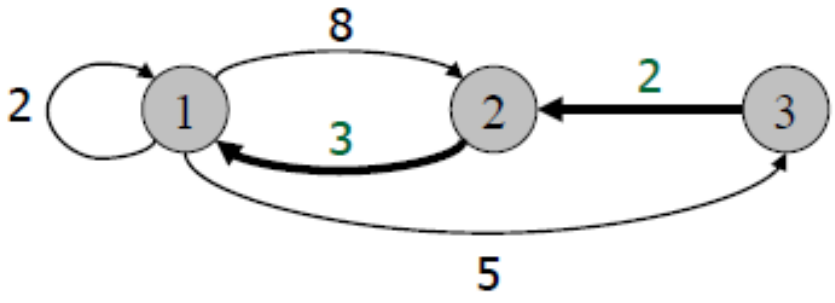
Ou seja:

A[3,3] = min(A[3,3],
A[3,1] + A[1,3]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

k = 1

Algoritmo de Floyd-Warshall

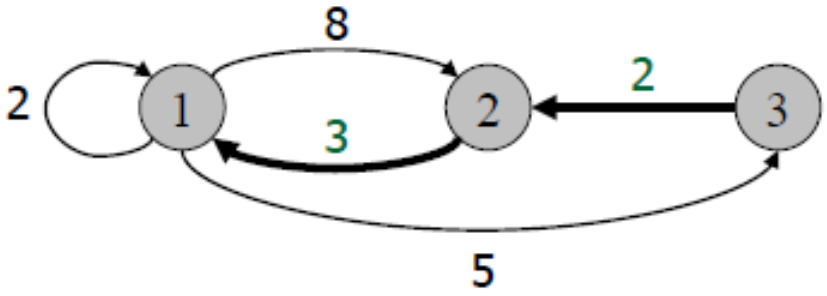


A[3,1] = min(A[3,1],
A[3,2] + A[2,1]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

k = 2

Algoritmo de Floyd-Warshall



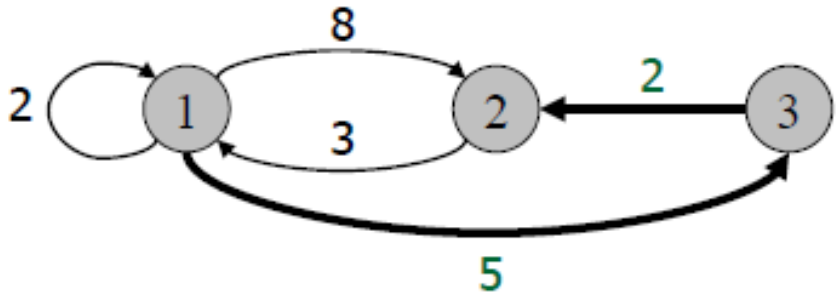
$$A[3,1] = \min(A[3,1], A[3,2] + A[2,1]).$$

$$\pi[1] = 2$$

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	5	2	0

$k = 2$

Algoritmo de Floyd-Warshall

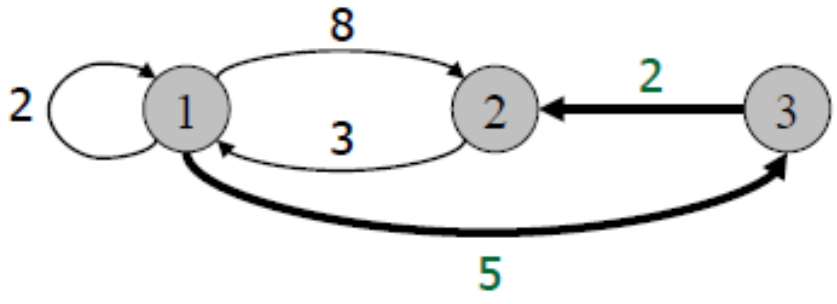


A[1,2] = min(A[1,2],
A[1,3] + A[3,2]).

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	5	2	0

k = 3

Algoritmo de Floyd-Warshall



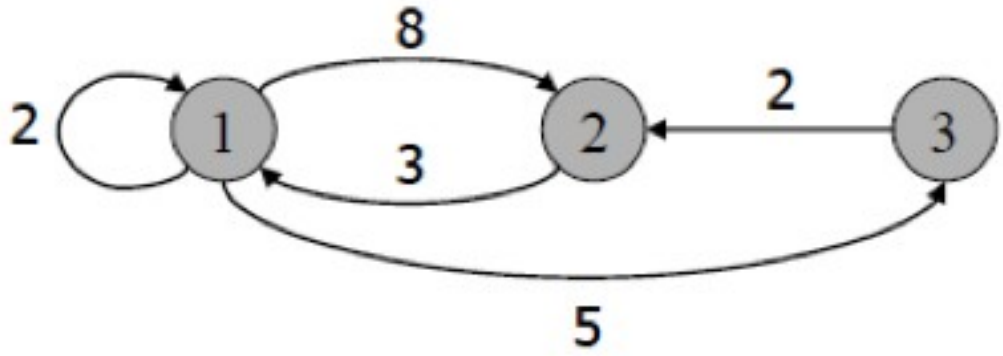
$$A[1,2] = \min(A[1,2], A[1,3] + A[3,2]).$$

$$\pi[2] = 3$$

	1	2	3
1	0	7	5
2	3	0	8
3	5	2	0

$$k = 3$$

Algoritmo de Floyd-Warshall



	1	2	3
1	0	7	5
2	3	0	8
3	5	2	0

$\pi[1] = 2$

$\pi[2] = 3$

$\pi[3] = 1$

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
início
   para v:=1 até G.NumVertices faça
        para w:=1 até G.NumVertices faça
              se v = w então
                    A[v,w] := 0;
              senão
                    A[v,w] := peso da aresta (v, w);

   para k:=1 até G.NumVertices faça
        para v:=1 até G.NumVertices faça
              para w:=1 até G.NumVertices faça
                    se A[v,k] + A[k,w] < A[v,w] então
                          A[v,w] := A[v,k] + A[k,w];
                          π[w] := k ;
fim;
```

Análise do algoritmo de Floyd-Warshall

- Complexidade no tempo: **$O(v^3)$**.
- O algoritmo de Floyd-Warshall apresenta desempenho similar ao algoritmo de Dijkstra com vetor de prioridade.
- Se o algoritmo de Dijkstra for implementado p.e. com heap binário, sua complexidade para encontrar os caminhos mais curtos entre todos os pares de vértices é **O(v e log v)**.
- Para identificar a presença de ciclos negativos: $\mathbf{A_{ii} < 0}$.