Projeto e Análise de Algoritmos
Algoritmos de Ordenação

Nelson Cruz Sampaio Neto
nelsonneto@ufpa.br

Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

5 de setembro de 2019

Por que ordenar?

- Às vezes, a necessidade de ordenar informações é inerente a uma aplicação. Por exemplo: Para preparar os extratos dos clientes, o banco precisa ordenar os cheques pelo número.

- Outros algoritmos usam frequentemente a ordenação como uma sub-rotina chave. Exemplo: Pesquisa binária.

- A ordenação é um problema de interesse histórico, logo, existe uma variedade de algoritmos de ordenação que empregam um rico conjunto de técnicas.

- Muitas questões de engenharia surgem ao se implementar algoritmos de ordenação, como hierarquia de memória do computador e do ambiente de *software*.

Relembrando alguns métodos de ordenação

- A **ordenação por inserção** tem complexidade no tempo linear no melhor caso (vetor ordenado) e quadrática no pior caso (vetor em ordem decrescente).
- Já o método **BubbleSort** e a **ordenação por seleção** têm complexidade no tempo $\Theta(n^2)$.
- Métodos considerados extremamente complexos!
- Por isso, não são recomendados para programas que precisem de velocidade e operem com quantidade elevada de dados.

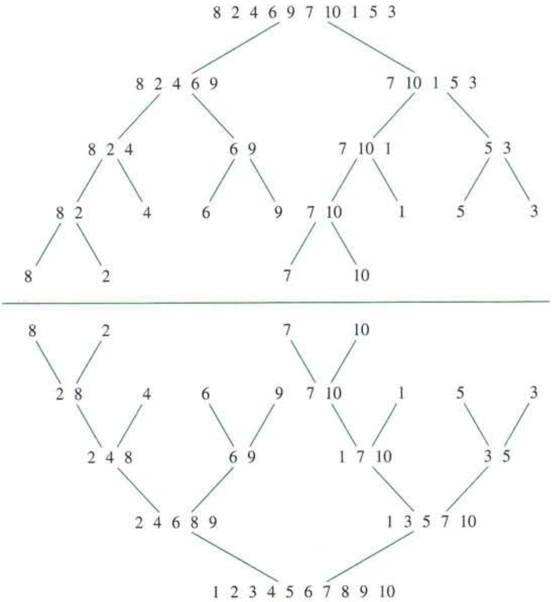
Método MergeSort

- Também chamado de ordenação por intercalação, ou mistura.

```
MERGE-SORT (A, p, r)
1. se ( p < r ) então
2.     q = (p + r) / 2
3.     MERGE-SORT (A, p, q)
4.     MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5.     MERGE (A, p, q, r)
```

- Sua complexidade no tempo é $\Theta(nlog_2(n))$, dado que a função MERGE é $\Theta(n)$ e um vetor com 1 elemento está ordenado.
- Vantagem: A complexidade do MergeSort não depende da sequência de entrada.
- Desvantagem: A função MERGE requer um vetor auxiliar, o que aumenta consumo de memória e tempo de execução.

Exemplo de operação do MergeSort



Método QuickSort

- O QuickSort é provavelmente o algoritmo mais usado na prática para ordenar vetores.
- O passo crucial desse algoritmo de ordenação recursivo é escolher um elemento do vetor para servir de **pivô**. Por isso, seu tempo de execução depende dos dados de entrada.
- Sua complexidade no melhor caso é $\Theta(nlog_2(n))$. Semelhante ao MergeSort, mas precisa apenas de uma pequena pilha como memoria auxiliar.
- Sua complexidade de pior caso é $\Theta(n^2)$, mas a chance dela ocorrer fica menor à medida que n cresce.

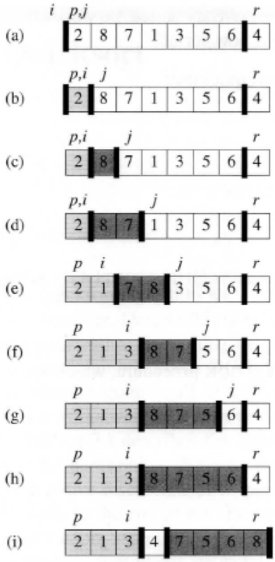
Particionamento do vetor

- A chave do QuickSort é a rotina PARTICAO, que escolhe o elemento pivô e o coloca na sua posição correta.

```
PARTICAO (A, p, r)
1. x = A[r]  // o último elemento é o pivô
2. i = p - 1
3. para (j = p) até (r - 1) faça
4.    se (A[j] <= x) então
5.       i = i + 1
6.       troca A[i] com A[j]
7. troca A[i + 1] com A[r]
8. retorna (i + 1)
```

- O tempo de execução do algoritmo PARTICAO é $\Theta(n)$.

Exemplo de operação do algoritmo PARTICAO



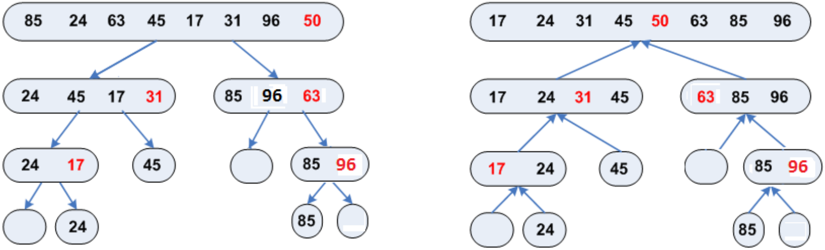
Algoritmo QuickSort

- O algoritmo abaixo implementa o QuickSort, até que todos os segmentos tenham tamanho ≤ 1.

```
QUICK-SORT (A, p, r)
1. se (p < r) então
2.     q = PARTICAO (A, p, r)
3.     QUICK-SORT (A, p, q - 1)
4.     QUICK-SORT (A, q + 1, r)
```

- Após particionar o vetor em dois, os segmentos são ordenados recursivamente, primeiro o da esquerda e depois o da direita.

Exemplo de operação do QuickSort



(a) Fase de Divisão (b) Fase de Conquista

- O tempo de execução depende do particionamento do vetor: balanceado (melhor caso) ou não balanceado (pior caso).

Particionamento não balanceado

- O comportamento do QuickSort no pior caso ocorre quando a rotina PARTICAO produz um segmento com $n - 1$ elementos e outro com 0 (zero) elementos **em cada nível recursivo**.

- Nesse caso, a definição recursiva do algoritmo assume a seguinte forma:

  $T(0) = \Theta(1)$,
  $T(1) = \Theta(1)$ e
  $T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n)$, ou seja,
  $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ para $n > 1$.

- Resolvendo a formulação acima, obtém-se $\Theta(n^2)$.

- Por exemplo, quando o vetor de entrada já está ordenado e o pivô é o último elemento.

Particionamento não balanceado

- Passo base: $T(1) = 1$.

- **Expandir**:

$k = 1$: $T(n) = T(n-1) + n$

$k = 2$: $T(n) = [T(n-2) + n - 1] + n = T(n-2) + n - 1 + n$

$k = 3$: $T(n) = [T(n-3) + n - 2] + n - 1 + n = T(n-3) + n - 2 + n - 1 + n$

- **Conjecturar**: Após k expansões, temos

$$T(n) = T(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1}(n-i).$$

Observando a expansão, ela irá parar quando $k = n - 1$, isso porque a base da recursividade é definida para 1 (um).

Logo, $T(n) = T(1) + \sum_{i=0}^{n-2}(n-i) = 1 + (\frac{n(n+1)}{2} - 1) = \Theta(n^2)$.

Particionamento balanceado

- O comportamento no melhor caso ocorre quando a rotina PARTICAO produz dois segmentos, cada um de tamanho não maior que a metade de n **em cada nível recursivo**.
- Nesse caso, a definição recursiva do algoritmo assume a seguinte forma:

  $T(1) = \Theta(1)$ e

  $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$, ou seja,

  $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$ para $n > 1$.

- Resolvendo a formulação acima, obtém-se $\Theta(nlog_2(n))$.
- Por exemplo, quando o vetor de entrada já está ordenado e o pivô é o elemento do meio.

Comportamento no caso médio

- O tempo de execução do caso médio do QuickSort é muito mais próximo do melhor caso que do pior caso.

- Podemos analisar a afirmação acima entendendo como o equilíbrio do particionamento se reflete na definição recursiva:

  $T(1) = \Theta(1)$ e

  $T(n) = T(\frac{9n}{10}) + T(\frac{n}{10}) + \Theta(n)$ para $n > 1$.

- Resolvendo a formulação acima, obtém-se $\Theta(nlog_{\frac{10}{9}}(n))$.

- Isso é, assintoticamente, o mesmo comportamento que levaria se a divisão fosse feita exatamente no meio.

Comportamento no caso médio

- No entanto, é pouco provável que o particionamento sempre ocorra do mesmo modo em todos os níveis.
- Espera-se que algumas divisões sejam razoavelmente bem equilibradas e outras bastante desequilibradas.
- Então, no caso médio, o QuickSort produz uma mistura de divisões “boas” e “ruins” com tempo de execução semelhante ao do melhor caso.

Uma versão aleatória do QuickSort

- Como visto, a escolha do pivô influencia decisivamente no tempo de execução do QuickSort.
- Por exemplo, um vetor de entrada ordenado leva a $\Theta(n^2)$, caso o pivô escolhido seja o último elemento.
- A escolha do elemento do meio como pivô melhora muito o desempenho quando o vetor está ordenado, ou quase.
- Outra alternativa é escolher o **pivô aleatoriamente**. Às vezes adicionamos um caráter aleatório a um algoritmo para obter bom desempenho no caso médio sobre todas as entradas.

- Ao invés de sempre usar o $A[r]$ como pivô, usaremos um elemento escolhido ao acaso dentro do vetor $A[p\ ..\ r]$.

```
RAND-PARTICAO (A, p, r)
1. i = RANDOM (p, r)
2. troca A[r] com A[i]
3. retorna PARTICAO (A, p, r)
```

- Essa modificação assegura que o elemento pivô tem a mesma probabilidade de ser qualquer um dos elementos do vetor.
- Como o elemento pivô é escolhido ao acaso, espera-se que a divisão do vetor seja bem equilibrada na média.

Uma versão aleatória do QuickSort

- O algoritmo QuickSort aleatório é descrito abaixo.

```
RAND-QUICK-SORT (A, p, r)
1. se (p < r) então
2.     q = RAND-PARTICAO (A, p, r)
3.     RAND-QUICK-SORT (A, p, q - 1)
4.     RAND-QUICK-SORT (A, q + 1, r)
```

- A aleatoriedade **não** evita o pior caso!
- Muitas pessoas consideram a versão aleatória do QuickSort o algoritmo preferido para entradas grandes o suficiente.

Exercícios

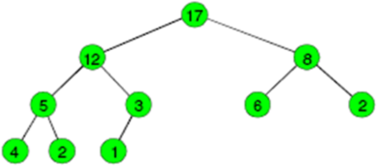
1. Ilustre a operação da rotina PARTICAO sobre o vetor $A = [13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21]$.
2. De que maneira você modificaria o QuickSort para fazer a ordenação de forma decrescente?
3. Qual é a complexidade no tempo do QuickSort quando todos os elementos do vetor A têm o mesmo valor?
4. Quando o vetor A contém elementos distintos, está ordenado em ordem decrescente e o pivô é o último elemento, qual é a complexidade no tempo do QuickSort? E se o pivô definido fosse o elemento do meio?
5. Dado o vetor $[f \;\; e \;\; d \;\; h \;\; a \;\; c \;\; g \;\; b]$ e tomando o elemento d como pivô, ilustre a operação do RAND-PARTICAO sobre o vetor.

Método HeapSort

- Utiliza uma estrutura de dados com um critério bem-definido baseada em árvore binária (*heap*) para organizar a informação durante a execução do algoritmo.
- Sua complexidade é $O(nlog_2(n))$, equivalente ao MergeSort, mas não necessita de memória adicional, ou seja, o HeapSort pode ser implementado de forma não-recursiva.
- O QuickSort geralmente supera o HeapSort na prática, mas o seu pior caso $\Theta(n^2)$ é inaceitável em algumas situações.
- O HeapSort é mais adequado para quem necessita garantir tempo de execução e não é recomendado para arquivos com poucos registros.

Heap

- A estrutura de dados *heap* é um objeto arranjo que pode ser visualizado como uma árvore binária completa.
- Um *heap* deve satisfazer uma das seguintes condições:
  - Todo nó deve ter valor maior ou igual que seus filhos (**Heap Máximo**). O maior elemento é armazenado na raiz.
  - Todo nó deve ter valor menor ou igual que seus filhos (**Heap Mínimo**). O menor elemento é armazenado na raiz.



- Acima, um *heap* máximo de altura 3. Note que o último nível pode não conter os nós mais à direita.

Heap

- Tendo em vista que um *heap* de n elementos é baseado em uma árvore binária completa, sua altura h é $\lfloor log_2(n) \rfloor$.

- A altura de um nó i é o número de nós do maior caminho de i até um de seus descendentes. As folhas têm altura zero.

- Se o *heap* for uma árvore binária completa com o último nível cheio, seu número total de elementos será $2^{h+1} - 1$.

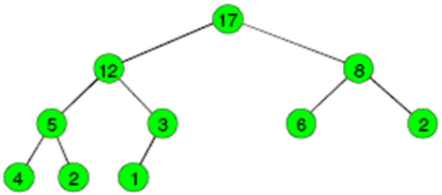
- Se o último nível do *heap* tiver apenas um elemento, seu número total de elementos será 2^h.

- Logo, o número n de elementos de um *heap* é dado por:

$$2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

O que acontece na prática?

- Na prática, quando se trabalha com *heap*, recebe-se um vetor que será representado por árvore binária da seguinte forma:
    - Raiz da árvore: primeira posição do vetor;
    - Filhos do nó na posição i: posições $2i$ e $2i + 1$; e
    - Pai do nó na posição i: posição $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$.
- Exemplo: O vetor $A = [17\ 12\ 8\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4\ 2\ 1]$ pode ser representado pela árvore binária (*max-heap*) abaixo:



Algoritmos para *heap*

- A representação em vetores permite relacionar os nós do *heap* da seguinte forma:

```
Pai (i)
1. retorna (int) i/2
```

```
Esq (i)
1. retorna 2*i
```

```
Dir (i)
1. retorna 2*i + 1
```

Exercícios

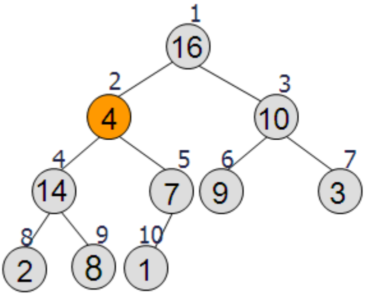
1. Um arranjo (ou vetor) de números inteiros que está ordenado de forma crescente é um *heap* mínimo?

2. A vetor $A = [23\ 17\ 14\ 6\ 13\ 10\ 1\ 5\ 7]$ é um *heap* máximo? Caso negativo, transforme-o em um *heap* máximo.

3. Onde em um *heap* máximo o menor elemento se encontra, supondo-se que todos os elementos sejam distintos?

4. Todo *heap* é uma árvore binária de pesquisa? Por quê?

- Mas o que acontece se a condição *max-heap* for quebrada?
- Exemplo: O vetor $A = [16\ 4\ 10\ 14\ 7\ 9\ 3\ 2\ 8\ 1]$ é representado pela árvore mais a esquerda, que precisa ser reorganizada na posição 2 para adquirir a condição *max-heap*.



- O procedimento PENEIRA mantém a condição *max-heap*.

```
PENEIRA (A, n, i)
1. l = Esq (i)  //  l = 2i
2. r = Dir (i)  //  r = 2i + 1
3. maior = i
4. se (l <= n) e (A[l] > A[maior])
5.    maior = l
6. se (r <= n) e (A[r] > A[maior])
7.    maior = r
8. se (maior != i)
9.    troca A[i] com A[maior]
10.   PENEIRA (A, n, maior)
```

Procedimento PENEIRA

- O tempo de execução do PENEIRA é $\Theta(1)$ para corrigir o relacionamento entre os elementos $A[i]$, $A[l]$ e $A[r]$, mais o tempo para rodá-lo recursivamente em uma subárvore com raiz em um dos filhos do nó i.

- As subárvores de cada filho têm tamanho máximo de $2n/3$ - o pior caso acontece quando o último nível da árvore está exatamente metade cheio - e o tempo de execução pode ser expresso pela relação de recorrência:

  $$T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1).$$

- A solução para essa relação de recorrência é $O(log_2(n))$.

Procedimento PENEIRA não recursivo

- Sua complexidade no tempo também é $O(log_2(n))$, porém sem a necessidade de alocação de memória auxiliar.

```
INT-PENEIRA (A, n, i)
enquanto 2i <= n faça
   maior = 2i
   se (maior < n) e (A[maior] < A[maior + 1])
      maior = maior + 1
   fim
   se (A[i] >= A[maior])
      i = n
   senão
      troca A[i] com A[maior]
      i = maior
   fim
fim
```

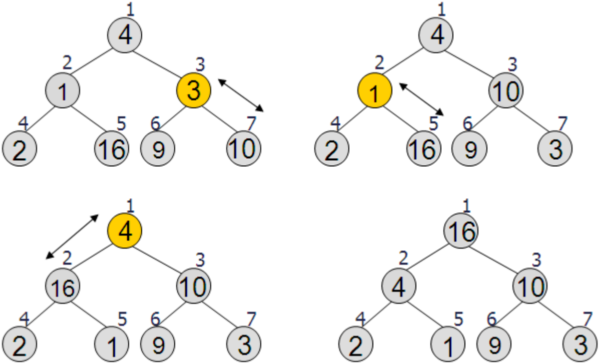
Procedimento MAX-HEAP

- O procedimento MAX-HEAP abaixo converte um vetor A de n elementos em um *heap* máximo.

```
MAX-HEAP (A, n)
1. para (i = n/2) até 1 faça
2.     PENEIRA (A, n, i)
```

- Os elementos de $A[\frac{n}{2}+1]$ até $A[n]$ correspondem às folhas da árvore e, portanto, são *heaps* de um elemento.
- Logo, basta chamar o procedimento PENEIRA para os demais elementos do vetor A, ou seja, de $A[\frac{n}{2}]$ até $A[1]$.

- Exemplo: A figura abaixo ilustra a operação do procedimento MAX-HEAP para o vetor $A = [4\ 1\ 3\ 2\ 16\ 9\ 10]$.



Procedimento MAX-HEAP

- O tempo de execução do MAX-HEAP é $O(nlog_2(n))$.
- Embora correto, esse limite superior **não** é assintoticamente restrito.
- De fato, o tempo de execução do PENEIRA sobre um nó varia com a altura do nó na árvore, e as alturas na maioria dos nós são pequenas.
- A análise mais restrita se baseia em duas propriedades:
  - Um *heap* de n elementos tem altura $\lfloor log_2(n) \rfloor$; e
  - No máximo $\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$ nós de qualquer altura h.

Procedimento MAX-HEAP

- O tempo exigido pelo MAX-HEAP quando é chamado em um nó de altura h é $O(h)$.

- Assim, expressa-se o custo total do MAX-HEAP por

$$\sum_{h=0}^{\lfloor log_2(n) \rfloor} \lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil O(h) = O(n \sum_{h=0}^{\lfloor log_2(n) \rfloor} \frac{h}{2^h})$$

$$\leq O(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h})$$

Sabe-se que $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$

Desse modo, o tempo de execução do MAX-HEAP pode ser limitado como $O(n)$.

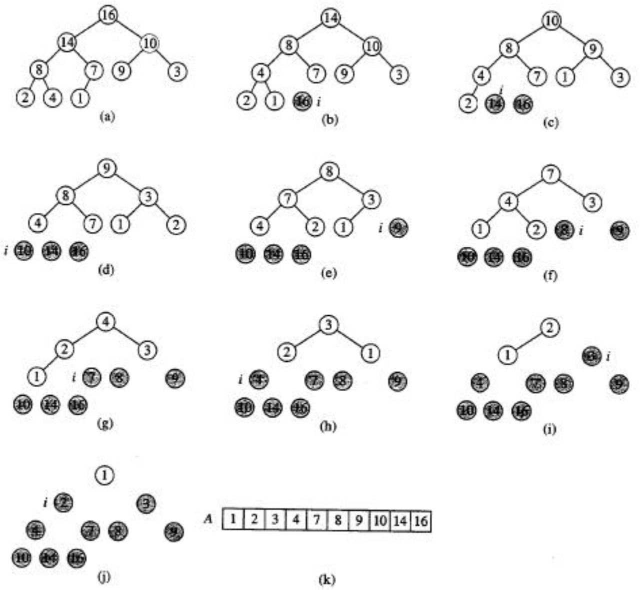
Algoritmo HeapSort

- O algoritmo abaixo implementa o método HeapSort.

```
HEAP-SORT (A, n)
1. MAX-HEAP (A, n) // constrói um max-heap
2. tamanho = n
3. para (i = n) até 2 faça
4.    troca A[1] com A[i] // raiz no final
5.    tamanho = tamanho - 1
6.    PENEIRA (A, tamanho, 1)
```

- Após construir um *max-heap*, a raiz é movida para o final e o vetor é reorganizado. Esse processo é repetido até que o *heap* tenha tamanho 2.

Algoritmo HeapSort



- É possível transformar um vetor desordenado em um *heap* máximo em tempo linear.
- A quantidade de trocas realizadas no *heap* influencia na eficiência do algoritmo.
- O melhor caso do HeapSort é $\Theta(n)$ e ocorre quando todas as chaves são iguais, ou seja, não há trocas.
- Já a sua complexidade no tempo no pior caso é $\Theta(nlog_2(n))$.
- Lembrando que o algoritmo HeapSort pode ser implementado de forma iterativa.

Exercícios

1. O vetor $T = [23\ 17\ 14\ 6\ 13\ 10\ 1\ 5\ 7\ 12]$ é um *heap* máximo? Qual é a altura do *heap* formado?

2. Ilustre a operação do procedimento PENEIRA(A, 14, 3) sobre o vetor $A = [27\ 17\ 3\ 16\ 13\ 10\ 1\ 5\ 7\ 12\ 4\ 8\ 9\ 0]$.

3. Ilustre a operação do procedimento MAX-HEAP para construir um *heap* a partir do vetor $A = [5\ 3\ 17\ 10\ 84\ 19\ 6\ 22\ 9]$.

4. Ilustre a operação do algoritmo HEAP-SORT sobre o vetor $A = [5\ 13\ 2\ 25\ 7\ 17\ 20\ 8\ 4]$.

Exercício complementar

- A tabela abaixo mostra o resultado (seg) de experimentos para ordenar um vetor de 10^6 elementos de forma crescente considerando quatro situações iniciais.

Algoritmo	**Aleatória**	**Crescente**	**Reversa**	**Igual**
MergeSort	0,9	0,8	0,8	0,8
QuickSort	0,6	0,3	0,3	35,0
HeapSort	0,8	0,8	0,7	0,2

- Qual foi a versão do QuickSort usada nos experimentos?
- Qual algoritmo você usaria para ordenar $2x10^6$ elementos?
- Você mudaria de ideia se a aplicação não pudesse tolerar eventuais casos desfavoráveis?

Fila de prioridades

- O HeapSort é um algoritmo excelente, contudo, uma boa implementação do QuickSort, normalmente o supera.
- Porém, a estrutura de dados *heap* é de grande utilidade.
- Exemplo: Uso de *heap* como uma **fila de prioridades**.
- Fila de prioridades é uma estrutura de dados para manutenção de um conjunto de dados, cada qual com um valor associado chamado **chave**.
- Existem dois tipos de fila de prioridades: **máxima** e **mínima**.

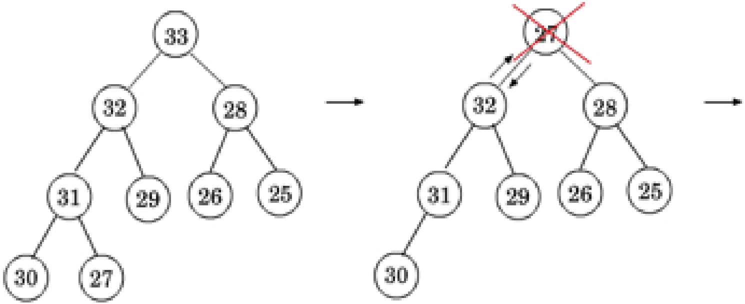
Fila de prioridades

- Em muitas aplicações, dados de uma coleção são acessados por ordem de prioridade.
- A prioridade associada ao dado pode ser qualquer coisa: tempo, custo... mas precisa ser um escalar.
- Exemplos: execução de processos (máxima) e simulação orientada a eventos (mínima).
- Uma fila de prioridades admite as seguintes operações: seleção e remoção do dado com maior (ou menor) chave; alteração de prioridade; e inserção.

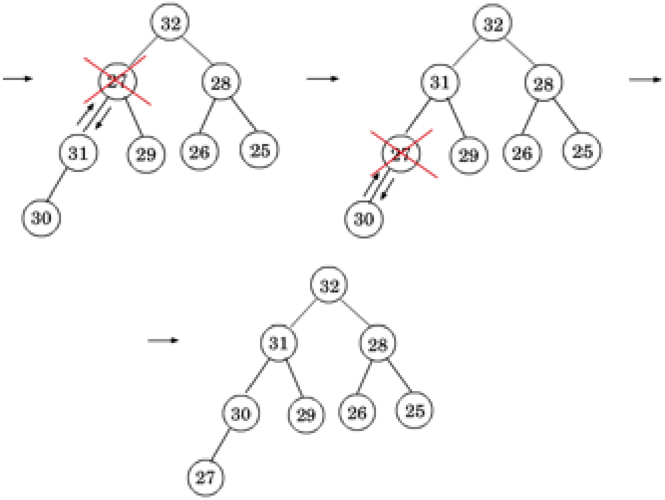
```
HEAP-MAXIMUM (A)
1. retorna A[1]
```

```
HEAP-EXTRACT-MAX (A, n)
1. se n < 1
2.    então erro 'heap vazio'
3. maximo = A[1] % maior elemento sempre na raiz
4. A[1] = A[n]
5. n = n - 1
6. PENEIRA (A, n, 1)
7. retorna maximo
```

- Exemplo: A figura abaixo ilustra a operação do procedimento HEAP-EXTRACT-MAX.



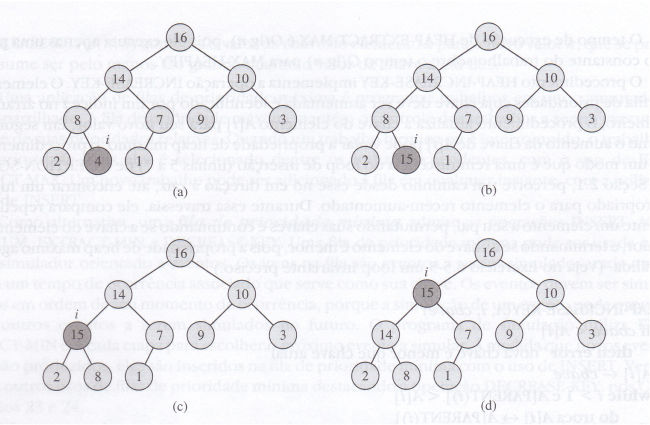
Procedimento HEAP-EXTRACT-MAX



```
HEAP-INCREASE-KEY (A, i, chave)
1. se chave < A[i]
2.   então erro 'nova chave é menor que chave atual'
3. A[i] = chave
4. enquanto (i > 1 e A[Pai(i)] < A[i])
5.   troca A[i] com A[Pai(i)]
6.   i = Pai(i)
```

```
HEAP-INSERT (A, n, chave)
1. n = n + 1
2. A[n] = -inf  % recebe um valor muito pequeno
3. HEAP-INCREASE-KEY (A, n, chave)
```

- Exemplo: A figura abaixo ilustra a operação do procedimento HEAP-INCREASE-KEY para aumentar a chave do nó *i*.



Fila de prioridades

- A tabela abaixo mostra a complexidade no tempo para diferentes implementações de fila de prioridades.

Operação	**Lista**	**Lista ordenada**	**Árvore balanceada**	**Heap binário**
Seleção-max	$O(n)$	$O(1)$	$O(log(n))$	$O(1)$
Remoção-max	$O(n)$	$O(1)$	$O(log(n))$	$O(log(n))$
Alteração	$O(1)$	$O(n)$	$O(log(n))$	$O(log(n))$
Inserção	$O(1)$	$O(n)$	$O(log(n))$	$O(log(n))$
Construção	$O(n)$	$O(nlog(n))$	$O(nlog(n))$	$O(n)$

- Percebe-se um *trade-off* na implementação por listas, apesar de serem extremamente simples de codificar.

- Para maior eficiência, usa-se a implementação por *heap*.

Exercícios

1. Ilustre a operação do procedimento HEAP-EXTRACT-MAX sobre o vetor $A = [15\ 13\ 9\ 5\ 12\ 1]$.

2. Ilustre a operação do algoritmo HEAP-INSERT sobre o vetor $A = [15\ 13\ 9\ 5\ 12\ 1]$ ao inserir um elemento com chave 16.

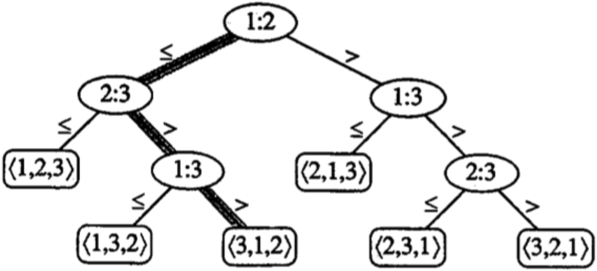
3. A operação HEAP-DECREASE-KEY diminui o valor da chave do elemento x para o novo valor k. Codifique essa operação em tempo $O(log(n))$ para um *heap* máximo de n elementos.

Ordenação em tempo linear

- Vimos até agora algoritmos que podem ordenar n números em tempo $nlog(n)$ no melhor caso.
- Os algoritmos MergeSort e HeapSort alcançam essa eficiência também no pior caso; e o QuickSort o alcança na média.
- Esses algoritmos se baseiam apenas em **comparações** entre os elementos de entrada.
- No entanto, existem algoritmos de ordenação executados em **tempo linear** sob certas condições.
- Para isso, utilizam técnicas diferentes de comparações para determinar a sequência ordenada.

- Em uma ordenação por comparação, apenas comparações entre elementos são usadas para obter informações de ordem sobre uma sequência de entrada $< a_1, a_2, ..., a_n >$.
- As ordenações por comparação podem ser vistas de modo abstrato em termos de **árvores de decisão**.
- Uma árvore de decisão é uma árvore binária que representa as comparações feitas por um algoritmo de ordenação quando ele opera sobre uma entrada de um dado tamanho.
- Controle, movimentação de dados e todos os outros aspectos do algoritmo são ignorados.

Limite inferior para ordenação



A árvore de decisão para ordenação por inserção, operando sobre três elementos. Um nó interno anotado por *i:j* indica uma comparação entre a_i e a_j. Uma folha anotada pela permutação $\langle \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n) \rangle$ indica a ordenação $a_{\pi(1)} \leq a_{\pi(2)} \leq \cdots \leq a_{\pi(n)}$. O caminho sombreado indica as decisões tomadas durante a ordenação da seqüência de entrada $\langle a_1 = 6, a_2 = 8, a_3 = 5 \rangle$; a permutação $\langle 3, 1, 2 \rangle$ na folha indica que a seqüência ordenada é $a_3 = 5 \leq a_1 = 6 \leq a_2 = 8$. Existem $3! = 6$ permutações possíveis dos elementos de entrada; assim, a árvore de decisão deve ter no mínimo 6 folhas

Limite inferior para ordenação

- Em geral, ao ordenar n elementos, existem $n!$ possíveis saídas, que são as diferentes ordens da sequência inicial.
- Então, qualquer árvore de decisão descrevendo um algoritmo de ordenação correto de uma sequência de n elementos precisa ter $f = n!$, onde f é o número de folhas.
- Cada uma das folhas deve ser acessível a partir da raiz por um caminho correspondente a uma execução real do algoritmo.
- Portanto, o comprimento do maior caminho da raiz até uma folha (i.e. a altura da árvore) é o limite inferior do número de passos executados pelo algoritmo no pior caso.

Limite inferior para ordenação

- **Teorema:** Qualquer algoritmo de ordenação por comparação exige $\Omega(nlog(n))$ comparações no pior caso em uma análise assintoticamente restrita.

- **Prova:** Tendo em vista que uma árvore binária de altura h não tem mais do que 2^h folhas, tem-se

  $f = n! \leq 2^h$, que, usando-se logaritmos, implica $h \geq log(n!)$.

  Uma boa aproximação para $n!$ é $(n/e)^n$, onde $e = 2,718...$ é a base de logaritmos neperianos. Logo,

  $h \geq log(n!) = log((n/e)^n) = nlog(n) - nlog(e)$

  $h = \Omega(nlog(n))$ c.q.d

- Por exemplo, o MergeSort e o HeapSort são algoritmos de ordenação por comparação assintoticamente ótimos.

Ordenação em tempo linear

Os seguintes algoritmos de ordenação executam em tempo linear:

- **CountingSort**: Os elementos a serem ordenados são números inteiros "pequenos", ou seja, inteiros k sendo $O(n)$.
- **RadixSort**: Os valores são números inteiros de comprimento máximo d constante, isto é, independente de n.
- **BucketSort**: Os elementos do vetor de entrada são números reais uniformemente distribuídos sobre um intervalo.

Ordenação por contagem (CountingSort)

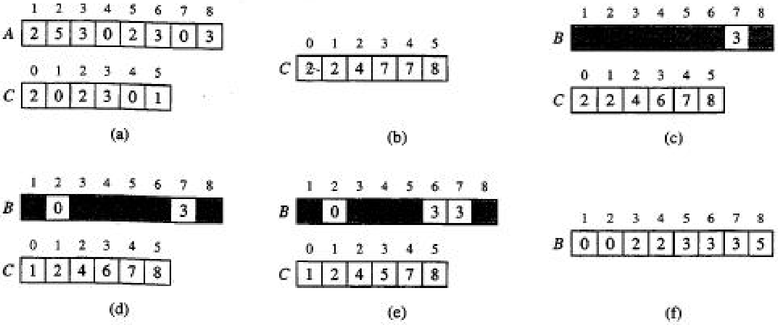
- Pressupõe que cada um dos n elementos do vetor de entrada é um **inteiro** no intervalo de 0 a k, para algum inteiro k.
- Podemos ordenar o vetor contando, para cada inteiro i no vetor, quantos elementos do vetor são menores que i.
- É exatamente o que faz o algoritmo CountingSort!
- Desvantagens: Faz uso de vetores auxiliares e o valor de k deve ser previamente conhecido.

Algoritmo CountingSort

```
COUNTING-SORT (A, B, n, k)
para i = 0 até k faça
    C[i] = 0
para j = 1 até n faça
    C[A[j]] = C[A[j]] + 1
// Agora C[i] contém o número de elementos iguais a i
para i = 1 até k faça
    C[i] = C[i] + C[i - 1]
// Agora C[i] contém o número de elementos <= i
para j = n até 1 faça
    B[C[A[j]]] = A[j]
    C[A[j]] = C[A[j]] - 1
```

Claramente, a complexidade do COUNTING-SORT é $\Theta(n + k)$.
Quando k é $O(n)$, ele tem complexidade $\Theta(n)$.

- Exemplo: Operação do COUNTING-SORT sobre o vetor de entrada $A = [2\ 5\ 3\ 0\ 2\ 3\ 0\ 3]$.



Considerações sobre o CountingSort

- O método de ordenação por contagem supera o limite inferior de $\Omega(nlog_2(n))$, pois não ordena por comparação.
- É um método que utiliza os valores reais dos elementos para efetuar a indexação em um arranjo.
- Se o uso de memória auxiliar for muito limitado, é melhor usar um algoritmo de ordenação por comparação *in-place* (local). Ex: HeapSort e QuickSort.
- É um **algoritmo estável**: Elementos iguais ocorrem no vetor ordenado na mesma ordem em que aparecem na entrada.
- O MergeSort também é um algoritmo de ordenação estável, já o QuickSort e o HeapSort não são.

Exercícios

1. Ilustre a operação do algoritmo COUNTING-SORT sobre o arranjo $A = [6\ 0\ 2\ 0\ 1\ 3\ 4\ 6]$.

2. Prove que o algoritmo COUNTING-SORT é estável.

3. Suponha que o cabeçalho do laço "para" na linha 7 do procedimento COUNTING-SORT seja reescrito:

```
7. para j = 1 até n faça
```

   a. Mostre que o algoritmo ainda funciona corretamente.

   b. O algoritmo modificado é estável?

Ordenação da base (RadixSort)

- Considere o problema de ordenar o vetor A sabendo que todos os seus n elementos inteiros tem d dígitos.
- Por exemplo, os elementos do vetor A podem ser CEPs, ou seja, inteiros de 8 dígitos.
- O método RadixSort ordena os elementos do vetor dígito a dígito, começando pelo menos significado.
- Para que o RadixSort funcione corretamente, ele deve usar um método de ordenação estável, como o CountingSort.

Algoritmo RadixSort

- O algoritmo abaixo implementa o método RadixSort.

```
RADIX-SORT (A, n, d)
1. para i = 1 até d faça
2.    Ordene A[1..n] pelo i-ésimo dígito
       usando um método estável
```

- A complexidade do RADIX-SORT depende da complexidade do algoritmo estável usado para ordenar cada dígito.
- Se o algoritmo estável for, por exemplo, o COUNTING-SORT, obtém-se a complexidade $\Theta(d(n+k))$.
- Quando $k = O(n)$ e d é constante, o RADIX-SORT é executado em tempo linear.

- Exemplo: Operação do RADIX-SORT sobre o vetor de entrada $A = [329\ 457\ 657\ 839\ 436\ 720\ 355]$.

329		720		720		329
457		355		329		355
657		436		436		436
839	$\rightarrow$	457	$\rightarrow$	839	$\rightarrow$	457
436		657		355		657
720		329		457		720
355		839		657		839
		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$

Exercícios

- Ilustre a operação do algoritmo RADIX-SORT sobre o arranjo $A = [COW\ \ DOG\ \ SEA\ \ RUG\ \ ROW\ \ MOB\ \ BOX]$.

- Dado que o algoritmo MergeSort tem complexidade no tempo $\Theta(nlog_2(n))$, mostre que o RadixSort é mais vantajoso que o MergeSort quando $d < log_2(n)$.

- Suponha que desejamos ordenar um vetor de 2^{20} números de 64 bits usando o algoritmo RadixSort tendo o CountingSort como método estável.

  a. Explique o funcionamento e a complexidade do algoritmo.

  b. Qual seria o tamanho dos vetores auxiliares?

Considerações sobre o RadixSort

- Se o maior valor a ser ordenado for $O(n)$, então $O(log_2(n))$ é uma estimativa para a quantidade de dígitos dos números.
- A vantagem do RadixSort fica evidente quando interpretamos os dígitos de forma mais geral que a base decimal ([0..9]).
- Suponha que desejamos ordenar um conjunto de 2^{20} números de 64 bits. Então, o MergeSort faria cerca de $nlogn = 2^{20}x20$ comparações e usaria um vetor auxiliar de tamanho 2^{20}.
- Agora, suponha que interpretamos cada número como tendo 4 dígitos em base $k = 2^{16}$. Então, o RadixSort faria cerca de $d(n+k) = 4(2^{20} + 2^{16})$ operações. Mas, note que usaríamos dois vetores auxiliares, de tamanhos 2^{16} e 2^{20}.

Considerações sobre o RadixSort

- Dados n números de b bits e qualquer inteiro positivo $r \leq b$, o algoritmo RADIX-SORT ordena corretamente esses números no tempo $\Theta((b/r)(n + 2^r))$.

- Se $b < \lfloor log_2(n) \rfloor$, para qualquer valor de $r \leq b$, tem-se que $(n + 2^r) = \Theta(n)$. Assim, a escolha de $r = b$ produz um tempo de execução $(b/b)(n + 2^b) = \Theta(n)$ assintoticamente ótimo.

- Se $b \geq \lfloor log_2(n) \rfloor$, então a escolha de $r = \lfloor log_2(n) \rfloor$ produz um tempo de execução $\Theta(bn/log_2(n))$, que é o melhor tempo dentro de um fator constante.

Ordenação por distribuição de chave (BucketSort)

- Funciona em tempo linear quando a entrada é gerada a partir de uma distribuição uniforme sobre um intervalo.
- Primeiramente, divide o intervalo que vai de 0 até k em n subintervalos, ou *buckets*, de mesmo tamanho.
- Depois, distribui os n números do vetor de entrada entre os *buckets*. Na prática, esses *buckets* são listas encadeadas.
- Em seguida, os elementos de cada lista são ordenados por um método qualquer.
- Finalmente, as listas ordenadas são concatenadas em ordem crescente, gerando uma lista final ordenada.

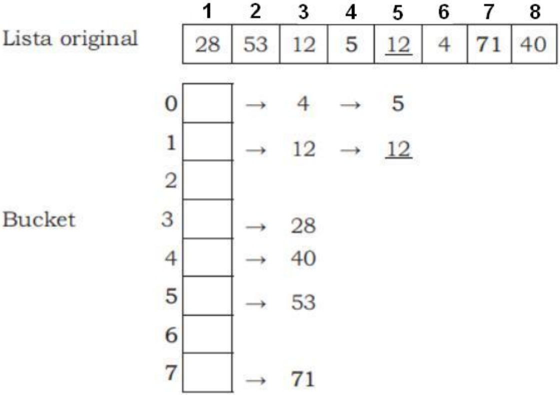
Algoritmo BucketSort

- O algoritmo abaixo implementa o método BucketSort.

```
BUCKET-SORT (A, n, k)
1. para i = 0 até n - 1 faça
2.    B[i] = 0
// Vetor auxiliar de listas encadeadas
3. para i = n até 1 faça
4.    Insira A[i] no início da
       lista B[(A[i] * n)/(k + 1)]
5. para i = 0 até n - 1 faça
6.    Ordene a lista B[i]
7. Concatene as listas B[0], ..., B[n - 1]
```

- Exemplo: Se o vetor de entrada tem 8 elementos e o maior deles é 71, obtém-se 8 intervalos: [0,9[, [9,18[, ..., [63,72[.

Algoritmo BucketSort



Considerações sobre o BucketSort

- Para analisar o tempo de execução, observe que todas as linhas exceto a linha 6 demoram $\Theta(n)$.
- Resta equilibrar o tempo total ocupado pelas n chamadas à ordenação na linha 6.
- O tempo de execução do algoritmo BUCKET-SORT é

$$T(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O({n_i}^2).$$

- Tomando as expectativas de ambos os lados, temos

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &= E[\Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O({n_i}^2)] \\
&= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} E[O({n_i}^2)] \\
&= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(E[{n_i}^2]).
\end{aligned}
$$

  Afirmamos que

  $E[{n_i}^2] = 2 - 1/n$ para $i = 0, 1, ..., n-1$. Cada *bucket* i tem o mesmo valor de $E[{n_i}^2]$, pois cada valor no arranjo de entrada tem igual probabilidade de cair em qualquer *bucket*.

Considerações sobre o BucketSort

- Logo, o tempo esperado de execução para o BucketSort é

  $\Theta(n) + n \cdot O(2 - 1/n) = \Theta(n)$.

- Desse modo, o algoritmo BUCKET-SORT inteiro funciona no tempo esperado linear.

- É comum o uso do BucketSort em valores no intervalo $[0, 1)$ e o emprego do algoritmo de ordenação por inserção.

Exercícios

1. Ilustre a operação do algoritmo BUCKET-SORT sobre o arranjo $A = [79\ 13\ 16\ 64\ 39\ 20\ 89\ 53\ 71\ 42]$.
2. Apresente a operação do algoritmo BUCKET-SORT sobre o vetor $A = [15\ 13\ 6\ 9\ 180\ 26\ 12\ 4\ 20\ 71]$. Depois, explique o tempo de execução esperado para essa operação.
3. Prove que o algoritmo BUCKET-SORT é estável.
4. É preferível usar o BucketSort a um algoritmo de ordenação baseado em comparação, como o QuickSort, por exemplo? Quais seriam os prós e contras?