MAP 1 (Mini Aplicación 1)
Curvas de Bézier

1. Objetivo

Comprender la importancia de las curvas paramétricas en distintas aplicaciones de ingeniería y realizar modelos de curvas suaves utilizando curvas de Bézier.

2. Marco Teórico

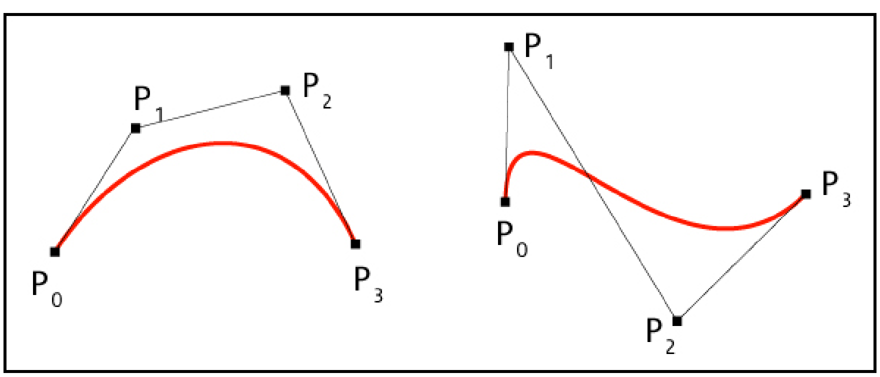
Las curvas de Bézier se emplean en el diseño auxiliado por computadora y se nombran así en honor al matemático francés Pierre Bézier (1910-1999). Bézier, trabajando en la industria automotriz para Renault, aplicó estas curvas en el diseño de diferentes partes de un automóvil. Con el desarrollo de los sistema de impresión de alta calidad, en particular los desarrolladores de *PostScript* utilizaron estas curvas para la generación de curvas y trazos. Actualmente, se siguen utilizando en software como Adobe Illustrator y Photoshop para realizar trazos, curvas cerradas o selecciones de figura, entre otros.

Matemáticamente, una curva de Bézier está determinada mediante cuatro *puntos de control*, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$. Dicha curva se define mediante las siguientes *ecuaciones paramétricas*:

$$x = x_0\,(1-t)^3 + 3x_1\,t(1-t)^2 + 3x_2\,t^2(1-t) + x_3\,t^3$$

$$y = y_0\,(1-t)^3 + 3y_1\,t(1-t)^2 + 3y_2t^2(1-t) + y_3\,t^3,$$

en donde $0 \leq t \leq 1$. Observe que cuando $t = 0$, se tiene que $(x, y) = P_0(x_0, y_0)$ y cuando $t = 1$ se tiene $(x, y) = P_3(x_3, y_3)$. Por lo tanto, dicha curva inicia en P_0 y termina en P_3. La siguiente figura ilustra algunas curvas de Bézier con los puntos de control ilustrados, note como la curvas se ajustan a medida que se varían dichos puntos de control.



3. Guía Práctica

En este MAP se utilizará la herramienta de *Google Colab* (ver Sección 5 para acceder al sitio web) para la simulación de las curvas de Bezier. En la asignación de MAP en GES usted encontrará un Notebook de Python el cual contiene los puntos a trabajar en esta Guía y ejemplos de la curvas de Bezier.

Parte 1 – Google Colab:

1. Grafique la curva de Bézier generada por puntos de control $P_0(4,1)$, $P_1(28,48)$, $P_2(50,42)$ y $P_3(40,5)$.

2. En la misma gráfica, trace los segmentos de recta $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$. Notar como los puntos de control medios P_1 y P_2 no están sobre la curva. La curva inicia en P_0, se dirige hacia P_1 y P_2 sin alcanzarlos y termina en P_3.

3. Algunas impresoras láser usan las curvas de Bézier para representar letras y otros símbolos. Experimente con puntos de control hasta que encuentre una curva de Bézier que dé una representación razonable de la letra C.

4. Se pueden representar formas más complicadas al unir dos o más curvas de Bézier. Suponga que la primera curva de Bézier tienen puntos de control P_0, P_1, P_2 y P_3 y la segunda tiene puntos de control P_3, P_4, P_5 y P_6. Si desea unir estos dos trozos de manera "suave", entonces las rectas tangentes en P_3 debe corresponderse y, por tanto, los puntos P_2, P_3 y P_4 tiene que estar sobre esta recta tangente común.

   Grafique las curvas de Bézier que considere necesarias para escribir el *nombre o apellido* de algún matemático famoso (con un mínimo de 6 letras). No olvide agregar dichas ecuaciones y su gráfica al reporte.

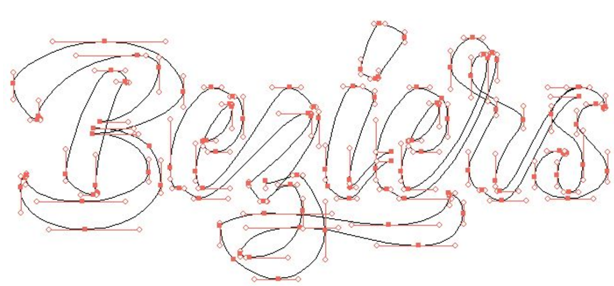
Parte 2 – Reporte

1. Agregue las imágenes de cada uno de los puntos de la parte 1.

2. Escriba las ecuaciones de las curvas de Bézier usadas para la gráfica del *nombre o apellido* de su matemático seleccionado en la parte 1.

3. Demuestre que la recta tangente a la curva en P_0 pasa por P_1 y la recta tangente en P_3 pasa por P_2.

4. Utilice las *ecuaciones paramétricas* de la letra inicial del *nombre* o *apellido* del matemático famoso del inciso anterior para plantear la *longitud de arco* de la curva. Luego, utilice software para evaluar la longitud de arco.



4. Instrucciones Generales

1. Este proyecto se realizará en *grupos* con un *máximo de 3 integrantes*. Deben enviar un correo o un mensaje en Telegram a su asistente de cátedra con el nombre y carné de cada uno de los integrantes del grupo **antes del día viernes 17 de Febrero de 2023**. No se realizarán grupos después de la fecha indicada y su nota será *cero*.

2. Deberá realizar un pequeño reporte que incluya la respuesta a cada una de las preguntas que se detallan en la Sección 3. Recuerde que respuesta no justificada no recibirá calificación, por ello debe dejar constancia de todo razonamiento y procedimiento realizado.

3. Su reporte debe de ser realizado en LaTeX.

4. **Fecha de Entrega:** Sábado 11 de Marzo de 2023. En un archivo ZIP adjunte el Notebook de Python que utilizó para la parte 1, las imágenes, archivo .tex y archivo PDF de su reporte realizado para la parte 2. Envíe su solución vía GES, **no se aceptarán entregas fueras de la fecha indicada**.

5. Referencias

Acerca de Curvas Paramétricas

a) Notas de clase, Portal de Matemática III en GES.

b) Stewart, J.: Cálculo, trascendentes tempranas. Cengage Learning, 8a. edición, 2018.

c) Larson, R. y B. Edwards: Cálculo Tomo I. Cengage Learning, 10a. edición, 2016.

d) Marsden, J. y A. Weinstein: Calculus II. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2a. edición, 1985, `http://www.cds.caltech.edu/~marsden/volume/Calculus/`.

Algunas Herramientas de Graficación

a) Página oficial de Google Colab - `https://colab.research.google.com/`

b) Página oficial de SageMath - `http://www.sagemath.org/`

c) Página oficial de Cocalc - `https://cocalc.com`

Acerca de LaTeX

a) Página oficial de MikTex - `https://miktex.org/`

b) Página oficial de TeXstudio - `https://www.texstudio.org//`

c) Página oficial de TeXmaker - `https://www.xm1math.net/texmaker/`

d) Página oficial de Overleaf - `https://www.overleaf.com/`