Вестн. Ом. ун-та. 2016. № 4. С. 10–15.

УДК 519.22, 519.248

И.П. Гайдышев

ПОДГОНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ВЫЖИВАЕМОСТИ

Изучается проблема подбора теоретического распределения для эмпирического распределения длительностей, в том числе цензурированных, подходящих по теоретическим соображениям типам распределений, обычно применяемым в параметрическом анализе выживаемости.

Ключевые слова: анализ выживаемости, параметрические методы, подгонка распределения.

Введение

Задача подгонки теоретических распределений к данным типа времени жизни в параметрическом анализе выживаемости оказывается существенно сложнее обычной постановки задачи ввиду наличия цензурирования [1; 2].

Параметрическая статистическая модель выживаемости, применяемая в технике для анализа надежности технических систем и в медицине для анализа данных типа времени жизни, описывается с помощью следующих функций [3]:

1) функция плотности распределения $f(t)$,

2) кумулятивная или интегральная функция распределения $F(t) = P(T \le t)$ – функция распределения длительностей до момента отказа t,

3) функция выживания $S(t) = 1 - F(t)$ – вероятность безотказной работы до момента t,

4) функция интенсивности отказов (функция риска) $h(t) = f(t) / (1 - F(t))$.

Под длительностью t может пониматься время жизни, количество циклов до отказа и т. п., в зависимости от конкретной задачи.

Решение задачи подгонки распределения к цензурированным данным начинается с составления функции максимального правдоподобия (ФМП) в виде [4; 5]

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ f(t_i) \right\}^{\delta_i} \left\{ S(t_i) \right\}^{1-\delta_i},$$

где θ – вектор неизвестных параметров статистической модели; t_i, $i = 1,2,\ldots,n$ – массив длительностей; δ_i, $i = 1,2,\ldots,n$ – соответствующий массив индикаторов цензурирования (для конкретной длительности индикатор равен 1, если выборка нецензурирована, и 0, если цензурирована); n – численность массива длительностей.

В дальнейших выкладках число нецензурированных длительностей обозначено как

$$r = \sum_{i=1}^{n} \delta_i .$$

Вектор искомых параметров находится из условия максимума ФМП:

$$L(\theta) \underset{\theta}{\rightarrow} \max .$$

Максимум ФМП находится из условия равенства нулю частных производных ФМП по искомым параметрам, т. е. искомые параметры удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Для упрощения максимизируют не саму ФМП, а логарифм ФМП. Эта возможность основана на том факте, что ФМП и ее логарифм достигают максимума при одних и тех же значениях искомых параметров, однако работать с логарифмом ФМП значительно проще:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Задача сводится таким образом к аналитическому либо численному решению полученной линейной или нелинейной системы уравнений.

Сводка параметров распределений и обзор алгоритмов подгонки теоретических распределений к экспериментальным данным представлена в [6–8].

1. Логарифмические модели

Не конкретизируя тип модели (изучаются две логарифмических модели – логнормальная и логлогистическая), представим общий метод решения логарифмической двухпараметрической модели. ФМП данной модели общего вида записывается как [9]

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \sigma^{-1} f\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\delta_i} \left\{ S\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\delta_i},$$

где $y_i = \ln t_i$, $i = 1,2,\dots,n$ – массив логарифмов длительностей; $\theta = \{\mu, \sigma\}$ – вектор параметров; μ – параметр положения; σ – параметр масштаба.

Логарифмическая ФМП может быть записана как

$$\ln L(\theta) = -r \ln \sigma + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left[\delta_i \ln f(z_i) + (1-\delta_i) \ln S(z_i) \right],$$

где $z_i = \dfrac{y_i - \mu}{\sigma}$, $i = 1,2,\dots,n$ – массив стандартизированных логарифмов длительностей.

В дальнейших выкладках понадобятся следующие очевидные выражения для производных

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma},\ \frac{\partial z}{\partial \sigma} = -\frac{z}{\sigma}.$$

Тогда компоненты вектора градиента $G(\theta)$ логарифмической ФМП по параметрам запишутся как

$$g_1 = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \mu} =$$

$$= -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \left[\delta_i \frac{\partial \ln f(z_i)}{\partial z_i} + (1-\delta_i) \frac{\partial \ln S(z_i)}{\partial z_i} \right],$$

$$g_2 = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \sigma} = -\frac{r}{\sigma} -$$

$$-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \left[\delta_i z_i \frac{\partial \ln f(z_i)}{\partial z_i} + (1-\delta_i) z_i \frac{\partial \ln S(z_i)}{\partial z_i} \right].$$

Компоненты матрицы вторых производных $H(\theta)$ логарифмической ФМП по параметрам (матрицы Гессе) вычисляются как

$$h_{11} = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \mu^2} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left[\delta_i \frac{\partial^2 \ln f(z_i)}{\partial z_i^2} + (1-\delta_i) \frac{\partial^2 \ln S(z_i)}{\partial z_i^2} \right],$$

$$h_{12} = h_{21} = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \mu \partial \sigma} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left[\delta_i \frac{\partial \ln f(z_i)}{\partial z_i} + (1-\delta_i) \frac{\partial \ln S(z_i)}{\partial z_i} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left[\delta_i z_i \frac{\partial^2 \ln f(z_i)}{\partial z_i^2} + (1-\delta_i) z_i \frac{\partial^2 \ln S(z_i)}{\partial z_i^2} \right],$$

$$h_{22} = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \sigma^2} = \frac{r}{\sigma^2} +$$

$$+ \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left[\delta_i z_i \frac{\partial \ln f(z_i)}{\partial z_i} + (1-\delta_i) z_i \frac{\partial \ln S(z_i)}{\partial z_i} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left[\delta_i z_i^2 \frac{\partial^2 \ln f(z_i)}{\partial z_i^2} + (1-\delta_i) z_i^2 \frac{\partial^2 \ln S(z_i)}{\partial z_i^2} \right].$$

С учетом введенных обозначений итерационная схема максимизации логарифмической ФМП алгоритма метода Ньютона–Рафсона может быть записана как [10]

$$\theta^{j+1} = \theta^j - \left[H(\theta) \right]^{-1} G(\theta),\ j = 0,1,2,\dots,$$

где j, $j = 0,1,2,\dots$ – номер итерации.

При численной реализации метода Ньютона–Рафсона должна быть учтена особенность данного метода, заключающаяся в весьма узкой области сходимости. Поэтому начальные приближения параметров должны быть заданы достаточно близкими к оптимальному решению. В этом случае метод сходится очень быстро. Для грубой локализации начальных приближений может применяться один из глобальных методов. В простейшем случае можно применить метод перебора с небольшим шагом по разумной области определения параметров либо один из вариантов метода спуска.

2. Логнормальное распределение

Плотность логнормального (логарифмически нормального) распределения с двумя параметрами имеет вид [6; 11]

$$f(t)=\frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln t-\mu)^2}{\sigma^2}\right],\sigma>0.$$

Введем нормированную величину

$$z=\frac{\ln t-\mu}{\sigma}.$$

Тогда можно записать

$$f(z)=\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2},$$

где $\phi(.)$ – функция плотности стандартного нормального распределения.

Соответствующая функция выживания

$$S(z)=1-\Phi(z),$$

где $\Phi(.)$ – функция стандартного нормального распределения.

С учетом нормировки ФМП запишется как

$$L(\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sigma}\varphi(z_i)\right\}^{\delta_i}\left\{1-\Phi(z_i)\right\}^{1-\delta_i}.$$

Соответствующая логарифмическая ФМП имеет вид

$$\ln L(\mu,\sigma)=-r\ln\sigma-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\delta_i z_i^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\ln\left[1-\Phi(z_i)\right].$$

Производные для итерационной схемы метода Ньютона–Рафсона запишутся как

$$\frac{\partial\ln f(z)}{\partial z}=-z,\quad\frac{\partial\ln S(z))}{\partial z}=-\frac{f(z)}{S(z)},$$

$$\frac{\partial^2\ln f(z)}{\partial z^2}=-1,\quad\frac{\partial^2\ln S(z)}{\partial z^2}=\frac{zf(z)}{S(z)}-\left[\frac{f(z)}{S(z)}\right]^2.$$

3. Логлогистическое распределение

Плотность логлогистического (логарифмически логистического) распределения с двумя параметрами имеет вид

$$f(t)=\frac{1}{\sigma t}\exp\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)\left[1+\exp\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-2},$$

$$\sigma>0.$$

Введем нормированную величину

$$z=\frac{\ln t-\mu}{\sigma}.$$

Тогда можно записать

$$f(z)=\frac{e^z}{\left(1+e^z\right)^2}.$$

Соответствующая функция выживания

$$S(z)=\frac{1}{1+e^z}.$$

С учетом нормировки ФМП запишется как

$$L(\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{e^{z_i}}{\left(1+e^{z_i}\right)^2}\right\}^{\delta_i}\left\{\frac{1}{1+e^{z_i}}\right\}^{1-\delta_i}.$$

Соответствующая логарифмическая ФМП имеет вид

$$\ln L(\mu,\sigma)=-r\ln\sigma+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[z_i-2\ln\left(1+e^{z_i}\right)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\ln\left(1+e^{z_i}\right).$$

Производные для итерационной схемы метода Ньютона–Рафсона запишутся как

$$\frac{\partial\ln f(z)}{\partial z}=1-\frac{2e^z}{1+e^z},\quad\frac{\partial\ln S(z)}{\partial z}=-\frac{e^z}{1+e^z},$$

$$\frac{\partial^2\ln f(z)}{\partial z^2}=-\frac{2e^z}{\left(1+e^z\right)^2},\quad\frac{\partial^2\ln S(z)}{\partial z^2}=-\frac{e^z}{\left(1+e^z\right)^2}.$$

4. Гамма-распределение

Плотность гамма-распределения имеет вид [12]

$$f(t)=\frac{1}{\alpha\Gamma(\kappa)}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\kappa-1}e^{-t/\alpha},t\geq 0,\alpha>0,\kappa>0.$$

Соответствующая функция выживания

$$S(t)=1-I(\kappa,t/\alpha),$$

где $I(.,.)$ – неполная гамма-функция.

Поэтому ФМП запишется как

$$L(\alpha,\kappa)=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\alpha\Gamma(\kappa)}\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\kappa-1}e^{-t_i/\varepsilon}\right\}\left\{1-I(\kappa,t_i/\alpha)\right\}^{1-\delta_i}.$$

Соответствующая логарифмическая ФМП имеет вид

$$\ln L(\alpha,\kappa)=-r\kappa\ln\alpha-r\ln\Gamma(\kappa)+$$

$$+(\kappa-1)\sum_{i=1}^{n}\delta_i\ln t_i-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\delta_i t_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\ln\left[1-I(\kappa,t_i)/\alpha\right].$$

Аналитическое представление производных логарифмической ФМП выполнить сложно, поэтому задача решается численно одним из вариантов метода спуска, не использующих производных.

5. Распределение Вейбулла

Плотность распределения Вейбулла с двумя параметрами имеет вид [13; 14]

$$f(t)=\lambda\gamma t^{\gamma-1}\exp\left(-\lambda t^{\gamma}\right),t\geq 0,\lambda>0,\gamma>0.$$

Соответствующая функция выживания

$$S(t)=\exp\left(-\lambda t^{\gamma}\right).$$

Поэтому ФМП запишется как

$$L(\lambda,\gamma)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\lambda\gamma t_i^{\gamma-1}\exp\left(-\lambda t_i^{\gamma}\right)\right\}^{\delta_i}\left\{\exp\left(-\lambda t_i^{\gamma}\right)\right\}^{1-\delta_i}.$$

После преобразований окончательно получаем

$$L(\lambda,\gamma)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\lambda\gamma t_i^{\gamma-1}\right\}^{\delta_i}\exp\left(-\lambda t_i^{\gamma}\right).$$

Соответствующая логарифмическая ФМП имеет вид

$$\ln L(\lambda,\gamma)=\ln(\lambda\gamma)\sum_{i=1}^{n}\delta_i+$$
$$+(\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}\delta_i\ln t_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i^{\gamma}.$$

Логарифмическая ФМП примет окончательный вид

$$\ln L(\lambda,\gamma)=r\ln(\lambda\gamma)+(\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}\delta_i\ln t_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i^{\gamma}.$$

Для вычисления значений искомых параметров найдем частные производные логарифмической ФМП по искомым параметрам и приравняем их нулю. Сначала найдем производную по λ

$$\frac{\partial\ln L(\lambda,\gamma)}{\partial\lambda}=\frac{r}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}t_i^{\gamma}=0.$$

Отсюда уравнение для вычисления параметра λ получается как

$$\lambda=r\left[\sum_{i=1}^{n}t_i^{\gamma}\right]^{-1}.$$

Вычислив производную по параметру γ,

$$\frac{\partial\ln L(\gamma,\gamma)}{\partial\gamma}=\frac{r}{\gamma}+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\ln t_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i^{\gamma}\ln t_i=0,$$

с учетом выражения для параметра λ, получаем нелинейное уравнение для поиска параметра γ в виде

$$\frac{r}{\gamma}+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\ln t_i-r\left[\sum_{i=1}^{n}t_i^{\gamma}\right]^{-1}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\gamma}\ln t_i=0.$$

Решение уравнения может быть произведено одним из методов оптимизации, например методом деления отрезка пополам.

6. Экспоненциальное распределение

Плотность экспоненциального распределения имеет вид [12]

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t},t\geq 0,\lambda>0.$$

Соответствующая функция выживания

$$S(t)=e^{-\lambda t}.$$

Поэтому ФМП запишется как

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\lambda e^{-\lambda t_i}\right\}^{\delta_i}\left\{e^{-\lambda t_i}\right\}^{1-\delta_i}.$$

После преобразований окончательно получаем

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda^{\delta_i}e^{-\lambda t_i}.$$

Соответствующая логарифмическая ФМП имеет вид

$$\ln L(\lambda)=r\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

Для вычисления значения искомого параметра найдем производную логарифмической ФМП по данному параметру и приравняем ее нулю. Производная по параметру λ имеет вид

$$\frac{\partial\ln L(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{r}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}t_i=0.$$

Отсюда уравнение для вычисления параметра λ получается как

$$\lambda=r\left[\sum_{i=1}^{n}t_i\right]^{-1}.$$

7. Распределение Рэлея

Плотность распределения Рэлея имеет вид [12]

$$f(t)=\frac{t}{\beta^2}\exp\left(-\frac{t^2}{2\beta^2}\right),t\geq 0,\beta>0.$$

Соответствующая функция выживания

$$S(t)=\exp\left(-\frac{t^2}{2\beta^2}\right).$$

Поэтому ФМП запишется как

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{t_i}{\beta^2}\exp\left(-\frac{t_i^2}{2\beta^2}\right)\right\}^{\delta_i}\left\{\exp\left(-\frac{t_i^2}{2\beta^2}\right)\right\}^{1-\delta_i}.$$

После преобразований окончательно получаем

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\beta^2}\right)^{\delta_i}\exp\left(-\frac{t_i^2}{2\beta^2}\right).$$

Соответствующая логарифмическая ФМП имеет вид

$$\ln L(\beta)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\ln\frac{t_i}{\beta^2}-\frac{1}{2}\beta^{-2}\sum_{i=1}^{n}t_i^2.$$

Для вычисления значения искомого параметра найдем производную логарифмической ФМП по данному параметру и приравняем ее нулю. Производная по параметру β имеет вид

$$\frac{\partial\ln L(\beta)}{\partial\beta}=-2\beta^{-1}\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\beta^{-3}\sum_{i=1}^{n}t_i^2=0.$$

Уравнение для вычисления параметра β получается как

$$\beta=\left[\frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{n}t_i^2\right]^{-2}.$$

8. Распределение Гомпертца

Плотность распределения Гомпертца имеет вид [15]

$$f(t)=\beta e^{\alpha t}\exp\left[\frac{\beta}{\alpha}\left(1-e^{\alpha t}\right)\right],$$
$$t\geq 0,\beta>0,\alpha\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;\infty\right[.$$

Соответствующая функция выживания

$$S(t)=\exp\left[\frac{\beta}{\alpha}\left(1-e^{\alpha t}\right)\right].$$

Поэтому ФМП запишется как

$$L(\alpha,\beta)=$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left\{ \beta e^{\alpha t_i} \exp\left[\frac{\beta}{\alpha} \left(1 - e^{\alpha t_i} \right) \right] \right\}^{\delta_i} \left\{ \exp\left[\frac{\beta}{\alpha} \left(1 - e^{\alpha t_i} \right) \right] \right\}^{1-\delta_i}.$$

После преобразований окончательно получаем

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \beta e^{\alpha t_i} \right\}^{\delta_i} \exp\left[\frac{\beta}{\alpha} \left(1 - e^{\alpha t_i} \right) \right].$$

Соответствующая логарифмическая ФМП имеет вид

$$\ln L(\alpha, \beta) = r \ln \beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} \delta_i t_i + \frac{\beta}{\alpha} \left(n - \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha t_i} \right).$$

Для вычисления значений искомых параметров найдем частные производные логарифмической ФМП по искомым параметрам и приравняем их нулю. Сначала найдем производную по β

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{r}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \left(n - \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha t_i} \right) = 0.$$

Отсюда уравнение для вычисления параметра β получается как

$$\beta = \alpha r \left[\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha t_i} - n \right]^{-1}.$$

Вычислив производную по параметру α,

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i t_i -$$

$$- \frac{\beta}{\alpha^2} \left[n + \left(1 - \alpha^2 \right) \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha t_i} \right] = 0,$$

с учетом выражения для параметра β, получаем нелинейное уравнение для поиска параметра α в виде:

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} \delta_i t_i - r \left[\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha t_i} - n \right]^{-1} \left[n + \left(1 - \alpha^2 \right) \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha t_i} \right] = 0.$$

Решение уравнения может быть произведено одним из методов оптимизации – в простейшем случае методом деления отрезка пополам.

9. Оценка качества подгонки модели

Результаты расчета тестируются объективными критериями согласия для каждого распределения. Адекватной является модель с *P*-значением, большим 0,05. В этом случае теоретическое и эмпирическое распределения значимо не различаются.

Качество статистической модели можно оценить (также сравнить между собой различные модели), используя информационный критерий Акаике [16; 17]

$$AIC = -2 \ln L\left(\hat{\theta}\right) + 2k + \frac{2k(k+1)}{n-k-1},$$

где $\ln L\left(\hat{\theta}\right)$ – оценка логарифма функции максимального правдоподобия; $\hat{\theta}$ – вектор оценок параметров статистической модели; k – число параметров модели.

Последний член в уравнении для AIC призван скорректировать значение статистики критерия для малых выборок и некоторыми авторами не используется.

Оценка логарифма функции максимального правдоподобия в рассматриваемом случае имеет теоретический вид

$$\ln L\left(\hat{\theta}\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln\left[f\left(t_i, \hat{\theta}\right) \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \delta_i\right) \ln\left[S\left(t_i, \hat{\theta}\right) \right],$$

где t_i, $i = 1,2,\ldots,n$ – эмпирический массив длительностей; δ_i, $i = 1,2,\ldots,n$ – соответствующий массив индикаторов цензурирования; n – численность массива длительностей; $f(.,.)$ – оценка функции плотности теоретического распределения; $S(.,.)$ – оценка соответствующей функции выживания.

При расчете здесь нет необходимости в явном выписывании упомянутых функций, так как формулы для логарифмов функций максимального правдоподобия всех изучаемых теоретических распределений уже известны из предыдущих выкладок.

При сравнении нескольких статистических моделей лучшей считается модель с наименьшим значением AIC [18; 19]. В литературе представлены и другие информационные критерии, имеющие интерпретацию аналогичную AIC [14; 20].

Заключение

Представлена сводка статистических распределений, применяемых в параметрическом анализе для подгонки цензурированных данных типа времени жизни. Произведены все необходимые теоретические выкладки, по результатам которых составлена библиотека исходных текстов программ на алгоритмическом языке Си, доступная под свободной лицензией согласно ГОСТ Р 54593–2011. Для пользователей разработанные алгоритмы доступны в виде специально разработанного модуля программы статистического анализа данных AtteStat (зарегистрирована Российским агентством по патентам и товарным знакам 28 июня 2002 г. за № 2002611109).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Bury K.* Statistical distributions in engineering. Cambridge University Press, 1999. 362 p.

[2] *Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B.* Statistical distributions. John Wiley & Sons, 2011. 212 p.

[3] *Хан Г., Шапиро С.* Статистические модели в инженерных задачах. М. : Мир, 1969. 395 с.

[4] *Цыплаков А. А.* Некоторые эконометрические методы. Метод максимального правдоподобия в эконометрии : методическое пособие. Новосибирск : ЭФ НГУ, 1997. 129 с.

[5] *Lawless J. F.* Statistical models and methods for lifetime data. John Wiley & Sons, 2003. 630 p.

[6] *Aitchison J.*, *Brown J. A. C.* The lognormal distribution. Cambridge University Press, 1963. 176 p.

[7] *Kleiber C., Kotz S.* Statistical size distributions in economics and actuarial sciences. John Wiley & Sons, 2003. 332 p.

[8] *Krishnamoorthy K.* Handbook of statistical distributions with applications. Chapman & Hall/CRC, 2006. 344 p.

[9] *Collett D.* Modelling survival data in medical research. Chapman & Hall/CRC, 1993. 391 p.

[10] *Носач В. В.* Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. М. : МИКАП, 1994. 382 с.

[11] *Lu J. Z., Monlezun C. J., Wu Q.* Fitting Weibull and lognormal distributions to medium–density fiberboard fiber and wood particle length // Wood and Fiber Science. 2007. Vol. 39. № 1. P. 82–94.

[12] *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.

[13] *Al–Fawzan M. A.* Methods for estimating the parameters of the Weibull distribution // Statistics on the Internet (InterStat). October 2000. URL: http://interstat.statjournals.net/YEAR/2000/articles/0010001.pdf (date of the application: 18.09.2015).

[14] *Angilletta M. J. Jr., Oufiero C.E., Leache A.D.* Direct and indirect effects of environmental temperature on the evolution of reproductive strategies: An information–theoretic approach // The American Naturalist. 2006. Vol. 168. № 4. P. 123–135.

[15] *Yousef M. H.* Estimation of parameters and truncation point for the truncated Gompertz distribution // Journal of King Saud University (Administrative Sciences). 1993. Vol. 5. № 2. P. 35–48.

[16] *Akaike H.* A Bayesian analysis of the minimum AIC procedure // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 1978. Vol. 30. Part A. № 1. P. 9–14.

[17] *Bozdogan H.* Akaike's information criterion and recent developments in information complexity // Journal of Mathematical Psychology. 2000. Vol. 44. P. 62–91.

[18] *Burnham K. P., Anderson D. R.* Model selection and multimodel inference: A practical information–theoretic approach. Springer, 1998. 488 p.

[19] *Burnham K. P.*, *Anderson D. R.* Multimodel inference: Understanding AIC and BIC in model selection // Sociological Methods & Research. 2004. Vol. 33. № 2. P. 261–304.

[20] *Бидюк П. И., Зворыгина Т. Ф.* Структурный анализ методик построения регрессионных моделей по временным рядам наблюдений // Управляющие системы и машины. 2003. № 2. С. 93–99.