Е. М. Бронштейн, Е. И. Прокудина

ОСНОВЫ АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Уфа 2012

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

Е. М. Бронштейн, Е. И. Прокудина

ОСНОВЫ АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

*Допущено Редакционно-издательским советом УГАТУ
в качестве учебного пособия для студентов специальности
080116 «Математические методы в экономике»,
магистров направлений 010400 «Прикладная математика и
информатика» и 08011 «Экономика»,
бакалавров направления 080500 «Бизнес-информатика»*

Уфа 2012

УДК 519.2 (07)
ББК 22.17 (я7)
Б88

Рецензенты:
зав. кафедрой математического моделирования Башкирского государственного университета,
д-р физ.-мат. наук, проф. Спивак С.И.,
зав. кафедрой математического моделирования Уфимского государственного нефтяного технического университета,
д-р физ.-мат. наук, проф. Мухаметзянов И.З.

Бронштейн, Е. М., Прокудина, Е. И.
Б88 Основы актуарной математики: учебное пособие./ Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. − Уфа: УГАТУ, 2012.− 320 с.

ISBN 978-5-4221-0253-2

Пособие подготовлено в соответствии с программой курса «Актуарная математика» для студентов специальности 080116 «Математические методы в экономике», магистров направлений 010400 «Прикладная математика и информатика» и 08011 «Экономика», бакалавров направления 080500 «Бизнес-информатика».

Табл. 20. Ил. 14. Библиогр.: 35 назв.

УДК 519.2 (07)
ББК 22.17 (я7)

ISBN 978-5-4221-0253-2

Аннотация

С единых позиций излагаются вопросы актуарного обеспечения общего, жизненного и пенсионного страхования. Приведено большое число задач (значительная часть – с решениями).

Пособие предназначено для студентов математических и экономических специальностей с достаточно высоким уровнем математической подготовки, изучающих соответствующие дисциплины и выполняющих курсовые и дипломные работы, а также практических актуариев.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Книга отражает опыт преподавания авторами курсов «Страхование и актуарные расчеты» и «Теория риска и моделирование рисковых ситуаций» в Уфимском государственном авиационном университете и базируется на учебных пособиях [7, 8], которые используются в ряде учебных заведений. На содержание дисциплин большое влияние оказали актуарные курсы, которые проводились на базе УГАТУ в 1996–2000 г. Лондонским институтом актуариев при поддержке Ноу-хау фонда Правительства Соединенного королевства. В пособии с единых позиций излагается актуарная теория как общего, так и жизненного страхования.

Вопросы страхования отражены в учебниках [11, 34]. Актуарные методы требуют привлечения весьма разнообразных математических методов, в том числе теории случайных процессов и интегральных уравнений. Авторы использовали пособия Г. И. Фалина и А. И. Фалина [26-29], книги Бауэрса и др. [5], Гербера [2, 12], Скота [4], Харта и др. [3], Дейкина и др. [1], а также пособия Лондонского института актуариев, изданные для подготовки к экзаменам на присвоение квалификации профессионального актуария. В последние годы вышел ряд пособий и монографий, в которых рассматриваются вопросы общего страхования. Отметим книги Голубина [13], Корнилова [14], Мельникова [17], Шахова и др. [35]. Общие подходы к понятию риска см. [25]. Авторы сочли уместным включить в пособие оригинальные результаты, полученные одним из авторов (Глава 9) [9].

Необходимые сведения из финансовой математики можно найти в [6, 32, 33], из теории вероятностей – в [21, 24, 30], из математической статистики – в [23, 24].

Для специалистов отметим, что некоторые разделы актуарной математики, включенные в пособие, в отечественной учебной литературе рассматривались достаточно редко. Это, например, совместное страхование, Парето-оптимальность в применении к актуарным расчетам, доверительность, некоторые схемы жизненного страхования.

В пособии достаточно много упражнений, они обеспечивают практические занятия по курсу. К некоторым из них приведены решения, в этом случае номер упражнения отмечен знаком «Р».

Авторы включили в пособие ряд более сложных разделов, которые не входят в учебные программы. Эти разделы, не обязательные при первом чтении, отмечены знаком *.

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ СТРАХОВОГО ДЕЛА

1.1. Сущность и виды страхования

Целью организации страхового дела в нашей стране является обеспечение защиты имущественных интересов физических и юридических лиц, Российской Федерации, субъектов Российской Федерации и муниципальных образований при наступлении страховых случаев.

Суть страхования состоит в том, что *страхователь* (физическое или юридическое лицо, заключившее договор страхования либо являющееся страхователем в силу закона) передает *страховщику* (страховой компании) за определенную плату (*страховую премию*) свой риск. При наступлении страхового случая страховщик выплачивает страхователю *страховую выплату* (*страховое возмещение*). Таким образом, убытки одного лица, с которым произошел страховой случай, распределяются на большое число страхователей, с которыми в данный момент такой случай не произошел. Основной принцип первоначальных форм страхования: страхование – это только защита от риска и оно не может служить обогащению. В настоящее время страховой бизнес является достаточно прибыльным.

Слово «страхование» в разных языках имеет разные нюансы: корень русского слова – «страх», английское «insurance» является однокоренным с «уверенностью». Можно объяснить этот факт различием уровней доверия к страхованию у обоих народов, но, на наш взгляд, уместнее трактовать русское слово «страхование» как «избавление от страха», а английское – как «обеспечение уверенности».

В настоящем пособии рассматриваются и дополнительные пенсионные схемы. Они в некотором смысле противоположны схемам жизненного страхования. Страхователь, внеся определенные средства, получает страховую выплату (пенсию) до оговоренного момента, это может быть момент смерти или определенный возраст (например, пенсия может выплачиваться в возрасте от 60 до 80 лет, если страхователь не скончается до 80 лет).

Страховое дело успешно развивалось в дореволюционной России (в нашей стране впервые в мире появились больничные кассы), и в настоящее время мы наблюдаем бурный рост после долгих лет монополии государства на страховой бизнес. Объяснить этот факт можно высокой рентабельностью (примерно в 2 раза выше, чем в западных странах) и скорой отдачей вложений страхового бизнеса. По оценкам экспертов, только около 35 % собранных страховыми компаниями страховых премий возвращается страхователям в виде страховых выплат, при этом даже те деньги, которые компании вынуждены вернуть, приносят компаниям доход в виде процентов от вложений в банки, от инвестиций в различные проекты. Среди страховых компаний на российском рынке лидируют "Ингосстрах"и "Росгосстрах" (они контролируют две трети страхового российского рынка).

Рассмотрим различные классификации видов страхования.

Законом Российской Федерации о внесении изменений и дополнений в Закон РФ "Об организации страхового дела в Российской Федерации" от 10.12.2003 *N* 172-ФЗ введена следующая классификация видов страхования:

1) страхование жизни на случай смерти, дожития до определенного возраста или срока либо наступления иного события;
2) пенсионное страхование;
3) страхование жизни с условием периодических страховых выплат (ренты, аннуитетов) и (или) с участием страхователя в инвестиционном доходе страховщика;
4) страхование от несчастных случаев и болезней;
5) медицинское страхование;
6) страхование средств наземного транспорта (за исключением средств железнодорожного транспорта);
7) страхование средств железнодорожного транспорта;
8) страхование средств воздушного транспорта;
9) страхование средств водного транспорта;
10) страхование грузов;
11) сельскохозяйственное страхование (страхование урожая, сельскохозяйственных культур, многолетних насаждений, животных);
12) страхование имущества юридических лиц, за исключением транспортных средств и сельскохозяйственного страхования;
13) страхование имущества граждан, за исключением транспортных средств;

14) страхование гражданской ответственности владельцев автотранспортных средств;
15) страхование гражданской ответственности владельцев средств воздушного транспорта;
16) страхование гражданской ответственности владельцев средств водного транспорта;
17) страхование гражданской ответственности владельцев средств железнодорожного транспорта;
18) страхование гражданской ответственности организаций, эксплуатирующих опасные объекты;
19) страхование гражданской ответственности за причинение вреда вследствие недостатков товаров, работ, услуг;
20) страхование гражданской ответственности за причинение вреда третьим лицам;
21) страхование гражданской ответственности за неисполнение или ненадлежащее исполнение обязательств по договору;
22) страхование предпринимательских рисков;
23) страхование финансовых рисков.

Страхование осуществляется в форме *добровольного* страхования и *обязательного* страхования в соответствии с наличием или отсутствием личного желания для участия человека в страховании. Добровольное страхование осуществляется на основании договора страхования и правил страхования, определяющих общие условия и порядок его осуществления.
Условия и порядок осуществления обязательного страхования определяются федеральными законами о конкретных видах обязательного страхования. Обязательное страхование сопровождает человека, например, в пути (обязательное страхование пассажиров), в армейской службе (обязательное страхование военнослужащих Вооруженных сил РФ), в жизни (обязательное медицинское страхование) и т.д.

Разделяют также *рисковое* и *накопительное* страхование.

Накопительные виды страхования, как правило, долгосрочные, величина страховой выплаты известна заранее. К накопительным видам страхования относят, например, страхование на дожитие, на случай смерти, накопительными являются и пенсионные схемы. Рисковые виды не предусматривают накопление средств, как правило, они краткосрочные, для них трудно предугадать величину ущерба.

Еще один вид классификации состоит в том, что как страховая выплата, так и премия могут выплачиваться или единовременно, или периодически. В частности, периодические выплаты при предварительных периодически вносимых премиях характерны для пенсионных схем. В любом случае все выплаты, как это принято в финансовой математике, относятся к одному моменту времени. Чаще всего они дисконтируются к моменту заключения договора. Соответствующие величины называются *приведенными* или *современными* стоимостями.

Чтобы страховая компания приняла к защите определенный риск, он должен обладать следующими характерными чертами [11]:
1) наличием большого количества единиц, подверженных риску;
2) случайным характером потерь;
3) некатастрофическим характером потерь;
4) возможностью расчета вероятности потерь;
5) невысокой страховой премией.

Страхование является финансовой операцией, отличающейся от обычных финансовых операций случайным характером момента и размера выплаты. Анализ подобных финансовых операций, оценка рисков в страховании осуществляются на основе моделей и методов актуарной математики.

По определению Лондонского актуарного общества, актуарий – это эксперт в области статистики и теории вероятностей, специалист по оценке рисков, страховых премий и дивидендов страховых компаний, говоря образно, актуарий – это специалист, который придает финансовый смысл будущему. Должность актуария является обязательной в страховых компаниях многих стран. В соответвии с действующим законодательством страховые актуарии в нашей стране осуществляют деятельность по расчетам страховых тарифов, страховых резервов страховщика, оценке его инвестиционных проектов с использованием актуарных расчетов.

Одно из центральных мест в актуарных расчетах занимает вычисление страховых премий.

1.2. Принципы назначения страховых премий

Итак, одной из основных математических задач, относящихся к сфере страхования, является вопрос о размере страховой премии. Разумеется, он должен зависеть от условий полиса. Малый размер премий, на первый взгляд, привлекателен для страхователя, но таит в себе повышенную опасность невыполнения обязательств, взятых на себя страховщиком при наступлении страхового случая.

Основополагающим является *принцип эквивалентности* ответственности страхователя и страховщика. В обобщенном смысле он состоит в том, что страховая премия должна быть в определенном смысле адекватна будущим возможным страховым выплатам. Важная особенность заключается в том обстоятельстве, что страховые выплаты носят случайный характер, в то время как премия детерминирована. Этим страховой бизнес существенно отличается от деятельности банков. Разумеется, страховщик включает в премию накладные расходы, расходы на перспективные разработки и другие виды расходов. В этом параграфе излагаются различные подходы к проблеме назначения страховых премий.

Прежде всего, мы считаем страховую выплату (риск страховщика) S случайной величиной, причем сюда может входить и временной фактор: фактическая сумма выплаты дисконтируется к моменту внесения премии. Тем самым случайная величина S учитывает, по меньшей мере, три случайных фактора:

- сам факт выплаты;
- размер выплаты;
- момент выплаты.

Страховая премия $\mathbf{P}$ определяется как некоторая функция $\mathbf{P}[S]$ случайной величины S.

Опишем некоторые наиболее популярные методы назначения страховых премий.

А. Нетто-премии. Так называется премия, определяемая правилом $\mathbf{P} = \mathrm{E}[S]$, где Е – математическое ожидание. Этот принцип в наибольшей степени отвечает принципу эквивалентности ответственности страхователя и страховщика. Фактически начисляемые премии, большие нетто-премий, называются брутто-премиями. Разница между брутто- и нетто-премиями называется страховой надбавкой.

B. Принцип пропорционального увеличения. Брутто-премия определяется по правилу $\mathbf{P} = (1+\Lambda)\mathrm{E}[S]$, где Λ – положительная константа, именуемая *относительной страховой надбавкой* (см. п. **Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

C. Принцип дисперсии. Согласно этому подходу, премия имеет вид $\mathbf{P} = \mathrm{E}[S] + \alpha \cdot \mathrm{Var}[S]$, где Var – дисперсия, α – положительная константа. В отличие от предыдущего этот принцип явным образом учитывает дисперсию случайной величины – страховой выплаты как фактора риска.

D. Принцип среднего квадратического отклонения. Премия вычисляется по формуле $\mathbf{P} = \mathrm{E}[S] + \beta\sqrt{\mathrm{Var}[S]}$, где β – положительная константа.

E. Принцип нулевой полезности. Он основан на понятии *функции полезности* $u(x)$, описывающей субъективную оценку капитала x. Прояснить это понятие можно следующим образом. Если у вас 100 рублей, и вы получаете дополнительно еще 100 рублей, то это очень существенно. Если же у вас миллион, то 100 рублей – пустяк, о котором и упоминать не стоит. Функция $u(x)$ должна обладать следующими свойствами: $u(0) = 0$, $u'(x) > 0$, $u''(x) \le 0$, т.е. функция полезности должна возрастать и быть вогнутой. Последнее следует из приведенного выше рассуждения. Пусть x – капитал страховой компании. Принцип нулевой полезности состоит в том, что в среднем мы не получаем от полиса дополнительной полезности, т.е. премия $\mathbf{P}$ должна удовлетворять равенству $u(x) = \mathrm{E}[u(x+\mathbf{P}-S)]$.
При $u(x) = x$ получим $\mathbf{P} = \mathrm{E}[S]$, т.е. нетто-премию.

Другой важный случай – экспоненциальный принцип. Функция полезности в этом случае имеет вид: $u(x) = (1-e^{-ax})/a$, где a – положительный параметр. Этот параметр определяется субъективными особенностями страховой компании; легко проверить, что эта функция обладает всеми нужными свойствами. Из равенства $(1-e^{-ax})/a = \mathrm{E}[(1-e^{-a(x+\mathbf{P}-S)})/a]$ и свойств математического ожидания получаем $\dfrac{e^{-ax}}{a} = \dfrac{1}{a}e^{-a(x-\mathrm{P})}\cdot \mathrm{E}\left[e^{-aS}\right]$, откуда $\mathbf{P} = \ln(\mathrm{E}[e^{aS}])/a$.

Замечательное свойство экспоненциального принципа состоит в том, что премия не зависит от начального капитала компании x. Можно доказать, что при фиксированном вероятностном распределении случайной величины S премия $\mathbf{P}$ растет с ростом a.

Далее, легко проверить, что $\lim\limits_{a\to 0} \ln \mathrm{E}\left[e^{aS}\right]/a = \mathrm{E}[S]$, т.е. получаем в пределе нетто-премию. Следует отметить, что $\lim\limits_{a\to 0}(1-e^{-ax})/a = x$, т.е. в пределе функция полезности совпадает с тождественной – каждый рубль в этом случае одинаково дорог независимо от капитала. Пусть значения страховой выплаты S заключены в промежутке $[r_1, r_2]$. Тогда $\lim\limits_{a\to\infty} \ln \mathrm{E}\left[e^{aS}\right]/a = r_2$.

F. Принцип среднего значения. Этот принцип подобен предыдущему. В его основе лежит некоторая функция $v(x)$ такая, что $v'(x) > 0$, $v''(x) \geq 0$. Премия определяется как решение уравнения $v(\mathbf{P}) = \mathrm{E}[v(S)]$. Частными случаями такого начисления премии являются нетто-премия (при $v(x) = x$) и премия, начисляемая по экспоненциальному принципу (при $v(x) = e^{ax}$).

G. Квантильный принцип. Квантилем случайной величины S, соответствующей параметру $\varepsilon\in(0,1)$, называется величина $\mathbf{P}_\varepsilon = \min\{p\colon F_S(p) \geq 1 - \varepsilon\}$. Здесь F_S – интегральная функция распределения. Содержательно в нашем случае – это минимальный размер страховой премии, при котором страховщик выполнит обязательства по полису с заданной вероятностью $1-\varepsilon$.

H. Принцип максимального ущерба. Согласно этому принципу, принимается $\mathbf{P} = r_2$, т.е. премия равна максимально возможной выплате по полису. Разумеется, практически такое не встречается, хотя описан случай, когда страховой агент продал молодой семье за 20$ полис, по которому в случае рождения дочери эта сумма возвращалась страхователю. Правда, разумно называть такой договор не договором страхования, а пари.

Сформулируем теперь свойства, которыми должна обладать разумно назначаемая страховая премия.

1. Неотрицательность средней прибыли по договору. Прибыль по договору является случайной величиной, равной $\mathbf{P} - S$. Сформулированное свойство означает, что $\mathrm{E}[\mathbf{P} - S] \geq 0$. Отсюда, используя свойства математического ожидания и детерминированность премии $\mathbf{P}$, получаем неравенство $\mathbf{P} \geq \mathbf{E}[S]$, т.е. брутто-премия не должна быть меньше нетто-премии.

2. Страховая сделка должна быть безарбитражной, т.е. не должна давать гарантированной прибыли страховщику. Это означает справедливость неравенства $\mathbf{P} \le r_2$, где r_2 – максимально возможный размер страховой выплаты.

3. Если выплата по договору в любом случае увеличивается на некоторую величину c, то соответственно должна увеличиться и премия, т.е. $\mathbf{P}[S+c] = \mathbf{P}[S]+c$ при постоянной c.

4. Аддитивность. Если S_1, S_2 – независимые риски, то должно выполняться равенство $\mathbf{P}[S_1+S_2] = \mathbf{P}[S_1] + \mathbf{P}[S_2]$. Это означает, что при независимых рисках безразлично, что покупать: общий полис или отдельные полисы.

5. Итеративность. Если S и X – произвольные риски, то должно выполняться равенство $\mathbf{P}[S] = \mathbf{P}[\mathbf{P}[S|X]]$. Здесь $\mathbf{P}[S|X]$ – премия по риску S при условии, что риск X примет фиксированное значение. Приведем пример, поясняющий разумность этого свойства. Заключается договор страхования автомобиля на случай аварии (риск S). При этом в договор включается и риск X аварии после угона. Премию можно вычислить в два этапа: сосчитать премию в случае угона (она высокая, поскольку угонщику машину не жалко) и без угона. Получаем некоторое распределение премий в зависимости от X, после чего можно найти уже премию по этому новому (редуцированному) риску. Итеративность означает, что размер премии при этом сохраняется. Это есть аналог формулы полной вероятности.

В табл. 1 указано, какими из перечисленных пяти свойств обладают приведенные выше восемь принципов начисления премий.

Таблица 1

Свойство	Принцип							
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
1	+	–	+	+	+	+	–	+
2	+	–	–	–	+	+	+	+
3	+	–	+	+	+	–/+	+	+
4	+	+	+	–	–/+	–/+	–	+
5	+	–	–	–	–/+	+	–	+

Знак –/+ означает, что соответствующее свойство выполняется только для экспоненциального принципа или его предельных случаев (принципов А и Н). Соответствующие доказательства мы оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим, что всеми пятью свойствами обладает только экспоненциальный принцип (и предельные нетто-принцип и принцип максимальной премии).

Экспоненциальный принцип обладает еще одним важным свойством. Пусть несколько родственных компаний собираются совместно страховать некоторый риск S, причем i-я компания использует экспоненциальный принцип с некоторым значением a_i. Как распределить риск между компаниями? Распределение риска S соответствует представлению $S = S_1+S_2+\ldots+S_n$, где S_i – риск, который принимает на себя i-я компания. Сумма премий по рискам S_i равна $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\ln \mathrm{E}\left[e^{a_i S_i}\right]$. Разумно распределить риск так, чтобы суммарная премия была минимальной. Оказывается, минимум достигается при $S_i = \frac{a}{a_i}S$, где $a = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^{-1}$.

Дополнительные подробности см. [2].

1.3. Дополнительные замечания о страховых премиях

В предыдущем параграфе сформулированы важные принципы, которые позволяют разумным образом назначать страховые премии при разнородных договорах страхования. В некотором смысле важнейшим видом премии является нетто-премия. Премия ниже этого значения является недопустимой. Страховые компании зачастую считают необходимым включение в нетто-премию ряда расходов. В зависимости от времени эти расходы могут подразделяться на:

1) производимые в момент заключения договора;
2) производимые периодически во время действия договора;
3) производимые после окончания действия договора.

Размеры расходов могут:

А) быть фиксированными;

B) составлять долю страховой премии;

C) составлять долю страховой выплаты.

Приведем примеры подобных расходов.

- расходы на оформление договора (1A);
- выплата комиссионных страховому агенту (1B) или (2B) при периодически выплачиваемой премии;
- расходы на оформление выплаты страхового пособия (3C) или (2C) при периодических выплатах;
- налоги (3C);
- административные расходы (2B) или (2C).

Соответствующие примеры приведены в упражнениях к главе 13.

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В этой главе напоминаются базовые понятия курса теории вероятностей и излагаются некоторые дополнительные сведения. Подробности можно найти в [21, 24, 30]. Учитывая специфику пособия, примеры приводятся из актуарной деятельности.

2.1. Основные понятия

Случайным событием называется событие, которое может произойти или не произойти, причем с определенной *вероятностью*. Вероятность оценивается как относительная частота наступления события при многократном повторении ситуации, в которой событие может произойти. Некорректно приписывать вероятность событию, которое может произойти только один раз, например, избранию в 2004 году Президентом США Дж. Буша. Вероятность события A будем обозначать через $\mathrm{P}[A]$.

Пример 2.1. Портфель страховой компании содержит 1000 полисов годичного страхования автомобилей «Лада». Вероятность предъявления иска по такому полису оценивается как 0,05. Это означает, что следует ожидать предъявления примерно 50 исков.

Случайной величиной (СВ) ξ называется величина, которая может принять то или иное значение в зависимости от случая, причем такая, что для любого $x \in R$ событие $\{\xi \le x\}$ является случайным. Вероятность $\mathrm{P}[\xi \le x]$ называется *функцией распределения* случайной величины ξ и обозначается $F_\xi(\mathrm{x})$. Напомним, что функция распределения является непрерывной справа неубывающей функцией, предельные значения которой равны 0 при $x \to -\infty$ и 1 при $x \to +\infty$. Говорят, что случайная величина ξ сосредоточена на промежутке

$$[\sup\{x: F_\xi(x) = 0\}, \inf\{x: F_\xi(x) = 1\}].$$

Атомом случайной величины ξ называется такое число x, для которого $F_\xi(x-0) < F_\xi(x)$. Это означает, что

$$\mathrm{P}[\xi = x] = F_\xi(x) - F_\xi(x-0) > 0.$$

Случайная величина, у которой нет атомов (т.е. у которой функция распределения непрерывна), называется *непрерывной*.

Напротив, если случайная величина сосредоточена только в атомах (т.е. если вероятность события, состоящего в том, что случайная величина примет значение, равное одному из атомов, равна 1), то она называется *дискретной.* Дискретная случайная величина принимает конечное или счетное множество значений. Ее можно задать *законом распределения*: последовательностью значений $\{\xi_i\}$ и их вероятностями $\{\mathrm{P}[\xi = \xi_i]\}$. Естественно, $\sum_i \mathrm{P}[\xi = \xi_i] = 1$. Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид $F_\xi(x) = \sum_{\xi_i < x} \mathrm{P}[\xi = \xi_i]$. Детерминированную (неслучайную) величину иногда удобно рассматривать как случайную дискретную, принимающую единственное значение.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет любое наперед заданное значение, равна 0. Чаще всего рассматриваются непрерывные случайные величины, функция распределения которых непрерывно дифференцируемая. Напомним, что производная $f_\xi(x) = F_\xi{}'(x)$ называется *плотностью распределения* случайной величины ξ. Плотность распределения – неотрицательная функция, удовлетворяющая равенству $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторое множество A равна $\int_A f_\xi(x)dx$.

Реальные случайные величины обычно не являются ни дискретными, ни непрерывными.

Часто рассматриваются случайные величины, функции распределения которых являются кусочно непрерывно дифференцируемыми. Это означает, что для некоторых $\ldots, x_{-n}, \ldots, x_0, \ldots, x_n, \ldots$ функция распределения имеет непрерывную производную на каждом из интервалов (x_k, x_{k+1}) при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и, возможно, на полубесконечных промежутках. В этом случае кусочно непрерывная производная функции распределения, не определенная в точках $\ldots, x_{-n}, \ldots, x_0, \ldots, x_n, \ldots$ также называется плотностью распределения.

На рис. 1 изображен график функции распределения случайной величины, сосредоточенной на промежутке $[0,a]$ с двумя атомами.

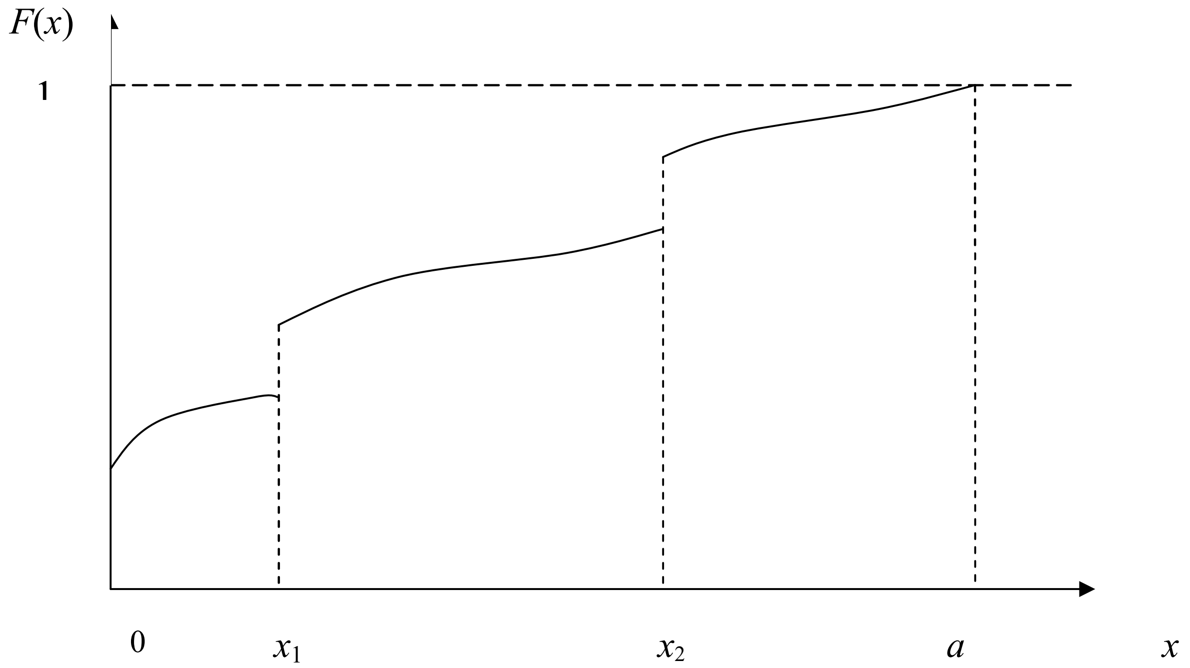

Рис. 1. График функции распределения случайной величины, сосредоточенной на промежутке [0,a] с двумя атомами.

Пример 2.2. Равномерное распределение на отрезке [a,b].

В нашем случае это означает, что вероятность того, что размер X иска по страховому полису окажется в промежутке $[c,d]\subset[a,b]$, зависит только от длины промежутка (т.е. нет оснований считать, что какие-то иски будут предъявляться чаще других). Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a\le x<b \\ 1 \text{ при } b\le x \end{cases}.$$

Эта функция является кусочно непрерывно дифференцируемой. Соответствующая плотность распределения имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ при } a \le x \le b \\ 0 \text{ при } b < x \end{cases}.$$

Наиболее общие случайные величины, которые нам встретятся, могут содержать несколько атомов x_1, …, x_n и являться непрерывными на интервалах $(-\infty,\ x_1)$, $(x_1,\ x_2)$,…, (x_n,∞). Для дальнейшего удобно считать, что допускается нулевая вероятность события, состоящего в принятии случайной величиной атомарного значения. Приведем соответствующие примеры.

Пример 2.3. Пусть ущерб ξ при наступлении страхового случая имеет непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x)$

($x \ge 0$), причем согласно условиям договора в случае, если ущерб превышает значение Q, то страховая компания выплачивает сумму Q. Если ущерб не превышает Q, то компания полностью компенсирует ущерб. Тогда случайная величина X, равная выплате страховой компании, имеет в точке Q атом с вероятностью $\int\limits_Q^\infty f_\xi(x)dx$. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int\limits_0^x f_\xi(x)dx \text{ при } x < Q \\ 1 \qquad \text{при} \quad x \ge Q. \end{cases}$$

Пример 2.4. В полисе также может быть предусмотрена *франшиза* q – минимальное значение компенсируемого ущерба. В этом случае выплата S имеет атом в точке q. Соответствующая функция распределения имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \qquad \text{при} \quad x < q \\ \int\limits_0^x f_\xi(x)dx \text{ при } q \le x < Q \\ 1 \qquad \text{при} \quad x \ge Q \end{cases}.$$

Разумеется, существуют случайные величины и более общего вида, но они нам не встретятся.

Случайные величины можно складывать, перемножать, возводить в степень.

Если функция $g(x)$ определена на промежутке $[a,b]$, на котором сосредоточена случайная величина ξ, то определена случайная величина $g(\xi)$. В примерах 2.3 и 2.4 размеры исков X можно рассматривать как функции случайной величины ξ. Функция распределения, плотность распределения, закон распределения случайной величины $g(\xi)$ строятся очевидным образом.

2.2. Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием случайной величины ξ общего вида (см. п. 2.1) называется число

$$E[\xi]=\sum_{i=1}^{n} x_i\, P[\xi = x_i] + \int_{-\infty}^{x_1} x f_\xi(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x f_\xi(x)dx + \int_{x_n}^{\infty} x f_\xi(x)dx \quad (2.1)$$

в предположении, что несобственные интегралы сходятся. Здесь x_i, $i = \overline{1,n}$ – атомы случайной величины ξ. Математическое ожидание иначе именуется *средним значением* случайной величины.

Если случайная величина ξ дискретная, то в формуле (2.1) остается только первое слагаемое, т.е. $E[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P[\xi = x_i]$; если ξ непрерывная, то $E[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx$.

Легко проверить, что если $g(\xi)$ – непрерывная функция случайного аргумента, то

$$E[g(\xi)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P[\xi = x_i] + \int_{-\infty}^{x_1} g(x) f_\xi(x)dx + \quad (2.2)$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) f_\xi(x)dx + \int_{x_n}^{\infty} g(x) f_\xi(x)dx\,.$$

Напомним, что $E[\xi+\zeta] = E[\xi]+E[\zeta]$, $E[a\xi] = aE[\xi]$, если величина a детерминированная. Далее формулы будут с соответствующими оговорками доказываться либо для дискретных, либо для непрерывных СВ. Очевидно, что математическое ожидание неотрицательной СВ неотрицательно. Поэтому из неравенства $\xi \le \zeta$ (это означает, что при любых испытаниях значение СВ ξ не превзойдет значения СВ ζ) следует неравенство $E[\xi] \le E[\zeta]$.

Из определения видно, что математическое ожидание детерминированной величины, рассматриваемой как СВ, равно значению этой величины.

Пусть k – натуральное число. *k-м моментом* случайной величины ξ называется величина $E[\xi^k]$. *k-м центральным моментом* ξ называется величина

$$E[(\xi - E[\xi])^k].$$

Дисперсией $\mathrm{Var}[\xi]$ случайной величины ξ называется второй центральный момент, т.е.

$$\mathrm{Var}[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^2].$$

Раскрывая скобки и используя свойства математического ожидания, получим известную формулу

$$\mathrm{Var}[\xi] = E[\xi^2] - E[\xi]^2.$$

Дисперсия есть мера разброса отклонений случайной величины: дисперсия равна нулю тогда и только тогда, когда случайная величина детерминированная, т.е. когда разброса нет вообще. В финансовой и актуарной математике дисперсия часто рассматривается как показатель риска. Часто рассматривается *среднее квадратическое* (*или стандартное*) отклонение случайной величины

$$\sigma[\xi] = \sqrt{\mathrm{Var}[\xi]}.$$

В отличие от дисперсии размерность этой величины совпадает с размерностью самой случайной величины. Например, если размер иска измеряется в руб., то дисперсия имеет размерность руб.^{2}, а нормальное отклонение – руб.

Для СВ, принимающих неотрицательные значения, полезной характеристикой является *коэффициент вариации*

$$c[\xi] = \sigma[\xi]/E[\xi].$$

Эта безразмерная величина является мерой разброса значений СВ относительно среднего.

Коэффициентом асимметрии случайной величины называется величина

$$S[\xi] = \frac{E[\xi - E[\xi]]^3}{(\sigma[\xi])^3}. \tag{2.3}$$

Коэффициент асимметрии величина безразмерная. Положительность коэффициента асимметрии означает, что значения, большие математического ожидания, случайная величина принимает чаще, чем меньшие, отрицательность говорит об обратной тенденции. Для страховой компании выгодно, чтобы при прочих равных условиях коэффициент асимметрии размера исков был отрицательным.

Вычислим величину $E[\xi - E[\xi]]^3$. Имеем

$$E[\xi - E[\xi]]^3 = E[\xi^3] - 3E[\xi^2]\;E[\xi] + 3E[\xi]E^2[\xi] - E^3[\xi] = \tag{2.4}$$

$$= E[\xi^3] - 3\mathrm{Var}[\xi]E[\xi] - E^3[\xi].$$

В некоторых случаях удается оценить значение $g(E[\xi])$ через $E[g(\xi)]$. Приведем два результата такого рода.

А) Вогнутость функции g

Пусть функция $g(x)$ имеет неположительную вторую производную. Такие функции являются вогнутыми, т.е. их график расположен ниже касательной к графику в любой точке. Это означает, что для любой точки x_0 справедливо неравенство

$$g(x) \le g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0). \quad (2.5)$$

Пусть теперь ξ – случайная величина. Положив в (2.5) $x = \xi$, $x_0 = \mathrm{E}[\xi]$, получаем:

$$g(\xi) \le g(\mathrm{E}[\xi]) + g'(\mathrm{E}[\xi])(\xi - \mathrm{E}[\xi]).$$

Переходя в этом неравенстве к математическим ожиданиям, получим

$$\mathrm{E}(g[\xi]) \le g(\mathrm{E}[\xi]).$$

Это неравенство называется *неравенством Иенсена.*

Приведем пример применения этой формулы к актуарным расчетам. Современная стоимость n-летнего (n – произвольное положительное число) непрерывного аннуитета при силе процента δ равна

$$\bar{a}_{\overline{n}|\delta} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} \text{ [6].}$$

Эта функция от n является вогнутой. Пусть человек в возрасте x заключил договор страхования, согласно которому он непрерывно пожизненно вносит страховой компании страховую премию в размере 1 в год (размер страховой выплаты здесь не играет роли; подробности в главе 13). Пусть $T(x)$ – случайная величина, равная остаточной продолжительности жизни. Средняя продолжительность оставшейся жизни $\mathrm{E}[T(x)]$ обозначается через $\overset{0}{e}_x$ (п. 10.4). Применение неравенства Иенсена дает

$$\mathrm{E}\left[\bar{a}_{\overline{T(x)}|\delta}\right] \le \bar{a}_{\overline{\overset{0}{e}_x}|\delta}.$$

Левая часть есть средняя современная стоимость выплат страхователя. Именно по ней в силу принципа равной ответственности определяется размер страхового вознаграждения.

Б) Применение формулы Тейлора

Если у функции $g(x)$ производные порядка выше второго малы (это означает, что функция близка к квадратичной), то в окрестности точки x_0 справедливо приближенное равенство [31]

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + g''(x_0)(x-x_0)^2/2.$$

Полагая, как и раньше $x = \xi$, $x_0 = \mathrm{E}[\xi]$, получаем

$$g(\xi) \approx g(\mathrm{E}[\xi]) + g'(\mathrm{E}[\xi])(\xi-\mathrm{E}[\xi]) + g''(\mathrm{E}[\xi])(\xi-\mathrm{E}[\xi])^2/2.$$

Переходя к математическим ожиданиям, окончательно получаем

$$\mathrm{E}[g(\xi)] \approx g(\mathrm{E}[\xi])+g''(\mathrm{E}[\xi])\mathrm{Var}[\xi]/2.$$

Важной функцией, связанной со случайной величиной ξ, является *производящая функция моментов* (ПФМ)

$$M_\xi(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\xi t}].$$

Очевидно, что $M_\xi(0) = 1$. Мы рассматриваем только такие случайные величины, для которых эта функция определена на некоторой окрестности точки 0. Производящая функция моментов полностью характеризует случайную величину: можно доказать, что если две СВ имеют равные ПФМ, то их функции распределения совпадают. Используя формулу (2.2), дифференцируя по t и полагая $t = 0$ в обеих частях полученного равенства, получаем:

$$M_\xi^{(k)}(0) = \mathrm{E}[\xi^k], \tag{2.6}$$

отсюда

$$\mathrm{E}[\xi] = M_\xi'(0),\ \mathrm{Var}[\xi] = \mathrm{M}_\xi''(0) - \left(\mathrm{M}_\xi'(0)\right)^2. \qquad (2.7)$$

Для неотрицательных случайных величин (в нашем случае это так) часто используется *преобразование Лапласа*

$$L_\xi(t) = M_\xi(-t).$$

Поскольку

$$L_\xi^{(k)}(0) = (-1)^k M_\xi^{(k)}(0),$$

то

$$\mathrm{E}[\xi] = -L_\xi'(0),\ \mathrm{Var}[\xi] = L_\xi''(0) - \left(L_\xi'(0)\right)^2.$$

Для дискретных случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения, чаще применяется *производящая функция вероятностей*

$$m_\xi(z) = M_\xi(\ln z) = \mathrm{E}[z^\xi] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathrm{P}[\xi = n], \qquad (2.8)$$

определенная при $|z| \le 1$.

Из предыдущего следует, что производящая функция вероятностей также полностью характеризует случайную величину. Далее,

$$m_\xi'(z) = M_\xi'(\ln z)/z,\ m_\xi''(z) = (M_\xi''(\ln z) - M_\xi'(\ln z))/z^2,$$

откуда

$$M_\xi'(0) = m_\xi'(1),\ M_\xi''(0) = m_\xi''(1) + m_\xi'(1).$$

Из (2.7)

$$\mathrm{E}[\xi] = m_\xi'(1),\ \mathrm{Var}[\xi] = m_\xi''(1) + m_\xi'(1) - (m_\xi'(1))^2. \qquad (2.9)$$

2.3. Системы случайных величин

Часто рассматриваются сразу несколько случайных величин. В имущественном страховании такими, например, являются момент предъявления предстоящего иска и размер ущерба, в страховании жизней моменты предъявления исков по разным договорам.

Пусть ξ_1, ξ_2, …, ξ_n некоторые СВ. *Функцией распределения семейства СВ* называется функция n переменных

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1, x_2,..., x_n) = \text{P}[\xi_1 \le x_1,\ \xi_2 \le x_2,\ \ldots,\ \xi_n \le x_n],$$

где $x_i \in (-\infty, +\infty)$ ($x_i \in \overline{1, n}$). Из этого определения следует, что функцию распределения любой из СВ ξ_1, ξ_2, …, ξ_n можно найти следующим образом:

$$F_{\xi_1}(x) = F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x, +\infty,..., +\infty),$$
$$F_{\xi_2}(x) = F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(+\infty, x,..., +\infty),$$
$$...,$$
$$F_{\xi_n}(x) = F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(+\infty, +\infty,..., x).$$

Случайные события называются *независимыми,* если вероятность совместного наступления любого набора из них равна произведению их вероятностей. Условной вероятностью события A при условии B называется величина

$$\text{P}[A \mid B] = \frac{\text{P}[AB]}{\text{P}[B]} \quad (\text{P}[B] \ne 0).$$

Независимость означает, что $\text{P}[A \mid B] = \text{P}[A]$.

Важную роль, как в теории, так и в практической деятельности, играет *формула Байеса* или *формула обратной вероятности.* Если вероятности событий A и B положительные, то по определению условной вероятности справедливо равенство

$$\text{P}[AB] = \text{P}[A \mid B]\text{P}[B] = \text{P}[B \mid A]\text{P}[A],$$

откуда

$$\mathrm{P}[A \mid B] = \frac{\mathrm{P}[AB]}{\mathrm{P}[B]} = \frac{\mathrm{P}[B|A]\mathrm{P}[A]}{\mathrm{P}[B]}. \qquad (2.10)$$

На практике (в том числе в актуарной деятельности) эта формула применяется для принятия тех или иных решений. Например, известно, что повышенное кровяное давление с определенной вероятностью свидетельствует о серьезных аномалиях сердечно-сосудистой системы. Размер страховой премии при подобных аномалиях повышается. Следует ли повышать премию, если в компанию обращается клиент с повышенным давлением? Конкретные примеры приведены в упражнениях.

Случайные величины ξ_1, ξ_2, …, ξ_n называются *независимыми,* если

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1, x_2,..., x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)...F_{\xi_n}(x_n),$$

т.е. если независимы события ($\xi_1 \le x_1$),…, ($\xi_n \le x_n$) при любых значениях $x_1,...,x_n$. Очевидно, что детерминированная величина и любая СВ независимы. Одна из основных предпосылок актуарной математики состоит в том, что случайные величины, описывающие моменты предъявления исков и размеры исков, независимы. Это означает, что события {за временной промежуток (t_1, t_2) поступит k исков} и {за временной промежуток (t_3, t_4) сумма предъявленных исков не больше A} независимы при любых t_1, t_2, t_3, t_4, k, A.

Если функция $F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1, x_2,..., x_n)$ дифференцируема n раз, то предел отношения вероятности попадания многомерной СВ в область к объему области, когда область стягивается к точке, называется *плотностью распределения вероятностей системы СВ* ξ_1, ξ_2, …, ξ_n. Аналитически плотность распределения многомерной СВ имеет вид

$$f_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1, x_2,..., x_n) = \frac{\partial F(x_1,..., x_\mathrm{n})}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_\mathrm{n}}.$$

Из определения независимости следует, что для независимых СВ

$$f_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)=f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)\dots f_{\xi_n}(x_n).$$

Если A – некоторая (достаточно простая) область в n-мерном пространстве, то вероятность события, состоящего в том, что точка с координатами (ξ_1, ξ_2, …, ξ_n) попадет в область A, равна многократному интегралу

$$\int\underset{A}{\dots}\int f_{\xi_1\dots\xi_n}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,$$

в частности

$$\int\underset{A}{\dots}\int f_{\xi_1\dots\xi_n}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = 1.$$

Равномерное многомерное распределение на множестве A определяется так: плотность распределения положительная и постоянная в точках множества A и равна 0 вне A.

Пример 2.5. Пусть ξ_1, ξ_2 – независимые равномерно распределенные СВ, сосредоточенные соответственно на отрезках $[a,b]$, $[c,d]$. Тогда

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2) = 1/((b-a)(d-c))$$

при $(x_1,x_2)\in[a,b]\times[c,d]$ и 0 в других точках, т.е. такая система СВ имеет равномерное распределение.

Если функция $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ непрерывная, то математическое ожидание СВ $\zeta = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ можно найти по формуле

$$\mathrm{E}[\zeta] = \int\underset{R^n}{\dots}\int g(x_1,\dots,x_n)f_{\xi_1\dots\xi_n}(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n.$$

По предыдущему для независимых СВ ξ_1, ξ_2, …, ξ_n справедливо равенство

$$\mathrm{E}[\xi_1\cdot\xi_2\cdot \dots\cdot \xi_n] = \mathrm{E}[\xi_1]\cdot\mathrm{E}[\xi_2]\cdot \dots\cdot \mathrm{E}[\xi_n].$$

Особенно важной является функция двух переменных $(\xi_i - E[\xi_i])(\xi_j - E[\xi_j])$. Ее математическое ожидание

$$\mathrm{Cov}[\xi_i, \xi_i] = E[(\xi_i - E[\xi_i])(\xi_j - E[\xi_j])]$$

называется *ковариацией или корреляционным моментом* СВ ξ_i и ξ_j. Раскрывая скобки и пользуясь отмеченными свойствами, получим равенство

$$\mathrm{Cov}[\xi_i, \xi_i] = E[\xi_i\xi_j] - E[\xi_i]E[\xi_j].$$

Случайные величины ξ_i и ξ_j называются *некоррелированными,* если $\mathrm{Cov}[\xi_i, \xi_j] = 0$. Если случайные величины независимы, то они некоррелированы. Обратное утверждение неверно.

Далее,

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E[\xi_i])\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[\xi_i] + 2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}[\xi_i, \xi_j],$$

отсюда видно, что дисперсия суммы независимых СВ равна сумме дисперсий.

Важными являются понятия *условного распределения и условного математического ожидания.* Пусть дана система двух (для простоты) случайных величин ξ, ζ. Зафиксируем значение СВ $\zeta = y$. Для системы дискретных СВ из всех исходов испытаний мы будем отбирать только те, в которых ζ принимает это фиксированное значение. Полученное в результате распределение ξ – *условное распределение* ξ при условии, что ζ принимает значение y. Для дискретной системы СВ

$$P[\xi = x_i \mid \zeta = y_j] = \frac{P[\xi = x_i, \zeta = y_j]}{P[\zeta = y_j]} = \frac{P[\xi = x_i, \zeta = y_j]}{\sum_i P[\xi = x_i, \zeta = y_j]}.$$

Для системы непрерывных СВ следует отбирать исходы тех испытаний, в которых $\zeta \in [y - \varepsilon, y + \varepsilon]$. Стандартным образом при $\varepsilon \to 0$ получим:

$$f_\xi(x|\zeta = y) = \frac{f_{\xi,\zeta}(x,y)}{f_\xi(y)}.$$

Так определенная величина называется *условной плотностью распределения*.

Встречаются и случаи, когда СВ ξ – непрерывная, а ζ – дискретная. В этом случае

$$f_\xi(x|\zeta = y) = \frac{f_\xi(x, \zeta = y)}{\mathrm{P}[\zeta = y]}. \qquad (2.11)$$

Условное математическое ожидание обозначается $\mathrm{E}[\xi \mid \zeta]$. Соответствующие формулы записываются аналогично предыдущим. $\mathrm{E}[\xi \mid \zeta]$ является функцией от значений СВ ζ.

Одной из важнейших формул теории вероятностей является *формула полной вероятности.* Если СВ ζ может принимать значения $y_1,\dots,y_m$ и не принимает никаких других, то

$$\mathrm{P}[A] = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}[A \mid \zeta = y_i]\mathrm{P}[\zeta = y_i]. \qquad (2.12)$$

Здесь A – произвольное случайное событие. Для наших целей ее удобно переписать в виде

$$\mathrm{P}[A] = \mathrm{E}[\mathrm{P}[A|\zeta]]. \qquad (2.13)$$

В правой части равенства (2.13) математическое ожидание берется по СВ ζ**.**

В этом виде формула годится и для непрерывных случайных величин.

Найдем (для дискретных случайных величин) значение $\mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi \mid \zeta]]$. Пусть СВ ξ принимает значения $x_1,\dots,$ x_n, а СВ ζ – значения $y_1,\dots, y_m$, тогда

$$\mathrm{E}[\xi \mid \zeta = y_\mathrm{j}] = \sum_{i-1}^{n} x_i \mathrm{P}[\xi = x_i \mid \zeta = y_i],$$

отсюда

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi \mid \zeta]] = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}[\zeta = y_j]\mathrm{E}\left[\xi \middle| \zeta = y_j\right].$$

Подставляя выражение для $\mathrm{E}[\xi \mid \zeta = y_j]$ и меняя порядок суммирования, получаем

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi \mid \zeta]] = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}[\xi = x_i | \zeta = y_j]\mathrm{P}[\zeta = y_j].$$

Поскольку события $\{\zeta = y_j\colon j = \overline{1,m}\}$ образуют полную группу и несовместны (это означает, что в любом случае произойдет в точности одно из этих событий), то по формуле полной вероятности (2.12)

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}[\xi = x_i | \zeta = y_j]\mathrm{P}[\zeta = y_j] = \mathrm{P}[\xi = x_i].$$

Отсюда справедливо равенство

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi \mid \zeta]] = \mathrm{E}[\xi]. \qquad (2.14)$$

Эта формула называется *итеративным правилом или формулой полного математического ожидания.* Разумеется, она справедлива и для случайных величин более общей природы, доказательство здесь опускаем.

Получим теперь подобную формулу для дисперсии. Заменив в (2.14) СВ ξ на ξ^2, получаем равенство

$$\mathrm{E}[\xi^2] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi^2 \mid \zeta]] = \mathrm{E}[\mathrm{Var}[\xi \mid \zeta]] + \mathrm{E}[(\mathrm{E}[\xi \mid \zeta])^2].$$

Вычитая из левой части последнего равенства величину $(\mathrm{E}[\xi])^2$, а из правой равную ей в силу (2.14) величину $(\mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi \mid \zeta]])^2$, получаем равенство

$$\mathrm{Var}[\xi] = \mathrm{E}[\mathrm{Var}[\xi \mid \zeta]] + \mathrm{Var}\,[\mathrm{E}[\xi \mid \zeta]]. \qquad (2.15)$$

2.4. Суммы независимых случайных величин

Пусть ξ, ζ – независимые СВ. Найдем выражение функции распределения суммы $\xi + \zeta$ через функции распределения слагаемых. Используя итеративное правило (2.14), получаем:

$$F_{\xi+\zeta}(x) = P[\xi + \zeta \le x] = E[P[\xi + \zeta \le x \mid \zeta]] = E[P[\xi \le x - \zeta \mid \zeta]].$$

Здесь использовано то обстоятельство, что величина $P[\xi + \zeta < x]$ детерминированная. Поскольку СВ ξ, ζ независимые, то

$$P[\xi \le x - \zeta \mid \zeta] = P[\xi \le x - \zeta] = F_{\xi}(x - \zeta), \text{ т.е.}$$

$$F_{\xi+\zeta}(x) = E[F_{\xi}(x - \zeta)].$$

Если случайные величины ξ, ζ непрерывные, то отсюда получаем:

$$F_{\xi+\zeta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi}(x-y) f_{\zeta}(y) dy .$$

Дифференцируя это равенство по переменной x, получаем равенство

$$f_{\xi+\zeta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x-y) f_{\zeta}(y) dy . \qquad (2.16)$$

Такая операция над функциями называется *конволюцией* или *сверткой.* Замена переменной $y := x - y$ позволяет доказать важнейшее свойство свертки – коммутативность:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(y) f_{\zeta}(x-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x-y) f_{\zeta}(y) dy \qquad (2.17)$$

Впрочем, из предыдущего равенства коммутативность очевидна, поскольку $f_{\xi+\zeta}(x) = f_{\zeta+\xi}(x)$.

Если СВ принимают только неотрицательные значения, то формула принимает вид:

$$f_{\xi+\zeta}(x) = \int_0^x f_\xi(x-y) f_\zeta(y) dy.$$

Коммутативность свертки справедлива и в этом случае. Схожая формула справедлива для дискретных СВ, принимающих только целые значения. В этом случае интеграл заменяется суммой.

Рассмотрим ПФМ суммы $\xi + \zeta$. Поскольку в силу независимости ξ и ζ СВ e^ξ и e^ζ также независимы, то

$$M_{\xi+\zeta}(t) = \mathrm{E}[e^{(\xi+\zeta)t}] = \mathrm{E}[e^{\xi t}e^{\zeta t}] = \mathrm{E}[e^{\xi t}]\mathrm{E}[e^{\zeta t}] = M_\xi(t)\, M_\zeta(t). \quad (2.18)$$

Разумеется, так же можно рассуждать, если число слагаемых больше двух. Аналогично производящая функция суммы независимых дискретных СВ, принимающих целые неотрицательные значения, равна произведению проводящих функций слагаемых. Если независимые СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ одинаково распределены, то

$$M_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k}(t) = M_\xi(t)^k,$$

где ξ любая из СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$. Подобная техника применяется для подсчета характеристик суммарного иска по портфелю страховых договоров.

Пусть теперь $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ – последовательность одинаково распределенных случайных величин, любое конечное семейство которых является независимым. Пусть также N – случайная величина, принимающая натуральные значения и независимая с любым конечным семейством СВ из последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$. Рассмотрим случайную величину $S = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$. Будем считать по определению, что $S = 0$ при $N = 0$.

Применение итеративного правила (2.14) позволяет вычислить производящую функцию моментов СВ S:

$$M_S(t) = \mathrm{E}[e^{St}] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[e^{St} \mid N]] = \mathrm{E}[M_\xi(t)^N] = m_N(M_\xi(t)),$$

где m_N – производящая функция СВ N. Отсюда,

$$M_S'(t) = m_N'(M_\xi(t))\, M_\xi'(t).$$

При $t = 0$ получаем:

$$M_S'(0) = m_N'(M_\xi(0))\, M_\xi'(0) = m_N'(1) M_\xi'(0).$$

Это означает справедливость тождества Вальда

$$\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[N]\, \mathrm{E}[\xi]. \qquad (2.19)$$

Здесь обозначения $M_\xi(t)$, $\mathrm{E}[\xi]$ относятся к каждой из СВ последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$

В приложении к актуарной ситуации равенство (2.19) означает, что средний размер суммы исков равен произведению среднего размера одного иска на среднее число исков.

Далее,

$$M_S''(t) = m_N''(M_\xi(t))(M_\xi'(t))^2 + m_N'(M_\xi(t)) M_\xi''(t).$$

При $t = 0$

$$M_S''(0) = m_N''(1)(M_\xi'(0))^2 + m_N'(1) M_\xi''(0).$$

Учитывая равенства (2.8), (2.9), получаем

$$M_S''(0) = \mathrm{Var}[N]\mathrm{E}^2[\xi] + \mathrm{E}[N]\mathrm{Var}[\xi] + \mathrm{E}^2[\xi]\mathrm{E}^2[N].$$

Вычитая из левой и правой частей квадраты соответственно левой и правой частей равенства (2.19), получаем

$$\mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[N]\mathrm{E}^2[\xi] + \mathrm{E}[N]\mathrm{Var}[\xi]. \qquad (2.20)$$

Первое слагаемое правой части учитывает дисперсию числа исков, второе – дисперсию каждого иска. В частности если число исков детерминировано, то $\mathrm{Var}[S] = N\mathrm{Var}[\xi]$. Эта формула – следствие уже отмеченного свойства дисперсии суммы независимых случайных величин. Если же детерминированным является размер иска, то $\mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[N]\xi^2$. Эта формула является частным случаем правила $\mathrm{Var}[a\zeta] = a^2\mathrm{Var}[\zeta]$, где величина a детерминированная.

Если теперь СВ ξ принимает только натуральные значения, то в предыдущих формулах ПФМ можно заменить на производящую функцию $m_\xi(z)$ (достаточно сделать замену $\xi = \ln z$). Получаем равенство $m_S(z) = m_N(m_\xi(z))$. Эти формулы будут использованы в п. 5.2.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Предполагается, что по однородному портфелю страховых договоров в течение года с вероятностью 0,9 не будет предъявлено ни одного иска, с вероятностью 0,05 один иск, с вероятностью 0,04 два иска и с вероятностью 0,01 три иска. Договоры предполагаются независимыми, причем иск может равняться 3000 руб. с вероятностью 0,6 и 5000 руб. с вероятностью 0,4. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы исков за год.

2. (Р) Предполагается, что по однородному портфелю страховых договоров в течение года с вероятностью pq^n будет предъявлено n исков (p, $q > 0$, $p+q = 1$), плотность распределения размера иска пропорциональна $x/(1+x)^5$. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы исков за год.

3. Договор страхования строения от пожара предусматривает выплату 500 тыс. руб. при легком пожаре и 1,5 млн руб. при сильном. Застрахованы два рядом расположенных строения. Из результатов наблюдений предполагается, что вероятности пожаров этих строений таковы (Таблица 2):

а) найдите закон распределения вероятностей выплат по договору страхования второго строения при условии, что на первом строении пожар произойдет;

в) найдите закон распределения вероятностей выплат по договору страхования первого строения при условии, что на втором строении пожара не будет;

c) найдите коэффициент корреляции между выплатами по этим договорам.

Таблица 2

–		1-е строение		
		Нет пожара	Легкий пожар	Сильный пожар
2-е строение	Нет пожара	0,75	0,05	0
	Легкий пожар	0,05	0,1	0,01
	Сильный пожар	0	0,01	0,03

4. На базе исторических наблюдений предполагается, что закон распределения страхового возмещения при страховании автомобилей (в руб.) имеет вид (табл. 3).

Таблица 3

Размер возмещения	200	500	1000	2000	5000	7000	10000
Вероятность	0,3	0,1	0,05	0,2	0,05	0,1	0,2

Найдите вероятность того, что размер страхового возмещения будет отличаться от математического ожидания меньше, чем на одно среднее квадратическое отклонение.

5. (Р) Считается, что закон распределения ущерба строения от пожара имеет вид (табл. 4).

Таблица 4

Ущерб	0	5000	10000	20000	40000	80000	100000
Вероятность	0,8	0,08	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01

Найдите средний размер ущерба при наступлении пожара.

6. Анализ показал, что размер страховых исков можно считать распределенным с плотностью

$$f_Y(x) = \begin{cases} kx(100000 - x)^3 & \text{при} \quad 0 < x < 100000, \\ 0 & \text{при} \quad x \geq 100000, \end{cases}$$

при некотором значении k. Найдите вероятность того, что иск не превысит 70000 при условии, что он превысит 20000.

7. Актуарий исходит из того, что иски имеют производящую функцию моментов, равную $M_X(t) = \dfrac{1}{(1-1000t)^4}$. Определите средний размер и дисперсию иска.

8. Компания делит страхователей автомобилей на две группы. Для первой группы, составляющей 70 % всех страхователей, средний иск по договору первой группы равен 2000 при среднем квадратическом отклонении 220, для договора второй группы соответственно 5000 и 620. Найдите дисперсию иска по случайно выбранному договору.

9. Вероятность того, что наудачу выбранный мужчина страдает болезнями органов кровообращения, равна 0,15. Больной такого профиля является курильщиком с вдвое большей вероятностью, чем здоровый. Найдите вероятность того, что курильщик страдает болезнями органов кровообращения.

10. В среднем каждый четвертый имеет болезни сердечно-сосудистой системы, при этом в среднем двое из трех курящих имеют подобные заболевания. Если курящий обратится в компанию медицинского страхования, то следует ли увеличивать страховую премию как больному с поражениями сердечно-сосудистой системы?

11. В страховой компании застрахованы 100 автомобилей, из них 16 выпуска 1998 года, 20 выпуска 1999 года, 24 выпуска

2000 года, 40 других лет выпуска. Обработка статистических данных показала, что вероятность аварии автомобиля 1998 года можно принять равной 0,06, 1999 года 0,04, 2000 года 0,03 и 0,05 для автомобилей других лет выпуска. Если автомобиль попадет в аварию, то какова вероятность того, что он выпущен в 1998 году?

12. 10 % страхователей некоторой компании страхования жизни курильщики. Вероятность смерти в течение года равна 0,01 для некурящего и 0,05 для курильщика. Оцените долю курильщиков среди страхователей, которые умрут в течение года.

ГЛАВА 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ ИСКОВ

Следует иметь в виду, что реального распределения СВ мы не знаем. Мы можем только по наблюдениям высказать ту или иную гипотезу о виде распределения СВ – этим занимается математическая статистика. Реальное распределение данных мы заменяем некоторым приближением. Подбор приближенного распределения, описывающего СВ – размер предъявляемого иска, является очень важным этапом моделирования деятельности страховой компании. Сформулируем некоторые свойства распределения, которые при этом являются важными.

1. Плотность распределения (если она существует) должна быть либо убывающей, либо иметь единственный максимум. Если это свойство не выполняется, то договоры страхования неверно сгруппированы. Например, плотность распределения размеров исков по страхованию автомобилей, скорее всего, имеет несколько максимумов: одни относятся к отечественным, другие – к иномаркам. Это значит, что портфель надо разбить на части.

2. Важным показателем является «тяжесть хвоста» распределения, т.е. скорость, с которой убывает вероятность $P[\xi > x]$ при $x \to +\infty$. Если эта вероятность убывает как степенная функция $x^{-\varepsilon}$ при некотором положительном ε, то хвост считается тяжелым. Тяжелый хвост говорит об относительно высокой доле крупных исков. Опасно как переоценить тяжесть хвоста (это приведет к завышенным страховым премиям), так и недооценить (компания может оказаться некредитоспособной).

3. Желательно использовать достаточно простое распределение, с которым можно работать аналитически. Наиболее часто используются равномерное распределение, распределение Парето и гамма-распределение. В финансовой математике распространена модель Башелье – Самуэльсона, в соответствии с которой считается, что цена акции X_n в момент n равна $X_0 e^{S_n}$, где СВ S_n нормально распределена. Распределение СВ X_n называется *логнормальным.*

Свойства нормального распределения подробно изучались в курсе теории вероятностей.

3.1. Равномерное распределение

Равномерное распределение определено в п. 2.1. Для актуарных приложений следует полагать $a \geq 0$. Вычислим основные числовые характеристики этого распределения, используя ПФМ.

$$M_\xi(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\xi t}] = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}dx = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} = \frac{e^{ta}}{t(b-a)}\left(e^{t(b-a)}-1\right) =$$

$$= \frac{e^{ta}}{t(b-a)}\left(1+t(b-a)+\ldots+\frac{t^n(b-a)^n}{n!}+\ldots-1\right) =$$

$$= e^{ta}\left(1+\frac{t(b-a)}{2!}+\ldots+\frac{t^{n-1}(b-a)^{n-1}}{n!}+\ldots\right).$$

Вычисляя производные и подставляя 0, получим:

$$M_\xi'(0) = \frac{a+b}{2},\; M_\xi''(0) = \frac{a^2+ab+b^2}{2}.$$

Отсюда по формулам (2.7)

$$\mathrm{E}[\xi] = \frac{a+b}{2},\; \mathrm{Var}[\xi] = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (3.1)$$

Коэффициент вариации равен $\frac{b-a}{\sqrt{3}(a+b)}$. Эти свойства являются естественными: из симметрии графика плотности распределения относительно прямой $x = \frac{a+b}{2}$ следует, что математическое ожидание совпадает с этим значением. Отсюда же следует, что коэффициент асимметрии $S[\xi] = 0$. Ясно также, что дисперсия зависит от длины промежутка, но не от его расположения. В приложении к актуарной деятельности равномерное распределение обычно дает весьма грубое приближение к реальности.

Пример 3.1. Пусть вероятность пожара на объекте стоимостью 1 млн руб. равна 10^{-4}. В случае пожара ущерб распределен равномерно от 0 до полной стоимости. Найдите средний размер и дисперсию иска.

Решение. Пусть X – размер возможного иска, I – СВ, равная 1, если иск будет предъявлен, и 0, если не будет. По итеративной формуле (2.14)

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid I]].$$

Далее,

$$\mathrm{E}[X \mid I = 1] = (0 + 1)/2 = 0{,}5 \text{ млн руб.},$$

$$\mathrm{E}[X \mid I = 0] = 0,\ \mathrm{P}[I = 1] = 10^{-4},\ \mathrm{P}[I = 0] = 1 - 10^{-4}.$$

Тем самым,

$$\mathrm{E}[X] = 0{,}5 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot (1 - 10^{-4}) = 50 \text{ руб.}$$

По формулам (2.15) и (3.1)

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[\mathrm{Var}[X \mid I]] + \mathrm{Var}\,[\mathrm{E}[X \mid I]].$$

$$\mathrm{Var}[X \mid I=1] = (1 - 0)^2/12,\ \mathrm{Var}[X \mid I = 0] = 0,$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{Var}[X \mid I]] = 10^{-4}/12.$$

Далее,

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}^2[X \mid I]] = 0{,}5^2 \cdot 10^{-4} = 2{,}5 \cdot 10^{-5};$$

$$(\mathrm{E}[\mathrm{E}\,[X \mid I]])^2 = 0{,}25 \cdot 10^{-8}.$$

Отсюда

$$\mathrm{Var}\,[\mathrm{E}[X \mid I]] = 2{,}5\cdot10^{-5} - 2{,}5\cdot10^{-9} \approx 2{,}5\cdot10^{-5},$$

$$\mathrm{Var}[X] \approx 10^{-4}/12 + 2{,}5\cdot10^{-5} \approx 3{,}3\cdot10^{-5}.$$

Стандартное отклонение $\sigma[X] \approx 5{,}74\cdot10^{-3}$ млн руб. = 5770 руб.

3.2. Распределение Парето

Случайная величина ξ, распределенная по закону Парето, характеризуется положительными параметрами α и λ и имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \alpha\lambda^\alpha (\lambda + x)^{-\alpha-1} \text{ при } x \geq 0. \tag{3.2}$$

Отметим, что функция $f_\xi(x)$ убывает при $x \geq 0$. Функция распределения $F_\xi(x)$ легко вычисляется:

$$F_\xi(x) = \int_0^x \alpha\lambda^\alpha (\lambda + x)^{-\alpha-1} dx = \tag{3.3}$$

$$= \alpha\lambda^\alpha \left.\frac{(\lambda + x)^{-\alpha}}{-\alpha}\right|_0^x = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha.$$

Поскольку функция $f_\xi(x)$ неотрицательная и $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = \int_0^\infty f_\xi(x)dx = 1$, то функция $f_\xi(x)$ обладает всеми свойствами плотности распределения.

ПФМ распределения Парето не является элементарной, поэтому числовые характеристики вычислим непосредственно.

$$E[\xi]=\int\limits_0^\infty x\alpha\lambda^\alpha(\lambda+x)^{-\alpha-1}dx=\int\limits_0^\infty \alpha\lambda^\alpha(\lambda+x)^{-\alpha}dx-$$

$$-\int\limits_0^\infty \alpha\lambda^{\alpha+1}(\lambda+x)^{-\alpha-1}dx=\lambda^\alpha(\lambda+x)^{-\alpha+1}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{\lambda}{\lambda+\text{x}}\right)\Bigg|_0^\infty.$$

Отсюда видно, что при $\alpha\le 1$ математического ожидания не существует (интеграл расходится), при $\alpha>1$ справедливо равенство

$$E[\xi]=\frac{\lambda}{\alpha-1}. \tag{3.4}$$

Аналогичные вычисления (проделайте их самостоятельно!) приводят к формуле

$$\mathrm{Var}[\xi]=\frac{\lambda^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \tag{3.5}$$

при $\alpha>2$ – в противном случае дисперсия не существует. Далее, стандартное отклонение

$$\sigma[\xi]=\frac{\lambda}{\alpha-1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}},$$

коэффициент вариации

$$c[\xi]=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}.$$

Коэффициент вариации распределения Парето (когда он существует) больше 1.

Оценим «тяжесть хвоста».

$$P[\xi>x]=1-F_\xi(x)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha.$$

Тем самым скорость убывания вероятности степенная. Это означает, что «хвост» распределения Парето является тяжелым. Например,

$$\mathrm{P}[\xi > 10\mathrm{E}[\xi]] = P\left[\xi > 10\frac{\lambda}{\alpha-1}\right] = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+9}\right)^{\alpha}.$$

«Тяжесть хвоста» тесно связана с тем фактом, что числовые характеристики не существуют (являются бесконечными) при переходе параметров распределения через некоторые границы.

3.3. Гамма-распределение

Гамма-функцией называется функция

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \tag{3.6}$$

определенная при $\alpha > 0$. При $\alpha < 1$ этот интеграл – сходящийся несобственный (особенность в точке 0). Гамма-функция обладает важными свойствами:

$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Отсюда при натуральном n

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \text{ при натуральном } n.$$

Подробные сведения о гамма-функциях можно найти в любом достаточно полном учебнике математического анализа.

Случайная величина ξ имеет *гамма-распределение*, если плотность ее распределения имеет вид

$$f_\xi(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad \text{при } x > 0. \tag{3.7}$$

Здесь α, λ – положительные параметры. Проверим, что эта функция обладает свойствами плотности. Прежде всего, $f_\xi(x) > 0$. Далее,

$$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x} d(\lambda x) = 1$$

по определению гамма-функции (3.6). Дифференцируя функцию $f_\xi(x)$, убеждаемся в том, что она является убывающей при $\alpha \le 1$ и имеет единственный максимум в точке $x = (\alpha - 1)/\lambda$ при $\alpha > 1$.

Частный случай гамма-распределения при $\alpha = 1$ называется экспоненциальным распределением. В этом случае

$$f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \tag{3.8}$$

При произвольном значении α интегральная функция гамма-распределения не является элементарной, вычислим ее при α натуральном. Обозначим через $F_{(\alpha)}(x)$ интегральную функцию гамма-распределения с параметром α. Имеем

$$F_{(1)}(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x},$$

$$F_{(n+1)}(x) = \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \int_0^x x^n e^{-\lambda x} dx = -\frac{\lambda^n}{n!} \int_0^x x^n de^{-\lambda x}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$F_{(n+1)}(x) = -\frac{\lambda^n}{n!} x^n e^{-\lambda x} \Big|_0^x + \frac{n\lambda^n}{n!} \int_0^x e^{-\lambda x} x^{n-1} dx =$$

$$= -\frac{\lambda^n}{n!} x^n e^{-\lambda x} + \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^x e^{-\lambda x} x^{n-1} dx,$$

т.е.

$$F_{(n+1)}(x) = -\frac{\lambda^n}{n!} x^n e^{-\lambda x} + F_{(n)}(x).$$

Применяя эту рекуррентную формулу *n* раз, получаем:

$$F_{(n+1)}(x) = 1 - e^{-\lambda x}\left(1 + (\lambda x) + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda x)^n}{n!}\right).$$

Вычислим теперь ПФМ гамма-распределения.

$$M_\xi(t) = \mathrm{E}\left[e^{\xi t}\right] = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha\text{-}1} e^{(t-\lambda)x} dx =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - t)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty ((\lambda - t)x)^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} d((\lambda - t)x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha.$$

ПФМ определена при $t < \lambda$. Применим формулы (2.7):

$$\mathrm{E}[\xi] = M_\xi'(0) = -\lambda^\alpha(-\alpha)(\lambda - t)^{-\alpha-1}\Big|_{t=0} = \frac{\alpha}{\lambda},$$

$$\mathrm{E}[\xi^2] = M_\xi''(0) = -\lambda^\alpha \alpha(-\alpha - 1)(\lambda - t)^{-\alpha-2}\Big|_{t=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2},$$

отсюда $\mathrm{Var}[\xi] = \mathrm{E}[\xi^2] - \mathrm{E}^2[\xi] = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$.

«Тяжесть хвоста» для натуральных *n* определяется функцией

$$\mathrm{P}[\xi > x] = 1 - F_{(n)}(x) = e^{-\lambda x}\left(1 + (\lambda x) + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda x)^n}{n!}\right).$$

Поскольку при фиксированном λ эти функции растут с ростом n, то самый «легкий хвост» среди гамма-распределений у экспоненциального распределения. Далее, поскольку степенная функция растет медленнее показательной, то при достаточно больших x справедлива оценка $\mathrm{P}[\xi > x] < e^{-\lambda x/2}$.

Таким образом, «хвост» гамма-распределения «легкий».

Гамма-распределение хорошо описывает распределение исков, которые тесно группируются вокруг некоторого значения, причем большие иски маловероятны.

Гамма-распределения с различными параметрами часто применяются в статистике. Широко используемое распределение χ^2 с n степенями свободы [22, 23, 24], в соответствии с которым распределена сумма квадратов n независимых стандартных нормальных СВ, имеет гамма-распределение с параметрами $\lambda = 0{,}5$, $\alpha = n/2$ (см. упражнение 9).

Еще одно полезное свойство. Пусть $\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, где СВ ξ_i, $i = \overline{1,n}$, независимы и каждая имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. ПФМ каждой из случайных величин ξ равна $\dfrac{\lambda}{\lambda - t}$. В силу независимости СВ производящая функция моментов ζ равна $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$ (см. формулу (2.18)). Но такую же ПФМ имеет и гамма-распределение с параметром $\alpha = n$. В силу отмеченной единственности получаем: сумма независимых экспоненциальных распределений имеет гамма-распределение с соответствующими параметрами.

3.4. Рандомизация

Часто естественно считать, что возможный иск по тому или иному договору подчиняется некоторому закону, но с определением его параметров возникают сложности, связанные с неоднородностью портфеля. Так, при страховании жизни параметры закона могут зависеть от возраста, пола, профессии человека, при страховании автомобилей – от марки, опыта водителя и т.д. Разбить на однородные множества портфель договоров удается не всегда (например, если множества состоят из 1-2 договоров, то толку от разбиения мало). В этом случае естественно считать параметры распределения в свою очередь также случайными. Такое представление называется *рандомизацией* (по-русски это должно звучать как «овероятноствление»).

Пусть размер предъявляемого иска есть СВ Y с (условной) функцией распределения $F_Y(x,\theta)$, зависящей от случайного параметра θ с плотностью распределения $f_\theta(x)$. Нас интересует функция распределения $F_Y(x)$. Из формулы полной вероятности получаем:

$$F_Y(x) = \mathrm{P}[Y \le x] = \mathrm{E}[\mathrm{P}[Y \le x \mid \theta]] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}[Y \le x \mid \theta = t] f_\theta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(x,t) f_\theta(t)dt.$$

Если распределение Y имеет (условную) плотность $f_Y(x,\theta) = \dfrac{\partial F_Y(x,\theta)}{\partial x}$, то, дифференцируя последнее равенство, получим формулу

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x,t) f_\theta(t)dt.$$

Результирующее распределение называется *смесью.*

Процесс рандомизации помимо практической важности позволяет обнаружить неочевидные взаимосвязи между разными законами распределения.

Приведем пример такого типа, относящийся к нашему предмету. Пусть величина иска подчиняется экспоненциальному закону распределения (3.8), параметр которого меняется от договора к договору и имеет гамма-распределение (3.7). Это означает, что

$$f_Y(x,\theta) = \theta e^{-\theta x}\ (x > 0),\ \text{причем}\ f_\theta(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} (x > 0),$$

тогда

$$f_Y(x) = \int_0^\infty t e^{-xt} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t(\lambda+x)} dt.$$

Полагая $z = t(\lambda+x)$, получаем

$$f_Y(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\lambda+x)^{\alpha+1}} \int_0^\infty z^\alpha e^{-z} dz = \frac{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)(\lambda+x)^{\alpha+1}} = \alpha\lambda^\alpha (\lambda+x)^{-\alpha-1}$$

(напомним, что $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$) , т.е. случайная величина Y оказалась распределенной по закону Парето (3.2).

Аналогично для дискретных СВ, принимающих натуральные значения, справедлива формула

$$\mathrm{P}[Y = k] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}[Y = k | \theta = t] f_\theta(t) dt\,.$$

3.5. Примеры реальных исков

Реальные иски, вообще говоря, не являются непрерывными случайными величинами: договором всегда предусмотрен предел ответственности страховщика, часто предусматривается франшиза (примеры 2.3, 2.4), у договора могут быть и другие особенности. Разумеется, необходимо учитывать, что вероятность наступления страхового случая мала. Распределения, описанные выше, хорошо описывают не столько размер иска, сколько размер ущерба, если страховой случай наступил. Приведем примеры переходов от распределений возможного ущерба к размеру иска.

Пример 3.2. Вероятность автомобильной аварии в течение года равна 0,1, ущерб, в случае наступления аварии, имеет распределение

Парето с параметрами $\alpha = 3$, $\lambda = 1000$. Договором предусмотрена франшиза d, равная 100. Требуется найти вероятность предъявления иска и распределение величины иска, если он будет предъявлен.

Решение. Пусть I – СВ, равная 1, если авария произойдет, и 0 в противном случае, ξ – размер ущерба в случае наступления аварии, X – размер иска, Y – размер предъявляемого иска.

Найдем вероятность $\mathrm{P}[X = 0]$ события, состоящего в том, что иск предъявлен не будет. По формуле полной вероятности

$$\mathrm{P}[X = 0] = \mathrm{P}[X = 0 \mid I = 0]\mathrm{P}[I = 0] + \mathrm{P}[X = 0 \mid I = 1]\mathrm{P}[I = 1] =$$

$$= \mathrm{P}[I = 0] + \mathrm{P}[\xi \le d]\mathrm{P}[I = 1] = \mathrm{P}[I = 0] + F_\xi(d)\mathrm{P}[I = 1].$$

Используя выражение для функции распределения Парето (3.3), получаем:

$$\mathrm{P}[X = 0] = \mathrm{P}[I = 0] + \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + d}\right)^\alpha\right)\mathrm{P}[I = 1] =$$

$$= 0{,}9 + (1 - (1000/1100)^3)\cdot 0{,}1 = 0{,}925,$$

отсюда вероятность предъявления иска

$$\mathrm{P}[X > 0] = 1 - \mathrm{P}[X = 0] = 0{,}075.$$

Найдем теперь функцию распределения предъявляемого иска. Она имеет вид:

$$F_Y(x) = \mathrm{P}[X \le x \mid X > 0] \ (x > 0),$$

отсюда

$$F_Y(x) = \mathrm{P}[\xi \le x \mid \xi > d] = \frac{\mathrm{P}[d < \xi \le x]}{\mathrm{P}[d < \xi]} = \frac{F_\xi(x) - F_\xi(d)}{1 - F_\xi(d)} \quad \text{при } x > d,$$

$$\mathrm{P}[\xi \le x \mid \xi > d] = 0 \text{ при } x \le d.$$

Тем самым плотность распределения

$$f_Y(x) = \frac{f_\xi(x)}{1 - F_\xi(d)} \text{ при } x > d.$$

Подставляя выражения для плотности и функции распределения Парето (3.2), (3.3), получаем:

$$f_Y(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha (\lambda + x)^{-\alpha-1}}{\left(\dfrac{\lambda}{\lambda + d}\right)^\alpha} = \alpha(\lambda + d)^\alpha (\lambda + x)^{-\alpha-1} =$$

$$= 3 \cdot 1100^3 (x + 1000)^{-4}$$

при $x > 100$.

Это распределение можно интерпретировать как смещенное распределение Парето с параметрами $\alpha = 4$, $\lambda = 1000$.

Пример 3.3. Пусть в договор примера 3.2. внесено изменение, согласно которому выплата на d меньше ущерба. Те же рассуждения показывают, что

$$f_Y(x) = \frac{f_\xi(x + d)}{1 - F_\xi(d)} \text{ при } x > 0,$$

отсюда

$$f_Y(x) = \alpha(\lambda + d)^\alpha (\lambda + d + x)^{-\alpha-1} = 3 \cdot 1100^3 (x + 1100)^{-4},$$

это стандартное распределение Парето. Сохранение закона при подобных преобразованиях является очень полезным.

Пример 3.4. Пожар может произойти с вероятностью 0,05, ущерб в случае пожара распределен по экспоненциальному закону при $\lambda = 1/2000$. Предельная сумма ответственности, предусмотренная договором, равна 5000. Чему равна средняя выплата по договору?

Решение. Пусть как и в примере 3.1 I – СВ, равная 1, если пожар случится, и 0 – в противном случае, J – СВ, равная 0, если ущерб при случившемся пожаре меньше 5000, и 1 – если ущерб при случившемся пожаре не меньше 5000, ξ – размер ущерба в случае пожара, X – размер иска. По итеративному правилу (2.14),

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid I]] = \mathrm{E}[X \mid I = 0]\mathrm{P}[I = 0] + \mathrm{E}[X \mid I = 1]\mathrm{P}[I = 1] =$$

$$= 0{,}05\mathrm{E}[X \mid I = 1].$$

Далее, используя формулы (2.11) и (2.14), получим:

$$\mathrm{E}[X \mid I = 1] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid J]] = \mathrm{E}[X \mid J = 0]\mathrm{P}[J = 0] + \mathrm{E}[X \mid J = 1]\mathrm{P}[J = 1].$$

$$\mathrm{E}[X \mid J = 0]\mathrm{P}[J = 0] = \mathrm{P}[J = 0]\int_0^{\infty} \frac{x f_{\xi}(x, J = 0)}{\mathrm{P}[J = 0]} dx =$$

$$= \frac{1}{2000}\int_0^{5000} x e^{-x/2000} dx = -\int_0^{5000} x\, d e^{-x/2000} =$$

$$= -x e^{-x/2000}\Big|_0^{5000} - 2000\int_0^{5000} e^{-x/2000} d\left(-x/2000\right) =$$

$$= -5000 e^{-2,5} - 2000\left(e^{-2,5} - 1\right) = 1425{,}4.$$

Здесь использована формула (3.8) и то, что $f_{\xi}(x, J = 0) = f_{\xi}(x)$ при $x < 5000$ и 0 при $x > 5000$.

$$\mathrm{E}[X \mid J = 1]\mathrm{P}[J = 1] =$$

$$= 5000\left(1 - F_{\xi}(5000)\right) = 5000 \cdot e^{-5000/2000} = 410{,}42,$$

тем самым

$$\mathrm{E}[X \mid I=1] = 1835{,}8.$$

Окончательно, $\mathrm{E}[X] = 91{,}79$. Это есть величина нетто-премии по такому договору [27].

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вероятность пожара на объекте равна 10^{-4}. В случае пожара ущерб принимается равномерно распределенным от 0 до 5 млн руб. Договором предусмотрен порог ответственности 3 млн руб. и франшиза 100 тыс. руб. Найдите математическое ожидание и дисперсию предъявляемого иска. С какой вероятностью иск отклоняется от среднего меньше, чем на половину среднего квадратического отклонения?

2. Случайная величина X, равная иску по страховому договору, представлена в виде $X = IY$, где I – индикатор события «страховой случай произойдет», Y – размер иска при наступлении страхового случая. Известно, что $\mathrm{E}[X] = 2$, $\mathrm{Var}[X] = 30$, $\mathrm{Var}[Y] = 16$. Найдите вероятность наступления страхового случая.

3. (Р) Предполагается, что случайная величина $\ln Y$, где Y – размер предъявляемого иска, распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 7,5 и дисперсией 1,2. Найдите вероятность того, что иск не превысит 220.

4. Время безотказной работы машины имеет экспоненциальное распределение со средним значением 8 лет. Оборудование застраховано на случай ранних отказов таким образом, что при выходе из строя в течение первого года страховое возмещение равно x, в течение второго года равно $x/2$, если машина проработает два года, страховое возмещение не выплачивается. Найдите значение x, если математическое ожидание страховых выплат равно 1000 руб.

5. Возможный ущерб по договору распределен равномерно на отрезке [0,10000]. Каким следует установить порог ответственности, чтобы средний размер страховых исков сократился вдвое?

6. Вероятность аварии автомобиля равна 0,1, ущерб при аварии распределен по закону Парето со средним 1000 руб. и коэффициентом вариации 1,7. Договором страхования предусмотрена франшиза 200 руб. Найдите вероятность предъявления иска, функцию распределения размера иска, средний размер иска.

7. В результате актуарного исследования 1997 года было установлено, что иски по договорам страхования распределены экспоненциально, причем вероятность предъявления иска, превышающего 10000, равна 0,15. К 2002 году частота предъявления исков не изменилась, но в результате инфляционных процессов иски стали вдвое больше. Чему в 2002 году равна вероятность иска, превышающего 10000?

8. (Р) Размер иска подчинен рандомизированному экспоненциальному распределению с параметром λ, равномерно распределенным на отрезке [1, 2]. Найдите вероятность того, что иск не превысит 5 (все величины измеряются в одних и тех же единицах).

9. (Р) Докажите, что если $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – независимые случайные величины, каждая из которых распределена по стандартному нормальному закону распределения, то $\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2$ имеет гамма-распределение с параметрами $\lambda = 0{,}5$ и $\alpha = n/2$. Оно называется распределением $\chi^2(n)$ с n степенями свободы.

ГЛАВА 4. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ПРЕДЪЯВЛЕНИЯ ИСКОВ

4.1. Случайные процессы с дискретным временем

Случайным процессом с дискретным временем называется последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ (иное обозначение $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$) с заданным совместным распределением. Чаще всего параметру n придается смысл времени или порядкового номера наблюдения СВ.

Пример 4.1. Пусть первоначально в коробке находятся $a \geq 1$ белых и $b \geq 1$ черных шаров. Шары предполагается случайным образом извлекать из урны, после чего возвращать вместе с еще одним шаром того же цвета. Эту процедуру предполагается проводить бесконечно много раз. Пусть СВ $\xi_n = 1$, если при n-м испытании будет извлечен белый шар и $\xi_n = 0$ в противном случае.

Такая конструкция называется *урновой схемой Пойа.* Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ является случайным процессом с дискретным временем. Случайным процессом также является последовательность сумм $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Смысл СВ S_n – число белых шаров среди n извлеченных. Перед $(n+1)$-м извлечением в урне будет $S_n + a$ белых и $b + n - S_n$ черных шаров. Таким образом, условные вероятности имеют вид:

$$\mathrm{P}[S_{n+1} = S_n \mid S_1, S_2, \ldots, S_n] = (b + n - S_n)/(a + b + n),$$

$$\mathrm{P}[S_{n+1} = S_n + 1 \mid S_1, S_2, \ldots, S_n] = (a + S_n)/(a + b + n).$$

Пример 4.2. Пусть теперь в условиях примера 4.1 шары после извлечения в урну не возвращаются и не добавляются новые шары. Если ξ_i имеет тот же смысл, то конечные последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{a+b}$ и $S_1, S_2, \ldots, S_{a+b}$ также случайные процессы.

При некоторой реализации, т.е. для конкретных наборов возможных значений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ на плоскость можно нанести точки с декартовыми координатами $(1, S_1)$, $(2, S_2)$,…,(n, S_n),… Подобное изображение называется *выборочной траекторией* случайного процесса. Можно считать, что реализация случайного процесса состоит в однократном испытании, результатом которого будет одна из возможных выборочных траекторий. Так, в примере 4.2, как легко подсчитать, число траекторий процесса S_1, $S_2, \ldots, S_{a+b}$ равно $\binom{a+b}{a}$, где $\binom{n}{m}$ – число сочетаний, любая такая траектория начинается с точки (0,0) и заканчивается в точке ($a + b$, a). На рис. 2 приведена одна из возможных траекторий при $a = 3$, $b = 2$.

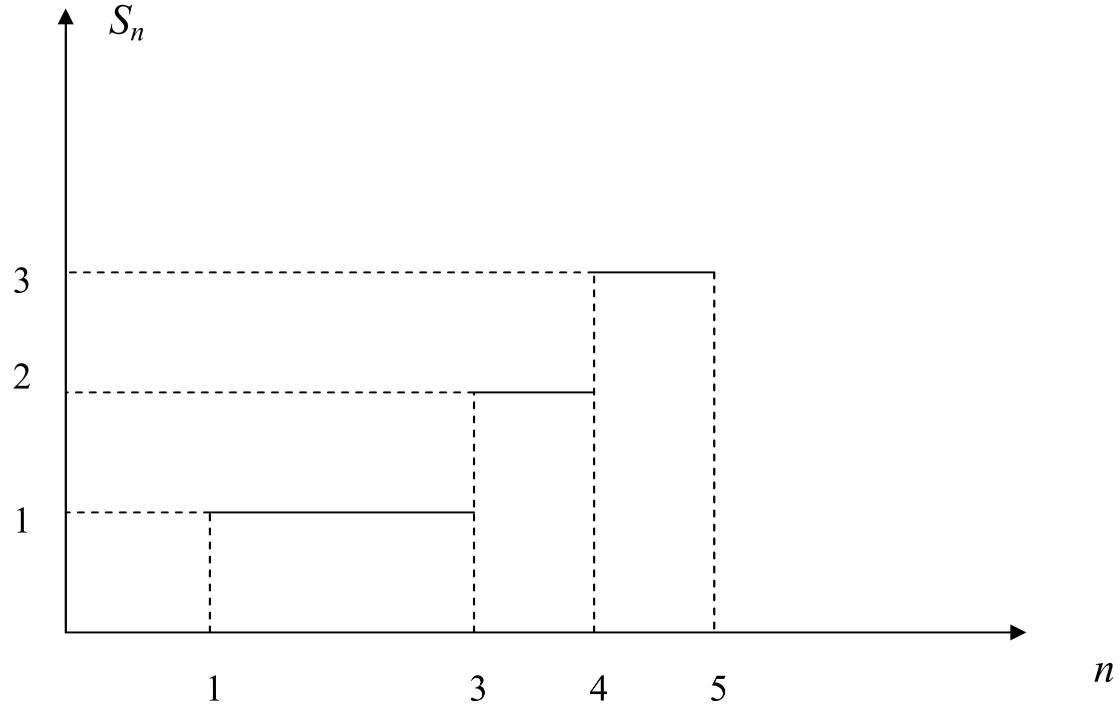

Рис. 2 Пример выборочной траектории при $a = 3$, $b = 2$.

В примере 4.1 траекторий бесконечно много, обычно вероятность реализации каждой отдельной траектории равна 0. В этом случае находят вероятность реализации одной из траекторий некоторого семейства.

Важным классом случайных процессов с дискретным временем являются *случайные блуждания.* Так называются процессы вида

$$S_n = x + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

где x – некоторое число, а СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ одинаково распределены и независимы в совокупности.

Пример 4.3. Пусть S_n – капитал страховой компании в момент времени n (время может измеряться в любых единицах). Тогда $S_0 = x$ – начальный капитал, $\xi_n = S_{n+1} - S_n$ – средства, поступившие на счет компании между моментами n и $n+1$. Случайная величина ξ_n может быть как положительной (если поступления премий превысили выплату исков), так и отрицательной (в противном случае). Во многих случаях естественно предполагать, что СВ ξ_n одинаково распределены и независимы, т.е. считать S_n случайным блужданием. Разумеется, распределения ξ_n реально меняются со временем (влияют в частности инфляционные процессы) и независимость может нарушаться.

Пример 4.4. Пусть в каждом промежутке времени длительностью 1 некоторое случайное событие может произойти не более одного раза. Пусть $\xi_n = 1$, если на промежутке $[n - 1, n]$ событие произойдет. Случайный процесс $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, описывающий число наступлений события до момента n, является случайным блужданием, если существует вероятность p такая, что

$$\mathrm{P}[S_n = 1 \mid S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}] = p.$$

Из определения следует, что случайная величина S_n имеет закон распределения $\mathrm{P}[S_n = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Напомним, что такой закон распределения СВ называется *биномиальным*. Вычислим производящую функцию биномиального распределения.

$$m(z) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}[S_n = k] z^k = \tag{4.1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} = (pz + 1 - p)^n .$$

Пример 4.5. Пусть p, q, r – положительные числа такие, что $p + q + r = 1$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, независимые СВ такие, что $P[\xi_n = 1] = p$, $P[\xi_n = 0] = q$, $P[\xi_n = -1] = r$. Случайное блуждание $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ является дискретным аналогом так называемого диффузионного процесса, играющего важную роль в различных задачах естествознания.

По центральной предельной теореме [21, 30], при больших n СВ $\dfrac{S_n - nE[\xi_1]}{\sqrt{n}\sigma[\xi_1]}$ можно считать распределенной по стандартному нормальному закону. Отсюда следует, например, что $E[S_n] \to +\infty$ при $E[\xi_1] > 0$ и $n \to \infty$.

Введем еще один важный класс случайных процессов. Пусть $\{S_n\}$ – случайный процесс, для которого величина S_0 детерминированная, а приращения $\xi_n = S_{n+1} - S_n$ обладают следующим свойством: для любой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ чисел $(1, 2, \ldots, n)$ распределение системы СВ $\left(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n}\right)$ совпадает с распределением системы $\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)$. Такой процесс называется *случайным процессом с перестановочными приращениями.* Очевидно, что из независимости приращений следует их перестановочность (в частности любое блуждание обладает указанным свойством). Обратное утверждение неверно. Так, в примере 4.2

$$P[\xi_1 = 1] = P[\xi_2 = 1] = a/(a + b),$$

$$P[\xi_1 = 0] = P[\xi_2 = 0] = b/(a + b),$$

$$P[\xi_1 = 1, \xi_2 = 0] = P[\xi_1 = 0, \xi_2 = 1] =$$

$$= ab/((a + b)(a + b - 1)) \neq P[\xi_1 = 1]\, P[\xi_2 = 0].$$

При этом процесс $S_1, \ldots, S_n$ имеет перестановочные приращения.

Рассмотрим одну конструкцию, важную для актуарной математики. Пусть случайный процесс $\{S_i\}$ таков, что $S_0 = 0$. Рассмотрим событие

$$\{S_i > 0 \text{ при } I = \overline{1, n-1},\ S_n \in [a,\ b]\}, \qquad (4.2)$$

где a,b – некоторые положительные числа и следующую перестановку приращений этого процесса: $\xi_1^* = \xi_n$, $\xi_2^* = \xi_{n-1}, \ldots$, $\xi_n^* = \xi_1$.

Введем случайный процесс $S_0^* = 0$, $S_i^* = \xi_1^* + \ldots + \xi_i^*$. Если процесс $\{S_n\}$ имеет перестановочные приращения, то по определению вероятность события из (4.2) совпадает с

$$\mathrm{P}[S_i^* > 0 \text{ при } i = \overline{1, n-1},\ S_n^* \in [a,b]].$$

Событие

$$\{S_i^* > 0 \text{ при } i = \overline{1, n-1},\ S_n^* \in [a,b]\},$$

записанное через исходный процесс, имеет вид:

$$\{S_n \in [a,b],\ S_n > S_i \text{ при } i = \overline{1, n-1}\},$$

поскольку

$$S_{n-i}^* = \xi_n + \xi_{n-1} + \ldots + \xi_{i+1} = S_n - S_i > 0.$$

Тем самым

$$\mathrm{P}[S_i > 0 \text{ при } i = \overline{1, n-1},\ S_n \in [a,b]] = \qquad (4.3)$$

$$= \mathrm{P}[S_i < S_n \text{ при } i = \overline{1, n-1},\ S_n \in [a,b]].$$

Этот результат называется *принципом двойственности* [2].

Пусть теперь $\{S_n\}$ – процесс с перестановочными приращениями, который принимает только целые значения с приращениями

$\xi_I \geq -1$. Это означает, что процесс не может уменьшиться большим скачком. В этом случае справедлива формула Двосса – Дингеса

$$\mathrm{P}[S_i < S_n \text{ при } i = \overline{1, n-1},\, S_n = y] = \frac{y - S_0}{n} \mathrm{P}\big[S_n = y\big] \qquad (4.4)$$

для любого целого $y > S_0$.

Левая часть – вероятность того, что процесс впервые в момент n достигнет уровня y. Правая часть зависит только от вероятности того, что процесс в момент n равен y, т.е. существенно более простого события.

Предварим доказательство следующим комбинаторным утверждением.

Предложение. Пусть числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – целые, причем каждое из них не превосходит 1 и их сумма равна $y > 0$. Тогда существует ровно y циклических перестановок $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ последовательности $(1, 2, \ldots, n)$ таких, что $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k} < y$ при $k = \overline{1, n-1}$. Напомним, что циклическими (круговыми) называются перестановки вида $(2, 3, \ldots, n, 1)$, $(3, 4, \ldots, n, 1, 2), \ldots, (n, 1, 2, \ldots, n-1)$. Их всего (включая исходную) n штук.

Для доказательства сначала построим одну круговую перестановку со свойством $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k} < y$ при $k = \overline{1, n-1}$. Для этого определим величины

$$M = \max\{x_1 + x_2 + \ldots + x_k \colon k = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$m = \min\{k \colon x_1 + x_2 + \ldots + x_k = M\}.$$

Тогда перестановка $(m+1, \ldots, n, 1, \ldots, m)$ обладает нужным свойством. Действительно, при $m+1 \leq s \leq n$

$$x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_s = (x_1 + x_2 + \ldots + x_s) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \leq 0.$$

При $s \leq m$

$$x_{m+1}+\ldots+x_n+x_1+\ldots+x_s=(x_1+..+x_n)-(x_1+\ldots+x_m)+(x_1+\ldots+x_s)<y\,,$$

поскольку

$$x_1+..+x_n=y,\;\; x_1+\ldots+x_m=M\,,\; x_1+\ldots+x_s<M$$

по определению *m.* (Здесь не использованы ограничения на размеры членов последовательности.)

Мы можем теперь считать, что нужным свойством обладает начальная перестановка (1, 2, 3,…, n), т.е.

$$x_1+x_2+\ldots+x_s<y \text{ при } s<n.$$

Пусть

$$t_i=\min\{k\colon x_1+x_2+\ldots+x_k=i\} \text{ для } i=\overline{1,y}\,.$$

Поскольку члены последовательности не превосходят 1, такие индексы t_i существуют, в частности $t_y=n$.

Докажем, что нужным свойством обладают только круговые перестановки, начинающиеся с 1, t_i+1,…, t_{y-1}+1.

Рассмотрим перестановку (t_i +1,…, n, 1,…, t_i). Поскольку

$$x_1+x_2+\ldots+x_s<y$$

при

$$t_i<s<n \text{ и } \left(x_1+\ldots+x_{t_i}\right)=i\,,$$

то

$$x_{t_i+1}+\ldots+x_s=\left(x_1+\ldots+x_s\right)-\left(x_1+\ldots+x_{t_i}\right)<y-i<y\,.$$

Далее,

$$x_{t_i+1}+\ldots+x_s+x_1+\ldots+x_p=\left(x_1+\ldots+x_s\right)-\left(x_1+\ldots+x_{t_i}\right)+(x_1+\ldots+x_p)<$$

$$<y-i+i=y$$

при $p < t_i$.

Пусть теперь s не совпадает ни с одним из чисел t_i. Если

$$x_1 + x_2 + ... + x_s \le 0,$$

то

$$x_{s+1} + \ldots + x_n = (x_1 + \ldots + x_n) - (x_1 + \ldots + x_s) \ge (x_1 + \ldots + x_n) = y,$$

т.е. перестановка (s+1,…, $n,…,s$) не обладает нужным свойством.

Если

$$x_1 + x_2 + ... + x_s = i > 0, \text{ то } x_{t_i+1} + ... + x_s = 0,$$

то

$$x_{s+1} + \ldots + x_n + x_1 + \ldots + x_{t_i} = x_{s+1} + \ldots + x_n + x_1 + \ldots + x_{t_i} + \ldots + x_s = y,$$

т.е. перестановка (s+1,…, n,1,..., s) также не обладает нужным свойством.

Докажем теперь формулу Двосса – Дингеса. Без потери общности можно считать, что $S_0 = 0$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – реализация приращений процесса, сумма которых равна y. Из перестановочности приращений следует, что вероятности реализации любых круговых перестановок этих приращений равны. Но по предложению ровно y из общего числа n таких перестановок обладают нужным свойством. Разбивая все такие реализации приращений на классы перестановок, совпадающих при круговых перестановках, получаем нужное утверждение.

Пример 4.6. В избирательной урне находятся 100 бюллетеней, поданных за кандидата A, и 60 поданных за кандидата B. При подсчете голосов бюллетени извлекаются один за другим наудачу. Пусть S_n – случайный процесс, значения которого равны разностям между числами подсчитанных голосов, поданных за A и за B после извлечения n-го бюллетеня. Таким образом, $S_0 = 0$, $S_{160} = 40$. Найдем вероятность того, что до извлечения всех бюллетеней превышение голосов за A над голосами за B не достигнет 40. Заметим, что процесс $\{S_n\}$ имеет перестановочные приращения, которые могут принимать значения 1 и −1. По формуле Двосса − Дингеса (4.4), соответствующая вероятность равна $40\text{P}[S_{160} = 40]/160 = 1/4$.

4.2. Марковские процессы

Случайный процесс $\{S_n\}$ называется *марковским,* если при любых $n, k > 0$ условное совместное распределение системы СВ S_{n+1}, $S_{n+2},\ldots, S_{n+k}$ при определенных $S_1,\ldots, S_n$ независимо от $S_1,\ldots, S_{n-1}$. Формально это означает, что

$$\text{P}[S_{n+1} \le a_{n+1}, S_{n+2} \le a_{n+2},\ldots, S_{n+k} \le a_{n+k}|\ S_1 = a_1,\ \ldots, S_{n-1} = a_{n-1}, S_n = a_n] =$$

$$= \text{P}[S_{n+1} \le a_{n+1}, S_{n+2} \le a_{n+2},\ \ldots, S_{n+k} \le a_{n+k}\ |S_n = a_n] \qquad (4.5)$$

при любых $a_1,\ldots, a_{n-1},\ldots, a_{n+k}$. Содержательно это означает, что закон распределения последующего развития процесса полностью определяется состоянием, в котором процесс оказался на последнем шаге. Подобные процессы часто встречаются на практике.

В частности, если СВ S_n дискретные, то вероятность

$$\text{P}[S_{n+1} = x\,|\,S_0 = a_0,\ \ldots, S_{n-1} = a_{n-1}, S_n = y] = \varphi(x, y, n), \qquad (4.6)$$

т.е. зависит только от x, y, n. Вероятности $\varphi(x, y, n)$ называются *вероятностями перехода*.

Обратно, если это условие выполняется при всех значениях параметров, то процесс марковский. Проверим это в частном случае двух последующих шагов. Вероятность

$$\text{P}[S_{n+2} = z, S_{n+1} = x|T, S_n = y] =$$

$$= \text{P}[S_{n+2} = z|T\ , S_n = y, S_{n+1} = x]\ \text{P}[S_{n+1} = x\ |T, S_n = y] =$$

$= \varphi(z, y, n+1)\varphi(x, y, n)$,

(T является событием $\{S_0 = a_0, \ldots, S_{n-1} = a_{n-1}\}$), т.е. двумерная СВ (S_{n+2}, S_{n+1}) не зависит от СВ $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$, что и требовалось. В общем случае выкладки аналогичные. Разумеется, справедливы аналогичные рассуждения и для непрерывных процессов.

Если функция $\varphi(x, y, n)$ из (4.6) не зависит от n и распределения всех СВ S_n ($n = 1, 2, \ldots$) совпадают, то марковский процесс называется *стационарным.*

Случайное блуждание является стационарным марковским процессом, поскольку распределение $S_{n+1} - S_n$ не зависит ни от n, ни от $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$. Рассмотрим процесс $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, описанный в примере 4.1. Этот процесс марковским не является, поскольку вероятность извлечения шара определенного цвета на том или ином шаге зависит от всей предыстории. При этом процесс $\{S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n\}$, как следует из формул, полученных в примере, марковский.

Пример 4.7. Рассмотрим пример, аналогичный примеру 4.3, где теперь S_n – сумма средств, поступивших в страховую компанию до момента n (без учета выплат), при этом средства вкладываются в банк под процент i. Если пренебречь ростом средств за единицу времени, то $S_{n+1} = (1 + i)\, S_n + \xi_n$. Если считать, что СВ ξ_n – поступления средств за время $[n, n+1]$ – не зависит от предыстории, то случайный процесс $\{S_n\}$ является марковским, но не случайным блужданием.

Приведем еще один пример марковского процесса, связанного с актуарной деятельностью.

Пример 4.8. Наблюдения показывают, что вероятность того, что июльский день будет дождливым, определяется только тем, будет ли дождливым предшествующий день, т.е. случайный процесс с дискретным временем $\{X_i\}$, где $X_i = 1$, если i июля будет дождливым днем, и $X_i = 0$, если нет, является марковским. При этом известно, что $P[X_i = 1 |\, X_{i-1} = 1] = 0{,}6$, $P[X_i = 1 |\, X_{i-1} = 0] = 0{,}45$. Предполагается, что процесс стационарный, т.е. вероятность дождливости одна и та же для каждого дня. Сельская страховая компания обнаружила, что для урожая важно, будут ли дождливыми 1, 2 и 3 июля. Какова вероятность того, что все эти дни будут дождливыми?

Решение. Пусть p вероятность дождливости дня. По формуле полной вероятности (2.12)

$$P[X_i = 1] = P[X_i = 1|X_{i-1} = 1]P[X_{i-1} = 1] + P[X_i = 1|\, X_{i-1} = 0]P[X_{i-1} = 0].$$

Отсюда $p = 0{,}6p + 0{,}45(1 - p)$ (такие уравнения называются уравнениями Колмогорова). Отсюда $p = 0{,}45/0{,}85 = 9/13$. В силу марковости рассматриваемого процесса

$$P[X_1 = X_2 = X_3 = 1] = P[X_1 = 1]\; P[X_2 = 1 \,|\, X_1 = 1]\; P[X_3 = 1 \,|\, X_2 = 1] =$$

$$= 9/13 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}249.$$

4.3. Случайные процессы с непрерывным временем

Для наших целей достаточно считать, что *случайный процесс с непрерывным временем* – это семейство СВ ξ_t, зависящих от параметра t (времени), которые принимают неотрицательные вещественные значения. Аналогично предыдущему определено понятие выборочной траектории, но в данном случае выборочная траектория определена на множестве $[0,\infty)$. Это есть кривая (t, x), где x – возможное значение СВ ξ_t.

Считающим называется процесс $\{N_t\}$ с непрерывным временем, для которого любая выборочная траектория – ступенчатая кривая с высотой каждой ступеньки, равной 1. Такой процесс интерпретируется как число наступлений некоторого события до момента t, причем два или более событий не могут произойти одновременно (это свойство называется *ординарностью*). Таковым мы будем считать процесс предъявления страховых исков. Иначе подобный процесс можно описать как случайный процесс $\{T_n\}$ с дискретным временем, где T_1 – время первого наступления события, а T_n – время от $n - 1$ до n-го наступлений события при $n = 2, 3, \ldots$. Тогда

$$N_t = \begin{cases} 0 \text{ при } t < T_1, \\ \max\{i : T_1 + T_2 + \ldots + T_i \le t\}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Пусть H_t – история считающего процесса до момента t, под которой понимается вектор (N_t, T_1,…, T_{N_t}). Будем дополнительно считать, что условная функция распределения СВ T_{N_t+1} при любой истории H_t непрерывно дифференцируема в точке t, существует предел

$$\lambda(t, H_t) = \lim_{h \to +0} \frac{\mathrm{P}\left[N_{t+h} = N_t + 1 \middle| H_t\right]}{h}, \tag{4.8}$$

и функция $\lambda(t, H_t)$ непрерывно зависит от t. Тогда вероятность наступления события за время $[t,t+h]$ равна $\lambda(t,H_t)h+o(h)$. Ординарность считающего потока приводит к тому, что вероятность наступления за это время более одного события равна $o(h)$, а тогда вероятность ненаступления события на промежутке $[t, t+h]$ равна

$$\mathrm{P}[N_{t+h} = N_t \mid H_t] = 1-\lambda(t, H_t)h+o(h).$$

Найдем теперь вероятность наступления хотя бы одного события на временном промежутке $[t, t+s]$. Разбивая этот промежуток на достаточно короткие промежутки моментами $t = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t+s$, представим интересующее нас событие $\{N_{t+s} > N_t \mid H_t\}$ в виде суммы несовместных событий {событие не произойдет до момента t_i и произойдет до момента t_{i+1}}, откуда

$$\mathrm{P}[N_{t+s} > N_t | H_t] \approx \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{P}\left[N_{t_i} = N_t \middle| H_t\right] \lambda\left(t_i, H_{t_i}\right) \Delta t_i \;\; (\Delta t_i = t_{i+1} - t_i).$$

Переходя к пределу при измельчении отрезков (max $\Delta t_i \to 0$), получаем:

$$\mathrm{P}[N_{t+s} > N_t \mid H_t] = \int_t^{t+s} \mathrm{P}\left[N_h = N_t \middle| H_t\right] \lambda(h, H_h) dh.$$

Здесь H_h – история, совпадающая с H_t до момента t и такая, что на промежутке $(t,h]$ событие не произойдет ни разу, отсюда

$$\mathrm{P}[N_{t+s} = N_t \mid H_t] = 1 - \mathrm{P}[N_{t+s} > N_t \mid H_t] =$$

$$= 1 - \int_t^{t+s} \mathrm{P}\left[N_h = N_t \middle| H_t\right] \lambda(h, H_h) dh.$$

Дифференцируя обе части по s и заменяя $t+s$ на u, получим:

$$\frac{d}{du}\mathrm{P}\left[N_u = N_t \middle| H_t\right] = -\mathrm{P}\left[N_u = N_t \middle| H_t\right]\lambda(u, H_u) \text{ при } u > t,$$

отсюда

$$\frac{d}{du}\ln \mathrm{P}\left[N_u = N_t \middle| H_t\right] = -\lambda(u, H_u). \qquad (4.9)$$

С учетом того, что $\mathrm{P}[N_t = N_t \mid H_t] = 1$ (за нулевой промежуток событие произойти не может), получаем:

$$\mathrm{P}\left[N_{t+s} = N_t \middle| H_t\right] = \exp\left(-\int_t^{t+s} \lambda(u, H_u) du \right). \qquad (4.10)$$

Рассмотрим пример из демографии (см. главу 10).

Пример 4.9. Пусть СВ $T(x)$ – остаточное время жизни человека в возрасте x, т.е. возраст, в котором человек скончается, равен $x+T(x)$. Пусть $N_t = 0$, если человек будет жив в возрасте $x+t$, и 1 в противном случае. Тогда $\lambda(t, N_t = 0) = \mu_{x+t}$ – интенсивность смертности (гл. 10) в возрасте $x+t$, $\lambda(t, N_t = 1) = 0$. Последняя формула тогда принимает следующий вид:

$${}_s p_x = \exp\left(-\int_x^{x+s} \mu_u du \right),$$

где ${}_s p_x$ – вероятность того, что человек в возрасте x проживет еще s лет.

Особенно важен случай, когда значение $\lambda = \lambda(t, H_t)$ не зависит ни от t, ни от H_t. Тогда из формулы (4.10) следует, что

$$\mathrm{P}\left[N_{t+s} = N_t\right] = \exp(-\lambda s).$$

Докажем по индукции, что в этом случае при любом целом неотрицательном k справедливо равенство

$$\mathrm{P}\left[N_{t+s} = N_t + k\right] = \frac{(\lambda s)^k}{k!}\exp(-\lambda s).$$

При $k = 0$ формула доказана. Пусть это так при некотором k. Найдем $\mathrm{P}\left[N_{t+s} = N_t + k + 1\right]$. Аналогично предыдущему, разбивая отрезок $[t, t+s]$, а вместе с ним и событие $\{N_{t+s} = N_t + k + 1\}$, на несовместные, состоящие в том, что $k+1$ наступление события произойдет на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, приходим к формуле

$$\mathrm{P}\left[N_{t+s} = N_t + k + 1\right] = \int_t^{t+s} \mathrm{P}\left[N_u = N_t + k\right]\lambda \mathrm{P}\left[N_u = N_{t+s}\right]du.$$

По предположению индукции,

$$\mathrm{P}\left[N_{t+s} = N_t + k + 1\right] =$$

$$= \int_t^{t+s} \frac{(\lambda(u-t))^k}{k!}\exp(-\lambda(u-t))\lambda\exp(-\lambda(s+t-u))du =$$

$$= \frac{(\lambda)^{k+1}}{k!}\exp(-\lambda s)\int_t^{t+s}(u-t)^k du = \frac{(\lambda s)^{k+1}}{(k+1)!}\exp(-\lambda s),$$

что и требовалось.

Считающий процесс, для которого

$$\mathrm{P}\left[N_{t+s} = N_t + k\right] = \frac{(\lambda s)^k}{k!}\exp(-\lambda s), \tag{4.11}$$

называется *пуассоновским.*

Из формул следует, что для пуассоновского процесса закон распределения СВ – числа событий, которые произойдут на промежутке $[t,\ t+s]$, зависит только от длительности промежутка, но не зависит от его расположения. Это свойство называется *стационарностью*.

Независимость СВ $\lambda(t,\ H_t)$ от предыстории H_t равносильна независимости событий $\{N_{u+v} = N_u + s\}$ и $\{N_{t+s} = N_t + k\}$ для непересекающихся отрезков $[u,\ u+s]$, $[t,\ t+s]$ и аналогичному свойству для любого числа промежутков. Это свойство называется *отсутствием последействия.*

Тем самым пуассоновский процесс можно охарактеризовать как считающий стационарный случайный процесс с отсутствием последействия.

В силу описанных свойств пуассоновский процесс достаточно адекватно описывает процесс предъявления страховых исков. Более точное описание процесса предъявления исков (в частности учитывающее сезонные колебания) можно получить, используя неоднородный пуассоновский процесс, т.е. такой, при котором параметр λ не является постоянным. В следующем пункте приводятся некоторые свойства пуассоновского процесса, важные для актуарного анализа.

4.4. Свойства пуассоновского процесса

1. Найдем функцию распределения СВ $T = T_{n+1} - T_n$ – интервала между последовательными наступлениями события в пуассоновском процессе. Пусть событие произойдет в моменты 0 и T и не произойдет на промежутке $(0,\ T)$. Тогда из (4.11) при $k = 0$

$$\mathrm{P}[T > x] = \mathrm{P}[N_x = N_0] = \frac{(\lambda x)^0}{0!}\exp(-\lambda x) = \exp(-\lambda x),$$

т.е.

$$F_T(x) = \mathrm{P}[T \le x] = 1 - \exp(-\lambda x).$$

Отсюда СВ T распределена по экспоненциальному закону (п. 3.3).

2. Интервал $T_{n+1} - T_1$, содержащий n наступлений события, имеет гамма-распределение. Действительно,

$$T_{n+1} - T_1 = (T_{n+1} - T_n) + \ldots + (T_2 - T_1) -$$

сумма n независимых (в силу отсутствия последействия) случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону. Такая СВ (п. 3.3) имеет гамма-распределение с параметрами λ и $\alpha = n$.

3. Найдем условное распределение момента T наступления события в интервале $[0, a]$ при условии, что в этом интервале событие произойдет один раз.

$$F_T(x \mid N_a = 1) = \mathrm{P}[T \le x \mid N_a = 1] =$$

$$= \frac{\mathrm{P}[T \le x,\, N_a = 1]}{\mathrm{P}[N_a = 1]} = \frac{\mathrm{P}[N_x = 1,\, N_a = 1]}{\mathrm{P}[N_a = 1]} = \frac{\mathrm{P}[N_x = 1,\, N_{a-x} = 0]}{\mathrm{P}[N_a = 1]} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}[N_x = 1]\mathrm{P}[N_{a-x} = 0]}{\mathrm{P}[N_a = 1]} = \frac{\lambda x \cdot \exp(-\lambda x) \cdot \exp(-\lambda(a - x))}{\lambda a \cdot \exp(-\lambda a)} = \frac{x}{a}.$$

Следовательно, искомое распределение равномерное (п. 3.1).

4. По аналогии с предыдущим, найдем функцию распределения системы случайных величин T_1, $T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}$ при условии, что в интервале $[0, a]$ произойдет n событий. Напомним, что
$T_1 < T_2 < \ldots < T_n < a$ – последовательные моменты наступления событий. Найдем условную функцию распределения

$$F_{T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}}(x_1, \ldots, x_n \mid N_a = n) \text{ при } x_1, \ldots, x_n > 0,\ x_1 + \ldots + x_n < a.$$

$$F_{T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}}(x_1, \ldots, x_n \mid N_a = n) =$$

$$= \frac{\mathrm{P}[T_1 \le x_1, \ldots, T_n \le T_{n-1} + x_n, N_a = n]}{\mathrm{P}[N_a = n]} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left[N_{x_1+\ldots+x_i} - N_{x_1+\ldots+x_{i-1}} = 1\right] \mathrm{P}\left[N_a - N_{x_1+\ldots+x_n} = 0\right]}{\mathrm{P}\left[N_a = n\right]} =$$

$$= \frac{\lambda x_1 \cdot \exp(-\lambda x_1) \cdot \ldots \cdot \lambda x_n \cdot \exp(-\lambda x_n) \cdot \exp(-\lambda(a - x_1 - \ldots - x_n))}{\frac{(\lambda a)^n}{n!} \exp(-\lambda a)} =$$

$$= \frac{n! x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{a^n}.$$

Плотность совместного распределения (T_1, $T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}$) равна $\frac{n!}{a^n}$ при $x_1, \ldots, x_n > 0$, $x_1 + \ldots + x_n < a$. Поскольку, как известно из аналитической геометрии, объем этой n-мерной области равен $\frac{a^n}{n!}$, то из свойств плотности распределения следует, что плотность распределения вне этой области равна 0. Таким образом, анализируемое распределение равномерное (п. 2.3).

4.5. Модели предъявления исков: однородный портфель

Как уже отмечалось, одна из основных предпосылок актуарной математики – независимость процесса предъявления исков (т.е. временная составляющая процесса выплат) и размеров предъявляемых исков (финансовая составляющая).

Рассмотрим портфель, состоящий из большого числа договоров страхования одного и того же типа (это могут быть договоры страхования одних и тех же рисков: зданий, построенных в одно и то же время из одних и тех же материалов и примерно одинаково эксплуатируемых, договоры страхования автомобилей одной марки с примерно равными сроками эксплуатации, владельцы которых имеют примерно равный опыт и т.п.). В этом случае процесс предъявления исков можно рассматривать как пуассоновский случайный процесс: естественно считать, что одновременно два иска не предъявляются (ординарность), что этот процесс «не имеет памяти» (отсутствие последействия) и распределения числа предъявляемых исков за равные промежутки времени совпадают (стационарность). Дополнительным подтверждением разумности описания процесса предъявления исков как пуассоновского являются свойства из п. 4.4: если предполагается, что на некотором интервале будет предъявлен один иск и нет никакой дополнительной информации, то момент предъявления иска естественно считать равномерно распределенным на этом интервале.

Рассмотрим единичный временной интервал. Распределение числа N предъявляемых исков на этом интервале имеет вид:

$$\mathrm{P}[N = k] = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda). \tag{4.12}$$

Такой закон распределения дискретной случайной величины называется пуассоновским (сравните с (4.11)). Отметим прежде всего (хотя это и следует из предыдущего), что это действительно закон распределения:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}[N = k] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) = \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(-\lambda)\exp(\lambda) = 1.$$

Таким образом, сумма вероятностей полной группы несовместных событий равна 1, что и требовалось.

Найдем производящую функцию пуассоновского распределения:

$$m_N(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}[N = k]x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)x^k = \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!} =$$

$$= \exp(-\lambda)\exp(\lambda x) = \exp(\lambda(x-1)), \tag{4.13}$$

отсюда

$$m_N'(x) = \lambda\exp(\lambda(x-1)),\ m_N''(x) = \lambda^2\exp(\lambda(x-1)).$$

По формулам (2.9) получаем:

$$\mathrm{E}[N] = \lambda,\ \mathrm{Var}[N] = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda. \tag{4.14}$$

Отсюда вытекает смысл параметра λ в пуассоновском распределении: это есть среднее число исков (дисперсия совпадает с математическим ожиданием). Если вернуться к пуассоновскому процессу, то видим, что среднее число исков за время x равно λx. Это вполне естественно. Параметру λ можно придать и иной смысл. Пусть заключено большое число независимых договоров K, вероятность предъявления иска по каждому из которых равна p. Тогда среднее число предъявленных исков равно Kp, т.е. при этих предположениях $\lambda \approx Kp$. Далее этому наблюдению будет дано более точное обоснование.

Важным свойством пуассоновских СВ является устойчивость относительно сложения. Рассмотрим независимые пуассоновские СВ ξ_1, ξ_2 с параметрами λ_1, λ_2. Производящая функция суммы $\xi_1+\xi_2$ равна произведению производящих функций слагаемых (п. 2.4), откуда

$$m_{\xi_1+\xi_2}(z) = \exp(\lambda_1(z-1))\exp(\lambda_2(z-1)) = \exp((\lambda_1+\lambda_2)(z-1)),$$

т.е. сумма независимых пуассоновских СВ – пуассоновская СВ с параметром, равным сумме параметров слагаемых. Это свойство является дополнительным подтверждением разумности использования пуассоновского распределения в актуарной теории: объединение однородных портфелей можно в свою очередь считать однородным портфелем, интенсивность исков по которому равна сумме интенсивностей исков слагаемых.

Мы считали, что число договоров велико. Рассмотрим теперь случай небольшого числа договоров $K > 1$, иски по которым за единичное время предъявляются независимо с вероятностью p каждый. Это схема испытаний Бернулли [21, 30], в этом случае число предъявляемых исков N распределено по биномиальному закону (пример 4.4):

$$\mathrm{P}[N = k] = \binom{K}{k} p^S (1-p)^{K-k}.$$

Было установлено (4.1), что производящая функция биномиального распределения имеет вид

$$m_N(z) = \left(pz + 1 - p\right)^K .$$

Вычисляя производные этой функции и полагая $z = 1$, получаем

$$m_N'(1) = Kp,\ m_N''(1) = K(K-1)p^2,$$

тогда

$$\mathrm{E}[N] = Kp,\ \mathrm{Var}[N] = K(K-1)p^2 + (Kp) - (Kp)^2 = Kp(1-p).$$

Покажем, что если $p \to 0$, $K \to \infty$ так, что $pK \to \lambda$, то биномиальное распределение сходится к пуассоновскому. Полагая $\delta = pK - \lambda$, имеем

$$m_N(z) = \left(pz + 1 - p\right)^K = \left(\frac{\lambda+\delta}{K}z + 1 - \frac{\lambda+\delta}{K}\right)^K =$$

$$= \left(1 + \frac{(\lambda+\delta)(z-1)}{K}\right)^K \to \exp\left(\lambda\left(z-1\right)\right)$$

при $K \to \infty$, $\delta \to 0$, т.е. $m_N(z)$ стремится к производящей функции пуассоновского распределения. Этот факт еще раз демонстрирует связь между биномиальным и пуассоновским распределениями.

4.6. Модели предъявления исков: неоднородный портфель

В реальности портфель контрактов редко бывает однородным: при страховании здоровья контракты заключаются с людьми разных возрастов, автомобили разных марок попадают в аварии с разной частотой и т.д. В этом случае разумно считать, что каждая часть портфеля имеет пуассоновское распределение с разными значениями параметра λ. Во многих случаях оправдывается предположение о том, что величина λ имеет гамма-распределение (п. 3.3) с теми или иными параметрами. Это соответствует ситуации, когда значения λ не очень сильно отклоняются от среднего: большие отклонения возможны, но маловероятны. Итоговое распределение получим как результат рандомизации (п. 3.4):

$$\mathrm{P}[N=k] = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}[N=k|\lambda=y] f_\lambda(y)dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{y^k}{k!} e^{-y} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y} dy = \frac{\beta^\alpha}{k!\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-y(1+\beta)} y^{k+\alpha-1} dy =$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{(\beta+1)^{k+\alpha} k!\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{k+\alpha-1} dy = \frac{\beta^\alpha \Gamma(k+\alpha)}{(\beta+1)^{k+\alpha} k!\Gamma(\alpha)}.$$

Здесь использована замена переменной $t = y(1+\beta)$ и определение гамма-функции (п. 3.3). Из основного свойства гамма-функции
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ окончательно получаем:

$$\mathrm{P}[N=k] = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!} p^\alpha q^k, \tag{4.15}$$

где $p = \frac{\beta}{\beta+1}, q = \frac{1}{\beta+1}$.

Поскольку $p + q = 1$ и эти числа положительные, то им можно придать смысл вероятности наступления некоторого события (p) и его ненаступления (q). Если применить разложение в биномиальный ряд функции $\varphi(q) = (1-q)^{-\alpha}$, то получим:

$$1 = p^\alpha (1-q)^{-\alpha} = p^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\ldots(-\alpha-k+1)}{k!} (-q)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+k-1)\ldots(\alpha+1)\alpha}{k!} p^\alpha q^k .$$

Члены этого ряда равны величинам P[N = k]. Такое распределение называется *отрицательным биномиальным.*

Найдем производящую функцию отрицательного биномиального распределения.

$$m_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+k-1)...(\alpha+1)\alpha}{k!} p^{\alpha}(qz)^k = p^{\alpha}(1-qz)^{-\alpha}.$$

Вычисляя производные и полагая $z = 1$, получим

$$m_N'(1) = q\alpha/p,\ m_N''(1) = q^2\alpha(\alpha+1)/p^2.$$

По формулам (2.9)

$$\mathrm{E}[N] = m_N'(1) = q\alpha/p,$$

$$\mathrm{Var}[N] = m_N''(1)+m_N'(1) - (m_N'(1))^2 = q\alpha/p^2.$$

Отрицательное биномиальное распределение при $\alpha = 1$ называется *геометрическим.* В этом случае

$$\mathrm{P}[N = k] = pq^k.$$

Геометрическое распределение имеет простой актуарный смысл: если есть счетное семейство независимых страховых договоров с номерами 1, 2,… (при большом числе договоров можно считать число договоров бесконечным) и вероятность наступления иска по каждому из которых равна p, то так распределена СВ – минимальный из номеров договоров, по которым предъявлен иск.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Сельхозпредприятие заключило годовой договор страхования, в соответствии с которым страховщик не платит ничего при первом катастрофическом ухудшении погоды и выплачивает 20000 руб. при наступлении каждого следующего такого события. По

статистическим данным актуарий исходит из того, что число катастроф распределено по закону Пуассона со средним 1,5. Найдите средний размер годовых выплат.

2. Совместное распределение числа страховых событий, которые произойдут с автомобилями жены и мужа, таково (табл. 5):

Таблица 5

	Число аварий мужа				
		0	1	2	3
Число аварий жены	0	0,12	0,07	0,05	0,02
	1	0,12	0,16	0,12	0,03
	2	0,04	0,15	0,09	0,03

Найдите среднее число и дисперсию числа аварий с участием мужа в предположении, что жена попадет в аварию один раз.

3. Портфель страховой компании состоит из равного числа договоров двух типов. Число исков по первому распределено по закону Пуассона со средним 2, по второму – со средним 4. По случайно выбранному договору фиксируется по 4 иска в течение двух лет. Найдите среднее число исков, которое будет предъявлено страховщику по этому договору за следующий год.

4. (Р) Анализ числа смерчей по области показал, что
- за год не бывает больше одного смерча;
- вероятность возникновения смерча в течение года равна 0,02;
- возникновение смерча в течение некоторого года не зависит от их наступления в предшествующие годы.

Оцените вероятность того, что число смерчей за 20 лет не превысит 3.

5. Актуарий исходит из того, что при $n \geq 0$ справедливо равенство $p_{n+1} = p_n/3$, где p_n – вероятность предъявления n исков по договору страхования автомобиля за один год. Найдите вероятность того, что при этих предположениях будет предъявлено более одного иска.

6. Число исков по договору страхования подчиняется закону Пуассона, причем два иска предъявляются втрое чаще, чем четыре. Найдите среднее число предъявляемых исков.

7. (Р) Число страховых случаев является рандомизированным распределением Пуассона со средним значением, равномерно распределенным на отрезке [1, 4]. Найдите вероятность того, что будет предъявлено более одного иска.

8. Актуарий моделирует случайный процесс «дождливые дни» как стационарную цепь Маркова с двумя состояниями. Он пришел к выводу, что вероятность дождя завтра при условии, что сегодня идет дождь, следует принять равной 0,5, вероятность дождя завтра при условии, что сегодня дождя нет, следует принять равной 0,2. Найдите вероятность того, что 2 и 3 июля следующего года будут дождливыми.

9. Случайный процесс наступления страховых случаев является пуассоновским с параметром $\lambda = 2$. Найдите среднее время до наступления пятого страхового случая.

10. Время от начала года до наступления страхового случая предполагается экспоненциально распределенным с одним и тем же параметром для всех договоров. Страховая компания полагает, что в течение двух месяцев будут предъявлены иски по 20 % договоров. По какой доле договоров в среднем будут предъявлены иски за 4 месяца?

11. За месяц в среднем предъявляется 5 исков на сумму более 50000 руб. За какое время вероятность предъявления трех исков на сумму более 50000 превысит 0,9? Предполагается, что последовательные моменты предъявления исков являются пуассоновским случайным процессом.

ГЛАВА 5. СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗОРЕНИЯ

Оценки суммарных исков страховой компании являются важнейшей частью актуарного анализа. Риск чаще всего понимается как вероятность разорения, т.е. вероятность того, что сумма исков превысит капитал компании. Заниженная оценка суммы исков может привести к разорению, завышенная – к необоснованному росту нетто-премий, т.е. к непопулярности компании у потенциального страхователя. Как размеры исков, так и процесс их предъявления являются полуфабрикатами для анализа распределений суммарных исков. Сформулируем предпосылки, на которых базируются основные статические модели разорения, учитывающие суммарные иски.

1. Рассматривается относительно короткий временной интервал, на котором можно пренебречь как инфляционными процессами, так и ростом денежных сумм при хранении в банке (краткосрочное страхование). Обычно это один год.

2. Все договоры заключаются в начале периода, страховые премии вносятся единовременно при заключении договоров.

Обычно применяются две статические модели разорения: модель индивидуального риска и модель коллективного риска. Разница между ними в том, что в модели индивидуального риска каждый договор анализируется сам по себе, в модели коллективного риска весь портфель рассматривается как один договор, по которому может быть предъявлено множество исков. В следующих пунктах эти модели анализируются по отдельности.

5.1. Модель индивидуального риска

Дополнительными (к 1 и 2, приведенным в начале главы) предположениями таких моделей являются следующие:

3. Число договоров (K) фиксировано.
4. Иски по всем договорам – независимые СВ.

Пусть X_i (i = 1,…, K) – иск по i договору (возможно нулевой – это соответствует тому, что по i договору иск не будет предъявлен). Распределение суммарного иска в некоторых случаях может быть вычислено точно, но чаще при больших K применяются те или иные приближенные методы. Приведем два примера вычисления характеристик распределения в дискретном и непрерывном случаях.

Пример 5.1. Заключено 3 независимых договора страхования, андеррайтинг по которым позволяет предположить, что вероятность предъявления иска в 1 тыс. руб. равна 0,05 и иска в 5 тыс. руб. – 0,02 (с вероятностью 0,93 иск предъявлен не будет). Какой начальный капитал обеспечивает вероятность разорения компании меньшую, чем 0,1? 0,01?

Решение. Задачи такого типа проще всего решать, применяя производящие функции. Если X_i (i = 1,2,3) – размер соответствующего иска, то

$$m_{X_i}(z) = 0{,}93z^0+0{,}05\,z^1+0{,}02\,z^5.$$

Далее, по аналогу формулы (2.18) для производящих функций

$$m_S(z) = (m_{X_i}(z))^3 = (0{,}93z^0+0{,}05\,z^1+0{,}02\,z^5)^3,$$

где S – суммарный иск, отсюда

$$m_S(z) = 0{,}804357+0{,}129735z+0{,}006975z^2+0{,}000125z^3+0{,}051894z^5+$$

$$+0{,}00558z^6++0{,}00015z^7+0{,}001116z^{10}+0{,}00006z^{11}+0{,}000008z^{15}.$$

Вычислим суммы коэффициентов S_k полученного полинома при степенях, не превосходящих k:

$S_0 = 0{,}804357$, $S_1 = 0{,}934092$, $S_2 = 0{,}941067$, $S_3 = 0{,}941192$,

$S_5 = 0{,}993086$.

Таким образом, минимальное значение k, при котором вероятность события {сумма исков превышает k} больше 0,9, соответственно 0,99, равно 1, соответственно 5. Эти значения k равны необходимым значениям начального капитала.

Пример 5.2. Застраховано два объекта: один на 300, другой на 600 тыс. руб. Объекты могут пострадать независимо друг от друга, экспертный анализ показывает, что вероятность страхового случая для первого объекта равна 0,05, а для второго − 0,02. Распределение размера предъявляемых исков по каждому объекту при наступлении страхового случая принимается равномерным от 0 до суммы, указанной в договоре. Какой начальный капитал обеспечивает вероятность разорения компании, меньшую 0,05? 0,01?

Решение. Удобно ввести в рассмотрение случайные величины I_1, I_2 – индикаторы наступлений страховых случаев. Это позволяет разделить непрерывные и дискретные составляющие рассматриваемых СВ, что оправдано с технической точки зрения. Так, $I_1 = 1$, если по первому договору иск будет предъявлен, и 0 в противном случае. Тогда

$$\mathrm{P}[I_1 = 1] = 0{,}05,\ \mathrm{P}[I_1 = 0] = 0{,}95,\ \mathrm{P}[I_2 = 1] = 0{,}02,\ \mathrm{P}[I_2 = 0] = 0{,}98.$$

Пусть X_1, X_2 – размеры исков, а Y_1, Y_2 – размеры предъявляемых исков по первому и второму договорам соответственно.

$$\mathrm{P}[Y_1 \le x] = \mathrm{P}[X_1 \le x | X_1 > 0],\ \mathrm{P}[Y_2 \le x] = \mathrm{P}[X_2 \le x | X_2 > 0].$$

Построим функцию распределения суммы исков $\mathrm{P}[X_1 + X_2 \le x]$ при

$x \geq 0$ ($\mathrm{P}[X_1+X_2 \leq x] = 0$ при $x < 0$). В качестве единицы измерения примем 100 000 руб. Удобно воспользоваться формулой полной вероятности:

$$\mathrm{P}[X_1+X_2 \leq x] = \mathrm{P}[X_1+X_2 \leq x \mid I_1 = 1, I_2 = 1]\ \mathrm{P}[I_1 = 1, I_2 = 1]+$$

$$+\mathrm{P}[X_1+X_2 \leq x \mid I_1 = 0, I_2 = 1]\ \mathrm{P}[I_1 = 0, I_2 = 1]+$$

$$+\mathrm{P}[X_1+X_2 \leq x \mid I_1 = 1, I_2 = 0]\ \mathrm{P}[I_1 = 1, I_2 = 0]+$$

$$+\mathrm{P}[X_1+X_2 \leq x \mid I_1 = 0, I_2 = 0]\ \mathrm{P}[I_1 = 0, I_2 = 0].$$

Независимость фактов предъявления исков приводит к следующим равенствам:

$$\mathrm{P}[I_1 = 1, I_2 = 1] = 0{,}05\cdot 0{,}02 = 0{,}001,$$

$$\mathrm{P}[I_1 = 1, I_2 = 0] = 0{,}05\cdot 0{,}98 = 0{,}049,$$

$$\mathrm{P}[I_1 = 0, I_2 = 1] = 0{,}95\cdot 0{,}02 = 0{,}019,$$

$$\mathrm{P}[I_1 = 0, I_2 = 0] = 0{,}95\cdot 0{,}98 = 0{,}931.$$

$$\mathrm{P}[X_1+X_2 \leq x \mid I_1 = 0, I_2 = 0] = 1,$$

поскольку в этом случае исков по обоим договорам не будет предъявлено. При $x > 0$

$$\mathrm{P}[X_1+X_2 \leq x \mid I_1 = 0, I_2 = 1] = \mathrm{P}[Y_2 \leq x] = \begin{cases} \dfrac{x}{6} \text{ при } x \leq 6, \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases},$$

$$\mathrm{P}[X_1+X_2 \leq x \mid I_1 = 1, I_2 = 0] = \mathrm{P}[Y_1 \leq x] = \begin{cases} \dfrac{x}{3} \text{ при } x \leq 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}.$$

Наиболее сложно вычисляется величина

$P[X_1+X_2 \le x \mid I_1 = 1,\ I_2 = 1] = P[Y_1+Y_2 \le x]$. Воспользуемся тем, что совместное распределение двумерной СВ (Y_1, Y_2) является равномерным на области $(0, 3]\times(0, 6]$ (п. 2.3). На рис. 3 изображен прямоугольник $(0, 3]\times(0, 6]$, пересеченный прямыми $Y_1+Y_2 = 3$, $Y_1+Y_2 = 6$, $Y_1+Y_2 = 9$.

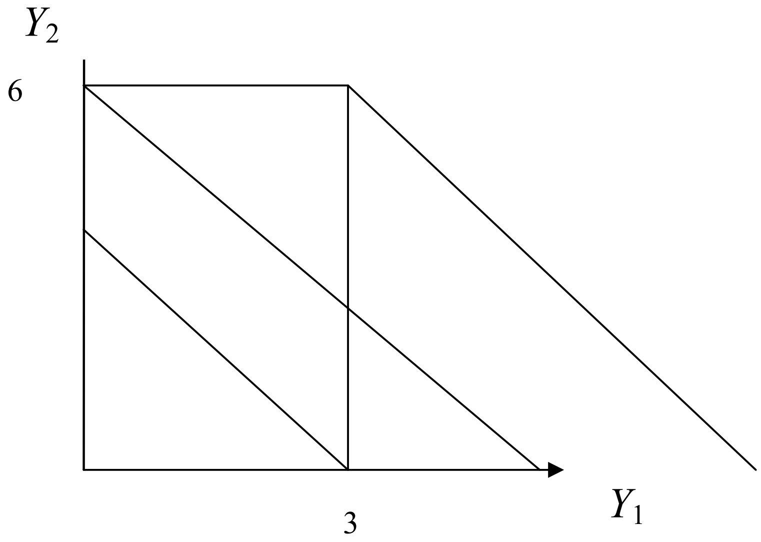

Рис. 3

Вычисляя площади соответствующих фигур при $x > 0$, получим:

$$P[Y_1+Y_2 \le x] = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2\cdot 18} & \text{при } x \le 3 \quad \text{(треугольник)}, \\ \dfrac{3(2x-3)}{2\cdot 18} & \text{при } 3 < x \le 6 \quad \text{(трапеция)}, \\ \dfrac{18-(9-x)^2/2}{18} & \text{при } 6 < x \le 9 \quad \text{(прямоугольник без треугольника)}, \\ 1 & \text{при } 9 < x \quad \text{(прямоугольник)}. \end{cases}$$

Объединяя все вместе, получим функцию распределения X_1+X_2:

$$F_{X_1+X_2}(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ 2{,}8\cdot 10^{-5}x^2+0{,}0195x+0{,}931 & \text{при } 0\le x<3, \\ 0{,}003x+0{,}9798 & \text{при } 3\le x<6, \\ -2{,}8\cdot 10^{-5}x^2+0{,}0005x+0{,}99775 & \text{при } 6\le x<9, \\ 1 & \text{при } 9\le x. \end{cases}$$

Граничные значения функции распределения: $F_{X_1+X_2}(3)$ = 0,989, $F_{X_1+X_2}(6)$ = 0,997.

Вероятность разорения при капитале x равна $1-F_{X_1+X_2}(x)$. Из условия 1− $F_{X_1+X_2}(x)$ = 0,05 получим уравнение

$$2{,}8\cdot 10^{-5}x^2+0{,}0195x+0{,}931 = 0{,}95.$$

Решая его (первым слагаемым можно пренебречь из-за его малости!), получим $x \approx 0{,}87$.

Аналогично из условия 1− $F_{X1+X2}(x)$ = 0,01 получим уравнение

$$0{,}003\,x + 0{,}9798 = 0{,}99,$$

т.е. x = 3,4.

Отметим, что начальный капитал весьма велик. Это следствие того, что в портфеле всего два договора. Тем не менее, если сравнить эти суммы с их аналогами для каждого договора, то выгода будет очевидна.

Приведенные вычисления показывают, что при большом портфеле точный подсчет рисков затруднителен: создание соответствующих компьютерных программ требует контроля за погрешностями, возникающими при суммировании большого числа малых величин. На помощь приходят предельные теоремы теории вероятностей. Предельные теоремы полезно использовать и в случаях, когда мы не обладаем полной информацией о законах распределения слагаемых, а знаем, например, только их математические ожидания и дисперсии.

Сформулируем центральную предельную теорему в том виде, в котором она применяется при оценке риска разорения. Пусть СВ X_1, X_2, …, X_K,… – иски по отдельным независимым договорам из портфеля, который потенциально представляется бесконечным, дисперсии которых ограничены сверху, СВ $S = \sum_{i=1}^{K} X_i$ – суммарный иск по портфелю . Тогда

$$\lim_{K\to\infty} \mathrm{P}\left[\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \le x\right] = \lim_{K\to\infty} \mathrm{P}\left[\frac{\sum_{i=1}^{K} X_i - \sum_{i=1}^{K} \mathrm{E}[X_i]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{K} \mathrm{Var}[X_i]}} \le x\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x). \tag{5.1}$$

Распределение, функция которого записана в правой части равенства, называется стандартным нормальным. Таблицы функции распределения $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения есть в любой книге по теории вероятностей (прил. 1). Практически при $K > 30$ можно считать распределение СВ $\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}$ стандартным нормальным. Приведем соответствующий пример.

Пример 5.3. Пусть заключено по 100 договоров, описанных в примере 5.2. Какой капитал гарантирует вероятность разорения меньше 0,05? 0,01?

Решение. Подсчитаем математическое ожидание и дисперсию исков по каждому виду договоров.

$\mathrm{E}[X_1] = 0{,}95 \cdot 0 + 0{,}05(0+3)/2 = 0{,}075$

(здесь применено итеративное правило (2.14) и свойства равномерного распределения (п. 3.1). Далее,

$$\mathrm{E}[X_1^2] = 0{,}95\cdot 0 + 0{,}05\int_0^3 \frac{x^2}{3}dx = 0{,}05\left.\frac{x^3}{9}\right|_0^3 = 0{,}15,$$

отсюда $\mathrm{Var}[X_1] = 0{,}15 - 0{,}075^2 = 0{,}144$. Аналогично

$$\mathrm{E}[X_2] = 0{,}98\cdot 0 + 0{,}02(0+6)/2 = 0{,}06,\ \mathrm{E}[X_2^2] = 0{,}02\left.\frac{x^3}{18}\right|_0^6 = 0{,}24,$$

$$\mathrm{Var}[X_2] = 0{,}24 - 0{,}06^2 = 0{,}2364,$$

отсюда

$$\mathrm{E}[S] = 100\cdot 0{,}075 + 100\cdot 0{,}06 = 13{,}5,$$

$$\mathrm{Var}[S] = 100\cdot 0{,}144 + 100\cdot 0{,}2364 = 38{,}04.$$

Капитал u, гарантирующий вероятность разорения меньшую 0,05, приближенно находится из равенства

$$\Phi\left[\frac{u-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right] = \Phi\left[\frac{u-13{,}5}{\sqrt{38{,}04}}\right] = 0{,}95.$$

Из таблицы квантилей стандартного нормального распределения $\frac{u-13{,}5}{\sqrt{38{,}04}} \approx 1{,}645$. Отсюда $u \approx 23{,}65$.

На каждый договор в среднем приходится по 12000 руб., сравнение с примером 5.2 демонстрирует важный принцип: чем больше портфель, тем меньшим капиталом, приходящимся на каждый договор, обеспечивается заданный уровень риска.

Для вероятности разорения 0,01 получаем $\frac{u-13{,}5}{\sqrt{38{,}04}} \approx 2{,}326$.

Отсюда $u \approx 27.85$.

Естественно, что капитал страховой компании формируется из страховых премий. Важный вопрос, как найденную сумму распределить между различными договорами страхования, подробно обсуждается в п. 1.2 и [27, 29].

5.2. Модель коллективного риска

5.2.1. Описание модели и основные характеристики. Как уже было отмечено, в модели коллективного риска рассматриваются не отдельные договоры страхования, а только иски, поступающие по портфелю договоров страхования. Таким образом, в данной модели случайная величина Y_i – величина i-го предъявляемого иска, $i = 1, 2, 3...$

Два основных предположения модели, указанные в п. **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, дополнены в данном случае следующими:

3. Величины предъявляемых исков Y_1, Y_2,... строго положительны, независимы, одинаково распределены с функцией распределения
$F(x) = \mathrm{P}[Y \le x]$. Поскольку все случайные величины Y_1, Y_2,... одинаково распределены, то под Y, опуская индекс, будем понимать любую из этих величин.

4. Число исков N – случайная величина. Величины Y_1, Y_2,..., Y_N, N независимы.

Суммарный иск $S = Y_1+Y_2+...+ Y_N$ в данной модели представляет собой сумму случайного числа случайных величин. Будем считать, что $S = 0$ при $N = 0$.

В п. 2.4 были определены характеристики величины S.

Производящая функция моментов:

$$M_S(t) = m_N(M_Y(t)),$$

где $m_N(t)$ – производящая функция вероятностей случайной величины N, $M_Y(t)$ – производящая функция моментов случайной величины Y.

Математическое ожидание: $\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[N]\mathrm{E}[Y]$.

Дисперсия: $\mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[Y]\mathrm{E}[N]+\mathrm{Var}[N]\mathrm{E}^2[Y]$.

В п. 4.5, 4.6 рассмотрены модели числа предъявляемых исков. В качестве распределений величины N – числа исков за рассматриваемый промежуток времени, наиболее адекватно отражающих реальность, выделены: биномиальное распределение,

распределение Пуассона и отрицательное биномиальное распределение. Этим трем распределениям числа исков соответствуют и три основных составных (или сложных) закона распределения суммарного иска: составное биномиальное распределение, составное распределение Пуассона и составное отрицательное биномиальное распределение.

Рассмотрим их основные характеристики и свойства.

5.2.2. Составное распределение Пуассона. Случайная величина $S = Y_1+Y_2+...+Y_N$ имеет составное распределение Пуассона с параметрами λ и $F(x)$, если случайная величина N имеет пуассоновское распределение со средним значением λ, а $F(x) = \mathrm{P}[Y \le x]$ – функция распределения случайных величин Y_i , i = 1, 2, 3,…

В этом случае производящая функция моментов случайной величины S:

$$M_S(t) = m_N(M_Y(t)) = \exp(\lambda M_Y(t) - \lambda). \tag{5.2}$$

Используя формулы (2.19), (2.20), находим математическое ожидание $\mathrm{E}[S] = \lambda \mathrm{E}[Y]$ и дисперсию $\mathrm{Var}[S] = \lambda \mathrm{E}[Y^2]$.

Вычислим коэффициент асимметрии S.

В п. 2.2 третий центральный момент S выражен через моменты S:

$$\mathrm{E}[S-\mathrm{E}[S]]^3 = \mathrm{E}[S^3] - 3\mathrm{Var}[S]\mathrm{E}[S] - \mathrm{E}^3[S].$$

Для определения $\mathrm{E}[S^3]$ найдем третью производную производящей функции моментов.

$$M'_S(t) = \lambda M'_Y(t)\exp(\lambda M_Y(t) - \lambda) = \lambda M'_Y(t) M_S(t).$$

$$M''_S(t) = \lambda^2 (M'_Y(t))^2 M_S(t) + \lambda M''_Y(t) M_S(t).$$

$$M'''_S(t) = \lambda^3 (M'_Y(t))^3 M_S(t) + 3\lambda^2 M'_Y(t) M''_Y(t) M_S(t) +$$

$$+\lambda M'''_Y(t) M_S(t),$$

следовательно, $\mathrm{E}[S^3] = \lambda^3\mathrm{E}^3[Y]+3\lambda^2\mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[Y^2]+ \lambda\mathrm{E}[Y^3]$.
Таким образом, третий центральный момент S:

$$\mathrm{E}[S-\mathrm{E}[S]]^3 = \lambda^3\mathrm{E}^3[Y]+3\lambda^2\mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[Y^2]+ \lambda\mathrm{E}[Y^3]-$$

$$-3\lambda^2\mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[Y^2]- \lambda^3\mathrm{E}^3[Y] = \lambda\mathrm{E}[Y^3].$$

Наконец, коэффициент асимметрии S равен

$$\frac{\mathrm{E}[S-\mathrm{E}[S]]^3}{\left(\sqrt{\mathrm{Var}[S]}\right)^3} = \frac{\lambda\mathrm{E}[Y^3]}{\left(\lambda\mathrm{E}[Y^2]\right)^{3/2}} = \frac{\mathrm{E}[Y^3]}{\sqrt{\lambda}\mathrm{E}^{3/2}[Y^2]}.$$

Так как величина предъявляемого иска положительна, то коэффициент асимметрии положителен и к тому же стремится к нулю, при $\lambda \to \infty$. Отметим, что в п. 5.2.36 будет доказано, что при $\lambda \to \infty$ составное распределение Пуассона будет стремиться к нормальному, т.е симметричному распределению.

Составное распределение Пуассона обладает следующим свойством.

Пусть $S_1, S_2, ..., S_n$ – независимые случайные величины, где СВ S_i имеет составное распределение Пуассона с параметрами λ_i и $F_i(x)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда случайная величина $S = S_1+S_2 +...+ S_n$ также имеет составное распределение Пауссона с параметрами λ и $F(x)$, где

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i, F(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(x). \tag{5.3}$$

Докажем это утверждение в предположении существования плотностей $f(x) = F'(x)$, $f_i(x) = F_i'(x)$, $i = \overline{1,n}$. Вычислим производящую функцию моментов случайной величины S и покажем, что она имеет вид, соответствующий составному пуассоновскому распределению (5.2), т. е.

$$M_S(t) = \exp(\lambda M_Y(t) - \lambda),$$

где $M_Y(t) = \int\limits_0^{\infty} \exp(tx) f(x) dx$ – производящая функция моментов СВ с плотностью распределения $f(x)$.

Производящая функция моментов случайной величины S

$$M_S(t) = \mathrm{E}[\exp(tS)] = \mathrm{E}[\exp(tS_1 + ... + tS_n)].$$

Так как $S_1, S_2, ..., S_n$ – независимые случайные величины, то

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}[\exp(tS_i)] = \prod_{i=1}^{n} M_{S_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i M_i(t) - \lambda_i) =$$
$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i M_i(t) - \lambda_i) \right) = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} M_i(t) - \lambda \right),$$

где $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$, $M_i(t) = \int\limits_0^{\infty} \exp(tx) f_i(x) dx$ –производящая функция моментов СВ, имеющей плотность распределения $f_i(x)$, $i = \overline{1,n}$.

Покажем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} M_i(t)$ – производящая функция моментов СВ с плотностью распределения $f(x)$.

$$M_Y(t) = \int\limits_0^{\infty} \exp(tx) f(x) dx = \int\limits_0^{\infty} \exp(tx) \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_0^{\infty} \exp(tx) f_i(x) dx = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i(t).$$

Таким образом, производящая функция моментов СВ S совпадает с производящей функцией составного распределения Пуассона. По теореме единственности, S имеет составное распределение Пуассона.

Пример 5.4. Пусть S_1 – суммарный иск, имеющий составное распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1 = 150$ и $F_1(x) =$ $=1 - \exp(- x/a)$, а S_2 – суммарный иск, имеющий составное распределение Пуассона с параметрами $\lambda_2 = 200$ и $F_2(x) = 1- \exp(- x/b)$. Тогда СВ $S = S_1 + S_2$ в соответствии с только что доказанным свойством имеет составное распределение Пуассона с параметрами $\lambda = 350$ и

$$F(x) = \frac{150}{350}F_1(x) + \frac{200}{350}F_2(x) = \frac{3}{7}F_1(x) + \frac{4}{7}F_2(x) =$$

$$= 1 - \frac{3}{7}\exp(-x/a) - \frac{4}{7}\exp(-x/b).$$

Заметим, что если все случайные величины $S_1, S_2, ..., S_n$ имеют одно и то же составное распределение Пуассона с параметрами λ и $F(x)$, то случайная величина $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$ также распределена в соответствии с составным распределением Паусcона с параметрами $n\lambda$ и $F(x)$.

5.2.3. Составное биномиальное распределение. Случайная величина S имеет составное биномиальное распределение с параметрами K, p и $F(x)$, если $S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$, случайная величина N распределена по биномиальному закону распределения с параметрами K и p, а $F(x) = \mathrm{P}[Y \le x]$ – функция распределения независимых одинаково распределенных случайных величин Y_i, $i = 1, 2, 3,...$

Пример 5.5. Составное биномиальное распределение возникает при групповом страховании жизни, если все застрахованные из одной группы одного возраста и смертность каждого из них подчиняется одной и той же таблице продолжительности жизни. Число исков по такому договору страхования жизни распределено по биномиальному закону распределения, а суммарный иск – по составному биномиальному закону распределения.

В случае составного биномиального распределения суммарного иска S производящая функция моментов случайной величины S имеет вид:

$$M_S(t) = m_N(M_Y(t)) = (1-p+pM_Y(t))^K. \qquad (5.4)$$

По формулам (2.19), (2.20) получаем
$\mathrm{E}[S] = Kp\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{Var}[S] = Kp\mathrm{E}[Y^2] - Kp^2\mathrm{E}^2[\mathrm{Y}]$.

Можно показать, что третий центральный момент равен

$$\mathrm{E}[S-\mathrm{E}[S]]^3 = Kp\mathrm{E}[Y^3] - 3Kp^2\mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[Y^2] + 2Kp^3\mathrm{E}^3[Y].$$

Таким образом, составное биномиальное распределение при определенных значениях параметров может обладать отрицательной асимметрией.

Пример 5.6. Если все предъявляемые иски имеют одну и ту же детерминированную величину A, то $S = AN$ и

$$\mathrm{E}[S-\mathrm{E}[S]]^3 = A^3\mathrm{E}[N-\mathrm{E}[N]]^3 = A^3\,(Kp - 3Kp^2 + 2Kp^3) =$$

$$= 2A^3\,Kp(p-0{,}5)(p-1).$$

Следовательно, в данном случае при $p < 0{,}5$ составное отрицательное биномиальное распределение имеет положительную, а при $p > 0{,}5$ – отрицательную асимметрию.

Составное биномиальное распределение обладает следующим свойством.

Если $S_1, S_2, ..., S_n$ – независимые случайные величины, каждая из которых имеет составное биномиальное распределение с параметрами K_i, p и $F(x)$ $(i = \overline{1,n})$ соответственно, то случайная величина $S = S_1+S_2 +...+ S_n$ также распределена в соответствии с составным биномиальным распределением с параметрами $K = K_1+... + K_n$, p и $F(x)$.

Доказательство предоставляем читателю провести самостоятельно.

5.2.4. Составное отрицательное биномиальное распределение. Случайная величина S имеет составное отрицательное биномиальное распределение с параметрами α, p и $F(x)$, если $S = Y_1+Y_2+...+ Y_N$ и N – случайная величина с отрицательным биномиальным законом распределения с параметрами α и p, а $F(x) = \mathrm{P}[Y \le x]$ – функция распределения независимых, одинаково распределенных случайных величин Y_i, $i = 1, 2, 3,\ldots$

В этом случае производящая функция моментов случайной величины S имеет вид

$$M_S(t) = m_N(M_Y(t)) = \left(\frac{p}{1-qM_Y(t)}\right)^{\alpha}. \qquad (5.5)$$

По формулам (2.19), (2.20)

$$\mathrm{E}[S] = \frac{\alpha q}{p}\mathrm{E}[Y],\ \mathrm{Var}[S] = \frac{\alpha q}{p}\mathrm{E}[Y^2]+ \frac{\alpha q^2}{p^2}\mathrm{E}^2[\mathrm{Y}].$$

Можно показать, что третий центральный момент имеет вид

$$\mathrm{E}[S-\mathrm{E}[S]]^3 = \frac{\alpha q}{p}\mathrm{E}[Y^3]+3\frac{\alpha q^2}{p^2}\mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[Y^2]+2\frac{\alpha q^3}{p^3}\mathrm{E}^3[Y].$$

Таким образом, коэффициент асимметрии составного отрицательного биномиального распределения, как и составного распределения Пуассона, всегда положителен.

Составное отрицательное биномиальное распределение обладает следующим свойством.

Если S_1, S_2, ..., S_n – независимые случайные величины, каждая из которых имеет составное отрицательное биномиальное

распределение с параметрами α_i, p и $F(x)$, $i = \overline{1,n}$, то случайная величина
$S = S_1+S_2 +...+ S_n$ также распределена в соответствии с составным отрицательным биномиальным распределением с параметрами
$\alpha = \alpha_1+...+ \alpha_n$, p и $F(x)$.

Доказательство предоставляем читателю провести самостоятельно.

5.2.5. Точное вычисление функции распределения суммарного иска. Функция распределения суммарного иска S (она соответствует вероятности выполнения страховщиком своих обязательств при начальном капитале x) вычисляется следующим образом:

$$F_S(x) = \mathrm{P}[S \le x] = \mathrm{P}[Y_1 + ... + Y_N \le x] =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}[Y_1 + ... + Y_N \le x | N = i]\mathrm{P}[N = i] =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}[Y_1 + ... + Y_i \le x]\mathrm{P}[N = i] = \sum_{i=0}^{\infty} F_{Y_1+...+Y_i}(x)\mathrm{P}[N = i],$$

где $F_{Y_1+...+Y_i}(x)$ – функция распределения СВ $Y_1 + ... + Y_i$. Здесь использована формула полной вероятности (2.12) и независимость СВ – числа предъявляемых исков и размеров исков (п. 5.2.1).

Если Y_i , i = 1, 2, 3,… – непрерывные случайные величины, то дифференцируя функцию распределения, получим формулу для вычисления плотности распределения случайной величины S:

$$f_S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{Y_1+...+Y_i}(x)\mathrm{P}[N = i],$$

где плотность $f_{Y_1+...+Y_i}(x)$ может быть определена по формуле свертки (2.16).

Пример 5.7. Пусть число исков N, поступающих по некоторому портфелю договоров страхования, имеет геометрическое распределение с параметром p, а размер предъявляемого иска Y_i, $i = 1, 2, 3,\dots$ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Какова вероятность разорения страховщика, если его начальный капитал равен u?

Решение. Распределение случайной величины $Y_1 + \ldots + Y_i$ является гамма-распределением с параметрами λ и i (см. п. 3.3). Следовательно, плотность распределения случайной величины $Y_1 + \ldots + Y_i$ имеет вид

$$f_{Y_1+\ldots+Y_i}(x) = \frac{\lambda^i}{(i-1)!} x^{i-1} e^{-\lambda x} \ .$$

Для геометрического распределения $\mathrm{P}[N = i] = p(1 - p)^i$, $i = 0, 1, 2,\ldots$

Таким образом:

$$f_S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{Y_1+\ldots+Y_i}(x)\mathrm{P}[N = i] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} x^{i-1} e^{-\lambda x} p(1-p)^i =$$

$$= \lambda p(1-p)e^{-\lambda x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda x(1-p))^{i-1}}{(i-1)!} =$$

$$= \lambda p(1-p)e^{-\lambda x} e^{\lambda x(1-p)} = \lambda p(1-p)e^{-\lambda xp} .$$

Вероятность разорения:

$$\mathrm{P}[S > u] = \int_u^{\infty} f_S(x)dx = \int_u^{\infty} \lambda p(1-p)e^{-\lambda px}dx = (1-p)e^{-\lambda pu} .$$

Для нахождения закона распределения случайной величины S в случае, если Y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) – дискретные случайные величины, принимающие натуральные значения, можно использовать производящую функцию вероятностей S. Так как в этом случае возможные значения S – целые неотрицательные числа, то ее производящая функция равна

$$m_S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \mathrm{P}[S = i] = m_N(m_Y(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^k \mathrm{P}[Y = k] \right)^n \mathrm{P}[N = n].$$

Таким образом, чтобы найти P[$S = i$], достаточно вычислить коэффициент при z^i в правой части этого равенства или значение $m_S^{(i)}(0)/i!$.

Пример 5.8. Пусть по портфелю договоров страхования за рассматриваемый промежуток времени может быть предъявлено не более 3 исков, причем вероятность предъявления одного иска 0,2, двух исков – 0,12, трех – 0,08. Предъявляемые иски с вероятностью 0,7 имеют размер 100 тыс. руб., а с вероятностью 0,3 – 500 тыс. руб. Какой начальный капитал обеспечивает вероятность выполнения страховой компанией своих обязательств, не меньшую 0,95; 0,99?

Решение. Производящая функция вероятностей числа исков N равна

$m_N(z) = 0{,}6 + 0{,}2z + 0{,}12z^2 + 0{,}08z^3$.

Примем 100 тыс. руб. за 1 у.е. Производящая функция вероятностей размера предъявляемого иска имеет вид

$m_Y(z) = 0{,}7z + 0{,}3z^5$.

Отсюда производящая функция вероятностей суммарного иска:

$$M_S(t) = m_N(M_Y(t)) = 0{,}6 + 0{,}2(0{,}7z + 0{,}3z^5) + 0{,}12(0{,}7z + 0{,}3z^5)^2 +$$

$$+0{,}08(0{,}7z + 0{,}3z^5)^3 = 0{,}6 + 0{,}14z + 0{,}0588z^2 + 0{,}02744z^3 +$$

$$+0{,}06z^5 + 0{,}0504z^6 + 0{,}03528z^7 + 0{,}0108z^{10} + 0{,}01512z^{11} + 0{,}00216z^{15}.$$

Таким образом, закон распределения суммарного иска и его функция распределения равны (табл. 6).

Таблица 6

N	0	1	2	3	5

P[$S = n$]	0,6	0,14	0,0588	0,02744	0,06
P[$S \le n$]	0,6	0,74	0,7988	0,82624	0,88624

N	6	7	10	11	15
P[$S = n$]	0,0504	0,03528	0,0108	0,01512	0,00216
P[$S \le n$]	0,93664	0,97192	0,98272	0,99784	1

Итак, чтобы страховая компания не разорилась с вероятностью 0,95 (соответственно 0,99), ей необходим начальный капитал в 7 тыс. руб. (соответственно 11 тыс. руб.).

В случае если случайная величина S имеет какое-либо составное распределение (биномиальное, отрицательное биномиальное или Пуассона), то для вычисления P[$S = i$] можно использовать эффективные рекуррентные формулы. При выводе этих формул используется равенство

$$\mathrm{P}[N = n] = \mathrm{P}[N = n-1]\left(a + \frac{b}{n}\right),$$

где a и b – некоторые константы.

Так, если N имеет распределение Пуассона, то

$$\mathrm{P}[N = n] = \mathrm{P}[N = n-1]\frac{\lambda}{n},$$

следовательно, в данном случае $a = 0$, $b = \lambda$.

Для биномиального распределения:

$$\mathrm{P}[N = n] = \mathrm{P}[N = n-1]\frac{(K+1-n)p}{n(1-p)} \text{ и } a = -\frac{p}{1-p},\ b = \frac{(K+1)p}{1-p}.$$

И, наконец, для отрицательного биномиального распределения:

$$\mathrm{P}[N = n] = \mathrm{P}[N = n-1]\frac{(\alpha+n-1)}{n}(1-p),\ a = 1-p,\ b = (\alpha-1)(1-p).$$

Выведем следующую рекуррентную формулу для вычисления закона распределения случайной величины S:

$$\mathrm{P}[S=i]=\sum_{j=1}^{i}\left(a+\frac{bj}{i}\right)\mathrm{P}[S=i-j]\mathrm{P}[Y=j],\ i=1,2,3... \tag{5.6}$$

$\mathrm{P}[S=0]=\mathrm{P}[N=0]$ (п. 5.2.1).

Прежде всего, получим вспомогательные формулы:

1. $\mathrm{E}\left[Y \middle| \sum_{k=1}^{n} Y_k = i\right]=\frac{i}{n}$.

Данная формула достаточно очевидна: все величины Y_i, $i=\overline{1,n}$ одинаково распределены и если их сумма равна i, то среднее значение каждой из них $Y_i \equiv Y$ равно i/n.

2. Получим иное выражение для величины $\mathrm{E}\left[Y \middle| \sum_{k=1}^{n} Y_k = i\right]$:

$$\mathrm{E}\left[Y \middle| \sum_{k=1}^{n} Y_k = i\right]=\sum_{j=1}^{i} j\mathrm{P}\left[Y=j \middle| \sum_{k=1}^{n} Y_k = i\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{i} j\frac{\mathrm{P}\left[Y=j;\ \sum_{k=1}^{n} Y_k=i\right]}{\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k=i\right]}=\sum_{j=1}^{i} j\frac{\mathrm{P}[Y=j]\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n-1} Y_k=i-j\right]}{\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k=i\right]},$$

так как $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ независимы и одинаково распределены.

На основе этих формул и рекуррентной формулы для $\mathrm{P}[N=n+1]$ выводится следующая формула:

3. $\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n+1} Y_k = i\right]\mathrm{P}[N=n+1]=$

$$=\sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{P}[Y=j]\left(a+\frac{bj}{i}\right)\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k = i-j\right]\mathrm{P}[N=n].$$

Действительно:

$$\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n+1} Y_k = i\right]\mathrm{P}[N=n+1] = \mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n+1} Y_k = i\right]\left(a+\frac{b}{n+1}\right)\mathrm{P}[N=n]=$$

$$=\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n+1} Y_k = i\right]\mathrm{E}\left[a+\frac{bY}{i}\middle|\sum_{k=1}^{n+1} Y_k = i\right]\mathrm{P}[N=n]=$$

$$=\sum_{j=1}^{i} \mathrm{P}[Y=j]\left(a+\frac{bj}{i}\right)\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k = i-j\right]\mathrm{P}[N=n]=$$

$$=\sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{P}[Y=j]\left(a+\frac{bj}{i}\right)\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k = i-j\right]\mathrm{P}[N=n].$$

Последнее равенство следует из того, что

$$\mathrm{P}[\sum_{k=1}^{n} Y_k = i-j] = 0 \text{ при } j=i.$$

Перейдем к выводу основной формулы

$$\mathrm{P}[S=i] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k = i\right]\mathrm{P}[N=n] =$$

$$=\mathrm{P}[Y=i]\mathrm{P}[N=1] + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n+1} Y_k = i\right]\mathrm{P}[N=n+1] =$$

(по формуле 3)

$$=\mathrm{P}[Y=i](a+b)\mathrm{P}[N=0]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{P}[Y=j]\left(a+\frac{bj}{i}\right)\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n}Y_k=i-j\right]\mathrm{P}[N=n]=$$

$$=\mathrm{P}[Y=i](a+b)\mathrm{P}[N=0]+$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{P}[Y=j]\left(a+\frac{bj}{i}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{n}Y_k=i-j\right]\mathrm{P}[N=n]=$$

$$=\mathrm{P}[Y=i](a+b)\mathrm{P}[S=0]+\sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{P}[Y=j]\left(a+\frac{bj}{i}\right)\mathrm{P}[S=i-j]=$$

$$=\sum_{j=1}^{i}\mathrm{P}[Y=j]\left(a+\frac{bj}{i}\right)\mathrm{P}[S=i-j].$$

Заметим, что если S имеет составное распределение Пуассона, то формула (5.6) упрощается. Так как в данном случае $a = 0$ и $b = \lambda$, то

$$\mathrm{P}[S=i]=\frac{\lambda}{i}\sum_{j=1}^{i}j\mathrm{P}[S=i-j]\mathrm{P}[Y=j] \quad \text{при } i = 1, 2, 3,...; \tag{5.7}$$

$$\mathrm{P}[S=0]=\exp(-\lambda).$$

Пример 5.9. Какова вероятность, того что величина суммарного иска равна 7, если число исков имеет распределение Пуассона с параметром λ, а величина предъявляемого иска с вероятностью 0,7 равна 2 у.е., а с вероятностью 0,3 равна 5 у.е.?

Решение. Воспользуемся формулой (5.7):

$$\mathrm{P}[S=0]=\exp(-\lambda).$$

$$\mathrm{P}[S=i]=\frac{\lambda}{i}\sum_{j=1}^{i} j\mathrm{P}[S=i-j]\mathrm{P}[Y=j],\ \text{при } i = 1, 2, 3\ldots,$$

отсюда,

$$\mathrm{P}[S=1]=\lambda\mathrm{P}[S=0]\mathrm{P}[Y=1]=0,$$

$$\mathrm{P}[S=2]=\frac{\lambda}{2}(\mathrm{P}[S=1]\mathrm{P}[Y=1]+2\mathrm{P}[S=0]\mathrm{P}[Y=2])=0{,}7\lambda\exp(-\lambda).$$

Аналогично $\mathrm{P}[S=3]=0$, $\mathrm{P}[S=4]=0{,}245\lambda^2\exp(-\lambda)$,

далее $\mathrm{P}[S=i]=\dfrac{\lambda}{i}(2\mathrm{P}[S=i-2]0{,}7+5\mathrm{P}[S=i-5]0{,}3)$, $i = 5, 6, 7\ldots$

В частности, $\mathrm{P}[S=5]=0{,}3\lambda\exp(-\lambda)$,

$$\mathrm{P}[S=6]=\frac{0{,}343}{6}\lambda^3\exp(-\lambda),$$

$$\mathrm{P}[S=7]=\frac{\lambda}{7}(2\mathrm{P}[S=5]0{,}7+5\mathrm{P}[S=2]0{,}3)=0{,}21\lambda^2\exp(-\lambda).$$

Заметим, что если величина предъявляемого иска Y не является дискретной величиной, принимающей натуральные значения, то можно применить процесс дискретизации и построить случайную величину, принимающую только натуральные значения и в некотором смысле близкую к Y.

Пусть m – натуральное число. Рассмотрим Y^* – случайную величину, принимающую значения k/m, причем

$$\mathrm{P}[Y^*=k/m]=\mathrm{P}[(k-1)/m\le Y<k/m],\ k=1, 2, 3, \ldots$$

Распределение случайной величины Y^* аппроксимирует распределение случайной величины Y (близки их функции распределения), и аппроксимация тем лучше, чем больше число m.

Случайная величина $Y^{**} = m\ Y^{*}$ принимает только натуральные значения, причем справедливо равенство $F_{Y^{**}}(x) = F_{Y^{*}}(x/m)$.

5.2.6. Приближенное вычисление функции распределения суммарного иска. Рассмотрим два подхода к приближенному вычислению функции распределения суммарного иска. Один из них опирается на предельные теоремы, второй на метод моментов.

I. Первый подход, в свою очередь, опирается на теорему непрерывности для производящих функций моментов [30], которая формулируется следующим образом.

Пусть функция распределения $F(x,\gamma)$ некоторой случайной величины и ее производящая функция моментов $M(x, \gamma)$ зависят от параметра γ. Если существует предел производящей функции моментов $\lim\limits_{\gamma\to\gamma_0} M(x,\gamma) = M(x)$, где $M(x)$ – производящая функция моментов, соответствующая непрерывной функции распределения $F(x)$, то существует и предел $\lim\limits_{\gamma\to\gamma_0} F(x,\gamma)$, равный $F(x)$.

Рассмотрим случайную величину S, которая подчинена составному распределению Пуассона. Следующая предельная теорема утверждает, что если среднее число исков λ стремится к бесконечности, то распределение S стремится к нормальному распределению.

Пусть $S = Y_1+Y_2+\dots\ Y_N$ − случайная величина, имеющая составное распределение Пуассона с параметрами λ и $F(x)$. Тогда при $\lambda\to\infty$ распределение случайной величины $\dfrac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}$ стремится к стандартному нормальному распределению, т.е.

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{P}\left[\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \le x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt .$$

Для доказательства проверим, что производящая функция моментов случайной величины $\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}$, при $\lambda\to\infty$, стремится к производящей функции моментов стандартного нормального распределения. Вычислим для начала производящую функцию моментов стандартного нормального распределения.

$$M(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(xt)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(xt-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-t)^2-t^2}{2}\right)dx=$$

$$=\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right)dx=\exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right)dx=1$ как интеграл от плотности стандартного нормального распределения.

Итак, производящая функция моментов стандартного нормального распределения $M(t)=\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Рассмотрим производящую функцию моментов случайной величины $\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}$ и покажем, что при $\lambda\to\infty$ она стремится к $\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

$$M_{\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}}(t)=\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}t\right)\right]=$$

$$=\exp\left(-\frac{\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}t\right)\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{S}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}t\right)\right]=$$

$$=\exp\left(-\frac{\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}t\right)M_S\left(\frac{t}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right)=$$

$$=\exp\left(-\frac{\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}t\right)\exp\left(\lambda M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right)-\lambda\right)=$$

$$=\exp\left(-\frac{\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}t+\lambda M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right)-\lambda\right),$$

так как производящая функция моментов СВ S, имеющей составное распределение Пуассона, равна $M_S(t)=\exp(\lambda M_Y(t)-\lambda)$.

Покажем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} M_{\frac{\text{S-E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}}(t)=\exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \text{ т.е.}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[\lambda M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right)-\frac{\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}t-\lambda\right]=\frac{t^2}{2}.$$

По формуле Маклорена [31],

$$M_Y(z)=1+\mathrm{E}[Y]z+\mathrm{E}[Y^2]z^2/2+o(z^2) \text{ при } z\to 0.$$

Для составного пуассоновского распределения S (п. 5.2.2)

$$\mathrm{E}[S]=\lambda\mathrm{E}[Y],\ \mathrm{Var}[S]=\lambda\mathrm{E}[Y^2].$$

Для производящей функции моментов СВ – размера одного иска справедливо равенство

$$M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right)=1+\mathrm{E}[Y]\frac{t}{\sqrt{\lambda \mathrm{E}[Y^2]}}+\frac{t^2}{2\lambda}+o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda \mathrm{E}[Y^2]}}\right)^2\right)$$

при $\lambda\to+\infty$.
Следовательно,

$$\lambda M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right)-\frac{\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}t-\lambda=\frac{t^2}{2}+\lambda o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda\to+\infty$.

Поскольку $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda o\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right)-\frac{\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}t-\lambda=\frac{t^2}{2}, \text{ откуда}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}M_{\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}}(t)=\exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \text{ что и требовалось показать.}$$

Пример 5.10. Какова вероятность разорения страховой компании, если число исков имеет распределение Пуассона с параметром 200, величина предъявляемого иска с вероятностью 0,7 равна 2 у.е. и с вероятностью 0,3 равна 5 у.е., а начальный капитал компании составляет 600 у.е.?

Решение. Будем считать, что среднее число исков $\mathrm{E}[N]$ = 200 является достаточно большим для замены распределения суммарного иска S нормальным. Тогда вероятность разорения страховой компании при начальном капитале u равна

$$\mathrm{P}[S > u] = \mathrm{P}\left[\frac{S - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > \frac{u - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right] \approx \int\limits_{\frac{u - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2 / 2) dx .$$

Математическое ожидание и дисперсия суммарного иска

$\mathrm{E}[S] = \lambda \mathrm{E}[Y] = 580$ у.е., $\mathrm{Var}[S] = \lambda \mathrm{E}[Y^2] = 2060$ у.е.^{2}.

Следовательно, $\dfrac{u - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \approx 0{,}44$ и вероятность разорения $\mathrm{P}[S > u] \approx 0{,}32997$ (прил. 1).

Вычислим вероятность разорения, используя рекуррентную формулу для нахождения распределения суммарного иска. Это позволит оценить точность использованного приближения. Для этого воспользуемся примером 5.9 и компьютерными расчетами. Вероятность разорения, вычисленная на основе такого подхода, равна

$$\mathrm{P}[S > 3000] = 1 - \sum_{n=0}^{3000} \mathrm{P}[S = n] \approx 0{,}32141.$$

Относительная погрешность от замены вероятности разорения, вычисленной точно, значением, полученным на основе нормального приближения, примерно равна 2,6 %.

Аналогично можно показать, что распределение случайной величины $\dfrac{S - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}$ стремится к стандартному нормальному распределению в случае, если S – случайная величина, имеющая составное отрицательное биномиальное распределение с параметрами α, p и $F(x)$, при фиксированном значении параметра p и $\alpha \to +\infty$. Это соответствует неограниченному увеличению среднего числа исков $\mathrm{E}[N] = \dfrac{\alpha q}{p}$.

Среднее число исков $E[N] = \dfrac{\alpha q}{p}$ стремится к бесконечности и при $p \to 0$. В этом случае справедлива следующая предельная теорема.

Пусть $S = Y_1+Y_2+\ldots +Y_N$ – случайная величина, имеющая составное отрицательное биномиальное распределение с параметрами α, p и $F(x)$. Распределение случайной величины $\dfrac{S}{E[S]}$ стремится к гамма-распределению (п. 3.3) с параметрами $\lambda = \alpha$ и α при $p \to 0$, т.е.

$$\lim_{p\to 0} P\left[\frac{S}{E[S]} \le x\right] = \int_0^x \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \exp(-\alpha t)dt.$$

Для доказательства проверим, что производящая функция моментов случайной величины $\dfrac{S}{E[S]}$ стремится при $p \to 0$ к производящей функции моментов гамма-распределения с параметрами $\lambda = \alpha$ и α, т.е. к $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha - t}\right)^\alpha$.

Действительно, так как S имеет составное отрицательное биномиальное распределение и потому производящая функция моментов S определяется формулой (5.5) $M_S(t) = \left(\dfrac{p}{1 - qM_Y(t)}\right)^\alpha$, то

$$M_{\frac{S}{E[S]}}(t) = E\left[\exp\left(\frac{S}{E[S]}t\right)\right] == \left(\frac{p}{1 - qM_Y\left(\frac{t}{E[S]}\right)}\right)^\alpha.$$

Поскольку $M_Y(z) = 1 + \mathrm{E}[Y]z + o(z)$ при $z \to 0$ и для составного отрицательного биномиального распределения $\mathrm{E}[S] = \dfrac{\alpha q}{p}\mathrm{E}[Y]$ (п.5.2.4), то

$$M_Y\left(\frac{t}{\mathrm{E}[S]}\right) = 1 + \frac{pt}{\alpha q} + o\left(\frac{pt}{\alpha q \mathrm{E}[Y]}\right) = 1 + \frac{pt}{\alpha q} + o(p)$$

при $p \to 0$.

Следовательно,

$$M_{\frac{S}{\mathrm{E}[S]}}(t) = \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{\alpha} + \frac{1}{p}o(p)}\right)^{\alpha}$$

при $p \to 0$.

Поскольку $\lim\limits_{p \to 0} \dfrac{1}{p} o(p) = 0$, то

$$\lim_{p \to 0} M_{\frac{S}{\mathrm{E}[S]}}(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{\alpha},$$ что и требовалось доказать.

Как было отмечено в п. 3.3, гамма-распределение с параметрами $\lambda = 0{,}5$ и $\alpha = n/2$ совпадает с распределением $\chi^2(n)$ с n степенями свободы. Данное распределение имеет широкое применение в статистике, имеются таблицы квантилей данного распределения (прил. 3). Выразим гамма-распределение с произвольными параметрами λ и α через распределение $\chi^2(n)$.

Для этого сначала докажем, что совпадают производящие функции моментов случайных величин $\gamma_{\lambda,\alpha}$ и $\dfrac{1}{a}\gamma_{\frac{\lambda}{a},\alpha}$. Здесь $\gamma_{\lambda,\alpha}$ – случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметрами λ и α.

Действительно,

$$\mathrm{E}[\exp(t\gamma_{\lambda,\alpha})] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\lambda / a}{\lambda / a - t / a}\right)^{\alpha} = \mathrm{E}\left[\exp\left(t\frac{1}{a}\gamma_{\frac{\lambda}{a},\alpha}\right)\right].$$

По теореме единственности (п.2.2), функции распределения СВ $\gamma_{\lambda,\alpha}$ и $\frac{1}{a}\gamma_{\frac{\lambda}{a},\alpha}$ также совпадают.

Поскольку $\gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}} = \chi^2(n)$ при натуральных n, то СВ $\gamma_{\lambda,\alpha}$ при натуральных 2α имеет то же распределение, что и СВ $\frac{1}{2\lambda}\gamma_{\frac{1}{2},\alpha} = \frac{1}{2\lambda}\chi^2(2\alpha)$.

Таким образом, если S – случайная величина, имеющая составное отрицательное биномиальное распределение с параметрами α, p, $F(x)$, то

$$\frac{S}{\mathrm{E}[S]} \approx \gamma_{\alpha,\alpha} = \frac{1}{2\alpha}\chi^2(2\alpha),$$

если число 2α натуральное и число p достаточно малое (здесь и далее под приближенным равенством случайных величин будем понимать приближенное равенство их функций распределения).

В актуарной практике распределение $\chi^2(t)$ встречается и для положительных нецелых значений t. Для определения квантилей таких величин используют в частности линейную интерполяцию.

Пример 5.11. Каким должен быть капитал страховой компании, чтобы она выполнила свои обязательства с вероятностью 0,98, если число исков имеет геометрическое распределение (п. 4.6) со средним значением равным 99, а величина предъявляемого иска имеет экспоненциальное распределение со средним значением равным 100 у.е.?

Решение. Найдем параметр p распределения числа исков. Так как для геометрического распределения $\mathrm{E}[N] = \dfrac{1-p}{p}$, то $p = 0{,}01$. Геометрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального распределения при $\alpha = 1$. Будем считать, что значение параметра p является достаточно близким к 0, чтобы использовать гамма-приближение для распределения суммарного иска S. В этом случае $\dfrac{S}{\mathrm{E}[S]} \approx \gamma_{1,1} = \dfrac{1}{2}\chi^2(2)$, т.е. $S \approx \dfrac{1}{2}\chi^2(2)\mathrm{E}[S]$, и вероятность неразорения страховой компании при начальном капитале u равна

$$\mathrm{P}[S \le u] \approx \mathrm{P}\left[0{,}5\chi^2(2)\mathrm{E}[S] \le u\right] = \mathrm{P}\left[\chi^2(2) \le \frac{2u}{\mathrm{E}[S]}\right].$$

Величина $\dfrac{2u}{\mathrm{E}[S]}$ равна квантилю уровня 0,98 для распределения $\chi^2(2)$ с 2 степенями свободы, то есть 7,824 (прил. 3).

Математическое ожидание суммарного иска:
$\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[N]\mathrm{E}[Y] = 9900$ у.е.

Следовательно, $u \approx 38728{,}8$ у.е.

Сравним полученный ответ с точным решением. Для этого воспользуемся примером 5.7. Мы получили, что $\mathrm{P}[S > u] = (1-p)e^{-\lambda p u}$. Так как для экспоненциального распределения $\mathrm{E}[Y] = 1/\lambda$, то параметр распределения $\lambda = 0{,}01$. Таким образом, начальный капитал компании равен

$$u = -\frac{1}{\lambda p}\ln\left(\frac{1-\mathrm{P}[S > u]}{1-p}\right) \approx 39019{,}7.$$

Относительная погрешность от замены значения начального капитала, вычисленного на основе точного расчета распределения суммарного иска, приближенным примерно равна 0,75 %.

Пример 5.12. Каким должен быть капитал страховой компании, чтобы она выполнила свои обязательства с вероятностью 0,95, если число исков имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами p = 0,02 и α = 2,7, а среднее значение величины предъявляемого иска равно 20 у.е.?

Решение. Будем считать, что значение параметра p является достаточно близким к 0 для использования гамма-приближения. В этом случае

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{E}[S]} \approx \gamma_{2,7;2,7} \approx \frac{1}{5{,}4}\chi^2(5{,}4).$$

Математическое ожидание суммарного иска:

$$\mathrm{E}[S] = \frac{\alpha q}{p}\mathrm{E}[Y] = 2646 \text{ у.е.}$$

Следовательно, $S \approx 490\chi^2(5{,}4)$ и вероятность неразорения страховой компании:

$$\mathrm{P}[S \le u] \approx \mathrm{P}\left[490\chi^2(5{,}4) \le u\right] = \mathrm{P}\left[\chi^2(5{,}4) \le \frac{u}{490}\right].$$

Величина $\frac{u}{490}$ равна квантилю уровня 0,95 для распределения χ^2 с 5,4 степенями свободы. Таблицы квантилей имеются для распределений χ^2 только с натуральным числом степеней свободы. Так, квантили уровня 0,95 для распределения χ^2 с 5 и 6 степенями свободы равны $x_{0,95}(5)$ = 11,070 и $x_{0,95}(6)$ = 12,592. Определим квантиль уровня 0,95 для распределения χ^2 с 5,4 степенями свободы $x_{0,95}(5{,}4)$ на основе линейной интерполяции:

$$x_{0,95}(5{,}4) = 0{,}4\, x_{0,95}(6) + 0{,}6\, x_{0,95}(5) = 11{,}6788.$$

Следовательно, $u = 490x_{0,95}(5{,}4) \approx 5722{,}6$ у.е.

II. Метод моментов состоит в том, что распределение суммарного иска S приближают некоторым известным распределением $G(x)$ с параметрами $(\theta_1, \theta_2,..., \theta_l)$ [23, 24]. Моменты случайной величины являются функциями параметров и для определения l значений параметров $(\theta_1, \theta_2,..., \theta_l)$ распределения $G(x)$ l моментов суммарного иска приравнивают к l моментам выбранного распределения $G(x)$. Решая полученную систему уравнений, находят значения параметров распределения.

В случае, если в качестве распределения $G(x)$ выбрано нормальное распределение с параметрами m и σ^2, то полагаем

$$m = \mathrm{E}[S],\ \sigma^2 = \mathrm{Var}[S].$$

Если $G(x)$ – гамма-распределение с параметрами λ и α, то

$\mathrm{E}[S] = \alpha/\lambda$, $\mathrm{Var}[S] = \alpha/(\lambda^2)$, откуда

$$\lambda = \frac{\mathrm{E}[S]}{\mathrm{Var}[S]},\ \alpha = \frac{(\mathrm{E}[S])^2}{\mathrm{Var}[S]}.$$

Таким образом,

$$S \approx \gamma_{\lambda,\alpha} \approx \frac{1}{2\lambda}\chi^2(2\alpha) = \frac{\mathrm{Var}[S]}{2\mathrm{E}[S]}\chi^2\left(\frac{2(\mathrm{E}[S])^2}{\mathrm{Var}[S]}\right).$$

Пример 5.13. Исследуем пример 5.11 на основе следующего приближения распределения суммарного иска:

$$S \approx \frac{\mathrm{Var}[S]}{2\mathrm{E}[S]}\chi^2\left(\frac{2\mathrm{E}^2[S]}{\mathrm{Var}[S]}\right).$$

Напомним, что нужно найти капитал страховой компании, при котором она не разорится с вероятностью 0,95, если число исков имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0{,}01$, а величина предъявляемого иска имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 0{,}01$.

Математическое ожидание и дисперсия суммарного иска равны

$\mathrm{E}[S] = 9900$ у.е.,

$\mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[Y]\mathrm{E}[N] + \mathrm{Var}[N]\mathrm{E}^2[Y] =$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\frac{(1-p)}{p} + \frac{(1-p)}{p^2}\frac{1}{\lambda^2} = 99990000 \text{ у.е.}^2.$$

Следовательно, $S \approx \dfrac{\mathrm{Var}[S]}{2\mathrm{E}[S]}\chi^2\left(\dfrac{2\mathrm{E}^2[S]}{\mathrm{Var}[S]}\right) = 5050\chi^2(1{,}96).$

Вероятность неразорения страховой компании равна

$$\mathrm{P}[S \le u] \approx \mathrm{P}\left[5050\chi^2(1{,}96) \le u\right] = \mathrm{P}\left[\chi^2(1{,}96) \le \frac{u}{5050}\right]$$

при начальном капитале u.

Величина $\dfrac{u}{5050}$ равна квантилю уровня 0,98 для распределения χ^2 с 1,96 степенями свободы. Применяя линейную интерполяцию, получаем:

$$x_{0,98}(1{,}96) = 0{,}96\, x_{0,98}(2) + 0{,}04\, x_{0,98}(1).$$

Квантили уровня 0,98 для распределения χ^2 с 1 степенью свободы $x_{0,98}(1) = 5{,}412$, с 2 степенями свободы $x_{0,98}(2) = 7{,}824$. Таким образом, $x_{0,98}(1{,}96) = 7{,}72752$.

Следовательно, $u = 5050x_{0,98}(1{,}96) \approx 39023{,}98$ у.е.

В примере 5.11 мы показали, что точный расчет начального капитала дает следующий результат: $u \approx 39019{,}7$.

Относительная погрешность от замены значения начального капитала, вычисленного на основе точного расчета распределения суммарного иска, значением, полученным приближением данного распределения гамма-распределением на основе метода моментов, примерно равна 0,01 %.

Нормальное приближение имеет некоторые недостатки в качестве распределения, приближающего распределение суммарного иска [27].

1. Величина суммарного иска S с нормальным распределением может принимать отрицательные значения, в частности,

$$\mathrm{P}[S<0]=\mathrm{P}\left[\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}<\frac{-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\,,$$

в то время как реальная величина суммарного иска не может быть отрицательной.

2. Плотность нормального распределения – симметричная функция, а распределение суммарного иска характеризуется во многих случаях положительным коэффициентом асимметрии.

3. Для нормального распределения правый хвост распределения достаточно быстро стремится к нулю (как $\exp(-x^2/2)$). Для многих же видов страхования распределение суммарного иска имеет достаточно тяжелый хвост, т.е. большие значения суммарного иска появляются с относительно высокой вероятностью. Приближение распределения суммарного иска нормальным распределением для таких видов страхования будет недооценивать вероятность $\mathrm{P}[S>x]$, для больших значений x, и для страховщика может иметь катастрофические последствия.

5.3. Связь моделей индивидуального и коллективного рисков*

В данном пункте мы покажем, каким образом от модели индивидуального риска можно перейти к модели коллективного риска [2]. Для простоты изложения будем считать, что величина суммарного иска $S_{\text{кол}}$ в модели коллективного риска распределена в соответствии с составным распределением Пуассона (п. 5.2.2).

Напомним, что суммарный иск $S_{\text{инд}}$ в модели индивидуального риска представляется в следующем виде: $S_{\text{инд}} = X_1+X_2+\ldots X_K$, где K – число договоров в портфеле страхования, а случайная величина X_i –

индивидуальный иск от i-го договора ($i = \overline{1, K}$). Характерной чертой данной модели является то, что по каждому договору может предъявляться не более одного иска. Случайную величину X_i можно представить в виде $X_i = I_i Y_i$, где I_i – индикатор предъявления иска, а Y_i – величина предъявляемого иска, причем величины I_i и Y_i предполагаются независимыми. Пусть вероятность предъявления иска по i-му договору $\mathrm{P}[I_i = 1] = q_i$, а $F_i(x) = \mathrm{P}[Y_i \le x]$ – функция распределения величины индивидуального иска при условии его предъявления.

Математическое ожидание и дисперсия суммарного иска равны

$$\mathrm{E}[S_{\text{инд}}] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{K} I_i Y_i\right] = \sum_{i=1}^{K} q_i \mathrm{E}[Y_i], \tag{5.8}$$

$$\mathrm{Var}[S_{\text{инд}}] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{K} I_i Y_i\right] = \sum_{i=1}^{K} q_i \mathrm{E}\left[Y_i^2\right] - \sum_{i=1}^{K} q_i^2 \mathrm{E}^2[Y_i], \tag{5.9}$$

поскольку $\mathrm{Var}[I_i Y_i] = q_i \mathrm{Var}[Y_i] + q_i(1 - q_i)\mathrm{E}^2[Y_i] = q_i \mathrm{E}\left[Y_i^2\right] - q_i^2 \mathrm{E}^2[Y_i]$.

В модели коллективного риска рассматриваются не отдельные договоры страхования, а иски, поступающие от портфеля договоров в целом. Суммарный иск $S_{\text{кол}} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$ представляет собой сумму случайного числа случайных величин. В отличие от модели индивидуального риска величина N является случайной. Это есть число предъявляемых исков по портфелю. Случайная величина Y_i – величина i-го по счету предъявляемого иска. Если СВ $S_{\text{кол}}$ имеет составное распределение Пуассона с параметрами λ и $F(x) = \mathrm{P}[Y_i \le x]$, то ее математическое ожидание и дисперсия равны

$$\mathrm{E}[S_{\text{кол}}] = \lambda \mathrm{E}[Y], \ \mathrm{Var}[S_{\text{кол}}] = \lambda \mathrm{E}[Y^2].$$

Рассмотрим два способа перехода от модели индивидуального риска к модели коллективного риска.

Первый способ можно применять, если есть необходимость приближения суммарного иска $S_{\text{инд}}$ к суммарному иску $S_{\text{кол}}$. В этом случае сохраняется среднее значение суммарного иска.

Рассмотрим модель индивидуального риска. Заменим i-й договор модели с величиной иска X_i и с вероятностью предъявления иска q_i, $i = \overline{1,K}$ k однотипными договорами с величиной иска X_i и с вероятностью q_i/k предъявления иска по каждому из них. Риски по данным договорам будем считать независимыми. В этом случае число исков по рассматриваемому договору будет случайной величиной с биномиальным распределением, имеющим параметры k и q_i/k. Распределение числа исков при $k \to \infty$ будет сходиться к распределению Пуассона с параметром q_i (п. 4.6). Таким образом, можно считать, что иск по i-му договору имеет составное распределение Пуассона с параметрами q_i и

$$F_i(x) = \mathrm{P}[X_i \le x | X_i > 0] = \mathrm{P}[Y_i \le x].$$

Для составного распределения Пуассона справедливо следующее свойство (п. 5.2.2): если $S_1, S_2, ..., S_n$ − независимые случайные величины, каждая из которых S_i ($i = \overline{1,n}$) имеет составное распределение Пуассона с параметрами λ_i и $F_i(x)$ соответственно, то и их сумма $S = S_1+S_2+...+S_n$ также подчинена составному распределению Пуассона с параметрами λ и $F(x)$, где

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \; F(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x).$$

Поэтому суммарный иск по всему портфелю $S_{\text{инд}} = X_1+X_2+...+X_K$ будет иметь составное распределение Пуассона с параметрами:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{K} q_i, \; F(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{K} q_i F_i(x),$$

т.е. в данной интерпретации $S_{\text{инд}}$ можно рассматривать как величину суммарного иска в модели коллективного риска.

Установим, как при таком переходе изменяются среднее значение и дисперсия суммарного иска в предположении существования плотностей $f(x) = F'(x), f_i(x) = F_i'(x)$, $i = \overline{1,K}$.

Математическое ожидание суммарного иска в построенной модели коллективного риска:

$$\mathrm{E}[S_{\text{кол}}] = \lambda \mathrm{E}[Y] = \sum_{i=1}^{K} q_i \mathrm{E}[Y_i],$$

так как в данном случае

$$\mathrm{E}[Y] = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{q_i}{\lambda} f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{K} \frac{q_i}{\lambda} \int_0^\infty x f_i(x) dx = \sum_{i=1}^{K} \frac{q_i}{\lambda} \mathrm{E}[Y_i].$$

Аналогично дисперсия суммарного иска

$$\mathrm{Var}[S_{\text{кол}}] = \lambda \mathrm{E}[Y^2] = \sum_{i=1}^{K} q_i \mathrm{E}[Y_i^2].$$

Итак, при таком переходе от $S_{\text{инд}}$ к $S_{\text{кол}}$

$\mathrm{E}[S_{\text{инд}}] = \mathrm{E}[S_{\text{кол}}]$ (см. (5.8)),

$$\mathrm{Var}[S_{\text{инд}}] = \sum_{i=1}^{K} q_i \mathrm{E}\left[Y_i^2\right] - \sum_{i=1}^{K} q_i^2 \mathrm{E}^2[Y_i] < \mathrm{Var}[S_{\text{кол}}] = \sum_{i=1}^{K} q_i \mathrm{E}\left[Y_i^2\right]$$

(см. (4.9)), т. е. среднее значение суммарного иска не меняется, а дисперсия увеличивается, в связи с этим переход от $S_{\text{инд}}$ к $S_{\text{кол}}$ следует осуществлять осторожно.

Второй способ перехода от $S_{\text{инд}}$ к $S_{\text{кол}}$ применяется, если нужно учесть открытость портфеля страхования для поступления новых договоров.

Данный способ отличается от первого тем, как именно индивидуальный договор заменяется портфелем договоров для того, чтобы иск по каждому договору страхования имел составное распределение Пуассона. В этом случае в предположении поступления иска по i-му ($i = \overline{1, K}$) договору страхования он заменяется на такой же договор, иск по которому еще не предъявлялся. Таким образом, один договор порождает портфель однотипных договоров. Процесс поступления исков по этому портфелю можно рассматривать как пуассоновский с интенсивностью $\lambda_i = -\ln(1 - q_i)$, где q_i – вероятность того, что за рассматриваемый промежуток времени по данному портфелю, т.е. по i-му договору, поступит хотя бы один иск, поскольку $1 - q_i = \exp(-\lambda_i)$ (формула (4.12) при $k = 0$). Таким образом, иск по i-му договору можно рассматривать как случайную величину с составным распределением Пуассона с параметрами λ_i и

$$F_i(x) = \mathrm{P}[X_i \le x | X_i > 0] = \mathrm{P}[Y_i \le x].$$

Тогда суммарный иск по всему портфелю также имеет составное распределение Пуассона с параметрами

$$\lambda = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i, \; F(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{K} \lambda_i F_i(x).$$

Из равенства $\lambda = -\sum_{i=1}^{K} \ln(1 - q_i)$ следует, что $e^{-\lambda} = \prod_{i=1}^{K} (1 - q_i)$, т.е. при данном переходе вероятность того, что по портфелю страхования не будет предъявлено исков, одна и та же как для модели индивидуального риска $\left(\prod_{i=1}^{K} (1 - q_i) \right)$, так и для модели коллективного риска ($e^{-\lambda}$).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Страховая компания заключила 200 договоров страхования от пожара на сумму 15000 руб. каждый, вероятность наступления страхового случая по каждому из которых равна 0,05, и 350 договоров, для которых соответствующие величины равны 25000 руб. и 0,03. Предполагается, что ущерб в случае наступления страхового события по каждому полису распределен равномерно от 0 до обозначенной суммы, договоры независимы и по каждому договору может предъявляться не более одного иска. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммарных выплат по всему портфелю.

2. Заключено 4 однотипных договора страхования жизни. В соответствии с каждым из них по договору выплачивается по 10000 руб. при естественной смерти застрахованного в течение года и по 200000 при неестественной смерти. Вероятность естественной смерти принимается равной 0,05, неестественной – 0,03. Найдите закон распределения суммарных выплат. При каком начальном капитале вероятность выполнения обязательств компанией превысит 0,9? 0,95?

3. Компания заключила 100 независимых договоров страхования, для каждого из которых вероятность наступления страхового случая равна 0,07, а плотность распределения иска по каждому договору при наступлении страхового случая $p(x)$ сосредоточена на отрезке [0, 1] (в тысячах руб.) и равна $2x$. Оцените вероятность того, что суммарные выплаты превысят 10.

4. (Р) Компания застраховала три объекта, расположенных в разных городах. Производящие функции моментов размеров предъявляемых исков равны соответственно $(1-2t)^{-2}$, $(1-2t)^{-2,5}$, $(1-2t)^{-3}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммарного иска.

5. (Р) Страховая компания заключила 200 договоров страхования, иски по которым естественно считать независимыми случайными величинами. Вероятность предъявления иска по каждому договору равна 0,2, размер иска – СВ с плотностью распределения $\dfrac{e^{-x/100}}{100}$. Страховая премия по каждому договору на 10 больше математического ожидания иска. Найдите вероятность того, что сумма премий превысит сумму исковых требований.

6. Страховая компания заключает комбинированные договоры страхования автомобилей и гражданской ответственности. Если X – величина будущей выплаты за повреждение в случае аварии своего автомобиля, а Y – чужого, то совместная плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y) сосредоточена в прямоугольнике $(0, 1)\times(0, 2)$ и равна $(2x - y + 2)/4$. Найдите вероятность того, что суммарный иск превысит 1.

7. (Р) Суммарный иск подчинен составному отрицательному биномиальному закону распределения с параметрами $\alpha = 4$ и $p = 0{,}2$. Возможными значениями величины предъявляемого иска являются 1000, 2000 и 5000 руб. с вероятностями 0,6, 0,3 и 0,1 соответственно. Найдите вероятность того, что суммарный иск превысит 2000 руб.

ГЛАВА 6. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗОРЕНИЯ

Рассмотренные в главе 5 модели суммарных исков носили статический характер: предполагалось, что в начале некоторого временного промежутка заключалось некоторое множество договоров страхования, по каждому из которых в этом временном промежутке могли предъявляться иски. В действительности, как процесс заключения договоров, так и процесс предъявления исков происходят во времени. Основное исходное предположение состоит в том, что договоры заключаются намного чаще, чем предъявляются иски. Это обстоятельство позволяет в некотором приближении считать, что нетто-премии поступают с некоторой постоянной скоростью, которую обозначим через c (это означает, что за любой промежуток времени, равный t, на счет компании поступит сумма, равная ct). В то же время, как моменты предъявления, так и размеры предъявляемых исков предполагаются случайными. Обозначим через $S(t)$ сумму исков, предъявляемых до момента t. Важную роль играет начальный капитал компании w. На рис. 4 приведен возможный график зависимости средств компании $u(t) = w + ct - S(t)$ от времени.

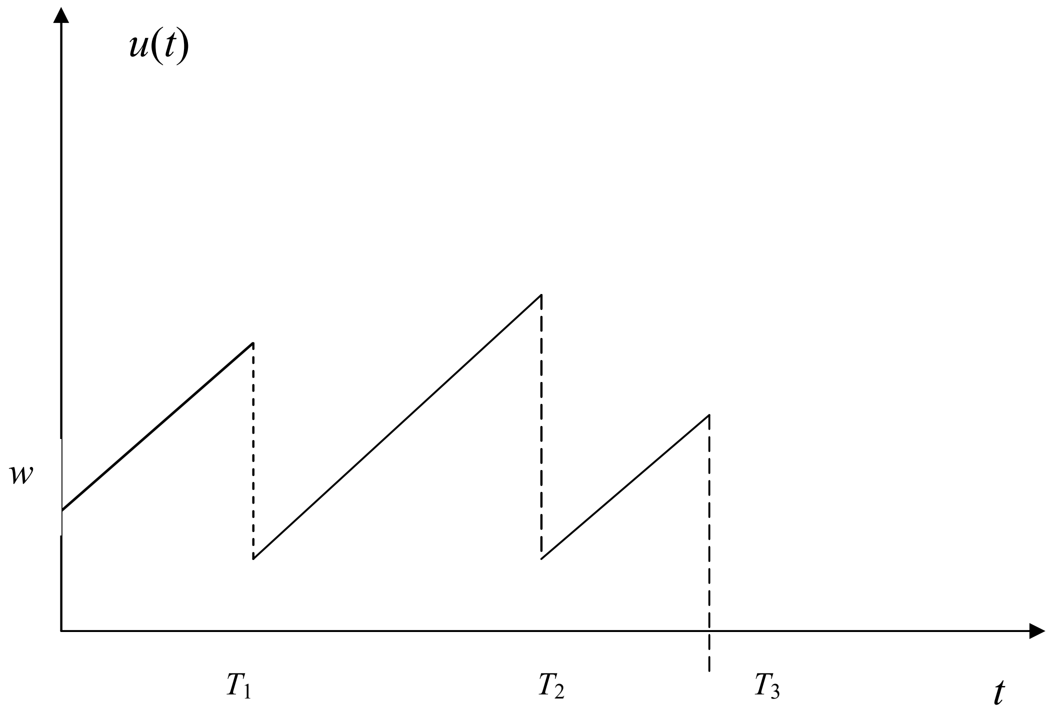

Рис. 4 Пример графика зависимости средств компании от времени

Здесь иски предъявлялись в моменты T_1, T_2, T_3, причем последний предъявленный иск компания не смогла оплатить. Основной вопрос, который рассматривается в этой главе: какова вероятность разорения страховой компании, т.е. того, что в некоторый момент компания не сможет выполнить требований страхователя? Разумеется, эта вероятность зависит от значений c, w, функций распределения, как частоты, так и величин предъявляемых исков. Обычно считают, что частота предъявления исков подчинена закону Пуассона, т.е вероятность того, что за время t будет предъявлено k исков, равна $\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$ (см. п. 4.3, 4.4), где λ – среднее число исков, предъявляемых за единицу времени. Если считать, что распределения исков, предъявляемых в разные моменты времени совпадают, то суммарный иск за промежуток времени продолжительности t имеет составное распределение Пуассона (п. 5.2.2). Пусть m – математическое ожидание предъявляемого иска Y. Естественно считать, что в среднем за единицу времени поступит больше средств, чем в среднем требуется на выплату исков. Это условие имеет вид $c > \lambda m$. Естественно принять за относительную страховую надбавку (см. п. 1.2 и [27]) величину

$$\Lambda = c/(\lambda m) - 1.$$

Пусть $\psi(t,w)$ – вероятность того, что компания разорится к моменту t при начальном капитале w, т.е.

$$\psi(t,w) = \mathrm{P}[T < t], \qquad (6.1)$$

где $T = \inf\{\tau: u(\tau) < 0\}$, соответственно

$$\overline{\psi}(t,w) = 1 - \psi(t,w) -$$

вероятность неразорения.

Напомним, что inf – точная нижняя грань числового множества: любое множество, ограниченное снизу, имеет точную нижнюю грань.

Обозначим через $\psi(w)$ вероятность разорения (соответственно через $\overline{\psi}(w)$ – неразорения) компании в какой-либо момент, т.е.

$$\psi(w) = \psi(\infty, w)$$

(безусловное разорение). Основные результаты главы – интегро-дифференциальное уравнение для вероятности безусловного неразорения и неравенство Лундберга – оценка сверху величины $\psi(w)$.

6.1. Формула для функции $\overline{\psi}(t,w)$

Пусть суммарный иск распределен по составному закону Пуассона.

Предположим сначала, что $w = 0$. Рассмотрим моменты времени kt/n при фиксированном t и натуральном n, $k = \overline{1,n}$, далее, за единицу средств примем величину ct/n. Пусть $u^*(k) = [nu(kt/n)/ct]$, т.е. капитал, измеряемый в указанных единицах с недостатком.

Тем самым, $u^*(k)$ случайный процесс, принимающий целые значения. Из свойств пуассоновского процесса следует, что $u^*(k)$ – процесс с перестановочными приращениями (п. 4.1), далее, приращения процесса $u^*(k)$ не превосходят 1, поскольку за время t/n на счет поступает сумма ct/n. Следовательно, можно использовать технику, развитую в п. 4.1.

Рассмотрим событие, состоящее в том, что к моменту времени t компания не разорится ($u^*(k) > 0$ при $k = 1,\dots, n$) и при этом $u^*(n) = s$ (т.е. капитал компании в момент $nt/n = t$ попадает в промежуток $((s-1)ct/n,\ sct/n])$ при некотором $s \in \{1,\dots,\ n\}$. По принципу двойственности (4.3),

$$\mathrm{P}[u^*(k) > 0 \text{ при } k = 1,\dots, n-1,\ u^*(n) = s] =$$

$$= \mathrm{P}[u^*(k) < u^*(n) \text{ при } k = 1,\dots, n-1,\ u^*(n) = s].$$

Далее, к случайному процессу $u^*(k)$ применима формула Двосса – Дингеса (4.4):

$$\mathrm{P}[u^*(k) < u^*(n) \text{ при } k = 1,\ldots, n-1,\ u^*(n) = s] = \frac{s}{n}\mathrm{P}[u^*(n) = s].$$

Отсюда вероятность неразорения компании $\overline{\psi}\,(t,0)$ до момента t приблизительно равна сумме

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{s}{n}\mathrm{P}[u^*(n) = s].$$

Возвращаясь к исходным величинам и предполагая распределение случайной величины $u(t)$ непрерывным, получаем

$$\mathrm{P}[u^*(n) = s] = \mathrm{P}[s-1 < nu(t)/c\,t \le s] =$$

$$= \mathrm{P}[ct(s-1)/n < u(t) \le cts/n] \approx ct/n\, F_t'(cts/n),$$

где F_t – функция распределения случайной величины – капитала страховой компании в момент t. Тогда

$$\overline{\psi}\,(t,0) \approx \sum_{s=1}^{n}\frac{s}{n}\mathrm{P}[u^*(n) = s] \approx \frac{1}{ct}\cdot\frac{ct}{n}\sum_{s=1}^{n} s\, ct/n\, F_t'(sct/n).$$

Сумма в правой части является интегральной для функции $\frac{1}{ct}xF_t'(x)$, если положить $x_s = cts/n$, $\Delta x_s = ct/n$.

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим:

$$\overline{\psi}\,(t,0) = \frac{1}{ct}\int_0^{ct} xF_t'(x)dx.$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\overline{\psi}\,(t,0) = \frac{1}{ct}\int_0^{ct} x dF_t(x) = \frac{1}{ct}\left[xF_t(x)\Big|_0^{ct} - \int_0^{ct} F_t(x)dx \right] =$$

$$=\frac{1}{ct}\left[ctF_t(ct)-\int_0^{ct}F_t(x)dx\right].$$

Поскольку к моменту t капитал компании не больше ct, то $F_t\ (ct) = 1$, отсюда

$$\overline{\psi}(t,0) = 1-\frac{1}{ct}\int_0^{ct}F_t(x)dx\,. \tag{6.2}$$

Используя функцию $G_t(z)$, равную вероятности события «сумма исков, предъявляемых к моменту t, не меньше z», получаем

$$F_t(x) = \mathrm{P}[ct - S(t) \le x] = \mathrm{P}[S(t) \ge ct - x] = G_t(ct - x).$$

Подставляя это выражение в формулу (6.2), имеем

$$\overline{\psi}(t,0) = 1-\frac{1}{ct}\int_0^{ct}G_t(z)dz = 1-\frac{1}{ct}\int_0^{\infty}G_t(z)dz+\frac{1}{ct}\int_{ct}^{\infty}G_t(z)dz\,.$$

Для составного распределения Пуассона $\int_0^{\infty}G_t(z)dz = \lambda tm$, где как и выше λ – среднее число поступающих исков, m – средний размер иска Y (п. 5.2.2), отсюда

$$\overline{\psi}(t,0) = 1-\frac{\lambda tm}{ct}+\frac{1}{ct}\int_{ct}^{\infty}G_t(z)dz\ =\ \frac{\Lambda}{\Lambda+1}+\frac{1}{ct}\int_{ct}^{\infty}G_t(z)dz\,. \tag{6.3}$$

Здесь $\Lambda = \frac{c}{\lambda m}-1$ страховая надбавка.

Оценим $\int_{ct}^{\infty}G_t(z)dz$, используя неравенство Чебышева [21, 24, 30]. Напомним (п. 5.2.2), что дисперсия суммарного иска $S(t)$, подчиненного составному пуассоновскому распределению, равна в нашем случае $\lambda t\mathrm{E}[Y^2]$, поскольку интенсивность предъявления исков на временном промежутке длительности t при пуассоновском распределении равна λt. По определению,

$$G_t(z) = \mathrm{P}[S(t) \geq z] = \mathrm{P}[|S(t) - \lambda tm| \geq z - \lambda tm] \leq \frac{\lambda t\mathrm{E}\left[Y^2\right]}{(z-\lambda tm)^2}.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\int_{ct}^{\infty} G_t(z)dz \leq \int_{ct}^{\infty} \frac{\lambda t\mathrm{E}\left[Y^2\right]}{(z-\lambda tm)^2} dz.$$

При наших предположениях ($c > \lambda m$) интеграл является собственным, вычисляя его, получим:

$$\int_{ct}^{\infty} G_t(z)dz \leq -\frac{\lambda t\mathrm{E}\left[Y^2\right]}{z-\lambda tm}\bigg|_{ct}^{\infty} = \frac{\lambda\mathrm{E}\left[Y^2\right]}{c-\lambda m},$$

отсюда

$$\bar{\psi}(t,0) \leq \frac{\Lambda}{\Lambda+1} + \frac{1}{ct}\frac{\lambda\mathrm{E}\left[Y^2\right]}{c-\lambda m}.$$

Кроме того, поскольку $0 \leq \frac{1}{ct}\int_{ct}^{\infty} G_t(z)dz \leq \frac{1}{ct}\frac{\lambda\mathrm{E}\left[Y^2\right]}{c-\lambda m}$,

то $\frac{1}{ct}\int_{ct}^{\infty} G_t(z)dz \to 0$ при $t \to \infty$.

Отсюда следует очень интересное заключение:

$$\bar{\psi}(\infty,0) = \frac{\Lambda}{\Lambda+1}. \qquad (6.4)$$

Тем самым вероятность неразорения страховой компании за неограниченное время при отсутствии начального капитала определяется исключительно страховой надбавкой и не зависит ни от конкретных распределений размера исков, ни от частоты их предъявления. Последний факт является естественным, поскольку неразорение за неограниченное время не зависит от масштабов времени.

Пусть теперь начальный капитал $w > 0$. Справедливо равенство

$$\overline{\psi}(t, w) = \mathrm{P}[u(t) \geq 0] - \mathrm{P}[u(t) \geq 0, \exists\tau\in(0, t){:}\ u(\tau) = 0]. \qquad (6.5)$$

Аналогично предыдущему, разбивая временной отрезок $[0,t]$ на n равных частей, вычитаемое можно представить в виде суммы вероятностей несовместных событий

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{P}[\exists\tau \in (it/n,(i+1)t/n] : u(\tau) = 0,\ u(s) > 0 \text{ при } s \in (\tau,t]]\ . \qquad (6.6)$$

Событие $\{u(t) \geq 0\}$ означает, что сумма исков, предъявленных к моменту t, не превосходит $ct + w$, т.е. $\mathrm{P}[u(t) \geq 0] = 1 - G_t(ct + w)$ (см. выше). Вероятность события «капитал компании впервые обратится в 0 на временном промежутке $(it/n, (i+1)t/n]$» равна разности вероятностей событий «капитал компании обратится в 0 в момент, не превосходящий $(i+1)t/n$» и «капитал компании обратится в 0 в момент, не превосходящий it/n», т.е. равна

$$\begin{aligned}&\bigl(1 - G_{(i+1)t/n}(w + c(i+1)t/n)\bigr) - \bigl(1 - G_{it/n}(w + cit/n)\bigr) = \\ &= \bigl(G_{it/n}(w + cit/n) - G_{(i+1)t/n}(w + c(i+1)t/n)\bigr).\end{aligned}$$

Далее, в силу марковости процесса $u(t)$,

$$\mathrm{P}[\exists\tau \in (it/n,(i+1)t/n] : u(\tau) = 0,\ u(s) > 0 \text{ при } s \in (\tau,t]] \approx$$

$$\approx \overline{\psi}\bigl(t - (i+1)t/n, 0\bigr)\cdot\bigl(G_{it/n}(w + cit/n) - G_{(i+1)t/n}(w + c(i+1)t/n)\bigr).$$

В предположении непрерывности распределения суммарных исков получим по формуле Лагранжа:

$$G_{it/n}(w + ci/n) - G_{(i+1)t/n}(w + c(i+1)t/n) =$$

$$= -\left.\frac{\partial G_t(w+cz)}{\partial z}\right|_{z\in\left[\frac{cit}{n},\frac{c(i+1)t}{n}\right]}\cdot\frac{ct}{n}.$$

Подставляя полученные выражения в формулы (6.5) и (6.6) и переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем равенство

$$\overline{\psi}(t,w) = 1 - G_t(ct + w) + \int_0^t \overline{\Psi}(t-z,0)\frac{\partial G_z(w+cz)}{\partial z}dz. \qquad (6.7)$$

Тем самым, для определения функции $\overline{\psi}(t,\ w)$ сначала необходимо вычислить функцию $\overline{\psi}(t,\ 0)$ по формуле (6.3), а затем использовать формулу (6.7).

6.2. Уравнения для функции $\psi(w)$

Пусть к компании с начальным капиталом w первый иск будет предъявлен в момент τ, размер иска Y. Рассмотрим вероятность того, что $\tau\in[t,\ t+\Delta t]$, $Y\in[x,\ x+\Delta x]$. Если число исков распределено по закону Пуассона, то время распределения первого иска распределено экспоненциально, т.е. $P[\tau\in[t,\ t+\Delta t]]\approx\lambda e^{-\lambda t}\Delta t$. Вероятность события $Y\in[x,\ x+\Delta x]$ приблизительно равна $f_Y(x)\Delta x$, где $f_Y(x)$ – плотность распределения размера одного иска. Вероятность разорения в какой-либо момент при выполнении условий $\tau\in[t,\ t+\Delta t]$, $Y\in[x,\ x+\Delta x]$ приближенно равна вероятности разорения после момента τ (т.е. $\psi(w+ct-x)$), поскольку до момента τ компания разориться не может. Применяя формулу полной вероятности (для этого как временной, так и «денежный» промежутки $[0,\ \infty)$ разбиваются на отрезки), получаем:

$$\psi(w) \approx \sum_{\Delta x}\sum_{\Delta t} \psi(w + ct - x)\lambda e^{-\lambda t}\Delta t\, f_Y(x)\Delta x.$$

Переходя к пределу при $\max(\Delta t)\to 0$, $\max(\Delta x)\to 0$, получаем следующее функциональное уравнение для вероятности безусловного разорения (предполагается, что все записанные интегралы сходятся):

$$\psi(w) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \int_0^\infty \psi(w + ct - x) f_Y(x)dx. \tag{6.8}$$

Разумеется, компания не может начать деятельность при наличии долгов, это отражается в равенстве $\psi(w) = 1$ при $w < 0$, в точке 0 функция $\psi(w)$ может иметь разрыв. Сделав в (6.8) замену переменной $t = (s - w)/c$, получим уравнение

$$\psi(w) = \frac{\lambda}{c}\int_w^\infty e^{-\lambda(s-w)/c} ds \int_0^\infty \psi(s - x) f_Y(x)dx. \tag{6.9}$$

Продифференцировав обе части последнего равенства по w (полагаем $w > 0$), получим равенство

$$\psi'(w) = -\frac{\lambda}{c} e^{-\lambda(s-w)/c}\int_0^\infty \psi(s-x) f_Y(x)dx\Big|_{s=w} +$$

$$+\frac{\lambda}{c}\int_w^\infty \frac{\lambda}{c} e^{-\lambda(s-w)/c} ds \int_0^\infty \psi(s-x) f_Y(x)dx =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\psi(w) - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(w-x) f_Y(x)dx.$$

Если разбить последний интеграл на два, то один из интегралов имеет вид свертки:

$$\psi'(w) = \frac{\lambda}{c}\psi(w) - \frac{\lambda}{c}\int_0^w \psi(w-x) f_Y(x)dx - \frac{\lambda}{c}\int_w^\infty \psi(w-x) f_Y(x)dx =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\psi(w) - \frac{\lambda}{c}\int_0^w \psi(w-x) f_Y(x)dx - \frac{\lambda}{c}\int_w^\infty f_Y(x)dx.$$

При этом $\int_w^\infty f_Y(x)dx = 1 - F_Y(w)$.

Пользуясь коммутативностью свертки (2.17), получим уравнение

$$\frac{c}{\lambda}\psi'(w) = \psi(w) - \int_0^w \psi(x) f_Y(w-x)dx - \left(1 - F_Y(w)\right). \qquad (6.10)$$

Полученное уравнение для функции $\psi(w)$ относится к классу интегро-дифференциальных. При конкретных данных его можно решить численно. Иногда удается найти и аналитическое решение этого уравнения.

Пример 6.1. Пусть размер иска распределен по экспоненциальному закону (п. 3.3), т.е. $f_Y(x) = ae^{-ax}$, $F_Y(x) = 1-e^{-ax}$. Подставляя эти функции в уравнение (6.10), получим

$$\frac{c}{\lambda}\psi'(w) = \psi(w) - a\int_0^w \psi(x) e^{-a(w-x)}dx - e^{-aw}. \qquad (6.11)$$

Продифференцируем это равенство, пользуясь формулой

$$\frac{d}{dx}\int_0^x H(x,y)dy = H(x,x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}H(x,y)dy \text{ [31]:}$$

$$\frac{c}{\lambda}\psi''(w) = \psi'(w) - a\psi(w) + a^2\int_0^w \psi(x) e^{-a(w-x)}dx + ae^{-aw}. \qquad (6.12)$$

Сумма уравнения (6.12) и уравнения (6.11), умноженного на *a,* имеет вид

$$\frac{c}{\lambda}\psi''(w)+a\frac{c}{\lambda}\psi'(w)=\psi'(w). \qquad (6.13)$$

Это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение

$$\frac{c}{\lambda}k^2+\left(a\frac{c}{\lambda}-1\right)k=0.$$

Корни этого уравнения $k_1 = 0$, $k_2 = \dfrac{1-ac/\lambda}{c/\lambda}$.

Из свойств экспоненциального распределения следует, что средний размер иска равен $1/a$, отсюда относительная страховая надбавка Λ = $\dfrac{ca}{\lambda}-1$ и потому $k_2 =-a\dfrac{\Lambda}{\Lambda+1}$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (6.13) имеет вид

$$\psi(w) = C_1+ C_2\exp\left(-a\frac{\Lambda}{\Lambda+1}w\right).$$

Можно проверить (впрочем, этот факт достаточно очевиден), что при неограниченном росте начального капитала вероятность разорения стремится к 0. т.е. $\lim\limits_{w\to\infty}\psi(w)=0$, отсюда $C_1 = 0$. Далее, поскольку

$\psi(0) = 1-\overline{\psi}(0)$, то по формуле (6.4) $\psi(0) =1-\dfrac{\Lambda}{\Lambda+1}=\dfrac{1}{\Lambda+1}$, отсюда

$C_2 = \psi(0) = \dfrac{1}{\Lambda+1}$. Окончательно получаем

$$\psi(w) = \frac{1}{\Lambda+1}\exp\left(-a\frac{\Lambda}{\Lambda+1}w\right).$$

Отсюда с ростом начального капитала вероятность разорения страховой компании убывает экспоненциально.

6.3. Характеристический коэффициент. Неравенство Лундберга

Напомним, что процесс предъявления исков предполагается пуассоновским с интенсивностью предъявления исков в единицу времени равной λ, а размер предъявляемого иска предполагается непрерывным с плотностью распределения $f_Y(x)$.

Рассмотрим уравнение относительно r следующего вида:

$$\lambda + rc = \lambda M_Y(r), \tag{6.14}$$

где $M_Y(r) = \int\limits_0^\infty e^{rx} f_Y(x)dx$ – производящая функция моментов размера иска Y (п. 2.2).

Заметим, что левая часть уравнения зависит от r линейно в то время, как правая является выпуклой, поскольку ее вторая производная неотрицательная [31]. Отсюда следует, что это уравнение имеет не более двух корней. Один корень очевиден: $r = 0$. Далее, производная левой части уравнения равна c, а правой части при $r = 0$ равна $\lambda \int\limits_0^\infty x e^{0x} f_Y(x)dx = \lambda m$, где m – средний размер предъявляемого иска. Сформулированное в начале главы условие $c > \lambda m$ означает, что в точке 0 производная левой части уравнения (6.14) больше производной правой части. В силу положительности моментов СВ Y справедливо неравенство $M_Y(r) \geq r^2 \mathrm{E}[Y^2]/2$. Отсюда следует, что при больших r функция $M_Y(r)$ растет быстрее линейной. Отсюда, если производящая функция моментов размера иска определена при всех $r \geq 0$, то уравнение (6.14) имеет положительный корень R (рис. 5).

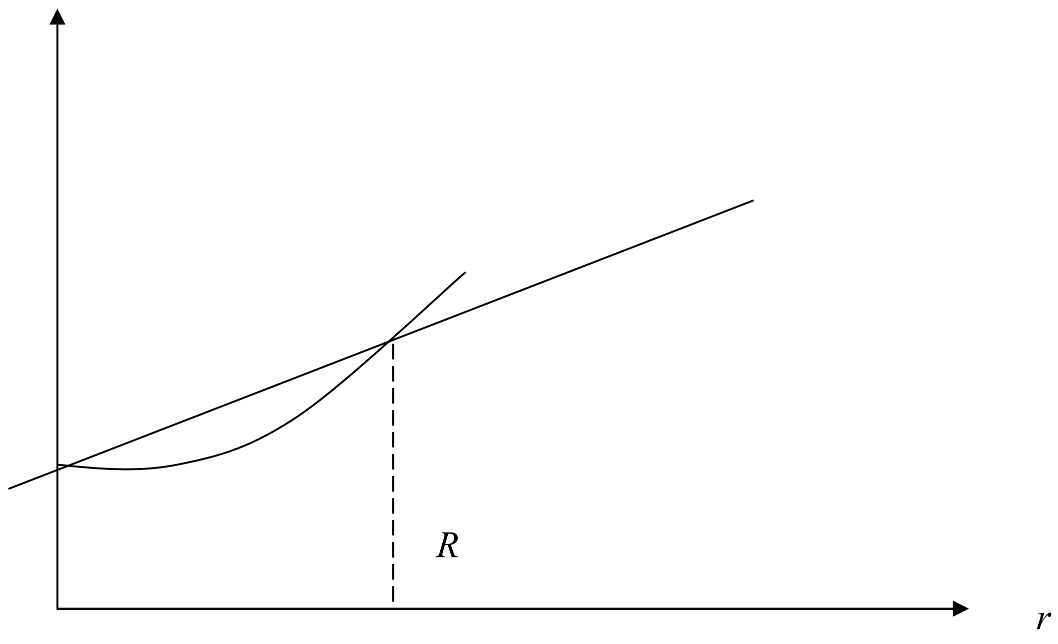

Рис. 5

Величину R, следуя Г. И. Фалину [27], будем именовать *характеристическим коэффициентом.* Соответствующий английский термин «adjustment coefficient» дословно переводится как «подстроечный» коэффициент.

Пример 6.2. Вычислим характеристический коэффициент при экспоненциальном распределении размера иска.

В этом случае уравнение (6.14) имеет вид

$$\lambda + rc = \lambda \int_0^\infty e^{rx} a e^{-ax} dx = \lambda \frac{a}{a-r}.$$

Решая уравнение, получаем $R = \dfrac{\lambda - ac}{c}$, т.е. совпадает с корнем характеристического уравнения k_2 из примера 6.1.

Важнейшим фактом, использующим характеристический коэффициент, является *неравенство Лундберга*

$$\psi(w) \le e^{-Rw}, \tag{6.15}$$

где w, как и в п. 6.2, размер начального капитала компании.

Целесообразно считать, что начальный капитал w может быть как положительным, так и отрицательным.

Для доказательства неравенства рассмотрим вероятность $\psi_n(w)$ события «страховая компания разорится при предъявлении n-го иска или ранее». Докажем по индукции неравенство $\psi_n(w) \le e^{-Rw}$. Тогда по определению $\psi_n(w) \to \psi(w)$ при $n \to \infty$, откуда и следует нужный результат.

Вероятность $\psi_0(w)$ разорения без предъявления исков равна 0 при $w \ge 0$ и 1 при $w < 0$, т.е. неравенство $\psi_0(w) \le e^{-Rw}$ справедливо.

Пусть неравенства $\psi_k(w) \le e^{-Rw}$ справедливы при $k = 0, 1, \ldots,$ $n -1$. Рассмотрим событие $Q(t, \Delta t, x, \Delta x)$: «первый иск будет предъявлен в промежутке времени $[t, t+\Delta t)$ и его размер находится в пределах $[x, x+\Delta x)$». Вероятность этого события приближенно равна $\lambda e^{-\lambda t} \Delta t\, f_Y(x) \Delta x$. Оценим условную вероятность $\psi_n(w|Q(t, \Delta t, x, \Delta x))$. Разорение не позднее n иска означает, что компания разорится не позднее предъявления $n-1$ иска после предъявления первого. Капитал компании после первого иска при условии наступлении события $Q(t, \Delta t, x, \Delta x)$ будет приближенно равен $w+ct-x$. Отсюда

$$\psi_n(w|\, Q(t, \Delta t, x, \Delta x)) = \psi_{n-1}(w+ct-x)$$

и тем самым по предположению индукции

$$\psi_n(w|\, Q(t, \Delta t, x, \Delta x)) \le e^{-R\,(w+ct-x)}.$$

Рассматривая моменты времени $t_0 = 0 < t_1 < \ldots$ и иски $x_0 = 0 < x_1 < \ldots$, можно выделить полную группу несовместных событий $Q(t_i, t_{i+1}-t_i, x_j, x_{j+1}- x_j)$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$. По формуле полной вероятности (обычно она формулируется для конечного множества гипотез, но можно обосновать ее справедливость и в нашем случае) получаем:

$$\psi_n(w) \approx \sum_i \sum_j \psi_n(w|Q(t_i, t_{i+1}-t_i, x_j, x_{j+1}-x_j))\mathrm{P}[Q(t_i, t_{i+1}-t_i, x_j, x_{j+1}- x_j)].$$

Переходя к пределу при $\max(t_{i+1}-t_i)\to 0$, $\max(x_{j+1}- x_j)\to 0$, получим:

$$\psi_n(w) = \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} f_Y(x)\psi_{n-1}(w+ct-x)dtdx \le$$

$$\le \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} f_Y(x)e^{-R(w+ct-x)}dtdx =$$

$$=\lambda e^{-Rw}\int_0^\infty e^{-(\lambda+Rc)t}dt\int_0^\infty e^{Rx} f_Y(x)dx =$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda+Rc}e^{-Rw}\int_0^\infty e^{Rx} f_Y(x)dx = e^{-Rw}$$

по определению характеристического коэффициента (6.14). Неравенство Лундберга доказано.

Неравенство Лундберга является очень важным результатом теоретического характера. В то же время, практически оно дает весьма завышенную оценку вероятности разорения. Получим простые оценки для характеристического коэффициента.

Для получения оценки сверху заменим скорость поступления средств c на величину $\lambda m(\Lambda+1)$. Получаем уравнение относительно характеристического коэффициента R:

$$1+ mR(\Lambda+1) = \int_0^\infty e^{Rx} f_Y(x)dx \ . \tag{6.16}$$

Пользуясь разложением показательной функции в ряд Маклорена и неотрицательностью значений R и x, получаем оценку

$$e^{Rx} > 1+Rx+\frac{R^2x^2}{2}. \tag{6.17}$$

Подставляя оценку (6.17) в формулу (6.16), получим неравенство

$$1+mR(\Lambda+1) > 1+Rm+\frac{R^2\mathrm{E}\left[Y^2\right]}{2}, \qquad (6.18)$$

отсюда

$$R < 2\Lambda\frac{m}{\mathrm{E}\left[Y^2\right]}.$$

Для получения оценки снизу будем исходить из того, что иски не превосходят некоторой величины k, т.е. $\mathrm{P}[Y > k] = 0$. Тогда для любого иска $x \le k$ справедливо неравенство

$$\frac{e^{Rx}-1}{e^{Rk}-1}=\frac{Rx+R^2x^2/2+...}{Rk+R^2k^2/2+...}=\frac{x}{k}\cdot\frac{1+Rx/2+...}{1+Rk/2+...}\le\frac{x}{k},$$

отсюда $e^{Rx} \le \frac{x}{k}e^{Rk}+\left(1-\frac{x}{k}\right)$. Подставляя эту оценку в формулу (6.16), получим неравенство $(1+\Lambda) \le \frac{e^{Rk}-1}{Rk}$. Поскольку $\frac{e^x-1}{x}<e^x$ (это легко доказать разложением в ряд левой и правой частей неравенства), получаем оценку

$$R > \frac{\ln(1+\Lambda)}{k}. \qquad (6.19)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Страховая компания с начальным капиталом 1 тыс. руб. заключила единственный договор страхования, в соответствии с которым страхователь вносит премию непрерывно в размере 5000 руб. в год до наступления страхового случая. Вероятность наступления страхового случая равна 1/6, ущерб при наступлении страхового случая равен 7000 руб., время (в годах) от заключения договора до наступления страхового случая (если он наступит) является случайной величиной с плотностью распределения $3t^{-4}$ при $t > 1$. Найдите вероятность разорения страховой компании.

2. (Р) Компания с начальным капиталом 5 тыс. руб. заключила несколько договоров, относительно которых есть основания предполагать, что

- в каждый момент времени 1, 2, 3,… произойдет в точности один страховой случай,
- в другие моменты страховые случаи не произойдут,
- размеры исков (в тыс. руб.) являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале (0,20),
- премии выплачиваются непрерывно, причем относительная страховая надбавка равна 0,25.

Найдите вероятность разорения в момент 2.

3. Начальный капитал страховой компании равен 2 тыс. руб. В начале каждого года компания получает 2 тыс. руб. премий по заключенным договорам. Страховые выплаты будут производиться в конце каждого года, могут принимать значения 0, 3, 8 тыс. руб., с вероятностью 0,6 являются нулевыми и с вероятностью 0,3 равны 3. Найдите вероятность того, что компания не разорится к концу второго года.

4. (Р) Динамическая модель разорения описывается составным пуассоновским распределением со средним числом страховых случаев за время t лет равным $12t$ и фиксированным размером исков. Найдите размер исков, если премии поступают непрерывно со скоростью 150 тыс. руб. в год и характеристический коэффициент равен 0,8.

ГЛАВА 7. ПЕРЕСТРАХОВАНИЕ И СОВМЕСТНОЕ СТРАХОВАНИЕ

Заключая договоры страхования крупных рисков, страховая компания оказывается весьма уязвимой: в случае наступления страхового случая ее средств явно будет недостаточно для возмещения ущерба. Это может коснуться страхования космических аппаратов, самолетов, морских и речных судов, крупных сооружений (например, невозможно представить страховую компанию, которая смогла бы в одиночку возместить ущерб разрушения зданий ВТЦ в Нью-Йорке). В этой связи возникает необходимость заключения договора страхования одной страховой компании с другой о передаче части риска. Такие операции называются *перестраховочными.*

Компанию, которая перестраховывает часть своего риска, называют *передающей,* ее партнера в этой операции – *перестраховочной*. Договоры перестрахования различаются по видам разделения ответственности между передающей и перестраховочной компаниями. Общая схема перестрахования такова. Определена функция $h(x)$, равная величине ответственности, которую принимает на себя перестраховочная компания при предъявлении передающей компании иска в размере x. Разумеется, передача риска априори сопровождается выплатой передающей компанией страховой премии. Нетто-премия равна $\mathrm{E}[h(x)]$, брутто-премия $(1+\Lambda^*)\mathrm{E}[h(x)]$, где Λ^* – относительная страховая надбавка перестраховочной компании (о соответствующих понятиях см. п. 1.1 и [27]). Для перестраховочной компании подобный договор ничем не отличается от любого другого договора страхования, в то же время для передающей компании актуальна задача назначения функции $h(x)$. Стандартными являются следующие две перестраховочные схемы. Перестрахование называется *пропорциональным*, если $h(x) = (1-\alpha)x$, где число $\alpha\in[0,1]$ называется *долей удержания.* Это означает, что передающая компания самостоятельно уплачивает долю иска, составляющую α, а оставшуюся часть оплачивает перестраховочная компания. Иная схема перестрахования определяется функцией $h(x) = (x - r)^+$, где r – некоторое число, называемое *франшизой* или *вычитаемой функцией,* $a^+ = (a + |a|)/2$ – положительная часть числа. Такая перестраховочная схема называется *эксцедентной.* Суть ее в том, что передающая компания оплачивает самостоятельно иск, не превышающий r. Если же иск превышает r, то передающая компания оплачивает только франшизу, а все остальное – перестраховочная компания.

Заметим, что объектом перестрахования могут быть как отдельные иски (наиболее опасные), так и суммарные иски, которые будут предъявлены за оговоренный временной промежуток.

Наряду с этим возможны и договоры *совместного страхования,* когда несколько компаний заключают договор, в соответствии с которым происходит перераспределение страховых выплат. Такие договоры заключаются достаточно редко, для нас они интересны тем, что порождают своеобразные математические задачи. Для их анализа рассмотрим сначала некоторые вопросы многокритериальной оптимизации.

7.1. Многокритериальная оптимизация

Далеко не все задачи, возникающие в реальной жизни, можно поставить и решить однозначно. К таковым обычно относятся задачи распределения ограниченных средств. Какой вариант распределения считать наилучшим? Обычное противоречие «цена-качество» из этого круга проблем. В последнем случае иногда говорят об оптимальном соотношении «цена-качество», но что это значит, неясно.

Чаще всего выделяется несколько критериев $s_1, s_2, \ldots, s_n$, достижение максимального значения каждого из которых было бы желательно. К сожалению, эти факторы (подобно цене и качеству) в жизни часто противоречат друг другу (как тут не вспомнить подбор жениха гоголевской Агафьей Тихоновной!). Пусть d – какой-нибудь вариант распределения средств, $S = \{s_1(d), s_2(d), \ldots, s_n(d)\}$ – множество всевозможных наборов значений критериев (n-мерных векторов), которые могут быть реализованы при наших ограничениях. S есть подмножество n-мерного пространства. Вариант d_1 не хуже (лучше) варианта d_2 по критерию s_i, если $s_i(d_1) \geq s_i(d_2)$ ($s_i(d_1) > s_i(d_2)$). Вариант d^* называется *Парето-оптимальным,* если не существует варианта d, который не хуже d^* по каждому из критериев и при этом хотя бы по одному лучше. Аналитически Парето-оптимальный вариант d^* удовлетворяет условию

$$S \cap \{(y_1, y_2, \ldots, y_n): y_i \geq s_i(d^*),\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \\ = (s_1(d^*), s_2(d^*), \ldots, s_n(d^*)). \qquad (7.1)$$

Вообще говоря, Парето-оптимальных вариантов существует много. Множество всех точек $\{s_1(d), s_2(d), \ldots, s_n(d)\}$, соответствующих Парето-оптимальным вариантам, называется множеством Парето или границей Парето. Будем считать, что множество S замкнутое и ограниченное (компактное): в этом случае множество Парето не пусто (проверьте это!). Рассмотрим некоторые из возможных ситуаций для двух критериев.

На рис. 6 множество Парето состоит из единственной точки A. Это означает, что признаки не конкурируют – так бывает очень редко. В случаях рис. 7 и рис. 8 множества Парето нетривиальны (в обоих случаях это дуга AB). Тем не менее, между этими случаями есть существенная разница. Для того, чтобы прояснить ее, опишем одну конструкцию, которая позволяет строить элементы множества Парето. Выберем произвольные положительные числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ и рассмотрим функцию $\sum_{i=1}^{n} k_i s_i$, определенную на множестве S. Точка $(s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_n)$, в которой достигается максимум этой функции, принадлежит множеству Парето. Действительно, в этом случае справедливо свойство

(7.1). Зададимся теперь вопросом: любой ли элемент множества Парето можно найти таким образом при подходящем выборе чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$? В случае рис. 7 это так, а в случае рис. 8 нет (элементы множества Парето, которые располагаются во впадине, так получить нельзя).

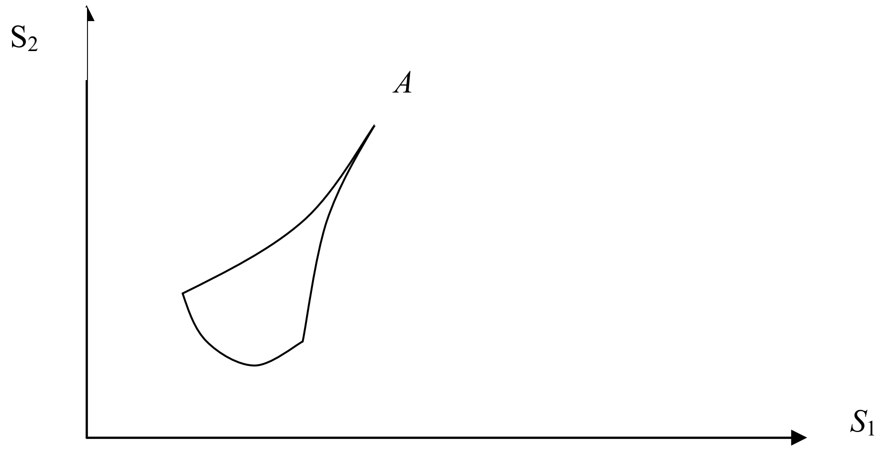

Рис. 6 Пример множества *S* с подмножеством Парето, состоящим из единственной точки *A*.

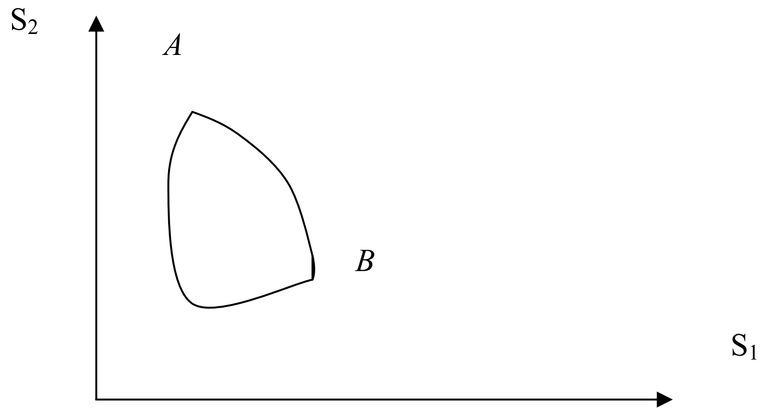

Рис. 7 Пример выпуклого множества *S*. Подмножество Парето – дуга *AB*.

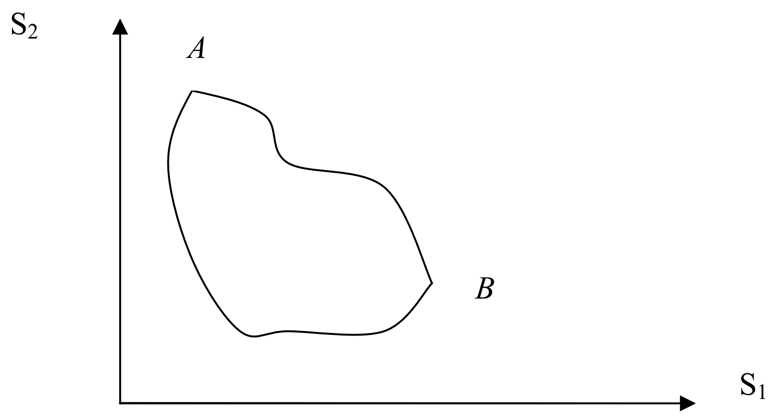

Рис. 8 Пример невыпуклого множества *S*. Подмножество Парето – дуга *AB*.

Геометрическую характеристику множества S, для которого описанный прием порождает все Парето-оптимальные элементы, можно сформулировать очень просто: должны совпадать Парето-оптимальные подмножества множеств S и conv$S$, где последнее множество есть выпуклая оболочка S, т.е. минимальное выпуклое множество, содержащее S. Напомним, что множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками содержит отрезок их соединяющий. Проверка этого условия является весьма сложной. Но это условие равносильно другому, которое проверяется достаточно просто.

Условие А. Для любых двух точек M_0, $M_1 \in S$ и для любого числа $t \in [0,1]$ существует точка $M_t \in S$, все координаты которой не меньше соответствующих координат точки $(1- t)M_0 + tM_1$.

Доказательство того, что при выполнении условия А любой элемент подмножества Парето множества S можно получить применением описанной процедуры, опирается на некоторые свойства выпуклых множеств и здесь не приводится.

7.2. Модели совместного страхования

Пусть некоторые страховые компании договорились перераспределять свою прибыль по итогам предстоящего года с тем, чтобы уменьшить риск разорения каждой из компаний. Если прибыль каждой компании есть случайная величина X_1, X_2 ,..., X_n, а средства после перераспределения соответственно Y_1, Y_2,...,Y_n, то должно выполняться равенство

$$X_1+X_2+\ldots+X_n = Y_1+Y_2+\ldots+Y_n \tag{7.2}$$

Далее, каждая компания может определить максимум c_i средств, которые она отдает в общий котел. Это означает, что выполняются неравенства

$$Y_i \geq X_i - c_i. \tag{7.3}$$

Если какая-либо компания порога не устанавливает, то полагаем $c_i = \infty$. Если $c_i = 0$ при всех i, то возможно только тривиальное «перераспределение» $Y_i = X_i$. В других случаях перераспределение неединственное. Для учета индивидуальных предпочтений компаний введем соответствующие *функции полезности* $u_i(x)$, т.е. оценку каждой компанией размера прибыли [2]. Впервые функции полезности ввели в рассмотрение выдающийся математик Дж. фон Нейман и выдающийся экономист О. Моргенштерн. Функция полезности должна обладать следующими свойствами:

– $u_i(0) = 0$, т.е. отсутствие средств имеет нулевую полезность;
– функция $u_i(x)$ возрастающая, т.е. чем больше денег, тем лучше;
– производная функции полезности $u_i'(x)$ не возрастает, т.е. чем больше сумма, тем меньше ценится дополнительный рубль (или доллар). Напомним известное из курса математического анализа утверждение: невозрастание производной означает вогнутость функции, а это в случае существования второй производной равносильно неравенству $u_i''(x) \le 0$.

Приведем два примера функций полезности, которые будут использованы далее. Экспоненциальная функция полезности имеет вид

$$u_i(x) = \alpha_i\left(1 - \exp\left(-x/\alpha_i\right)\right),$$

квадратичная

$$u_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i}{2} - \dfrac{(\alpha_i - x)^2}{2\alpha_i} & \text{при } x \le \alpha_i, \\ \dfrac{\alpha_i}{2} & \text{при } x > \alpha_i. \end{cases}$$

Параметр α_i характеризует индивидуальные предпочтения каждой компании. Например, для квадратичной функции полезности величина $\alpha_i/2$ характеризует уровень, начиная с которого размер средств не влияет на его оценку: скажем, для большинства людей миллиард и десять миллиардов практически неразличимы.

Для упрощения анализа будем считать, что компанию интересует только математическое ожидание функции полезности будущей прибыли $s_i(Y) = \mathrm{E}[u_i(Y_i)]$. Желательно распределить средства так, чтобы (при выполнении условий, отраженных на рис. 7 и 8) максимизировать каждую из функций $s_i(Y)$. Но эти факторы конкурирующие, поэтому разумно рассмотреть Парето-оптимальные решения.

Прежде всего, проверим справедливость условия А п. 7.1. Пусть $Y^0 = (Y^0{}_1,\ldots Y^0{}_n)$, $Y^1 = (Y^1{}_1,\ldots Y^1{}_n)$ два способа распределения средств, удовлетворяющие условиям (7.2) и (7.3). Если

$$Y^t = (tY^0{}_1 + (1-t)Y^1{}_1,\ldots\, tY^0{}_n + (1-t)Y^1{}_n)$$

при $t\in[0,1]$, то этот способ также удовлетворяет условиям (7.2) и (7.3). Далее, из вогнутости функции полезности следует справедливость неравенства

$$u_i(tY^0{}_i+(1-t)Y^1{}_i) \geq tu_i(Y^0{}_i)+(1-t)u_i(Y^0{}_i).$$

Переходя к математическим ожиданиям, имеем

$$s_i(tY^0{}_i+(1-t)Y^1{}_i) \geq ts_i(Y^0{}_i)+(1-t)s_i(Y^0{}_i).$$

Тем самым свойство А выполняется.

Отсюда следует, что любое из Парето-оптимальных решений можно получить, максимизируя функцию $\sum_{i=1}^{n} k_i s_i(Y)$ при некоторых положительных числах k_i. Существует простой признак оптимальности для поставленной задачи (напомним, что функции полезности предполагаются дифференцируемыми).

Критерий Борча [2] . Пусть $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ – перераспределение прибыли, удовлетворяющее условиям (7.2) и (7.3), и

$$M = \max\{k_i u_i'(Y_i)\colon i = 1,\ldots, n\}.$$

Для того чтобы функция $\sum_{i=1}^{n} k_i u_i(Y_i)$ достигала максимума на множестве всех возможных перераспределений, необходимо и достаточно, что если $Y_i = X_i - c_i$ для некоторого индекса i, то $k_i u_i'(Y_i) <$ $< M$ и наоборот.

Доказательство.

1. Достаточность. Пусть $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ – перераспределение прибыли, для которого условия $Y_i = X_i - c_i$ и $k_i u_i(Y_i) < M$ равносильны и $\left(\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots, \overline{Y}_n\right)$ – любое перераспределение средств. Вогнутость функции полезности, как известно из курса математического анализа [31], равносильна справедливости неравенства

$$u_i(y) \le u_i(x) + u_i'(x)(y - x)$$

при любых x, y. В частности, полагая $x = Y_i$, $y = \overline{Y}_i$ и умножая неравенство на k_i, получим

$$k_i u_i(\overline{Y}_i) \le k_i u_i(Y_i) + k_i u_i'(Y_i)(\overline{Y}_i - Y_\mathrm{i}). \qquad (7.4)$$

Разобьем индексы i на два класса. Для индексов из первого класса справедливо неравенство $k_i u_i'(Y_i) < M$, из второго – равенство $k_i u_i'(Y_i) = M$. По условию для индексов из первого класса $Y_i = X_i - c_i$, а тогда из неравенства (7.3) следует, что $Y_i = \overline{Y}_i$. Отсюда и из (7.4) при любом i получаем

$$k_i u_i(\overline{Y}_i) \le k_i u_i(Y_i) + M(\overline{Y}_i - Y_i). \qquad (7.5)$$

Суммируя эти неравенства и используя равенство (7.2), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} k_i u_i(\overline{Y}_i) \le \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(Y_i),$$

что и требовалось.

2. Необходимость. Пусть теперь для оптимального перераспределения доходов (Y_1, $Y_2, \ldots,$ Y_n) при некоторых i, j справедливы неравенства

$$Y_j > X_j - c_j \text{ и } M = k_i u_i'(Y_i) > k_j u_j'(Y_j).$$

Первое неравенство означает, что при достаточно малом положительном ε перераспределение $\left(\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots, \overline{Y}_n\right)$, в котором $\overline{Y}_i = Y_i + \varepsilon$, $\overline{Y}_j = Y_j - \varepsilon$, $\overline{Y}_k = Y_k$ при $k \neq i, j$, также является допустимым перераспределением, т.е. удовлетворяет условиям (7.2) и (7.3). Применяя формулу конечных приращений, получаем

$$\sum_{m=1}^{n} k_m u_m(\overline{Y}_m) - \sum_{m=1}^{n} k_m u_m(Y_m) = k_i\left(u_i(\overline{Y}_i) - u_i(Y_i)\right) + k_j\left(u_j(\overline{Y}_j) - u_j(Y_j)\right) \approx$$
$$\approx k_i \varepsilon u_i'(Y_i) - k_j \varepsilon u_j'(Y_j) > 0,$$

т.е. на исходном перераспределении доходов максимум величины $\sum_{m=1}^{n} k_m u_m(Y_m)$ достигаться не может. Критерий доказан.

Применим установленный критерий в некоторых частных случаях.

Пусть $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \infty$, т.е. ограничения вида (7.2) отсутствуют. Критерий Борча тогда приводит к заключению: при всех i величины $k_i u_i'(Y_i)$ совпадают. Соответствующее Парето-оптимальное решение находится из системы уравнений

$$k_1 u_1'(Y_1) = k_2 u_2'(Y_2) = \ldots = k_n u_n'(Y_n) \qquad (7.6)$$

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \qquad (7.7)$$

Следует отметить, что в этом случае значения Y_i зависят только от суммы $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, но не от самих слагаемых.

В частности для экспоненциальных функций полезности уравнения (7.6) принимают вид

$$k_1 \exp(-Y_1 / \alpha_1) = \ldots = k_n \exp(-Y_n / \alpha_n) = \exp(-C),$$

где C – некоторое число, отсюда $Y_i = \alpha_i(C+\ln(k_i))$. Подставляя эти значения в (7.7), получим

$$C = \frac{\sum X_j - \sum \alpha_j \ln(k_j)}{\sum \alpha_j},$$

отсюда

$$Y_i = \frac{\alpha_i \sum X_j}{\sum \alpha_j} + \left(\alpha_i \ln(k_i) - \frac{\alpha_i \sum \alpha_j \ln(k_j)}{\sum \alpha_j} \right).$$

Таким образом, перераспределенная сумма состоит из двух частей: одна является некоторой частью суммарной прибыли всех компаний, вторая является детерминированной и зависит только от функций полезности и избранных значений k_i. Сумма детерминированных частей, как следует из (7.7), равна 0. Из этих формул следует, что даже при отсутствии суммарной прибыли всех компаний при этих правилах между компаниями происходит перерасчет.

Проведем аналогичные выкладки для квадратичных функций полезности. Для случая $Y_i \geq \alpha_i$ легко вычислить, что

$$Y_i = \frac{(\alpha_i / k_i) \sum X_j}{\sum \alpha_j / k_j} + \left(\alpha_i - \frac{(\alpha_i / k_i) \sum \alpha_j}{\sum \alpha_j / k_j} \right),$$

т.е. в этом случае структура выражения аналогична предыдущей, только первое слагаемое зависит от выбранных значений k_i.

7.3. Пропорциональное перестрахование

Пусть пропорциональному перестрахованию подвергнут суммарный иск S (как обычно, это случайная величина), страховая надбавка передающей компании равна Λ, доля удержания равна α, страховая надбавка перестраховочной компании равна Λ^*. Если u – начальный капитал передающей компании, то после заключения исходных договоров страхования капитал компании станет равным

u + (1+Λ)E[S], после заключения договора перестрахования капитал уменьшится на (1+Λ*)(1 – α)E[S] и за счет этого станет равным

$$u+(1+\Lambda)\mathrm{E}[S] - (1+\Lambda^*)(1-\alpha)\mathrm{E}[S] = \qquad (7.8)$$

$$= u + (\Lambda - \Lambda^* + (1+\Lambda^*)\alpha)\mathrm{E}[S].$$

Выплаты передающей компании составят αS, из чего следует, что вероятность разорения равна

$$\mathrm{P}[\alpha S > u + (\Lambda - \Lambda^* + (1+\Lambda^*)\alpha)\mathrm{E}[S]] = \qquad (7.9)$$

$$= \mathrm{P}[S > (u/\mathrm{E}[S] + \Lambda - \Lambda^*)\mathrm{E}[S]/\alpha + (1+\Lambda^*)\mathrm{E}[S]].$$

Проанализируем величины (7.8) и (7.9) при разных значениях параметров.

1. Пусть $\Lambda^* < \Lambda + u/\mathrm{E}[S]$.

В этом случае величина $(u/\mathrm{E}[S] + \Lambda - \Lambda^*)\mathrm{E}[S]/\alpha$ уменьшается с ростом α от ∞ при $\alpha = 0$ до $u + (\Lambda - \Lambda^*)\mathrm{E}[S]$ при $\alpha = 1$, т.е. вероятность разорения при этом растет от нуля до
$\mathrm{P}[S > u + (1+\Lambda)\mathrm{E}[S]]$.

Но средняя прибыль передающей компании

$$(\Lambda - \Lambda^* + (1+\Lambda^*)\alpha)\mathrm{E}[S] - \alpha\mathrm{E}[S] = (\Lambda - \Lambda^* + \Lambda^*\alpha)\mathrm{E}[S]$$

при достаточно малом α и $\Lambda < \Lambda^*$ будет отрицательной. В этом случае значение α не может быть меньше, чем $(\Lambda^* - \Lambda)/\Lambda^*$.

Задача является двухкритериальной: с ростом α растут и прибыль, и вероятность разорения. При $\Lambda^* < \Lambda$ параметр α может принимать нулевое значение. Это означает, что риск при этом полностью перепоручается перестраховочной компании. Вероятность разорения передающей компании при этом нулевая. Это следует как из формул, так и из сути дела: в этом случае перестраховочная компания берет с передающей компании меньше средств, чем последняя получила со страхователей. Разумеется, при $\alpha = 0$ минимальна и средняя прибыль передающей компании.

2. Пусть $\Lambda^* = \Lambda + u/\mathrm{E}[S]$.

В этом случае вероятность разорения не зависит от значения α. В то же время, средняя прибыль передающей компании растет с ростом α. Отсюда следует, что в этом случае целесообразно принять $\alpha = 1$, т.е. отказаться от перестрахования.

3. Пусть, наконец, $\Lambda^* > \Lambda + u/\mathrm{E}[S]$.

С ростом α падает вероятность разорения и растет средняя прибыль, т.е. рост α выгоден в обоих смыслах. Перестраховочная операция также нецелесообразна.

7.4. Эксцедентное перестрахование

Напомним сущность этого вида перестрахования. Оговаривается некоторый предел удержания (франшиза) r. Если величина иска X не превосходит r, то передающая компания оплачивает иск самостоятельно, в противном случае сумму, равную r, выплачивает передающая компания, а сумму $X - r$ – перестрахо-вочная. Тем самым выплата, осуществляемая передающей компанией равна $X^{(r)} = \min\{X, r\}$, перестраховочной $- \max\{X - r, 0\} = X - X^{(r)}$. Как и в предыдущем пункте, обе компании имеют страховые надбавки соответственно Λ^* (перестраховочная) и Λ (передающая). В общем случае задача определения оптимальной в разумном смысле франшизы является весьма сложной и опирается на понятие предпочтения для распределений (см., например, [2, 10]). Приведем одну конкретную схему, для которой в некоторых частных случаях удается получить точный результат.

Пусть передающая компания заключила K однотипных договоров перестрахования, причем число договоров является детерминированным. Будем использовать модель индивидуального риска (п. 5.1). Рассмотрение в случае модели коллективного риска аналогичное. Пусть иски по договорам СВ, равные X_1, $X_2, \ldots, X_K$, имеют одно и то же распределение и независимы в совокупности. Суммарный иск, предъявляемый страхователями, равен
$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_K$. С учетом договоров перестрахования суммарный иск к передающей компании составит

$$S^{(r)} = X_1^{(r)} + X_2^{(r)} + \ldots + X_K^{(r)}.$$

Сумма премий, выплаченная первоначально передающей компании, равна

$$C_0 = K(1 + \Lambda)\mathrm{E}[X].$$

При заключении договора перестрахования передающая компания выплачивает перестраховочной сумму, равную

$$K(1+\Lambda^*)\mathrm{E}[X - X^{(r)}] = K(1+\Lambda^*)(\mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[X^{(r)}]).$$

Здесь использована аддитивность математического ожидания (п.2.2). Следовательно, после заключения договоров перестрахования капитал передающей компании станет равным

$$C_1 = C_0 - K(1+\Lambda^*)(\mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[X^{(r)}]) = \tag{7.10}$$

$$= K(\Lambda - \Lambda^*)\mathrm{E}[X] + K(1+\Lambda^*)\,\mathrm{E}[X^{(r)}].$$

Отсюда вероятность разорения передающей компании равна

$$\mathrm{P}[S^{(r)} > C_1].$$

Воспользуемся теперь тем, что СВ $S^{(r)}$ распределена при больших K по закону, близкому к нормальному. При таком предположении из (7.10) получаем:

$$\mathrm{P}[S^{(r)} > C_1] = \mathrm{P}\left[\frac{S^{(r)} - K\mathrm{E}\left[X^{(r)}\right]}{\sqrt{K\mathrm{Var}\left[X^{(r)}\right]}} > \frac{C_1 - K\mathrm{E}\left[X^{(r)}\right]}{\sqrt{K\mathrm{Var}\left[X^{(r)}\right]}}\right] \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{C_1 - K\mathrm{E}\left[X^{(r)}\right]}{\sqrt{K\mathrm{Var}\left[X^{(r)}\right]}}\right), \tag{7.11}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$. Поскольку функция $\Phi(x)$ возрастает, то вероятность разорения минимальна при максимуме функции

$$\frac{C_1 - K\mathrm{E}\left[X^{(r)}\right]}{\sqrt{K\mathrm{Var}\left[X^{(r)}\right]}} \qquad (7.12)$$

для $r \in [0,\infty)$. Если окажется, что максимум этой функции (проще рассматривать ее квадрат) достигается при $r = 0$, то с точки зрения риска надо перестраховывать иски полностью, если же максимум достигается при $r = \infty$, то от перестрахования следует отказаться. Разумеется, при этом надо учитывать и размер прибыли.

Приведем конкретный пример.

Пример 7.1. Пусть страховая компания заключила $K = 10000$ однотипных договоров страхования автомобилей на один год. Условия договоров предусматривают выплату 1000 у.е., если ущерб превосходит эту сумму, и выплату 100 у.е., если ущерб от 100 до 1000 у.е. При ущербе менее 100 у.е. выплата не производится. Статистические оценки вероятностей соответствующих выплат равны соответственно $5 \cdot 10^{-4}$ и $2 \cdot 10^{-3}$. Компания установила брутто-премию, исходя из 5 % вероятности разорения. Исследуем вопрос об эксцедентном перестраховании в перестраховочной компании, которая предлагает 60 % страховую надбавку.

Вычислим сначала числовые характеристики величины иска.

$$\mathrm{E}[X] = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0{,}7 \text{ у.е.}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 - 0{,}7^2 \approx$$

$$\approx 5{,}2 \cdot 10^2 \text{ у.е.}^2$$

Найдем величину страховой надбавки передающей компании.

Полагая распределение суммарного иска S нормальным, получим: премия C по каждому договору должна удовлетворять равенству (аналог формулы (7.11)):

$$0{,}95 = \mathrm{P}[KC > S] = \mathrm{P}\left[\frac{KC - K\mathrm{E}[X]}{\sqrt{K\mathrm{Var}[X]}} > \frac{S - K\mathrm{E}[X]}{\sqrt{K\mathrm{Var}[X]}}\right] \approx \Phi\left(\frac{KC - K\mathrm{E}[X]}{\sqrt{K\mathrm{Var}[X]}}\right).$$

Из таблицы (прил. 2) находим: $\dfrac{KC - K\mathrm{E}[X]}{\sqrt{K\mathrm{Var}[X]}} = 1{,}645$, откуда

$$C \approx \mathrm{E}[X] + \frac{1{,}645 \cdot \sqrt{\mathrm{Var}[X]}}{\sqrt{N}} .$$

Подставляя соответствующие значения, получим $C \approx 1{,}075$ у.е. Таким образом, страховая надбавка θ равна $1{,}075/0{,}7-1 \approx 0{,}536$.

Ясно, что предел удержания r может изменяться от 100 у.е. до 1000 у.е. Часть иска $X^{(r)}$, выплачиваемая передающей компанией, равна 100 у.е. с вероятностью $2\cdot10^{-3}$, r с вероятностью $5\cdot10^{-4}$ и 0 в остальных случаях. Отсюда

$$\mathrm{E}[X^{(r)}] = 2\cdot10^{-3}\cdot100 + 5\cdot10^{-4}\cdot r = 0{,}2 + 5\cdot10^{-4}\cdot r,$$

$$\mathrm{Var}[X^{(r)}] = 2\cdot10^{-3}\cdot100^2 + 5\cdot10^{-4}\cdot r^2 - (0{,}2+5\cdot10^{-4}\cdot r)^2 \approx$$

$$\approx 5\cdot10^{-4}\cdot r^2 - 2\cdot10^{-4}\cdot r + 20.$$

Капитал передающей компании после заключения договора перестрахования будет равен (7.10):

$$C_1 = K(\Lambda - \Lambda^*)\mathrm{E}[X] + K(1+\Lambda^*)\,\mathrm{E}[X^{(r)}] =$$

$$= 10000(0{,}536 - 0{,}6)\,0{,}7 + 10000(1+0{,}6)(0{,}2+5\cdot10^{-4}\cdot r) =$$

$$= 2752 + 8r.$$

Отсюда видно, что капитал растет с ростом r.

Вероятность разорения (7.12) определяется величиной

$$\frac{C_1 - K\mathrm{E}\left[X^{(r)}\right]}{\sqrt{K\mathrm{Var}\left[X^{(r)}\right]}} =$$

$$= \frac{2752 + 8r - 10000\left(0{,}2 + 5\cdot10^{-4}r\right)}{\sqrt{10000\left(5\cdot10^{-4}r^2 - 2\cdot10^{-4}r + 20\right)}} = \frac{752 + 3r}{\sqrt{5r^2 - 2r + 200000}}.$$

Эта функция принимает максимальное значение при r = 159,6 у.е. Вероятность разорения передающей компании равна
1– Φ(2,1522) = 0,016, что существенно ниже вероятности разорения без перестрахования, равной 0,05. Однако при этом капитал передающей компании равен 4029 у.е. против 10752 у.е. без перестрахования.

7.5. Перестрахование в динамической модели

Пусть перестрахование определяется функцией $h(x)$ и относительной страховой надбавкой перестраховочной компании Λ^*. Допустим далее, что перестрахование относится по отдельности к каждому конкретному иску (подобную схему легче всего как организовывать, так и анализировать), и что страховые премии поступают к перестрахователю непрерывно. Мы будем анализировать ситуацию с точки зрения передающей компании. Пусть R_h – характеристический коэффициент (п. 6.3) такой перестраховочной операции для передающей компании. Из неравенства Лундберга следует, что компания должна при назначении функции $h(x)$ стремиться к максимизации значения R_h.

Определим параметры потоков нетто-премий и исков, которые фактически реализуются при заключении договора перестрахования.

За единицу времени передающая компания получает средств $(1+\Lambda)\lambda\mathrm{E}[Y]$, где Λ – относительная страховая надбавка, λ – среднее число исков, предъявляемых за единицу времени, Y – случайная величина – размер предъявляемого иска. За ту же единицу времени перестраховочной компании передается средств $(1+\Lambda^*)\lambda\mathrm{E}[h(Y)]$. Таким образом, за единицу времени передающая компания получает средства в размере

$$(1+\Lambda)\lambda\mathrm{E}[Y] - (1+\Lambda^*)\lambda\mathrm{E}[h(Y)].$$

Естественно, эта величина не должна быть меньше средней суммы исков, подлежащих выплате за вычетом передач перестраховочной компании, т.е.

$$(1+\Lambda)\lambda\mathrm{E}[Y] - (1+\Lambda^*)\lambda\mathrm{E}[h(Y)] \geq \lambda\mathrm{E}[Y] - \lambda\mathrm{E}[h(Y)],$$

отсюда функция $h(Y)$ должна удовлетворять условию

$$\Lambda^*\mathrm{E}[h(Y)] \le \Lambda\mathrm{E}[Y]. \tag{7.13}$$

Ранее (п. 7.3) отмечалось, что с позиций перестраховщика должно выполняться неравенство $\Lambda^* > \Lambda$.

Интенсивность поступления исков, подлежащих оплате передающей компанией, не изменяется при заключении договоров перестрахования, т.е. равна λ.

Случайная величина – размер иска, оплачиваемого передающей компанией, равна $Y - h(Y)$.

Характеристический коэффициент R_h является положительным корнем уравнения (6.14)

$$1+((1+\Lambda)\mathrm{E}[Y] - (1+\Lambda^*)\,\mathrm{E}[Y - h(Y)])\,R_h = \tag{7.14}$$

$$\mathrm{E}[\,e^{R_h(Y-h(Y))}\,].$$

В частности, для пропорционального перестрахования (п 7.3) $h(Y) = (1-\alpha)Y$. Уравнение (7.14) примет вид:

$$1+((1+\Lambda) - \alpha(1+\Lambda^*))\mathrm{E}[Y]\,R_h = \mathrm{E}[\,e^{R_h\alpha Y}\,].$$

Условие (7.13) принимает форму

$$\Lambda^*(1-\alpha) \le \Lambda.$$

Пример 7.2. Рассмотрим случай экспоненциального распределения величины иска Y с параметром b. Тогда

$$\mathrm{E}[Y] = 1/b,\ \mathrm{E}\left[e^{R_h\alpha Y}\right] = b/(b-R_h\alpha).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$1+((1+\Lambda) - \alpha(1+\Lambda^*))R_h/b = b/(b - R_h\alpha).$$

Решая это уравнение, получим:

$$R_h = b\frac{(1+\Lambda)-\alpha(1+\Lambda^*)}{\alpha(1+\Lambda)-\alpha^2(1+\Lambda^*)}.$$

С точки зрения вероятности разорения за неограниченное время передающая компания должна найти такое значение $\alpha \in [0,\ \Lambda/\Lambda^*]$, при котором R_h достигает максимума. В данном примере возможно аналитическое решение.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (P) Портфель страховой компании содержит независимые договоры двух типов: 100 договоров первого типа и 200 – второго. Для договора первого типа вероятность предъявления единственного возможного иска равна 0,01, страховая сумма равна 5000 руб. Для договора второго типа соотвествующие значения равны p и 12 000 руб. Страховая компания заключает договор эксцедентного перестрахования с пределом удержания, равным 2000 руб. по каждому иску. Относительная страховая надбавка перестраховочной компании равна 0,2. Общая премия за перестрахование составляет 8400 руб. Чему равна вероятность p?

2. (P) Портфель страховой компании содержит 200 независимых однотипных договоров. Вероятность предъявления единственного возможного за рассматриваемый промежуток времени иска равна 0,125, а размер предъявляемого иска подчинен распределению Парето с параметрами $\alpha = 4$ и $\lambda = 900$. Страховая компания заключает договор пропорционального перестрахования с долей собственного удержания, равной β. Относительные страховые надбавки передающей и перестраховочной компаний равны 25 % и 20 % соответственно. Найдите β, если средний доход передающей компании после перестрахования составляет 1200.

3. (P) Портфель страховой компании содержит договоры двух типов. Суммарный иск по договорам первого типа имеет составное распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 = 3$; возможные значения предъявляемого иска равны 10 000 и 20 000 руб. с вероятностями 0,6

и 0,4 соответственно. Суммарный иск по договорам второго типа имеет составное распределение Пуассона с параметром $\lambda_2 = 5$; возможные значения предъявляемого иска равны 10 000 и 20 000 руб. с вероятностями 0,8 и 0,2 соответственно. Страховая компания заключает договор эксцедентного перестрахования с пределом удержания, равным 5 000 руб. по каждому иску. Относительные страховые надбавки передающей и перестраховочной компаний равны 0,2 и 0,25 соответственно. Найдите средний доход передающей компании после перестрахования.

4. Портфель страховой компании включает независимые договоры страхования жизни на один год. Вероятность наступления страхового случая по одному договору равна 0.01. 600 договоров заключены на страховую сумму в размере 200 у.е., 300 договоров – 100 у.е., 200 договоров – 80 у.е. Страховщик назначает общую премию в 2500 у.е. и оформляет за 1200 руб. договор эксцедентного перестрахования с пределом удержания в размере 80 у.е. по одному договору. Относительная страховая надбавка передающей компании вдвое меньше относительной страховой надбавки перестраховочной компании. Какова вероятность наступления страхового случая по одному договору после перестрахования с точки зрения перестраховочной компании?

5. Суммарные выплаты страховой компании за год описываются составным отрицательным биномиальным распределением. Математическое ожидание числа страховых случаев за год равно 9, а его дисперсия равна 36. Возможные значения индивидуальных потерь равны 1000 и 4000 с вероятностями 3/7 и 4/7 соответственно. Страховая компания заключила договор эксцедентного перестрахования с пределом собственного удержания, равным 4000 по всему портфелю. Определите средние выплаты перестраховочной компании.

ГЛАВА 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДОВЕРИТЕЛЬНОСТИ

В теории доверительности рассматривается задача переоценки страховых премий по мере накопления статистических данных. Необходимость в этом возникает в ситуациях, когда имеющиеся данные наблюдений по искам рассматриваемого класса за рассматриваемый период времени являются скудными и не могут служить основой для достоверных оценок требуемых характеристик. Значения этих характеристик могут быть определены только с привлечением дополнительных данных либо по искам других классов, аналогичных, но не тождественных рассматриваемому, либо по искам рассматриваемого класса, но за более ранний период времени.

Основным подходом для оценки неизвестного параметра P в теории доверительности является вычисление P как взвешенного среднего

$$P = z\overline{P} + (1 - z)\mu,$$

где $\overline{P}$ – оценка параметра на основе данных наблюдений по искам рассматриваемого класса, μ – оценка параметра на основе дополнительных данных.

Весовой коэффициент z $(0 \le z \le 1)$ называется фактором доверия. Чем больше имеется данных по искам рассматриваемого класса, тем выше должно быть значение z, чем более достоверны дополнительные данные, тем меньше z. Если оценка параметра P осуществляется только на основе опытных данных по искам рассматриваемого класса (z = 1), то говорят о полной доверительности рассматриваемого класса исков.

8.1. Полная доверительность

Пусть анализируется некоторый класс исков, полученных в ходе наблюдений. Важным представляется следующий вопрос: можно ли считать, что этой информации (без анализа дополнительных данных) достаточно для надежного прогноза будущей нетто-премии?

Разумеется, при этом необходимо пользоваться теми или иными априорными соображениями. Класс исков, для которого такой прогноз возможен, называется вполне доверительным. Математически это выражается следующим образом. Пусть $p, k \in (0, 1)$. Класс исков называется (p, k) вполне доверительным [2], если

$$\mathrm{P}[(1-k)\mathrm{E}[X] \le X \le (1+k)\mathrm{E}[X]] \ge p.$$

Здесь СВ X – иск рассматриваемого класса.

Смысл этого условия: относительная погрешность от замены математического ожидания $\mathrm{E}[X]$ некоторым значением случайной величины X, полученным в ходе наблюдений, не превосходит k с вероятностью p. Отсюда ясно, что число k следует принять малым, а число p – достаточно близким к 1. Этот подход близок к понятию доверительного интервала в математической статистике [22, 23]. Стандартные значения $k = 0{,}05$, $p = 0{,}9$. Очевидно, что наблюдений для полной доверительности должно быть достаточно много.

Приведем несколько примеров, демонстрирующих описанный подход.

Пример 8.1. Пусть иски рассматриваемого класса нормально распределены. Тогда условие полной доверительности имеет вид:

$$\mathrm{P}[(1-k)\mathrm{E}[X] \le X \le (1+k)\mathrm{E}[X]] =$$

$$= \mathrm{P}\left[-k\frac{\mathrm{E}[X]}{\sigma[X]} \le \frac{X-\mathrm{E}[X]}{\sigma[X]} \le k\frac{\mathrm{E}[X]}{\sigma[X]}\right] =$$

$$= \Phi\left(k\frac{\mathrm{E}[X]}{\sigma[X]}\right) - \Phi\left(-k\frac{\mathrm{E}[X]}{\sigma[X]}\right) \ge p,$$

из свойств функции распределения стандартного нормального распределения $2\left(\Phi\left(k\frac{\mathrm{E}[X]}{\sigma[X]}\right) - 0{,}5\right) \ge p$, т.е.

$$\Phi\left(k\frac{\mathrm{E}[X]}{\sigma[X]}\right) \ge p/2 + 0{,}5.$$

При p = 0,9 имеем $\Phi\left(k\frac{\mathrm{E}[X]}{\sigma[X]}\right) \ge 0{,}95$. Из таблицы квантилей стандартного нормального распределения (прил. 2), $k\frac{\mathrm{E}[X]}{\sigma[X]} \ge 1{,}645$. При k = 0,05 получаем $\mathrm{E}[X] \ge 32{,}9\sigma[X]$.

Таким образом, рассматриваемый класс исков обладает (p = 0,9; k = 0,05) полной доверительностью, если СКО составляет не более 3 % от математического ожидания.

Данный результат можно использовать на практике. Для этого на основе имеющихся данных наблюдений следует оценить математическое ожидание $\mathrm{E}[X]$ и СКО $\sigma[X]$. В случае если неравенство $\mathrm{E}[X] \ge 32{,}9\sigma[X]$ для полученных оценок будет верным, то имеющийся класс наблюдений будет являться (0,9; 0,05) вполне доверительным.

Пример 8.2. Пусть S – суммарный иск, распределенный по составному закону Пуассона (п. 5.2.5) с пуассоновским параметром λ. Тогда $\mathrm{E}[S] = \lambda\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{Var}[S] = \lambda\mathrm{E}[Y^{2}]$, $\sigma[S] = (\lambda\mathrm{E}[Y^{2}])^{1/2}$. При использовании нормального приближения (п. 5.2.6) из неравенства примера 8.1 следует условие (0,9; 0,05) полной доверительности в этом случае:

$$\lambda\mathrm{E}[Y] \ge 32{,}9(\lambda\mathrm{E}[Y^{2}])^{1/2},$$

откуда

$$\lambda \ge (32{,}9)^2\, \mathrm{E}[Y^{2}]/\,\mathrm{E}[Y]^{2} \approx 1082\,\mathrm{E}[Y^{2}]/\,\mathrm{E}[Y]^{2}.$$

И опять для того чтобы проверить, выполняется ли условие полной доверительности $\lambda \ge 1082\,\mathrm{E}[Y^{2}]/\,\mathrm{E}[Y]^2$ для имеющихся данных наблюдений, в качестве парметров λ, $\mathrm{E}[Y^{2}]$, $\mathrm{E}[Y]$ следует взять их оценки.

Пример 8.3. Пусть S – суммарный иск, распределенный по составному закону Пуассона, и распределения величин исков слабо зависят от класса (т.е. портфель страхования достаточно однородный). В таком случае естественным является вопрос: сколько надо иметь наблюдений в единицу времени для полной доверительности относительно числа исков? Примем $\mathrm{E}[Y^2] = \mathrm{E}[Y] = 1$. Тогда $\lambda \geq 1082$, т.е. интенсивность предъявления исков должна быть весьма высокой.

Примеры показывают, что полная доверительность (при разумных значениях k и p) явление достаточно редкое и возможна только в очень крупных страховых компаниях. Поэтому для прогноза применяется некоторая комбинация данных, относящихся как к анализируемому классу договоров, так и к опыту предшествующих исков в целом.

8.2. Частичная доверительность*

Ограничимся несколькими примерами получения оценок частичной доверительности без обоснования, за которым отсылаем к специальной литературе [2, 3].

8.2.1. Байесовский подход. В основе Байесовского подхода лежит классическая формула Байеса [21, 24, 30], которая позволяет скорректировать по результатам предстоящих наблюдений априорную информацию о вероятностях наступления тех или иных событий и тем самым более обоснованно прогнозировать ситуацию. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – полная группа несовместных событий, оценки вероятностей наступления которых предполагаются априорно известными, и B – некоторое событие с положительной вероятностью. Тогда (см. (2.10))

$$\mathrm{P}\left[A_i \middle| B\right] = \frac{\mathrm{P}\left[B \middle| A_i\right]\mathrm{P}\left[A_i\right]}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{P}\left[B \middle| A_j\right]\mathrm{P}\left[A_j\right]},$$

здесь $\mathrm{P}[A_i]$ – априорные вероятности, $\mathrm{P}[A_i|B]$ – вероятности апостериорные.

Плотность апостериорного распределения $f(x \mid B)$ некоторой СВ X, зная плотность ее априорного распределения $f(x)$, можно вычислить по следующей формуле:

$$f(x \mid B) = \frac{\mathrm{P}\big[B\big|X = x\big]f(x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}\big[B\big|X = x\big]f(x)dx}.$$

Байесовский подход в математической статистике основан на этой идее. Приведем примеры, относящиеся к оценке доверительности при актуарных расчетах.

Пример 8.4. Пусть S_1, S_2,... S_n – суммарные требования к страховой компании за последовательные годы, и необходимо на их основе оценить будущую нетто-премию, покрывающую суммарный иск S_{n+1} . Предположим, что эти требования независимы, распределены нормально с известной дисперсией $\sigma_1{}^2$ и случайным математическим ожиданием θ. Оценка математического ожидания СВ θ в данном случае и представляет собой оценку искомой нетто-премии (в условиях полной доверительности нетто-премия оценивалась бы как $\left.\bar{S} = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i / n\right)$. В качестве априорного распределения θ в данной модели выбирается нормальное распределение с известными математическим ожиданием μ и дисперсией $\sigma_2{}^2$. Можно доказать, что апостериорное распределение θ также нормальное с дисперсией

$$\sigma^2(n+1) = \frac{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}{\sigma_1{}^2 + n\sigma_2{}^2}$$

и математическим ожиданием

$$\mu(n+1) = \frac{\mu\sigma_1{}^2 + n\bar{\mathrm{S}}\sigma_2{}^2}{\sigma_1{}^2 + n\sigma_2{}^2}.$$

Математическое ожидание $\mu(n + 1)$, оценка которого и выбирается в данном случае в качестве оценки нетто-премии следующего n+1 года, можно представить как среднее взвешенное данных наблюдений $\overline{S}$ и априорной информации μ (оценивается на основе привлечения дополнительных данных):

$$\mu(n+1) = \mu(1 - z) + z\overline{S},$$

где величина

$$z = \frac{n}{\sigma_1{}^2 / \sigma_1{}^2 + n}$$

представляет собой фактор доверия. При $n \to \infty$ фактор доверия монотонно приближается к 1, т.е. роль данного класса наблюдений $S_1, S_2, ..., S_n$ возрастает (в пределе данный класс становится вполне доверительным).

Следующий пример относится не к размерам, а к числу исков.

Пример 8.5. Пусть $N_1, N_2, \ldots, N_n$ – количества предъявленных исков за последовательные годы и на основе этих данных необходимо оценить среднее число исков в будущем n +1 году (если $N_1, N_2, \ldots, N_n$ вполне доверительный класс наблюдений, то в качестве оценки среднего числа исков выбирается $\overline{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{n}$). СВ $N_1, N_2, \ldots, N_n$ принимаются независимыми и имеющими пуассоновское распределение с параметром θ. Предполагается, что параметр θ – случайная величина. В качестве его априорного распределения выбирается гамма-распределение с известными параметрами α и λ. Как можно проверить, апостериорное (байесовское) распределение параметра θ (при условии реализации последовательности $N_1, N_2, \ldots, N_n$) также является гамма-распределением с параметрами

$$\overline{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{n} N_i, \ \overline{\lambda} = \lambda + n.$$

Если принять распределение N_{n+1} пуассоновским с параметром, равным математическому ожиданию апостериорного распределения θ, то $\mathrm{E}[N_{n+1} \mid N_1, N_2,\ldots, N_n] = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\lambda}}$ (п. 3.3,4.5). Этот результат можно записать также как взвешенное среднее данных наблюдений $\overline{N} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{n}$ и априорной информации α/λ (которая оценивается на более обширных опытных данных):

$$\mathrm{E}[N_{n+1} \mid N_1, N_2,\ldots, N_n] = z\overline{N} + (1-z)\alpha/\lambda,$$

где

$z = n/(n+\lambda)$ – фактор доверия для этой задачи.

И в этом случае при $n \to \infty$ фактор доверия стремится к 1.

8.2.2. Применение метода наименьших квадратов. Пусть $S_1, S_2,\ldots, S_n$ – размеры требований за последовательные годы (они не предполагаются независимыми) и P_i – размер доверительной нетто-премии, покрывающей иск S_i. Основная идея – искать премию P_{n+1} как линейную комбинацию данных

$$P_{n+1} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i S_i,$$

коэффициенты которой удовлетворяют условию наименьших квадратов $\mathrm{E}[(P_{n+1} - S_{n+1})^2] \to \min$. Дифференцируя функцию $\mathrm{E}[(P_{n+1} - S_{n+1})^2]$ последовательно по $a_0, a_1,\ldots, a_n$ и приравнивая производные 0, получим систему линейных уравнений

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{E}[S_i] = \mathrm{E}[S_{n+1}], \tag{8.1}$$

$$a_0 \mathrm{E}[S_j] + \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{E}[S_i S_j] = \mathrm{E}[S_{n+1} S_j] \; (j = 1, 2,\ldots, n). \tag{8.2}$$

Напомним (п. 2.3), что ковариацией СВ ξ_i, ξ_j называется величина $\mathrm{Cov}[\xi_i, \xi_j] = \mathrm{E}[\xi_i\xi_j] - \mathrm{E}[\xi_i]\mathrm{E}[\xi_j]$. Умножая уравнения (8.1) последовательно на $\mathrm{E}[S_1]$, $\mathrm{E}[S_2],\ldots$, $\mathrm{E}[S_n]$ и вычитая из соответствующих уравнений (8.2) системы, получим систему относительно $a_1,\ldots, a_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{Cov}\left[S_i, S_j\right] = \mathrm{Cov}\left[S_{n+1}, S_j\right].$$

Ковариационная матрица $\left\|\mathrm{Cov}\left[\mathrm{S}_i, \mathrm{S}_j\right]\right\|$ положительно определенная и, как правило, невырожденная. В этом случае последняя система имеет единственное решение, после чего находится и a_0. Этот подход предпочтителен тем, что P_{n+1} по определению рассматривается как взвешеннное среднее, и требуются предположения только о первых двух моментах законов распределения, но не о самих законах (при этом дополнительно требуются ковариации).

Пример 8.6. Пусть есть основания считать, что распределения S_j совпадают, причем $\mathrm{E}[S_j] = \mu$, $\mathrm{Var}[S_j] = v + w$, $\mathrm{Cov}[S_j, S_i] = w$ при всех j, $i \neq j$, где μ, v, w положительные константы. Легко проверить, что

$$a_i = \frac{w}{nw+v} \text{ при } i = 1, 2,\ldots, n;$$
$$a_0 = \frac{\mu v}{nw+v}.$$

В результате получаем

$$P_{n+1} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i S_i = \frac{\mu v}{nw+v} + \frac{w}{nw+v}\sum_{i=1}^{n} S_i,$$

откуда, полагая $z = 1 - \dfrac{v}{nw+v}$, получаем $P_{n+1} = (1-z)\mu + z\overline{S}$, где фактор доверия z обладает теми же свойствами, что и в предыдущих примерах.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Портфель страховой компании содержит K независимых однотипных договоров страхования. Иск по одному договору описывается составным распределением Пуассона с параметром $\lambda = 3$. Средний размер предъявляемого иска $E[Y] = 1320$ руб., дисперсия $\mathrm{Var}[Y] = 350000$ руб^2. Сколько в среднем должно поступить исков за год для ($k = 0{,}1$, $p = 0{,}95$) полной доверительности данных наблюдений? Чему в этом случае должно быть равно число договоров?

2. (Р) Портфель страховой компании содержит K независимых однотипных договоров. Число исков по одному договору, предъявляемых за год, подчиняется распределению Пуассона.

Страховщику необходимо оценить среднее число исков по одному договору за рассматриваемый промежуток времени, а затем найти его новую оценку на основе новых данных наблюдений.

Страховщик предполагает, что среднее число исков по договору является случайной величиной, и в качестве оценки среднего числа исков выбирает ее математическое ожидание. Априорно считается, что эта СВ имеет гамма-распределение с параметрами α и λ.

Используя байесовский подход, найдите апостериорный закон распределения СВ, если в течение года по портфелю поступит n исков. Найдите также апостериорную оценку среднего числа исков по договору.

3. (Р) Год назад страховщик назначил премию, исходя из того, что среднее число исков по одному договору, предъявляемых за год, – случайная величина, подчиненная гамма-распределению с математическим ожиданием равным 0.16 и дисперсией равной 0.00256. В течение года по 2300 договорам рассматриваемого типа было предъявлено 480 исков. Пересчитайте среднее число исков по одному договору, используя новые данные.

4. Число исков по данному портфелю договоров подчиняется распределению Пуассона с параметром θ.

Известны следующие данные наблюдений за последние 3 года: в первый год число исков по портфелю составило 134, во второй – 156, в третий – 148. Используя эти данные, и предполагая, что θ – случайная величина с априорным гамма-распределением с параметрами $\alpha = 100$ и $\lambda = 1$, на основе байесовского подхода найдите значение фактора доверия и оцените среднее число исков в следующем году.

ГЛАВА 9. СТРАХОВЫЕ ПРЕМИИ И ФУНКЦИИ СПРОСА*

9.1. Функция спроса

При определении страховых премий важную роль должен играть социально-психологический фактор, который, по нашему мнению, не учитывается должным образом в стандартных актуарных расчетах. Этот фактор можно ввести в рассмотрение следующим образом. Пусть предлагается некоторый страховой продукт, который рассчитан на массового потребителя. Естественно, численность желающих приобрести его зависит от назначенной страховщиком премии. Обозначим через $K(x)$ функцию спроса – число потенциальных потребителей этого продукта, готовых купить его за премию, равную x. Эту функцию можно считать некоторым аналогом функции полезности – последние оценивают индивидуальные предпочтения личности, в то время как функция $K(x)$ – предпочтения массовые. Функции полезности применяются в актуарном анализе достаточно широко (см., например, обзор [20]). Результаты настоящей главы примыкают к результатам А. А. Новоселова [19] и А. Ю. Голубина [13]. В [18] дан подход к определению функции спроса в несколько ином смысле через функцию полезности.

Опишем естественные свойства, которыми должна обладать функция спроса $K(x)$. Будем считать, что функция $K(x)$ (в действительности принимающая дискретное множество значений) является кусочно дважды дифференцируемой. Далее это предположение будет уточняться.

1. Очевидно, что функция $K(x)$ неотрицательная, невозрастающая и ограниченная на положительной полуоси.

2. Существует такое значение C, при котором $K(C) = 0$. Естественно, никто не купит полис, если за него надо платить максимальное страховое вознаграждение, предусмотренное полисом. Фактически C – максимальное значение страховой премии, при котором число потребителей можно считать массовым.

3. Рассмотрим разность $K(x) - K(x+1)$. Это число потенциальных страхователей, готовых заплатить за полис x рублей, но не готовых заплатить $x+1$ рубль. Естественно, эта величина

уменьшается с ростом x. Аналитически это условие означает выпуклость функции $K(x)$, т.е. $K''(x) \ge 0$.

4. Последнее свойство можно усилить. Рассмотрим отношение $\dfrac{K(x)-K(x+1)}{K(x)}$ при $K(x) > 0$. Это есть доля потенциальных страхователей, не готовых затратить лишний рубль среди готовых купить полис за x рублей. Естественно предполагать, что эта величина падает с увеличением x. Применяя формулу конечных приращений, получаем: функция $-\dfrac{K'(x)}{K(x)}$ убывающая, т.е. функция $\dfrac{K'(x)}{K(x)} = \left(\ln K(x)\right)'$ возрастающая. Это означает выпуклость функции $\ln K(x)$. Из этого условия следует неравенство

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{K'(x)}{K(x)}\right) = \frac{K''(x) f(x) - \left(K'(x)\right)^2}{\left(K(x)\right)^2} \ge 0 .$$

Отсюда с учетом свойства 1 видно, что это условие усиливает 3.

Замечание. В классе непрерывных в точке C функций свойства 2 и 4 несовместны. Действительно, если $K(x) \to 0+$ при $x \to C-$, то $\ln K(x) \to -\infty$ при $x \to C-$. Но тогда функция $\ln K(x)$ не может быть выпуклой в некоторой левой полуокрестности точки C, поскольку выпуклая функция ограничена снизу на любом ограниченном множестве. Отсюда следует, что функция $K(x)$ должна быть разрывной в точке C. Будем считать, что функция спроса $K(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(0, C)$, значение $K(C)$ равно левому предельному значению функции. Как и выше, естественно считать, что значение C – это максимально возможная страховая премия, при которой полисы будут иметь массовый спрос.

Простейшая функция, удовлетворяющая условиям 1-4, имеет вид

$$K(x) = \begin{cases} \alpha \exp(-Qx) & \text{при} \quad x \le C \\ 0 & \text{при} \quad x > C \end{cases},$$

где α, Q – положительные числа. Далее эта модель будет уточняться.

9.2. Статическая модель

Предполагается, что в начальный момент времени продается некоторый набор полисов, моменты предъявления исков по которым и размеры исков по каждому из которых являются случайными.

Пусть по каждому из рассматриваемых полисов распределение возможных исков в дисконтированном виде имеет математическое ожидание m и дисперсию σ^2. Если полис продается по цене x, то предполагается заключение $K(x)$ договоров. Считая случайные величины – предъявленные иски – независимыми и число договоров достаточно большим, можно считать сумму дисконтированных исков S распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $mK(x)$ и дисперсией $\sigma^2 K(x)$. Условие неразорения имеет вид $S \le xK(x)$, поскольку $xK(x)$ – средства, собранные страховщиком по заключенным договорам. Таким образом, вероятность неразорения равна

$$\mathrm{P}[S \le xK(x)] = \mathrm{P}\left[\frac{xK(x) - mK(x)}{\sigma\sqrt{K(x)}} \ge \frac{S - mK(x)}{\sigma\sqrt{K(x)}}\right].$$

Случайная величина $\dfrac{S - mK(x)}{\sigma\sqrt{K(x)}}$ распределена по стандартному нормальному закону (с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением 1).

Зададимся вероятностью неразорения $p > 0{,}5$. Тогда из условия $\mathrm{P}[xK(x) \ge S] \ge p$ следует неравенство

$$\frac{xK(x) - mK(x)}{\sigma\sqrt{K(x)}} \ge \gamma_p,$$

где γ_p – квантиль уровня p стандартного нормального распределения. При $p > 0{,}5$ имеем $\gamma_p > 0$.

Отсюда следует, что должно выполняться естественное неравенство $x > m$ (премия не может быть меньше нетто-премии при разумной вероятности неразорения) и

$$K(x) \geq \left(\frac{\sigma\gamma_p}{x-m} \right)^2.$$

Логарифмируя это неравенство при $x > m$, получаем $\ln K(x) \geq A - 2\ln(x-m)$, где $A=2\ln(\sigma\gamma_p)$. Сравнивая это неравенство со свойствами функции $\ln K(x)$, приходим к следующему выводу, аналогичному [19]: вероятность неразорения не может быть сколь угодно близкой к 1, поскольку $\gamma_p \to +\infty$ при $p \to 1-$.

Таким образом, встает задача нахождения значения p^* максимально допустимой вероятности неразорения страховщика (из геометрических соображений она достижима – это отмечено и в [19]). Если эта вероятность не устраивает страховщика, то подобные полисы выпускать не имеет смысла. В противном случае страховщик может задать некоторую допустимую для него вероятность неразорения $p < p^*$ и при этом ограничении найти значение x такое, что математическое ожидание дисконтированной прибыли $(x-m)K(x)$ максимально.

Рассмотрим возможные ситуации для первой задачи.

1. Может оказаться, что существует множество значений x, при которых реализуется вероятность неразорения p^*. Установим, при каком значении x достигает максимума математическое ожидание прибыли страховщика.

В этих точках $(x-m)K(x) = \dfrac{(\sigma\gamma_p)^2}{x-m}$. Правая часть убывает с ростом x, следовательно, если страховщик хочет обеспечить минимально возможный уровень риска, то следует назначить минимальную премию, обеспечивающую этот уровень риска.

2. Единственное значение x, при котором реализуется вероятность неразорения p^*, может совпадать с C. В этом случае для обеспечения минимальной вероятности разорения следует назначить премию, близкую к максимально востребованной.

3. Наконец, возможно, что соответствующее единственное значение x достигается в некоторой точке из интервала (m, C).

Рассмотрим теперь возможные ситуации для второй задачи. Пусть допустимый уровень вероятности неразорения p < p*. Множество $\left\{x : K(x) \geq \left(\frac{\sigma\gamma_p}{x-m}\right)^2\right\}$ является объединением непересекающихся отрезков $\bigcup_i [x_{2i}, x_{2i+1}]$, где $x_0 > m$. Рассмотрим один из отрезков (для определенности $[x_0, x_1]$), где $x_1 < C$, если такой интервал существует. Из предполагаемой непрерывности функции $K(x)$ следуют равенства $K(x_0) = \frac{B}{(x_0-m)^2}$, $K(x_1) = \frac{B}{(x_1-m)^2}$. Здесь для простоты через B обозначена величина $(\sigma\gamma_p)^2$. Логарифмируя последние соотношения, получим: $\ln K(x_0) = \ln B - 2\ln(x_0 - m)$, $\ln K(x_1) = \ln B - 2\ln(x_1 - m)$. Из свойства 4 функции $K(x)$ следует, что на отрезке $[x_0, x_1]$ выполняется неравенство $\ln K(x) \leq Ax+S$, где значения коэффициентов линейной функции находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} Ax_0 + S = \ln B - 2\ln(x_0 - m) \\ Ax_1 + S = \ln B - 2\ln(x_1 - m) \end{cases}.$$

Для дальнейшего нам понадобится из решения системы только значение $A = \frac{2}{x_1 - x_0}\ln\frac{x_0 - m}{x_1 - m}$, отсюда $K(x) \leq \exp(Ax+S)$, и максимум математического ожидания дисконтированной средней прибыли при $x \in [x_0, x_1]$ не превосходит максимума функции $(x\text{-}m)\exp(Ax+S)$. Дифференцируя последнюю функцию, получаем выражение

$$\exp(Ax+S)\left(1 + A(x-m)\right) = \exp(Ax+S)\left(1 + \frac{2(x-m)}{x_1 - x_0}\ln\frac{x_0 - m}{x_1 - m}\right).$$

Заметим, что поскольку $x_0 < x_1$, то производная на рассматриваемом отрезке убывает. Проанализируем знаки производной на концах отрезка. Введем обозначения $t_0 = x_0 - m$, $t_1 =$

$= x_1 - m$, $v = t_1/t_0$, тогда $v > 1$. Множитель, определяющий знак производной на правом конце, равен $1-\frac{2v}{v-1}\ln v$. Как легко убедиться, эта величина отрицательная при $v > 1$. На левом конце отрезка этот множитель равен $1-\frac{2}{v-1}\ln v$. Вычисления показывают, что при $v < 3{,}5129$ эта величина отрицательная. Таким образом, при таких значениях v функция $(x-m)\exp(Ax+S)$ убывает на отрезке $[x_0, x_1]$, т.е. достигает максимума в точке x_0. Но тогда в этой же точке достигает максимума и дисконтированная средняя прибыль страховщика в рассматриваемом диапазоне премий независимо от вида функции $K(x)$. Далее, если сравнить различные отрезки множества $\bigcup\limits_i [x_{2i}, x_{2i+1}]$ со свойством $v < 3{,}5129$, то в среднем наиболее прибыльным является левый конец самого левого промежутка. Таким образом, в дополнительном исследовании нуждаются только те отрезки, для которых $v \geq 3{,}5129$, и отрезок с правым концом, равным C, если таковые существует.

Пусть

$$K(x) = \begin{cases} \alpha\exp(-Qx) & \text{при} \quad x \leq C \\ 0 & \text{при} \quad x > C \end{cases}.$$

Поскольку значения x возможной страховой премии не могут быть меньше m, то можно считать, что функция $K(x)$ рассматривается на отрезке $[m, C]$. Здесь величина α имеет смысл максимального числа потенциальных страхователей, параметр Q характеризует скорость убывания функции $K(x)$. Естественно полагать, что Q растет с уменьшением σ: малые значения σ соответствуют низкому уровню риска, а за такой полис очень немногие готовы платить существенно больше нетто-премии. Будем считать, в частности, что $Q = b/\sigma^\beta$ $(\beta>0)$. Далее, естественно считать, что пороговое значение $K(C)$ является некоторой долей от величины α. Если $K(C) = \alpha/l$ $(l > 1)$, то имеем:

$\alpha/l = \alpha\exp Q(m - C)$, откуда $C = m + \ln l/Q = m + \sigma^\beta \ln l/b$.

Итак, пусть $K(x) = \alpha\exp b(m - x)/\sigma^\beta$ при $x \in [m, m + \sigma^\beta \ln l]$. Вычислим максимальную вероятность неразорения страховщика в рамках этой модели. Необходимо найти максимальное значение γ_p, для которого существует значение $x\in[m, m+\sigma^\beta \ln l/b]$ такое, что

$$\alpha \exp b(m-x)/\sigma^\beta = \left(\frac{\sigma\gamma_p}{x-m}\right)^2,$$

следовательно, нужное значение γ_p^2 равно

$$\frac{a}{\sigma^2}\max\{(x-m)^2 \exp b(m-x)/\sigma^\beta : x\in[m, m+\sigma^\beta \ln l/b]\}.$$

Вычисляя, получим: максимум достигается при

$$x = \min\{m+\sigma^\beta \ln l/b, m+2\sigma^\beta\}.$$

Таким образом, при $l < e^{2b}$ максимальное значение вероятности неразорения достигается при максимально возможной страховой премии (или близкой к ней).

9.3. Динамическая модель

Напомним, что суть динамической модели заключается в одновременном рассмотрении двух процессов: детерминированного – поступления премий страховщику и случайного – предъявления исков. Считается, что поступление премий происходит с постоянной скоростью. Процесс моментов предъявления исков обычно предполагается пуассоновским. Основная задача – исследование вероятности разорения на конечном или бесконечном временном промежутке.

Пусть полисы предполагается продавать по цене x, при этом в единицу времени предполагается заключение $K(x)$ договоров. Скорость поступления средств, таким образом, равна $xK(x)$. Далее, частота предъявления исков, очевидно, пропорциональна числу заключенных договоров, т.е. равна $AK(x)$, где значение A зависит от полиса. Страховая надбавка определяется формулой

$$\Lambda = \frac{xK(x) - AmK(x)}{AmK(x)} = \frac{x - Am}{Am}.$$

Отметим, что эта величина не зависит от вида функции спроса. Очевидно, что должно выполняться неравенство $x > Am$.

Вероятность неразорения страховой компании до момента t при отсутствии начального капитала определяется в нашем случае формулой (п. 6.1)

$$\overline{\psi}(t,0) = \frac{\Lambda}{\Lambda+1} + \frac{1}{ct}\int_{ct}^{\infty} G_t(z)dz,$$

где функция $G_t(z)$ равна вероятности события «сумма исков, предъявляемых к моменту t, не меньше z».

В нашем случае имеем:

$$\overline{\psi}(t,0) = \frac{x - Am}{x} + \frac{1}{xK(x)t}\int_{xK(x)t}^{\infty} G_t(z)dz.$$

При $t \to \infty$ получим:

$$\overline{\psi}(\infty,0) = \frac{x - Am}{x},$$

отсюда, вывод: с ростом x вероятность неразорения возрастает и, что особенно примечательно, не зависит от функции спроса.

Применим теперь оценку Лундберга вероятности разорения в зависимости от начального капитала на неограниченном временном промежутке. Эта оценка имеет вид (см. формулу 6.15):

$$\psi(w) \le e^{-Rw},$$

где w – начальный капитал, R – характеристический коэффициент. Напомним, что R находится как положительный корень характеристического уравнения

$$\lambda + rc = \lambda M_Y(r),$$

здесь λ – интенсивность предъявления исков (математическое ожидание и дисперсия числа предъявленных исков, распределенных по закону Пуассона за единичный временной промежуток), c – скорость поступления премий, $M_Y(r) = \int_0^{\infty} e^{rt} f_Y(t)dt$ – производящая функция моментов величины предъявляемого иска Y.

С учетом функции спроса характеристическое уравнение примет вид

$$AK(x)+RxK(x) = AK(x)\, M_Y(R)$$

или после сокращения

$$A+Rx=A\, M_Y(R).$$

Таким образом, корень характеристического уравнения не зависит от вида функции спроса.

Из последнего равенства выразим x:

$$x= A\frac{M_Y(R)-1}{R} = A\left(\mathrm{E}[Y]R + \mathrm{E}[Y^2]\frac{R^2}{2!} + \ldots + \mathrm{E}[Y^n]\frac{R^n}{n!} + \ldots \right),$$

так как $M_Y(R) = 1 + \mathrm{E}[Y]R + \mathrm{E}[Y^2]\frac{R^2}{2!} + \ldots + \mathrm{E}[Y^n]\frac{R^n}{n!} + \ldots$

Поскольку моменты положительной случайной величины Y положительные, то с ростом R возрастает и значение x. Следовательно, обратная функция тоже возрастает, т.е. с ростом x оценка Лундберга вероятности разорения падает.

Следует отметить несовпадение выводов, к которым приводит использование функции спроса в статической и динамической моделях. В первой модели премии часто целесообразно уменьшать, во второй – всегда увеличивать. Важным представляется невозможность произвольного назначения уровня риска в статической модели.

ГЛАВА 10. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕМОГРАФИИ

10.1. Основные понятия

Основным предположением, из которого исходят при математическом анализе демографических процессов, является случайность срока X предстоящей жизни человека. При этом под опытом со случайным исходом понимается случайный выбор человека, за которым будет производиться наблюдение. Естественно, характеристики этой случайной величины нам неизвестны и никогда известны не будут. Поэтому используют их статистические оценки, основанные на анализе демографической ситуации. Соответственно при изложении будут параллельно рассматриваться как вероятностные характеристики, так и их статистические оценки. Информация, необходимая для страхования жизни, заключена в таблицах смертности. В этой главе описываются смысл величин, входящих в эти таблицы, методы их построения, способы их использования в нестандартных ситуациях.

Важнейшим понятием, относящимся к статистическим оценкам характеристик продолжительности жизни, является совокупность лиц (*когорта*).

Совокупность лиц – это группа людей, объединенных по некоторому признаку, за изменением численности которых осуществляется наблюдение. Это может быть все население региона, городское или сельское население, половозрастная группа, профессиональная группа. При этом совокупности могут быть реальными и условными. Реальная совокупность может быть неоднородной с точки зрения риска смерти ее членов. В условную группу объединяют людей, имеющих равные риски смерти. Очевидно, что такая группа гипотетическая, ее, однако, удобно рассматривать для решения задач актуарного анализа.

10.2. Основные характеристики продолжительности жизни (двухмерная модель)

Рассмотрим вероятность $S(u,x)$ ($U \geq u \geq 0$, $x \geq 0$) того, что человек родится после момента времени u и проживет не менее x лет. Значение U может быть различным, в идеале оно равно 1-2 продолжительностям жизни. Очевидно, что эта функция обладает следующими свойствами:

1. $S(0,0) = 1$. Если человек родится, то 0 лет он проживет.
2. Функция $S(u,x)$ убывает с ростом x. Действительно, событие, состоящее в том, что человек родится в момент u и проживет не менее x_1, является подмножеством аналогичного события для продолжительности жизни x_2 при $x_2 \geq x_1$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} S(u,x) = 0$. Более того, $S(u,x) = 0$ при $x > \omega_u$, где ω_u – предельный возраст жизни. Для простоты аналитических выкладок часто полагают, что предельного возраста не существует, но функция $S(u,x)$ очень быстро убывает с ростом x при достаточно больших x.
4. Естественно считать функцию $S(u,x)$ непрерывной. Наличие разрывов означало бы существенную смертность в какой-то определенный момент времени лиц, родившихся в некоторый фиксированный момент. Более того, мы будем предполагать, что функция $S(u,x)$ дифференцируема.

Выразим через функцию $S(u,x)$ вероятности некоторых важных событий.

А) Вероятность того, что человек родится между моментами u_1 и u_2 ($u_1 < u_2$), равна $S(u_1,0) - S(u_2,0)$.

В) Вероятность того, что человек проживет от x_1 до x_2 ($x_1 < x_2$) безотносительно к моменту рождения, равна $S(0,x_1) - S(0,x_2)$.

С) Вероятность того, что человек родится между моментами u_1 и u_2, и проживет от x_1 до x_2, равна $S(u_1,x_1) + S(u_2,x_2) - S(u_2,x_1) - S(u_1,x_2)$. Действительно, вероятность события, состоящего в том, что человек, родившийся между моментами u_1 и u_2, проживет больше x_1, равна $S(u_1,x_1) - S(u_2,x_1)$. Аналогично вероятность события, состоящего в том, что человек родится между моментами u_1 и u_2, затем проживет больше x_2, равна $S(u_1,x_2) - S(u_2,x_2)$. По аксиомам теории вероятностей интересующая нас вероятность равна разности

$$(S(u_1,x_1) - S(u_2,x_1)) - (S(u_1,x_2) - S(u_2,x_2)).$$

Наряду с функцией распределения рассматривается и плотность распределения. Дифференцируемость $S(u,x)$ означает, что при любых (u,x) существует предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta u\to 0}} \frac{S(u+\Delta u, x+\Delta x) + S(u,x) - S(u+\Delta u, x) - S(u, x+\Delta x)}{\Delta u \cdot \Delta x} = f(u,x).$$

Через плотность легко выражаются вероятности различных событий. Например, найденная выше вероятность того, что человек родится между моментами u_1 и u_2 и проживет от x_1 до x_2, равна $\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(u,x)\,du\,dx$.

Плотность распределения, как обычно, неотрицательная и $\int\limits_0^U\int\limits_0^\infty f(u,x)\,du\,dx = 1$.

Координатную сетку на плоскости (u,x) называют *демографической сеткой*. На плоскости (u,x) выделяются следующие важные линии:

А) Прямая $u=u_0$. Она соответствует множеству людей (разумеется, гипотетическому, строго говоря, в конкретный момент времени никто не родится), которые родятся в один и тот же момент времени, и называется *линией жизни*.

Условная вероятность того, что человек проживет от x_1 до x_2 при условии рождения в момент u_0 , равна. $\dfrac{\int\limits_{x_1}^{x_2} f(u_0,x)\,dx}{\int\limits_0^\infty f(u_0,x)\,dx}$. В частности, вероятность $s(u_0,x)$ того, что человек проживет не менее x, равна

$\dfrac{\int\limits_x^\infty f(u_0,x)dx}{\int\limits_0^\infty f(u_0,x)dx}$. Эта функция называется *функцией дожития* или *функцией выживания*.

В) Прямая $x = x_0$. Она называется *линией возраста* и описывает вероятностные характеристики тех людей, которые в разные моменты времени достигнут возраста x_0. Условная вероятность того, что человек родится между моментами u_1 и u_2, при условии, что он доживет до возраста x_0, равна $\dfrac{\int\limits_{u_1}^{u_2} f(u,x_0)dx}{\int\limits_0^U f(u,x_0)dx}$. Тем самым вероятность родиться между моментами u_1 и u_2 равна $\dfrac{\int\limits_{u_1}^{u_2} f(u,0)dx}{\int\limits_0^U f(u,0)dx}$.

С) Прямая $u+x = z < U$. Она называется *прямой наблюдения*. Эта прямая аккумулирует информацию о людях, которую можно будет обнаружить в момент наблюдения z (перепись населения). Вероятность того, что человек в момент z переписи находится в возрасте от x_1 до x_2, равна $\dfrac{\int\limits_{x_1}^{x_2} f(z-x,x)dx}{\int\limits_0^z f(z-x,x)dx}$.

Статистическая оценка функции $S(u, x)$ основана на наблюдениях за численностью живущих в определенный момент в том или ином возрасте. Пусть $L(u, x)$ (здесь u, x целые) – число живущих из L_0, наблюдавшихся в возрасте x, родившихся в год u. Тогда статистической оценкой значения функции $S(u, x)$ естественно считать величину $L(u, x)/L_0$. Разумеется, качество этой оценки зависит как от значения L_0, так и от структуры анализируемой группы людей. Если, например, в ней нет людей 1950 года рождения, которым исполнилось 56 лет (т.е. попавших в выборку в 2006 году), то отсюда не следует, что таких людей нет, т.е. некорректно полагать, что в 1950 году никто не родился или никто из таких людей не дожил до 56 лет. По этим значениям с помощью тех или иных методов интерполяции оценивается функция $S(u,x)$.

Ясно, что получение сколь-нибудь подробной информации о функции $S(u,x)$ затруднительно. Поэтому используют те или иные предположения о свойствах этой функции, которые достаточно точно выполняются на практике.

К таковым относятся концепции *стационарности* и *стабильности*. Обе они предполагают, что функция дожития $S(u_0, x)$ в некотором диапазоне изменения моментов рождения u_0 не зависит от u_0. Концепция стабильности дополнительно предполагает, что рождаемость постоянная, т.е величина $\dfrac{\int_{u_1}^{u_2} f(u,0)dx}{\int_0^U f(u,0)dx}$ равна $c(u_2 - u_1)$, где c – некоторая постоянная. Более общая концепция стабильности исходит из того, что рождаемость растет (или убывает) по экспоненциальному закону, т.е. величина $\dfrac{\int_{u}^{u+1} f(u,0)dx}{\int_0^U f(u,0)dx}$ равна ce^{Ru}, где c и R – некоторые константы.

10.3. Основные характеристики продолжительности жизни

(одномерная модель)

Предположения, сделанные в конце предыдущего параграфа, позволяют анализировать важные для страховой деятельности процессы смертности, используя более простые одномерные законы распределения. Опишем основные функции, применяемые для такого описания.

1. *Функция выживания* (*функция дожития*). Это есть вероятность $s(x)$ ($x \geq 0$) того, что человек доживет до возраста x, т.е.

$s(x) = \mathrm{P}[X > x].$

Из предыдущего (да и из здравого смысла) следует, что эта функция убывает от 1 до 0. Как и раньше, можно считать, что есть предельный возраст ω, при значениях больших которого функция $s(x)$ равна 0, либо полагать, что функция $s(x)$ быстро убывает с ростом x. Эта функция является основной характеристикой процесса смертности, но при этом не очень показательной. По ее графику трудно усмотреть какие-либо важные черты процесса смертности. Типичный график функции выживания приведен на рис. 9.

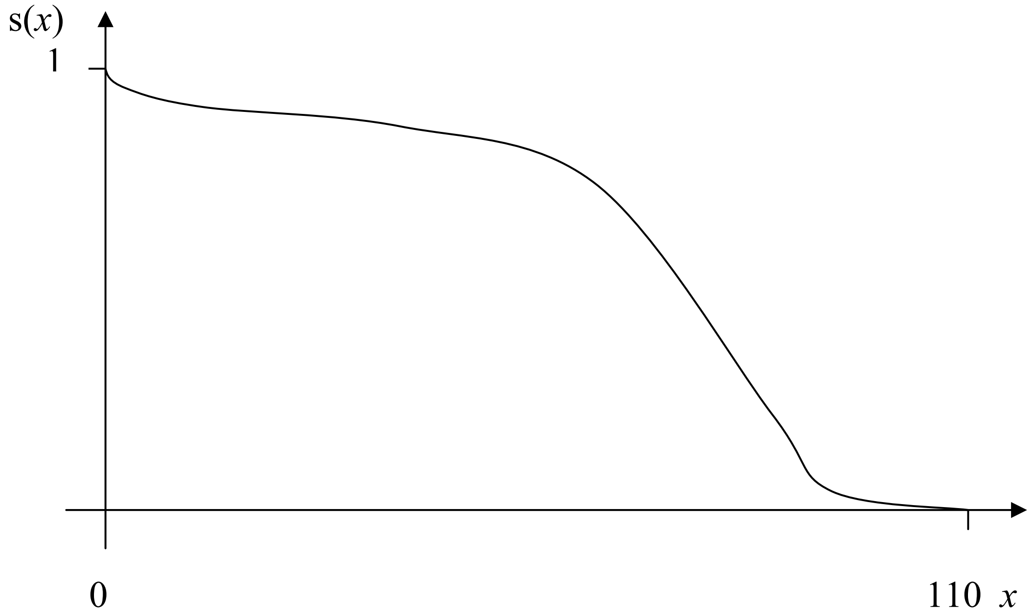

Рис. 9 Типичный график функции выживания.

2. *Кривая смертей*. Так называется функция $f(x) = -s'(x)$. При этом предполагается, что функция $s(x)$ дифференцируемая. Это есть плотность распределения случайной величины – продолжительности жизни. Как обычно, эта функция неотрицательная, причем $\int_0^\infty f(x)dx = 1$. Представление об этой функции можно получить из функции выживания следующим образом. По формуле Лагранжа $s(x+1) - s(x) = s'(\xi)$, где ξ – некоторое число, расположенное между x и $x+1$. Отсюда $s(x) - s(x+1) = f(\xi) \approx f(x)$, если считать, что функция $f(x)$

меняется достаточно медленно. Типичный график этой функции представлен на рис. 10.

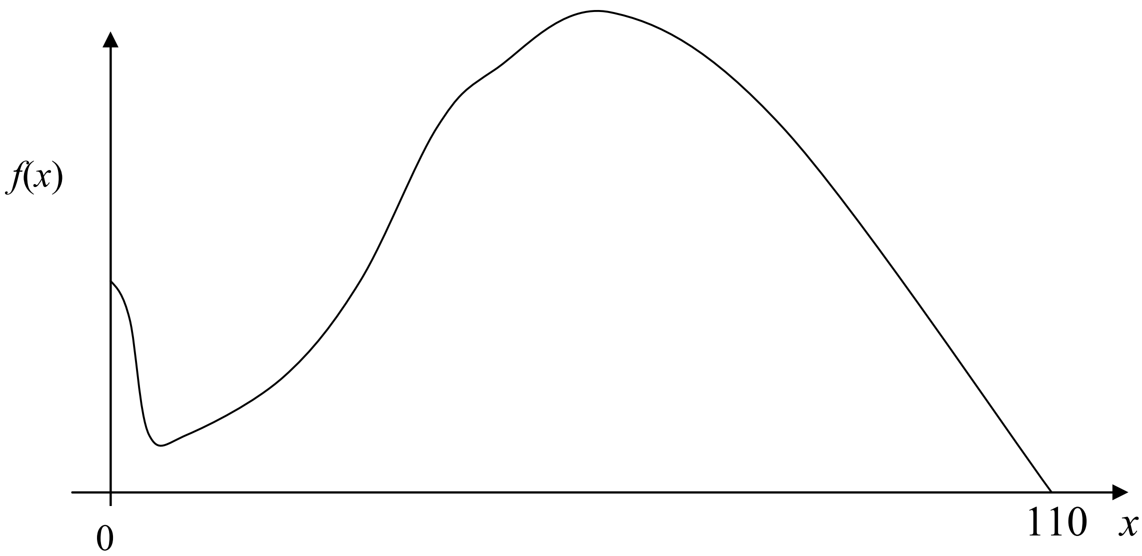

Рис. 10 Типичный график кривой смертей.

Характерен спад этой функции в начале жизни (это соответствует младенческой смертности), затем подъем до некоторого значения x_0, после которого следует спад. Наблюдения показывают, что x_0 приблизительно совпадает со средней продолжительностью жизни, т.е. с величиной $\int_0^\infty xf(x)dx$. Если известна функция *f(x),* то функция выживания находится следующим образом: $s(x) = 1 - \int_0^x f(t)dt$.

3. Целесообразно соотносить скорость изменения функции выживания с ее значением: величины такого типа в экономике называются эластичностью. В демографии величина $\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -(\ln s(x))'$ называется *силой* или *интенсивностью смертности*. Приближенно (при целых x) эту величину можно считать равной $\frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)}$. Очевидно, функция μ_x неотрицательная. Зная функцию μ_x, можно найти функцию выживания. Для этого проинтегрируем равенство $\mu_x = -(\ln s(x))'$ от

0 до x. Получаем

$\int\limits_0^x \mu_t dt = -\int\limits_0^x (\ln s(t))' dt = -(\ln s(t))\Big|_0^x = -\ln s(x) + \ln s(0) = -\ln s(x)$. Отсюда

$s(x) = e^{-\int\limits_0^x \mu_t dt}$. Из свойств функции $s(x)$ следует, что $\int\limits_0^\infty \mu_t dt = \infty$.

Типичный график интенсивности смертности имеет вид, представленный на рис. 11.

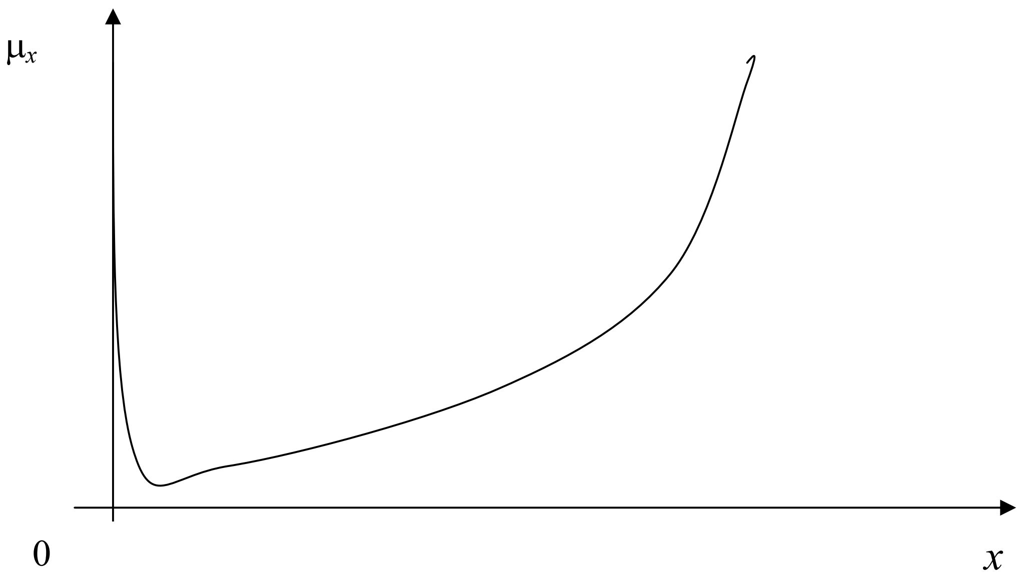

Рис. 11 Типичный график интенсивности смертности.

10.4. Производные характеристики продолжительности предстоящей жизни

Функции, приведенные в предыдущем параграфе, являются основой для построения других величин, которые широко применяются в страховой практике. Приведем наиболее важные из них.

1. Вероятность ${}_np_x$ того, что человек, который доживет до возраста x, проживет еще хотя бы n лет. По определению,

$${}_np_x = \mathrm{P}[X > x+n |\, X > x] = \frac{P[X > x+n]}{P[X > x]} = \frac{s(x+n)}{s(x)}.$$

По умолчанию значение $n = 1$ в обозначении опускается, т.е. $p_x = {}_1p_x$. Разумеется, ${}_np_0 = s(n)$. При переменном n и фиксированном x это есть условная функция выживания. Если обозначить через $T(x)$ случайную величину, равную продолжительности предстоящей жизни человека после достижения возраста x, то

$${}_np_x = \mathrm{P}[T(x) > n].$$

Следует отметить, что использование различных обозначений для одних и тех же величин в актуарной математике весьма распространено и не должно обескураживать. В естественном языке мы свободно пользуемся синонимами!

Заметим, что при $k < n$ справедливы равенства

$${}_np_x = \frac{s(x+n)}{s(x)} = \frac{s(x+n)}{s(x+k)} \cdot \frac{s(x+k)}{s(x)} = {}_kp_x \cdot {}_{n-k}p_{x+k}.$$

В частности, при целом n справедливо равенство

$${}_np_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n}.$$

Оно имеет прозрачный смысл: для того чтобы прожить n лет, предстоит прожить год, затем еще один год и т.д. Выразим величину ${}_np_x$ через интенсивность смертности. Имеем

$${}_np_x = \frac{s(x+n)}{s(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+n} \mu_t dt}}{e^{-\int_0^{x} \mu_t dt}} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_t dt}$$

или, после замены переменной,

$${}_np_x = e^{-\int_0^{n} \mu_{t+x} dt}.$$

2. Вероятность ${}_nq_x$ события, состоящего в том, что человек проживет x лет и скончается в последующие n лет. По определению, ${}_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - \dfrac{s(x+n)}{s(x)}$. По предыдущему, ${}_nq_x = 1 - e^{-\int_0^{n} \mu_{t+x} dt}$. Пользуясь разложением показательной функции в степенной ряд,

имеем ${}_nq_x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\left(\int_0^n \mu_{t+x}dt\right)^k}{k!}$. При малом Δx справедливо тем самым приближенное равенство (оставляем только первое слагаемое) ${}_{\Delta x}q_x \approx \int_0^{\Delta x} \mu_{x+1}dt \approx \mu_x \cdot \Delta x$. Аналогично предыдущему, ${}_1q_x = q_x$. Если считать, что интенсивность смертности меняется достаточно медленно, то справедливо приближенное равенство $q_x \approx \mu_x$.

Еще одно родственное понятие. Через ${}_{n|m}q_x$ обозначается вероятность того, что человек, проживший x лет, проживет после этого еще n лет и скончается в последующие m лет. Тем самым,

$$
{}_{n|m}q_x = \mathrm{P}[m+n > T(X) > n] = \mathrm{P}[m+n+x > X > n+x \mid X > x] =
$$

$$
= \frac{s(n+x) - s(m+n+x)}{s(x)}.
$$

3. Средняя продолжительность предстоящей жизни**.** Предположим, что человек доживет до x лет. Средняя продолжительность его оставшейся жизни $\mathrm{E}[T(x)]$ обозначается через $\mathring{e}_x$. Вычислим эту величину. Вероятность $\mathrm{P}[y < T(x) < y + \Delta y]$ того, что человек скончается в возрастном промежутке $[x+y, x+y+\Delta y]$, равна $\mathrm{P}[x+y < X < x + y + \Delta y \mid x < X] = {}_yp_x \cdot {}_{\Delta y}q_{x+y}$ или, по предыдущему, приблизительно равна ${}_yp_x \cdot \mu_{x+y} \cdot \Delta y$. Тем самым справедлива формула

$$
\mathring{e}_x = \int_0^{\infty} y \cdot {}_yp_x \cdot \mu_{x+y} \cdot dy .
$$

В терминах функции выживания имеем

$$
\mathrm{P}[x + y < X < x + y + \Delta y \mid x < X] =
$$

$$
= \frac{\mathrm{P}[x + y < X < x + y + \Delta y]}{\mathrm{P}[x < X]} = \frac{s(x+y) - s(x+y+\Delta y)}{s(x)} \approx \frac{f(x+y)\Delta y}{s(x)}.
$$

Отсюда $\overset{\circ}{e}_x = \int\limits_0^{\infty} \frac{yf(x+y)}{s(x)}dy$. Последнее выражение можно упростить, воспользовавшись интегрированием по частям:

$$\overset{\circ}{e}_x = \int\limits_0^{\infty} \frac{yf(x+y)}{s(x)}dy = \frac{1}{s(x)}\int\limits_0^{\infty} yf(x+y)dy =$$
$$= \frac{1}{s(x)}\left(-ys(x+y)\Big|_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} s(x+y)dy \right) = \frac{1}{s(x)}\int\limits_0^{\infty} s(x+y)dy,$$

поскольку внеинтегральное слагаемое равно нулю в силу существования предельного возраста. Можно доказать, что это так, и без данного предположения. В частном случае средней продолжительности предстоящей жизни новорожденного (т.е. при x=0) имеем $\overset{\circ}{e}_0 = \int\limits_0^{\infty} s(y)dy$.

4. Дисперсия продолжительности предстоящей жизниVar[$T(x)$], как обычно, вычисляется по формуле

E[$T^2(x)$] – E[$T(x)$] ^{2}.

Описанные величины в основном относились к непрерывному распределению смертей. Рассматриваются также некоторые величины, имеющие дискретное распределение.

Целое число $K(x)$ оставшихся лет жизни человека, который доживет до возраста x. По определению, эта дискретная случайная величина имеет следующее распределение:

$$\mathrm{P}[K(x) = k] = \mathrm{P}[k \le T(x) < k+1] = \mathrm{P}[x + k \le X < x + k + 1 \,|\, x \le X] =$$

$$= \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)}$$

при k натуральном. Обычно предполагается, что при этом значение x также натуральное.

Средней округленной продолжительностью оставшейся жизни e_x называется величина

$$\mathrm{E}[K(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P[K(x)=k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{s(x+k)-s(x+k+1)}{s(x)},$$

откуда после простых преобразований получаем

$$e_x = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=0}^{\infty} s(x+k).$$

10.5. Статистические оценки харктеристик продолжительности жизни

Как уже отмечалось, истинные вероятностные характеристики продолжительности предстоящей жизни нам неизвестны, к сожалению или к счастью. Эти характеристики оцениваются по статистическим данным. Предполагается, что проводятся наблюдения за совокупностью новорожденных числом l_0. Для этой величины принимаются стандартные значения 10^5 или 10^6.

1. Усредненное (по выборкам объема l_0) число l_x членов совокупности, доживших до возраста x (x считается натуральным). Естественно, значения l_x убывают с ростом x. Величина l_x/l_0 принимается за статистическую оценку функции дожития $s(x)$, а величина l_{x+1}/l_x – вероятности p_x.

2. Среднее число d_x членов совокупности, скончавшихся в возрасте x, равно $d_x = l_x - l_{x+1}$. Величина d_x/l_x принимается за статистическую оценку q_x.

3. Суммарное среднее число лет L_x, прожитое членами совокупности в возрасте от x до x+1. Например, если один из членов совокупности проживет 50 лет 6 месяцев, второй 51 год 3 месяца, а третий 55 лет, то в величину L_{51} вклад первого равен 0, второго ¼, а третьего 1.

Если предполагать, что в течение года смертность равномерна, то $L_x = l_x - d_x/2 = (l_x + l_{x+1})/2$. Более точно считают, что $L_x = l_x - kd_x$, где коэффициент k подбирается из тех или иных соображений (здесь эти подходы опускаются). В некотором смысле более адекватная статистическая оценка величины q_x имеет вид d_x/L_x.

4. Общее среднее число человеко-лет T_x, которые предстоит прожить лицам из совокупности l_x от возраста x до предельного

возраста ω. По определению, $T_x = \sum_{k=x}^{\omega} L_k$. В предположении равномерного распределения смертей в течение каждого года получаем

$$T_x = \sum_{k=x}^{\omega} l_k - \frac{l_x}{2}.$$

5. Статистической оценкой средней продолжительности оставшейся жизни является величина $e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{k=x}^{\omega} L_k$.

10.6. Приближения для дробных возрастов

Статистическая информация обычно собирается для целых возрастов. Однако для расчетов премий по некоторым видам страхования необходимы и данные о смертности для дробных возрастов. Естественно, такая интерполяция исходит из тех или иных априорных предположений.

Уточним постановку задачи. Нам известны статистические оценки значений функции выживания $s(n)$ при целых n. Необходимо на этой основе оценить значения этой функции $s(x)$ при произвольных x.

1. Предположение о равномерном распределении смертей

Предполагается, что на промежутке $[n,n+1]$ справедливо равенство

$$s(x) = a_n + b_n x,$$

где a_n, b_n – некоторые константы. Подставляя в это равенство значения n и $n+1$, получаем систему уравнений относительно a_n и b_n: $s(n) = a_n + b_n n$, $s(n+1) = a_n + b_n(n+1)$. Решая ее, получаем $b_n = s(n+1) - s(n)$, $a_n = (n+1)s(n) - n\,s(n)$.

Если положить $x = n + t$ $(0 \le t \le 1)$, то получим равенство

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1).$$

Кривая смертей (плотность распределения) при таком предположении постоянна на каждом интервале $(n,n+1)$ и равна

$s(n) - s(n+1)$.

Интенсивность смертности на интервале $(n,n+1)$ вычисляется по формуле

$$\mu_{n+t} = \frac{s(n) - s(n+1)}{(1-t)s(n) + ts(n+1)} = \frac{q_n}{1 - tq_n}.$$

Справедливо равенство $s(n+t)\mu_{n+t} = s(n\;) - s(n+1)$, что (при умножении на l_0) равносильно равенству $l_{n+t} \cdot \mu_{n+t} = d_n$,. Это равенство понадобится в п. 12.2. Напомним, что $q_n = \dfrac{s(n) - s(n+1)}{s(n)}$ – вероятность того, что человек доживет до возраста n и скончается в последующем году. Отсюда видно, что с ростом t (от 0 до 1) значение μ_{n+t} возрастает.

Рассмотрим дробную часть продолжительности предстоящей жизни $\tau = X - [X]$. Поскольку при сделанном предположении плотность условного распределения $f(\tau \mid K(x) = k)$ является постоянной, то условная функция распределения $\mathrm{P}[\tau \le t \mid K(x) = k]$ является линейной. Так как эта функция равна 0 при $t = 0$ и 1 при $t =$ $= 1$, то $\mathrm{P}[\tau \le t \mid K(x) = k] = t$. Из свойств равномерного распределения следует равенство $\mathrm{E}[\tau | K(x) = k] = \dfrac{1}{2}$. По формуле полной вероятности для математического ожидания

$$\mathrm{E}[\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}[\tau | K(x) = k] \cdot \mathrm{P}[K(x) = k] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}[K(x) = k] = \frac{1}{2}.$$

2. Предположение постоянства интенсивности смертности

Считаем, что на множестве $[n,n+1]$ справедливо равенство $\mu_x = b_n =$ $= \mathrm{const}$. Из п.10.3 следует равенство

$$\int_n^x \mu_t\, dt = -\int_n^x (\ln s(t))'\, dt = -(\ln s(t))\Big|_n^x = -\ln s(x) + \ln s(n),$$ откуда

$s(x) = s(n)\, e^{b_n(n-x)}$. При $x = n + 1$ получаем $s(n+1) = s(n)\, e^{-b_n}$, т.е. $b_n = \ln \dfrac{s(n)}{s(n+1)} = -\ln p_n$ (см. п.10.4). Тем самым при $x \in [n,n+1]$ справедливо равенство

$$s(x) = s(n)\, e^{-\ln p_n \cdot (n-x)} = s(n)\, p_n^{x-n}.$$

Плотность распределения $f(x) = -s(n)\, p_n^{x-n} \ln p_n$.

Вычислим математическое ожидание $\mathrm{E}[\tau \mid K(x) = n]$ дробной части года смерти. Прежде всего,

$$f(\tau \mid K(x) = n) = \frac{f(\tau)}{\mathrm{P}[K(x)=n]} = -\frac{s(n)\cdot p_n^{\tau} \cdot \ln p_x}{s(n)-s(n+1)},$$

отсюда

$$\mathrm{E}[\tau \mid K(x) = n] = \int_0^1 f(\tau | K(X)=n)\cdot\tau\cdot d\tau = \frac{s(n)\ln p_x}{s(n)-s(n+1)}\int_0^1 p_n^{\tau}\cdot\tau\cdot d\tau.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\mathrm{E}[\tau \mid K(x) = n] = \frac{s(n)}{s(n)-s(n+1)}\left[-\tau\cdot p_n^{\tau}\Big|_0^1 + \int_0^1 p_n^{\tau} d\tau\right] =$$

$$= \frac{s(n)}{s(n)-s(n+1)}\left[-p_n - \frac{1-p_n}{\ln p_n}\right].$$

Воспользуемся равенствами $p_n = 1-q_n$, $q_n = \dfrac{s(n)-s(n-1)}{s(n)}$ и тем, что величина q_n малая. Имеем

$$\mathrm{E}[\tau \mid K(x) = n] = \frac{1}{q_n}\left[q_n - 1 + \frac{q_n}{q_n + \frac{q_n^2}{2} + \frac{q_n^3}{3} + o(q_n^3)}\right] =$$

$$= \frac{q_n\left(\frac{1}{2} + \frac{q_n}{6} + o(q_n)\right)}{q_n\left(1 + \frac{q_n}{2} + o(q_n)\right)} = \frac{1}{2} - \frac{q_n}{12} + o(q_n).$$

Для получения последнего равенства можно применить стандартную процедуру деления многочленов уголком.

3. Предположение Балдуччи

Оно состоит в том, что на промежутке $[n,n+1]$ по линейному закону изменяется величина $\frac{1}{s(x)}$. Стандартные вычисления показывают, что справедливо равенство $\frac{1}{s(n+\tau)}=\frac{1-\tau}{s(n)}+\frac{\tau}{s(n+1)}$ при $\tau\in[0,1]$. Отсюда $s(n+\tau)=\frac{s(n)s(n+1)}{(1-\tau)s(n+1)+\tau s(n)}=\frac{s(n+1)}{p_n+\tau q_n}$. При этом интенсивность смертности $\mu_{n+\tau}=-\frac{s'(n+\tau)}{s(n+\tau)}=\frac{q_n}{p_n+\tau q_n}$ убывает на промежутке $[0,1]$.

Среднее значение дробной части продолжительности жизни равно

$$\mathrm{E}\left[\tau\middle|K(X)=n\right]=[\int_0^1 f(\tau|K(X)=n)\cdot\tau\cdot d\tau=\frac{s(n+1)}{s(n)-s(n+1)}\int_0^1\frac{q_n\tau}{\left(p_n+q_n\tau\right)^2}d\tau=$$

$$=\frac{s(n+1)}{s(n)-s(n+1)}\left[\left.\frac{\ln(p_n+\tau\, q_n)}{q_n}\right|_0^1+\left.\frac{p_n}{q_n(p_n+\tau q_n)}\right|_0^1\right]=\frac{1}{2}-\frac{q_n}{6}+\mathrm{o}(q_n).$$

Здесь использованы те же соображения, что и выше.

Из полученных формул видно, что если есть веские основания считать, что в среднем дробная часть продолжительности жизни меньше половины, то разумно использовать второе или третье предположение. Чаще всего таких веских причин нет и потому используется наиболее естественное первое предположение.

10.7. Аналитические законы смертности

Естественно, что при анализе демографических показателей применяются те или иные аналитические зависимости, дающие достаточно адекватное их описание. Следует иметь в виду, что хорошее аналитическое приближение для всей продолжительности жизни вряд ли возможно. Поэтому на разных отрезках продолжительности жизни могут использоваться разные законы. Например, достаточно трудно при построении модели учесть младенческую смертность.

1. Модель де Муавра

Исторически первый аналитический закон был предложен в первой половине 18 века известным французским математиком де Муавром. Он предположил, что продолжительность жизни равномерно распределена на промежутке $[0,\omega]$, где ω – предельная продолжительность жизни. Это означает, что плотность распределения $f(x)$ является постоянной, т.е. $f(x) = 1/\omega$. Тогда функция дожития $s(x) = \int_x^{\omega} f(x)dx =$ $(\omega - x)/\omega$. Отсюда получаем формулу для интенсивности смертности $\mu_x = 1/(\omega - x)$.

Этот закон не отвечает эмпирическим данным, о которых говорилось выше. Тем не менее при анализе продолжительности жизни на небольших временных отрезках он применяется. Например, в первом пункте предыдущего параграфа был использован именно этот закон.

2. Модель Гомпертца

В середине 19 века Гомпертц предложил описывать интенсивность смертности μ_x формулой Be^{cx}, где B, c – положительные константы. Легко проверить, что эта функция обладает всеми свойствами интенсивности смертности. Не приводя выкладок, отметим, что соответствующая кривая смертей имеет единственный максимум.

3. Модели Мэйкхама

Мэйкхам во второй половине 19 века уточнил модель Гомпертца, предположив равенство $\mu_x = A + Be^{cx}$. Смысл этого закона в следующем. Ранее отмечалось, что $\mu_x \approx q_x$. Смерть в течение года может наступить по естественной или неестественной причине. Мэйкхам исходил из того, что вероятность смерти по неестественной причине не зависит от возраста (первое слагаемое), а по естественной – растет с возрастом (второе слагаемое). Соответствующая кривая смертей также имеет единственный максимум.

Позднее Мэйкхам видоизменил свою модель, приняв $\mu_x = A + Dx + Be^{cx}$. Тем самым предполагается, что вероятность насильственной смерти меняется с возрастом по линейному закону.

4. Модель Вейбулла

В первой половине 20 века Вейбулл предложил использовать простую степенную зависимость $\mu_x = kx^s$, где k, s – положительные константы.

Общее замечание. При аналитическом описании реальных процессов конкурирующими являются критерии простоты (она обычно соответствует числу подстроечных параметров) и точности приближения к эмпирическим данным. Видимо, чаще всего используется первый закон Мэйкхама. Подбор параметров проводится с помощью тех или иных методов приближения, например, метода наименьших квадратов.

10.8. Таблицы продолжительности жизни

Демографическая статистика обычно отражается в таблицах продолжительности жизни (иначе они называются таблицами смертности). В этих таблицах для каждого целого возраста x приводятся те или иные из описанных характеристик. Обычно таковыми являются:

− Среднее число l_x членов совокупности, доживших до возраста x (l_0 – число членов наблюдаемой группы, чаще всего 100000). Все остальные величины могут быть получены из l_x.

− Среднее число $d_x = l_x - l_{x+1}$ членов совокупности, скончавшихся в возрасте x.

− Статистическая оценка d_x/l_x вероятности q_x смерти в возрасте x. В таблицах такой столбец обозначается, упуская тонкости, просто как q_x.

− Статистическая оценка среднего остаточного времени жизни $\overset{\circ}{e}_x$.

Естественно, величина $x+\overset{\circ}{e}_x$, приближенно равная средней продолжительности жизни человека, дожившего до возраста x, растет с увеличением x.

Для успешной деятельности страховая компания нуждается в целом семействе таблиц смертности, отражающих демографические показатели тех или иных групп населения. Соответствующие группы могут быть сформированы по различным признакам:

- по полу;
- по месту жительства;
- по виду профессиональной деятельности;
- по состоянию здоровья.

В прил. 5 приводятся таблицы значений l_x для мужского и женского населения России за 1970 и 1999 годы. Соответствующие графики оценок функций выживания (умноженных на 100000) см. рис. 12 и рис. 13.

Анализ этих данных показывает, что за 30 лет смертность в возрасте до примерно 45 лет у женщин и до 25 лет у мужчин несколько снизилась (за счет сокращения младенческой смертности) и возросла в более позднем возрасте. При этом рост смертности у мужчин весьма значительный. В развитых странах в последние десятилетия наблюдается так называемый «эффект прямоуголизации» функции выживания: до примерно 70 лет смертность очень низкая (функция выживания очень близка к 1). В России такой эффект прослеживается у женщин (для существенно более низкого возраста) и отсутствует у мужчин…

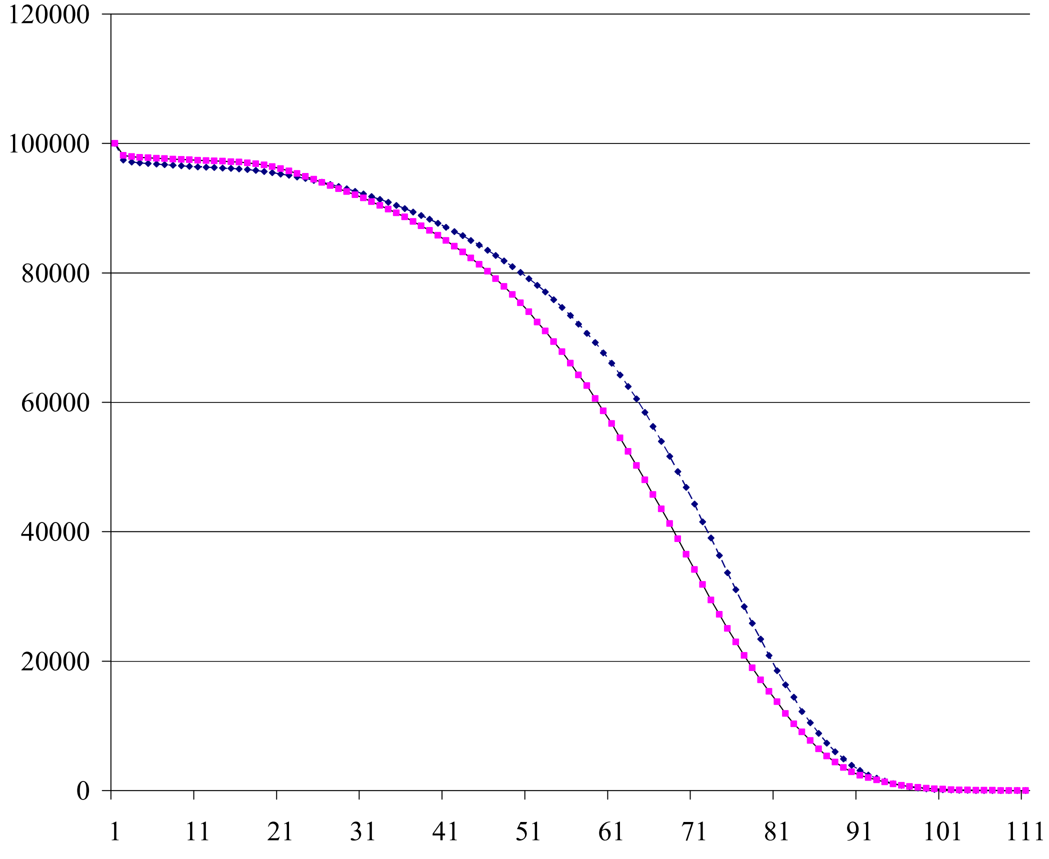

Рис. 12 Графики оценок функций выживания (умноженных на 10^5) для мужского и женского населения России за 1970 год.

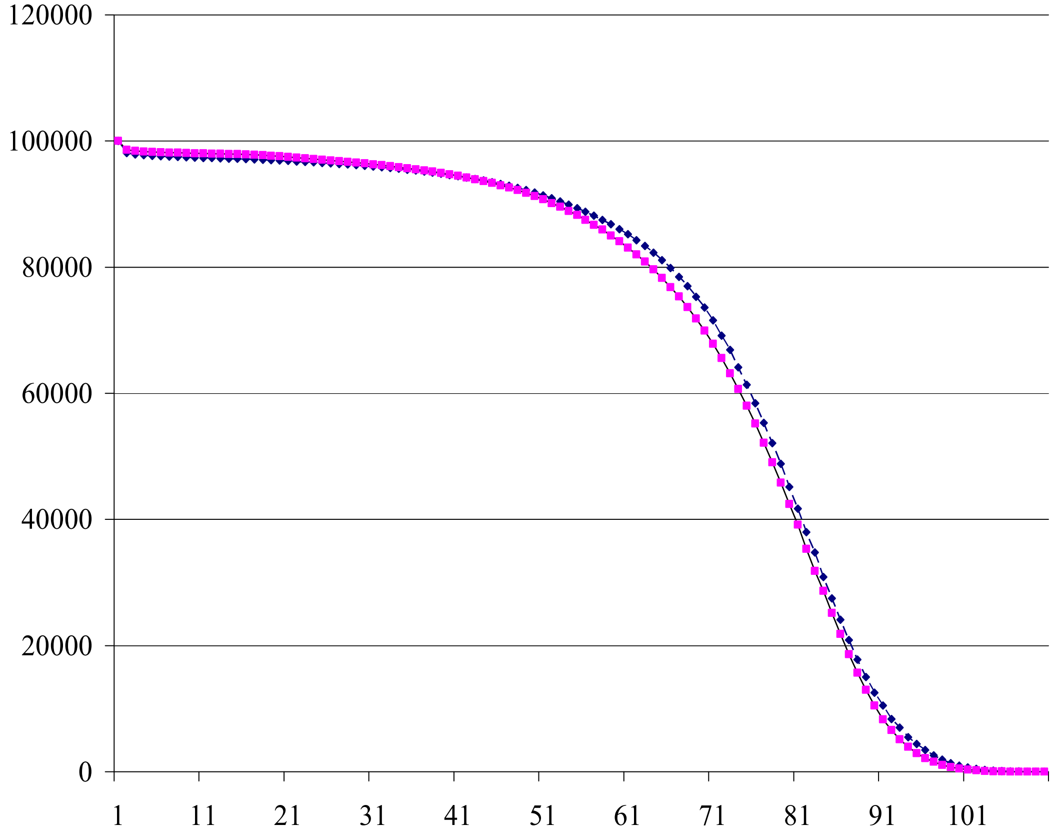

Рис. 13 Графики оценок функций выживания (умноженных на 10^5) для мужского и женского населения России за 1999 год.

Страховая компания вправе перед продажей полиса провести медицинское обследование страхователя и в зависимости от его результата принять решение о возможности или невозможности заключения договора. Таблицы смертности, где группа формируется из лиц, прошедших отбор, называются таблицами с отбором.

Вероятность смерти лица, прошедшего отбор в возрасте *x,* прожить k лет после отбора и умереть в следующем году, обозначается через $q_{[x]+k}$. Естественно, чем позднее человек пройдет отбор, тем больше вероятность дожить до некоторого возраста. Отсюда следует, что $q_n > q_{[1]+\ n-\ 1} > q_{[2]+n\ -\ 2} > \ldots > q_{[n-\ 1]+1} > q_{[n]}$. Статистика фиксирует, однако, что величины q_n и $q_{[n-3]+3}$ практически неотличимы. Это означает, что риск смерти ровесников, один из которых прошел отбор три года назад, а второй отбора не проходил, практически равны. Поэтому можно строить упрощенные таблицы величин $q_{[n\ -\ k]+k}$ только при k = 0, 1, 2. Такие таблицы называются таблицами с отбором ограниченного действия. Срок действия обозначается через r, т.е. считают, что $q_{[n]+k} = q_{n+k}$ при $k \geq r$. В зависимости от требуемой точности величина r, как правило, принимается равной 1, 2, 3.

Разумеется, можно определить и другие демографические характеристики группы с отбором. Аналогично предыдущему, рассматриваются величины ${}_{m}q_{[x]+k}$, $p_{[x]+k}$, ${}_{m}p_{[x]+k}$, ${}_{n|m}q_{[x]+k}$. Все они выражаются через $q_{[x]+k}$.

Для таблиц с отбором ограниченного действия удобно использовать величины $l_{[x]+k}$, аналогичные величинам l_x из общих таблиц смертности. Эти величины определяются ретроспективно следующим образом: $l_{[x]+r} = l_{x+r}$; $l_{[x]+k} = l_{[x]+k+1}/p_{[x]+k}$ при $k < r$.

Составление таблиц смертности является самостоятельной и достаточно сложной задачей. Не останавливаясь на деталях, отметим, что существуют два класса методов построения таблиц. Методы, использующие данные текущего демографического учета, базируются только на анализе повозрастного числа умерших за год. При этом предполагаются справедливыми гипотезы стабильности или стационарности. Более точными являются демографические методы. Они опираются на более обширную информацию, которая может включать данные переписей населения и повозрастную смертность за ряд лет. Следует иметь в виду, что построение более точных таблиц смертности требует дополнительных вложений средств. Скажем, перепись населения – достаточно сложное мероприятие, которое обычно проводится раз в 10–20 лет.

При использовании данных только по одному году сказываются те или иные особенности конкретного года, в результате зависимость d_x от x может оказаться весьма нерегулярной. Поэтому применяются разнообразные методы сглаживания. После этого полученные зависимости усредняют за несколько последовательных лет. В практике страховых компаний Великобритании обычно усредняют данные за три года и полученные таблицы считают применимыми в течение последующего десятилетия.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Для некоторой популяции $l_x = \dfrac{l_0}{(1+kx)^2}$, где k – положительный параметр, $x \geq 0$. Вычислите:

A) среднюю продолжительность предстоящей жизни,

B) силу смертности в возрасте 1 года,

C) вероятность того, что новорожденный умрет в возрасте 1 года ($_{1|}q_0$),

D) среднюю остаточную продолжительность жизни человека, который доживет до 10 лет.

Исследуйте зависимость найденных величин от k. Насколько правдоподобной является эта зависимость?

2. (Р) Пусть $f(x) = \dfrac{x}{a^2} e^{-x/a}$.

A) Докажите, что эта функция обладает свойствами кривой смертей.

B) Найдите функцию выживания, интенсивность смертности, среднюю продолжительность оставшейся продолжительности жизни в возрасте x.

Насколько правдоподобной является такая зависимость?

3. (Р) Проверьте, обладают ли функции $\exp(x - 0{,}5(3^x - 1))$; $1/(1+x)^2$; $\exp(-x^2)$ свойствами функции выживания.

4. (Р) Докажите неравенства $_{t+r}p_{x-r} \leq\ p_{x+t}$; $_rq_{x+t} \geq {}_{t|r}q_x$ $(t,r > 0)$.

5. (Р) Пусть величина $_tp_x \cdot \mu_{x+t}$ убывает при $t \in [0,1]$. Докажите, что $q_x < \mu_x$.

6. (Р) Рассмотрим двух человек в возрастах x и y. Пусть время жизни первого описывается законом де Муавра (с предельным возрастом ω), время жизни второго характеризуется постоянной интенсивностью смертности. Найдите вероятность того, что первый человек умрет ранее второго и не позднее, чем через n лет ($x+n < \omega$). Величины $T(x)$ и $T(y)$ предполагаются независимыми.

7. (Р) Пусть предполагается справедливой модель Гомпертца $\mu_x = Bc^x$ $(c > 1)$ при $x \geq \alpha$ таком, что $\mu_\alpha < \ln c$.

А) Вычислите функцию $s(x)$.

В) найдите наибольшее значение функции $l_x \cdot \mu_x$.

8. (Р) Докажите, что в предположении равномерного распределения для дробных возрастов при x целом и $1 \leq u \leq t \leq 1$ справедливо равенство

$$ {}_{t-u}q_{x+u} = \frac{t-u}{1-uq_x} q_x . $$

9. (Р) Докажите, что в предположении Балдуччи для дробных возрастов при x целом справедливо равенство

$$ {}_{t-u}q_{x+u} = \frac{t-u}{1-(1-\mathrm{t})q_x} q_x \text{ при } 1 \leq u \leq t \leq 1. $$

10. (Р) Пусть x – целое число, $q_x = 0{,}016$, $q_{x+1} = 0{,}014$. Найдите величины $q_{x+1/2}$, ${}_{1/2}q_x$ при различных предположениях о распределении дробных возрастов.

11. (Р) Пусть $s(x) = \left(1 - \dfrac{x}{\omega}\right)^a$ $(0 \leq x \leq \omega,\ a > 0)$.

0

Найдите формулы для μ_x, e_x, ${}_{10}\mathrm{p}_{60}$, ${}_{20|10}\mathrm{q}_{40}$.

12. (Р) Период отбора равен трем годам.

А) Выразите через $l_{[x]+t}$ и l_y величины ${}_2q_{[50]}$, ${}_2p_{[50]}$, ${}_{2|}q_{[50]}$, ${}_{2|3}q_{[50]+1}$.

В) Найдите ${}_3p_{53}$, если $q_{[50]} = 0{,}01601$, ${}_2p_{[50]} = 0{,}96411$, ${}_{2|}q_{[50]} = 0{,}02410$, ${}_{2|3}q_{[50]+1} = 0{,}09272$.

13. (Р) Пусть период отбора равен одному году, причем $q_{[x]} = q_x/2$. Найдите $l_{[60]}$, если $l_{60}=12{,}65$, $q_{60}=0{,}021$.

14. (Р) Дан фрагмент таблицы значений q с отбором

Таблица 7

$[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x+3$
30	10	17	21	23	33
31	12	18	22	24	34
32	14	19	23	25	35
33	15	20	24	28	36
34	17	21	25	28	37

Все значения умножаются на 10^{-5}.
Вычислите величины ${}_2q_{[32]+1}$, ${}_{1|1}q_{[32]+1}$.

15. (Р) Дан фрагмент таблицы с отбором, которая действует 2 года

Таблица 8

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
30	1000	998	995	32
31	996	994	988	33
32	994	988	982	34
Удовл.	987	981	970	35

Вычислите значения ${}_2p_{[31]}$, ${}_2p_{[30]+1}$, ${}_1q_{[31]}$, ${}_{1|}q_{[30]+1}$, ${}_2q_{[32]}$, ${}_2q_{[31]+1}$.

16. (Р) По данным таблицы П.5.2 вычислите значения ${}_2p_{50}$, ${}_1q_{60}$, ${}_{1|2}q_{60}$, для мужчины и женщины.

17. (Р) Продолжительности жизни 60-летних мужчины и женщины из совокупности табл. П.5.2 независимы. Найдите вероятность того, что мужчина проживет не более 2 лет, а женщина не более мужчины.

ГЛАВА 11. КРАТКОСРОЧНОЕ СТРАХОВАНИЕ ЖИЗНИ

Прежде всего, уточним термины краткосрочное и долгосрочное страхование жизни. Следует учесть, что имеется в виду не столько срок страхования, сколько методика проведения соответствующих расчетов. Если учитывается изменение стоимости денег в течение периода действия договора, то говорят о долгосрочном страховании, в противном случае – о страховании краткосрочном. Разумеется, пожизненное страхование всегда долгосрочное, годичное в условиях стабильной экономики – краткосрочное. Простейшая схема годичного страхования жизни состоит в следующем. Человек в возрасте x покупает договор, в соответствии с которым в случае смерти в течение года наследникам будет выплачена некоторая сумма (условно принимаемая за 1). Более сложная схема состоит в том, что страховая выплата зависит от причины смерти: например, в случае смерти по естественным причинам выплата равна 1, в случае смерти по другим причинам выплата составит a.

Найдем числовые характеристики случайной величины X_1 – выплаты по договору. В первом случае закон распределения X_1 имеет вид: значение 1 принимается с вероятностью q_x, значение 0 – с вероятностью p_x. Отсюда

$$\mathrm{E}[X_1] = 1\cdot q_x + 0\cdot p_x = q_x,\ \mathrm{Var}[X_1] = \mathrm{E}[X_1^2] - \mathrm{E}[X_1]^2 = q_x - q_x^2 = q_x \cdot p_x.$$

Аналогично вычисляются числовые характеристики страховой выплаты и в более сложных случаях.

Пример 11.1

Пусть годичный договор страхования жизни заключил мужчина в возрасте 55 лет в 1999 году (табл. П.5.2). В соответствии с договором компании надлежало выплатить 1000 рублей при естественной смерти и 5000 рублей при смерти от несчастного случая. Статистика несчастных случаев позволила оценить вероятность смерти от несчастного случая как 0,0005.

В соответствии с прил. 5.2.

$$q_{55}{}' = \frac{l_{55}{}' - l_{56}{}'}{l_{55}{}'} = \frac{73410 - 72060}{73410} = 0{,}01839.$$

Отсюда вероятность смерти по естественным причинам равна 0,01839 – 0,0005 = 0,01789.

Таким образом, закон распределения случайной величины – размера иска X_1 – имеет вид

Значение, тыс. руб.	0	1	5
Вероятность	0,98161	0,01789	0,0005

Отсюда $E[X_1] = 1000\cdot0{,}01789+5000\cdot0{,}0005=20{,}39$,

$\mathrm{Var}[X_1] = 0{,}98161\cdot0^2 + 0{,}01789\cdot1000^2+0{,}0005\cdot5000^2-20{,}39^2 = 29974{,}2479$,

$\sigma[X_1] \approx 173{,}13$.

Таким образом, нетто-премия (см. п. 1.2) по такому договору страхования равна 20,39, эта величина по сравнению с величиной страховой выплаты небольшая. Важнейшей характеристикой деятельности страховой компании является вероятность невыполнения своих обязательств. Если нет других договоров (представим такую чисто гипотетическую ситуацию), то компания при начислении нетто-премии не в состоянии выполнить свои обязательства при наступлении страхового случая, т.е. с вероятностью 0,01839. Уменьшение премии эту вероятность не меняет. Для того чтобы снизить вероятность, необходимо увеличить премию до 1000, а это уже очень много. При анализе одного договора, разумеется, исчезает главная идея страхования – взаимопомощь (п. 1.1).

Пусть теперь компания заключила несколько подобных договоров. В данном случае мы находимся в рамках модели индивидуального риска (п. 5.1).

Пример 11.2. Заключено 3 независимых договора страхования подобных договору примера 11.1. Каков закон распределения иска по совокупности договоров?

Решение. Решим задачу на основе применения производящих функций. Если X_i (i = 1, 2, 3) – размер соответствующего иска по i-му договору, то

$$m_{X_i}(z) = 0{,}98161z^0+0{,}01789z^1+0{,}0005\,z^5.$$

Суммарный иск равен $S = X_1 + X_2 + X_3$. Далее производящая функция суммарного иска S

$$m_S(z) = (m_{X_i}(z))^3 = (0{,}98161z^0+0{,}01789z^1+0{,}0005\,z^5)^3,$$

отсюда

$$m_S(z) = 0{,}94584z^0+0{,}05171z^1+0{,}00094\,z^2+0{,}000006\,z^3+0{,}00144\,z^5 + +0{,}00005\,z^6 +\ldots$$

Случайная величина S=X_1+X_2+X_3 принимает значения 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15. Последние четыре значения с данной точностью принимаются с вероятностью 0. Получим закон распределения S.

Значение	0	1	2	3	5	6
Вероятность	0,94584	0,05171	0,00094	0,000006	0,00144	0,00005

Математическое ожидание и дисперсию S можно вычислить из исходных данных, пользуясь тем, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий и дисперсия суммы *независимых* случайных величин равна сумме дисперсий. Отсюда E[S] = 3·20,39 = 61,17, Var[S] ≈ 3·29974 ≈ 89922, σ[S] ≈ 299,9.

Пусть страховая компания продает указанные договоры по нетто-премии. Тогда привлечено средств 61,17. Вероятность того, что компания не выполнит обязательств, равна 1 – 0,94584 = 0,05416, поскольку средств не хватит ни на один иск. Для того чтобы понизить эту вероятность (до 0,05416 – 0,05171 = 0,00245), необходимо привлечь минимум 1000 рублей, т.е. по 333,3 рубля с каждого страхователя. Вряд ли эти условия являются привлекательными для клиентов. Тем не менее, переход от одного договора к трем демонстрирует то обстоятельство, что при большем числе договоров снижение риска страховщика достигается меньшей платой для каждого страхователя.

При сотнях договоров страхования вычислить соответствующие вероятности закона распределения суммарного иска точно практически невозможно. Это обстоятельство показывает целесообразность использования приближенного метода, основанного на применении центральной предельной теоремы
(п. 5.1).

Оценим приближенно риск страховщика, который взимает со страхователей только нетто-премию. Страховщик не выполнит своих обязательств, если сумма исков превышает имеющиеся средства. В нашем случае это соответствует неравенству

$$\sum_{i=1}^{K} X_i - \sum_{i=1}^{K} \mathrm{E}\left[X_{\mathrm{i}}\right] = \sum_{i=1}^{K} X_i - \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{K} X_i\right] > 0,$$

где K – количество договоров страхования. Но тогда

$$\mathrm{P}\left[\frac{\sum_{i=1}^{K} X_i - \sum_{i=1}^{K} \mathrm{E}\left[X_i\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{K} X_i\right]}} > 0\right] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 0{,}5.$$

Разумеется, такая вероятность разорения недопустима. Заметим, что при малом числе договоров вероятность разорения меньше, но при этом ею невозможно управлять разумным изменением страховых премий. Решая упражнения, читатель убедится, что при большом портфеле даже небольшое повышение премии существенно уменьшает вероятность разорения.

Одно замечание по начислению премий. Портфель договоров может быть весьма неоднородным. Целесообразно вначале найти суммарную премию, обеспечивающую заданную малую вероятность разорения (невыполнения обязательств), а затем распределить премии между отдельными договорами в соответствии с какими-либо из принципов п.1.2. На практике это сделать трудно, поскольку договоры продаются не одновременно, но можно исходить из гипотетической структуры будущего портфеля.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Заключено 200 договоров страхования жизни с мужчинами в возрасте 55 лет (табл. П. 5.2.), в соответствии с которыми в случае смерти в течение года наследникам выплачивается 5000 рублей. Найдите вероятность разорения, если

А) брутто-премия на 10% выше нетто-премии,

В) брутто-премия на 50% выше нетто-премии.

Тот же вопрос, если договоров 20000.

2. (Р) Заключено по 200 договоров страхования жизни с мужчинами и женщинами в возрасте 50 лет (табл. П.5.2). По каждому договору в случае естественной смерти страхователя в течение года наследникам выплачивается 1000 и в случае смерти по другим причинам – 5000. Принята допустимая вероятность разорения 1 %. Вероятность неестественной смерти мужчины в течение года равна 0,0005, женщины – 0,0003. Найдите брутто-премии по каждому договору, если применяются: принцип пропорционального увеличения, принцип дисперсии, принцип среднего квадратического отклонения (п. 1.2).

Тот же вопрос, если договоров заключено по 20000.

ГЛАВА 12. ДОЛГОСРОЧНОЕ СТРАХОВАНИЕ ЖИЗНИ. РАЗОВЫЕ ПРЕМИИ И ВЫПЛАТЫ

12.1. Виды долгосрочного страхования жизни

Напомним, что договор страхования жизни – это такой договор, который предусматривает выплату страховой компанией определенной суммы S_b (страховой суммы) человеку, заключившему этот договор, если он доживет до некоторой определенной даты, или наследникам этого человека в случае его смерти между определенными датами или когда бы она ни произошла.

Страховая сумма может как повышаться, так и понижаться со временем в соответствии с условиями договора.

Договор может касаться жизни или смерти более чем одного лица.

Договоры могут быть как *бесприбыльными* (в случае наступления страхового случая страховая компания выплачивает только сумму S_b), так и *с прибылью* (в этом случае к страховой сумме S_b добавляются суммы, называемые бонусами).

Страхование жизни классифицируется в зависимости от:

а) момента смерти страхователя;

б) момента выплаты страховой суммы.

В соответствии с первым критерием выделяют, в частности, следующие виды страхования жизни:

1. *n-летнее чисто накопительное страхование.* Страховая сумма S_b выплачивается человеку, заключившему контракт в возрасте x лет в случае, если он доживет до $x+n$ лет.

2. *Полное страхование жизни.* Страховая сумма S_b выплачивается наследникам человека, заключившего контракт в возрасте x лет, в случае его смерти, когда бы она ни произошла.

3. *n-летнее временное страхование жизни.* Страховая сумма S_b выплачивается наследникам человека, заключившего контракт в возрасте x лет, в случае его смерти в возрасте от x до $x+n$ лет.

4. *n-летнее смешанное страхование жизни.* Страховая сумма S_b выплачивается наследникам человека, заключившего контракт в возрасте x лет, в случае его смерти в возрасте от x до $x+n$ лет, или самому человеку, если он доживет до $x+n$.

5. *Страхование жизни, отсроченное на* m *лет.* Страховая сумма S_b выплачивается наследникам человека, заключившего контракт в возрасте x лет, в случае его смерти в возрасте старше $x+m$ лет.

Естественно, что существуют и другие виды отсроченного страхования жизни, например, отсроченное n-летнее временное или смешанное страхование или отсроченное n-летнее чисто накопительное страхование.

В зависимости от момента выплаты страховой компанией страховой суммы выделяют:

1) *непрерывное страхование жизни* (страховая сумма выплачивается сразу после смерти застрахованного);
2) *дискретное страхование жизни* (страховая сумма выплачивается в конце года смерти застрахованного);
3) *страхование жизни с выплатой страховой суммы в конце* $\frac{1}{m}$ *части года смерти*. Например, если $m=12$, то выплата осуществляется в конце месяца смерти.

Кроме того, различают договоры страхования жизни с фиксированной страховой суммой S_b и договоры, в которых страховая сумма может изменяться со временем. Например, при полном непрерывном страховании жизни с непрерывно возрастающей страховой суммой она пропорциональна $T(x)$ – остаточному времени жизни человека, заключившего контракт.

Страховые выплаты и свои расходы страховая компания оплачивает за счет страховых премий. Премии (как и страховые выплаты) могут быть как разовыми, так и периодическими. В этой главе рассматриваются только разовые премии и выплаты. Как и для краткосрочных видов страхования жизни, основу страховой премии составляет нетто-премия – математическое ожидание величины страховой суммы, дисконтированной к моменту заключения договора. Для вычисления брутто-премий применяются подходы из п.1.2, технически все осуществляется аналогично краткосрочному страхованию (глава 11).

12.2. Разовые нетто-премии

Разовая нетто-премия, соответствующая страховой выплате S_b=1, обозначается буквой A с различными индексами и иными дополнительными знаками. Рассмотрим некоторые из них. Все они перекликаются с соответствующими обозначениями для аннуитетов (см. [6, 32, 33]).

1. Символ A_x соответствует договору, заключенному с человеком в возрасте x лет.

2. Обозначение A без черты сверху (с теми или иными индексами) соответствует дискретному страхованию жизни, $\overline{A}$ – непрерывному страхованию жизни, $A^{(m)}$ соответствует выплате страховой суммы в конце $\frac{1}{m}$ части года смерти.

3. Символ $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ соответствует n-летнему чисто накопительному страхованию, $A^{1}_{x:\overline{n|}}$ – n-летнему временному страхованию, $A_{x:\overline{n|}}$ – n-летнему смешанному страхованию. Поясним смысл этих обозначений. Индекс x означает страхователя, купившего договор в возрасте x, индекс n означает момент окончания контракта. Рассматриваются два события: случайное (смерть человека) и детерминированное (момент окончания контракта). Если единичка расположена над индексом x (соответственно n), то это означает, что выплата производится, если случайное (соответственно детерминированное) событие произошло первым. Отсутствие единички означает, что выплата производится в момент наступления первого из этих событий, каким бы оно ни было.

Подобные обозначения применяются и в более сложных случаях. Например, если муж в возрасте x и жена в возрасте y заключили договор, в соответствии с которым выплата будет производиться только если жена скончается после мужа, но не более чем через n лет, то соответствующая нетто-премия имеет обозначение $A^{\;1\;\,2}_{x:y:\overline{n|}}$. Рассмотрение таких договоров выходит за рамки данного пособия.

4. Символ ${}_{m|}A$ соответствует страхованию жизни, отсроченному на m лет.

Случайные величины, математические ожидания которых равны нетто-премиям (т.е. современные стоимости страховых выплат), обозначаются символами Z с теми же дополнительными знаками. Вычислим нетто-премии для некоторых видов долгосрочного страхования. Пусть i – эффективная годовая процентная ставка, $\delta = ln(1+i)$ – соответствующая ей сила процента. Современная стоимость единичной суммы в момент t равна $v^t = (1+i)^{-t} = e^{-\delta t}$, где v – множитель дисконтирования [6, 32, 33].

Полное страхование жизни

а) *Непрерывное страхование*

Величина страховой суммы S_b, выплачиваемой страховой компанией по договору полного страхования жизни человека, заключившего этот договор в возрасте x лет, немедленно после его смерти, дисконтированная к моменту заключения договора, равна $S_b \cdot \overline{Z}_x = S_b \cdot v^{T(x)}$, где $T(x)$ – остаточное время жизни застрахованного.

Математическое ожидание этой случайной величины равно $\mathrm{E}\left[S_b \cdot \overline{Z}_x\right] = \int_0^\infty S_b \cdot v^t \cdot f_x(t)dt$, где $f_x(t)$ – плотность распределения случайной величины $T(x)$. Так как $f_x(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$ (п. 10.4), то $\mathrm{E}\left[S_b \cdot \overline{Z}_x\right] = \int_0^\infty S_b \cdot v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt$. Разовая нетто-премия соответствует страховой сумме $S_b = 1$, следовательно,

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt.$$

б) *Дискретный вид страхования*

В данном случае страховая сумма S_b выплачивается в конце года смерти застрахованного, т.е. в момент $\lfloor T(x) \rfloor + 1$, где $\lfloor T(x) \rfloor$ – целая часть $T(x)$. Дисконтированная на момент заключения договора страховая сумма равна $S_b \cdot Z_x = S_b \cdot v^{\lfloor T(x) \rfloor + 1}$. Данная случайная величина является дискретной, ее математическое ожидание вычисляется по формуле

$$\mathrm{E}\left[S_b \cdot Z_x\right] = \sum_{t=0}^{\infty} S_b \cdot v^{t+1} \cdot \mathrm{P}\left[\,\lfloor T(x) \rfloor = t\right] = S_b \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t|}q_x .$$

Тогда разовая нетто-премия при $S_b = 1$ равна

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t|}q_x .$$

в) *Полное страхование жизни с выплатой страховой суммы в конце* $\frac{1}{m}$ *части года смерти* [4].

Момент выплаты в рассматриваемом случае можно проиллюстрировать на графике (рис. 14).

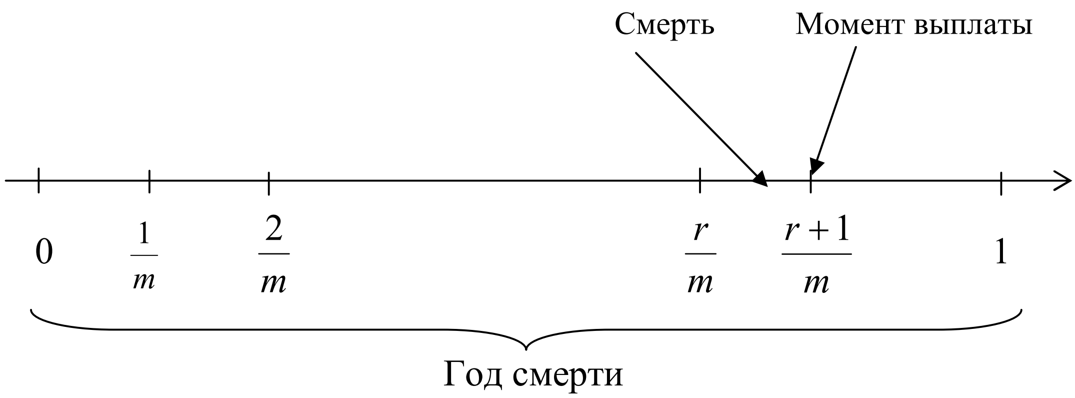

Рис. 14

Соответствующая разовая нетто-премия $A_x^{(m)} = \mathrm{E}\left[v^{\frac{\lfloor mT(x) \rfloor + 1}{m}}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} v^{\frac{r+1}{m}} {}_{\frac{r}{m}|\frac{1}{m}}q_x$. Заметим, что $A_x^{(m)} \to \overline{A}_x$ при $m \to \infty$.

12.3. Коммутационные функции

Несмотря на то, что с помощью компьютерных расчетов можно легко получить значения нетто-премий для произвольных значений эффективной годовой процентной ставки i, в актуарной математике для вычисления данных характеристик используются специальные вспомогательные функции. Значения этих функций при различных величинах i и возрастах можно найти в таблицах, аналогичных таблицам продолжительности жизни.

Коммутационными являются, например, следующие функции: $D_x = v^x l_x$,

$\overline{C}_x = \int_0^1 v^{x+t} l_{x+t} \mu_{x+t} dt$ и ее дискретный аналог $C_x = v^{x+1} d_x$,

$\overline{M}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{C}_{x+t}$ и $M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$, $\overline{R}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{M}_{x+t}$ и $R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t}$.

Смысл функции D_x: столько человек должно быть в группе людей, чтобы при размножении со скоростью роста банковской процентной ставки через x лет их стало l_x.

Выразим через коммутационные функции вычисленные ранее нетто-премии.

$$\overline{A}_x = \int_0^{\infty} v^t\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} \frac{v^{x+t}}{v^x} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \mu_{x+t} dt = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} v^{x+t} l_{x+t} \mu_{x+t} dt =$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 v^{x+t+k} l_{x+t+k} \mu_{x+t+k} dt = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \overline{C}_{x+k}}{D_x} = \frac{\overline{M}_x}{D_x};$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_{t|} q_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} = \frac{1}{v^x \cdot l_x} \sum_{t=0}^{\infty} v^{x+t+1} d_{x+t} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}.$$

С помощью коммутационных функций получим соотношения между A_x и $\overline{A}_x$. Значение определенного интеграла можно приближенно вычислить по формуле прямоугольников $\int\limits_b^a f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)$.

В соответствии с этой формулой

$$\overline{C}_x = \int\limits_0^1 v^{x+t} l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} dt \approx v^{x+1/2} l_{x+1/2} \cdot \mu_{x+1/2} =$$

$$= \frac{1}{v^{1/2}} \cdot v^{x+1} \cdot l_{x+1/2} \cdot \frac{-l'_{x+1/2}}{l_{x+1/2}} \approx \frac{1}{v^{1/2}} \cdot C_x, \text{ т.к. } -l'_{x+1/2} \approx l_x - l_{x+1} = d_x.$$

Отсюда $\overline{C}_x \approx (1+i)^{1/2} \cdot C_x$, следовательно, $\overline{M}_x \approx (1+i)^{1/2} \cdot M_x$.

Но тогда $\overline{A}_x \approx (1+i)^{1/2} \cdot A_x$.

Еще одно соотношение между $\overline{A}_x$ и A_x можно получить, предположив равномерность распределения смертей в течение каждого года жизни (п. 10.6).

Поскольку в этом случае $l_{y+t} \cdot \mu_{y+t} = d_y$ при $0 < t < 1$ и $y = x+k$ ($k = 0, 1, 2,\ldots$), то

$$\overline{C}_y = \int\limits_0^1 v^{y+t} l_{y+t} \cdot \mu_{y+t} dt = d_y \cdot v^{y+1} \int\limits_0^1 v^{t-1} dt = \frac{i}{\delta} C_y$$

(см. [6, 15, 32, 33]). Следовательно,

$$\overline{M}_x = \frac{i}{\delta} M_x \text{ и } \overline{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x.$$

Докажем, что эти приближения совпадают с точностью до величин порядка $o(i)$. Для этого воспользуемся известными из математического анализа разложениями элементарных функций в степенные ряды, из которых следуют формулы $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$,

отсюда $(1+i)^{1/2} = 1 + i/2 + o(i)$;

$$\frac{i}{\delta}=\frac{i}{\ln(1+i)}=\frac{i}{i-i^2/2+o\left(i^2\right)}=\left(1-i/2+o(i)\right)^{-1}=1+i/2+o(i).$$

Формулы вычисления нетто-премий для других видов страхования жизни приведены в прил. 7.

12.4. Страхование жизни с изменяющейся страховой суммой

Пусть по условиям контракта наследники застрахованного сразу после его смерти получат некоторую сумму $\beta(T(x))$. Значение этой выплаты на момент заключения договора $\overline{Z}=\beta(T(x))\cdot v^{T(x)}$, и, следовательно,

$$\mathrm{E}\left[\overline{Z}\right]=\int_0^\infty v^t\cdot\beta(t)\cdot{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}d\mathrm{t}.$$

Если $\beta(T(x))=T(x)$, то нетто-премия обозначается $(\bar{I}\bar{A})_x$ и

$$(\bar{I}\bar{A})_x=\int_0^\infty t\cdot v^t\cdot{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}dt.$$

Такой вид страхования называется страхованием с непрерывно возрастающим пособием.

В частном случае, когда $\beta(T(x))=\lfloor T(x)\rfloor+1$, нетто-премия обозначается $(I\bar{A})_x$ и равна

$$(I\bar{A})_x=\int_0^\infty(\lfloor t\rfloor+1)\cdot v^t\cdot{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}dt=\frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty}(t+1)\overline{C}_{x+t}}{D_x}=\frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty}\overline{M}_{x+t}}{D_x}=\frac{\overline{R}_x}{D_x}.$$

В этом случае страховая выплата меняется дискретно, но выплачивается по непрерывному графику – в момент смерти страхователя. Непрерывность или дискретность начисления страховой выплаты находит отражение в наличии или отсутствии черты над буквой *I*.

Поскольку в данном случае прирост страховой выплаты за последний год жизни в среднем больше на 1/2, чем при $\beta(T(x)) = T(x)$, то

$$(\bar{I}\,\bar{A})_x \approx (I\,\bar{A})_x - \frac{1}{2}\bar{A}_x.$$

Для дискретного случая в конце года смерти наследники получат страховую сумму $\beta(K(x)+1)$, где $K(x)$ – округленное остаточное время жизни. Значение этой выплаты на момент заключения договора

$$Z = \beta(K(x)+1)\cdot v^{K(x)+1},$$

и, следовательно,

$$\mathrm{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty}\beta(k+1)\cdot v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_x.$$

Для дискретного страхования с непрерывно возрастающим страховым пособием, т.е. когда $\beta(K(x)+1) = K(x)+1$, современная стоимость страховой выплаты

$$(I\,Z)_x = (K(x)+1)\cdot v^{K(x)+1}.$$

Соответствующая нетто-премия

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_x = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot C_{x+k}}{D_x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}M_{x+k}}{D_x} = \frac{R_x}{D_x}.$$

Так как $\bar{C}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}}\cdot C_x$, то

$$(I\bar{A})_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}}\cdot(IA)_x.$$

При предположении о равномерном распределении смертей в течение года аналогично соотношению из п. 12.3 справедливо равенство $(I\overline{A})_x = \frac{i}{\delta}(IA)_x$.

Мы рассмотрели полное страхование жизни с возрастающей страховой суммой. Аналогичные вычисления можно провести и для других видов страхования жизни (временного, отсроченного, чисто накопительного).

12.5. Страховые полисы с прибылью. Бонусы

В отличие от бесприбыльных страховых полисов, в которых фиксированы величины премии и страховой суммы, в случае страховых полисов с прибылью их владельцы имеют право на участие в прибыли страховой компании [4]. Как правило, это выражается в том, что к основной страховой сумме добавляются специальные суммы – бонусы. Они могут выплачиваться периодически (например, ежегодно), пока контракт остается в силе, а могут единовременно, в случае смерти застрахованного или завершения контракта.

Естественно, что страховые премии для таких контрактов выше, чем для бесприбыльных договоров.

Рассмотрим, как вычисляются нетто-премии при ежегодном начислении бонусов на примере двух наиболее общих схем: простой и сложной. Эти схемы аналогичны простой и сложной схемам начисления процентов [6, 15, 32, 33].

1. Простая схема

В этом случае бонусы вычисляются только на основе страховой суммы S_b. Страховая компания на основе оценки эффективности своей будущей деятельности назначает простую бонусную ставку b, и бонусы начисляются периодически в размере bS_b.

Пример 12.1. Человек в возрасте x лет заключил дискретный договор полного страхования жизни с прибылью. Основная страховая сумма равна S_b. Компания определила начисление бонусов в начале каждого года действия договора в соответствии с простой схемой по ставке b и выплатой их в конце года смерти.

Спустя k лет после заключения договора страховая выплата достигнет величины $S_b + kbS_b$.

Математическое ожидание величины страховой выплаты, дисконтированной к моменту заключения договора, равно

$$\sum_{k=0}^{\infty}[S_b + (k+1)bS_b]v^{k+1}{}_{k|}q_x = S_b A_x + bS_b(IA)_x .$$

2. Сложная схема

В этом случае бонусы начисляются в зависимости не только от основной страховой суммы, но и от суммы уже начисленных бонусов, т.е. за год к начисленной страховой выплате добавляется сумма, равная $b(S_b + B)$, где S_b – основная страховая сумма, B – величина уже начисленных бонусов, b – сложная бонусная ставка.

Рассмотрим предыдущий пример. При начислении бонусов по сложной схеме со ставкой b спустя k лет после заключения договора страховая выплата составит $S_b(1+b)^k$.

Математическое ожидание современной величины страховой выплаты равно

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_b(1+b)^{k+1}v^{k+1}{}_{k|}q_x = S_b \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+b}{1+i}\right)^{k+1}{}_{k|}q_x = S_b A_x^{\;*},$$

где $A_x^{\;*}$ – соответствующая нетто-премия при значении дисконта $\dfrac{1+b}{1+i}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Какие случайные величины имеют математические ожидания $A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}$, $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$?

2. (Р) Вычислите нетто-премию человека в возрасте 20 лет, заключившего договор:

А) полного страхования жизни;

B) 10-летнего чисто накопительного страхования жизни;

C) 10-летнего временного страхования жизни;

D) 10-летнего смешанного страхования жизни;

E) полного страхования жизни, отсроченного на 10 лет;

F) полного страхования жизни с возрастающей выплатой (коэффициент 1).

Рассмотрите договоры как дискретного, так и непрерывного типов. Во втором случае для вычисления нетто-премий воспользуйтесь приближенными формулами. Известны значения коммутационных функций: $D_{20} = 15557{,}436$; $D_{30} = 10433{,}310$; $M_{20} =$
$= 2075{,}2420$; $M_{30} = 1981{,}9552$; $R_{20} = 97500{,}494$.
Годовая эффективная процентная ставка равна 4 %.

3. (Р) Выведите формулы для дисперсий современных стоимостей страховых выплат при чисто накопительном страховании и временном n-летнем страховании.

4. (Р) Человек в возрасте 50 лет, подпадающий под статистику табл. П.5.2, заключил договор страхования жизни с выплатой страховой суммы S_b по прошествии 10 лет. Если он скончается до истечения 10 лет, страховая выплата составит 100000, если же застрахованный доживет до конца периода, то она составит 200000. Годовая эффективная процентная ставка равна 5 %. Вычислите математическое ожидание и дисперсию современной стоимости страховой выплаты.

5. (Р) K человек прибрели одновременно договоры дискретного полного страхования жизни, отсроченного на m лет. Возраст i-го застрахованного x_i лет, величина страховой выплаты по его договору S_{bi}, $i = \overline{1, K}$.

Сила процента равна δ, остаточные времена жизни страхователей независимы и характеризуются одной и той же таблицей смертности. Выведите формулы для среднего и дисперсии современной стоимости суммарной выплаты по всем договорам.

6. (Р) Страховая компания заключила договор полного непрерывного страхования жизни. Вычислите нетто-премию по данному договору, если сила процента равна 10 %, остаточное время

жизни страхователя характеризуется постоянной интенсивностью смертности, равной 0,05.

7. (Р) Найдите нетто-премию для 50-летних мужчины и женщины, подпадающих под статистику табл. П.5.2, при заключении 3-летнего непрерывного договора смешанного страхования жизни при годовой эффективной процентной ставке 20 %. Распределение смертей для дробных возрастов считать равномерным. Тот же вопрос для дискретного договора.

8. (Р) Пусть в предположениях задачи 7 заключено по 1000 дискретных договоров с мужчинами и женщинами. Найдите брутто-премии по пропорциональному принципу, гарантирующие вероятность разорения страховой компании не свыше 5 %.

9. (Р) Страховая компания заключила 10000 договоров полного непрерывного страхования жизни. Пусть сила процента равна 10 %, остаточное время жизни страхователей характеризуется постоянной интенсивностью смертности, равной 0,05. Найдите брутто-премии, обеспечивающие не более чем 5 %-ю вероятность разорения страховой компании.

10. (Р) Страховая компания заключила договор полного непрерывного страхования жизни с прибылью. Компания определила начисление бонусов в начале каждого года действия договора в соответствии с простой схемой по ставке 2 % и выплатой их в момент смерти. Вычислите нетто-премию по данному договору, если сила процента равна 10 %, остаточное время жизни страхователя характеризуется постоянной интенсивностью смертности, равной 0,05.

ГЛАВА 13. ДОЛГОСРОЧНОЕ СТРАХОВАНИЕ ЖИЗНИ. АННУИТЕТЫ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРЕМИИ

13.1. Виды аннуитетов. Обозначения

Аннуитет – серия платежей, осуществляемых в течение определенного периода через равные промежутки времени. В страховом деле под аннуитетом понимаются периодические выплаты страхователю до наступления оговоренного случайного события.

В отличие от аннуитетов, рассматриваемых в финансовой математике [6, 15, 32, 33], в актуарной математике аннуитет, как правило, связан с продолжительностью жизни человека.

Аннуитеты классифицируются в зависимости от:

a) продолжительности периода выплат;

b) частоты выплат;

c) момента выплаты;

d) величины выплаты.

В соответствии с первым критерием выделяют, в частности, следующие виды аннуитетов:

1. *Полный пожизненный аннуитет.* Платежи начинаются с возраста x лет и продолжаются на протяжении всей жизни человека.

2. *n-летний временный аннуитет.* Платежи начинаются с возраста x лет и продолжаются, пока человек жив, но не более n лет.

3. *Аннуитет, отсроченный на m лет.* Платежи начинаются с возраста $x+m$ лет.

В зависимости от частоты выплат выделяют:

1) аннуитеты, выплачиваемые непрерывно (т.е. с очень высокой частотой);
2) аннуитеты, выплачиваемые 1 раз в год;
3) аннуитеты, выплачиваемые m раз в год.

Два последних в свою очередь в соответствии с моментом выплаты делятся на: аннуитеты *пренумерандо* и аннуитеты *постнумерандо* [6, 15, 32, 33].

В зависимости от величины платежа различают аннуитеты с фиксированной выплатой и аннуитеты, в которых выплата может изменяться со временем.

В финансовой математике при рассмотрении аннуитета прежде всего важна суммарная величина платежей, отнесенных к определенному моменту времени. В актуарной математике данная величина зависит от остаточного времени жизни человека и поэтому является случайной. В связи с этим в качестве основных характеристик аннуитета рассматриваются математическое ожидание и дисперсия современной или настоящей (т.е. отнесенной к моменту заключения договора) стоимости всех выплат по данному аннуитету.

Обозначения для дисконтированных стоимостей аннуитетов аналогичны соответствующим обозначениям в финансовой математике (см. [6, 15, 32, 33]) и при этом имеют общие черты с обозначениями разовых нетто-премий для договоров долгосрочного страхования жизни. Математическое ожидание современной стоимости аннуитета при условии, что величина выплаты за один год равна 1, обозначается буквой a с различными индексами и знаками, которые приписываются по следующим правилам:

1. Первый нижний правый индекс x в обозначении a_x равен возрасту человека, начиная с которого производятся выплаты. К этому моменту дисконтируются величины всех платежей.

2. Индекс n в обозначении $a_{x:\overline{n}|}$ указывает максимальную продолжительность периода выплат.

3. Правый верхний индекс m в обозначении $a_x^{(m)}$ соответствует числу платежей за 1 год.

4. Обозначение ${}_{m|}a$ соответствует аннуитету, отсроченному на m лет.

5. Знаки над a соответствуют:

$\overline{a}$ – аннуитету, выплачиваемому непрерывно;

$\ddot{a}$ – аннуитету пренумерандо;

отутствие знака соответствует аннуитету постнумерандо.

При вычислении математических ожиданий современных стоимостей аннуитетов можно использовать так называемый актуарный коэффициент дисконтирования. Вспомним n-летнее чисто накопительное страхование: если человек проживет n лет, то он получит страховую выплату в размере 1. Среднее значение страховой выплаты, дисконтированной к настоящему моменту, или разовая нетто-премия для данного вида страхования равна

$A_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} = v^n \cdot {}_n p_x = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$. Иными словами, единичная сумма, которая будет выплачена через n лет человеку, если он будет жив, в настоящий момент в среднем стоит $A_{\substack{1\\x:\overline{n}|}}$. Эту величину обозначают также ${}_n E_x$ и называют *актуарным коэффициентом дисконтирования*. Если в финансовой математике для нахождения стоимости в данный момент времени величины, которая через t лет будет стоить S, нужно умножить S на v^t [6, 15, 32, 33], то в актуарной математике при вычислении этой стоимости в среднем – на ${}_t E_x = v^t \cdot {}_t p_x$. Это необходимо, чтобы учесть предположение о том, что страхователь, которому сейчас x лет, спустя t лет будет еще жив. Аналогично можно определить и *актуарную функцию накопления* $A(x,t) = \dfrac{1}{{}_t E_x}$. Исходя из определения актуарного коэффициента дисконтирования, можно вычислить средние значения современных стоимостей аннуитетов различных видов, например:

$\ddot{a}_x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} {}_k E_x$; $\quad a_x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} {}_k E_x$; $\quad {}_{m|}\ddot{a}_x = \sum\limits_{k=m}^{\infty} {}_k E_x$; $\quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} {}_k E_x$. Для обоснования этих формул следует заметить, что, например, пожизненный аннуитет можно считать набором чисто накопительных договоров на 1, 2,… лет.

В данной главе мы рассматриваем суммарную стоимость всех выплат по аннуитету, дисконтированную к моменту начала платежей. При приведении стоимости всех платежей к некоторому моменту в будущем, математическое ожидание суммарной стоимости всех выплат называется обычно *актуарной накопленной* или *наращенной суммой* и обозначается буквой s с индексами и знаками, приписываемыми по приведенным выше правилам. Значения актуарных накопленных сумм можно вычислять на основе значений актуарных аннуитетов. Аналогично тому, как в финансовой математике, чтобы найти стоимость величины, которая в данный момент стоит S, спустя время t нужно умножить S на величину, обратную к коэффициенту дисконтирования, т.е. на $\dfrac{1}{v^t}$, так и в актуарной математике, чтобы получить среднее значение некоторой стоимости спустя время t, среднее значение стоимости которой в настоящий момент равно S, нужно умножить S на величину, обратную к актуарному коэффициенту дисконтирования, т.е. на $\frac{1}{{}_tE_x}$.

Поэтому для n-летних накопленных сумм, выплачиваемых ежегодно пренумерандо и постнумерандо, справедливы равенства $\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x}$ и $s_{x:\overline{n}|} = \frac{a_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x}$ соответственно, а для n -летней накопленной суммы, выплачиваемой непрерывно, $\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x}$.

Формулы для вычисления средних значений современных стоимостей аннуитетов приведены в прил. 8. Поясним вывод некоторых из них.

13.2. Вычисления математических ожиданий современных стоимостей аннуитетов

13.2.1. Полный пожизненный аннуитет, выплачиваемый непрерывно. Пусть человек в возрасте x лет начинает получать (выплачивать) деньги пожизненно непрерывно и равномерно со скоростью 1 в год. Стоимость всех платежей, дисконтированная к настоящему моменту, равна приведенной стоимости аннуитета, выплачиваемого непрерывно в течение $T(x)$ лет (см. [6, 15, 32, 33] и п. 13.1):

$$\bar{Y}_x = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} = \frac{1 - v^{T(x)}}{\delta}.$$

Эта величина случайная, ее среднее значение равно

$$\bar{a}_x = \mathrm{E}\left[\bar{Y}_x\right] = \mathrm{E}\left[\bar{a}_{\overline{T(x)}|}\right] = \int_0^\infty \frac{1 - v^t}{\delta} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\, dt.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}({}_tp_x) = -{}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$ и $\frac{d}{dt}\left(\frac{1-v^t}{\delta}\right) = v^t$, то, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^\infty \frac{1-v^t}{\delta} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = -\frac{1-v^t}{\delta} \cdot {}_tp_x \ \Big|_0^\infty + \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x dt = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x dt .$$

Тем самым

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x dt = \int_0^\infty {}_tE_x dt .$$

Далее,

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{1-v^t}{\delta} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = \frac{1 - \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt}{\delta} = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} .$$

Таким образом, среднее значение современной стоимости полного пожизненного непрерывного аннуитета связано с нетто-премией для полного непрерывного страхования жизни. Это естественно, поскольку договоры полного непрерывного страхования жизни и пожизненный непрерывный аннуитет дополняют друг друга.

Так же, как и нетто-премии для договоров долгосрочного страхования жизни, математические ожидания современных стоимостей аннуитетов могут быть выражены через соответствующие коммутационные функции. В данном случае используются следующие коммутационные функции:

$D_x = v^x \cdot l_x$ (она уже встречалась в п. 12.3), $\bar{D}_x = \int_0^1 v^{x+t} \cdot l_{x+t} dt$,

$N_x = \sum_{t=0}^\infty D_{x+t}$, $\bar{N}_x = \sum_{t=0}^\infty \bar{D}_{x+t}$.

Используя эти обозначения, получаем

$$\overline{a}_x = \int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_x dt = \int_0^\infty v^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} dt = \frac{1}{v^x \cdot l_x} \int_0^\infty v^{x+t} \cdot l_{x+t} dt =$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} v^{x+t} \cdot l_{x+t} dt = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 v^{x+t+k} \cdot l_{x+t+k} dt =$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{D}_{x+k} = \frac{\overline{N}_x}{D_x}.$$

13.2.2. Полный пожизненный аннуитет, выплачиваемый один раз в год.

Аннуитет пренумерандо

Пусть человек в возрасте x лет будет получать (выплачивать) по 1 пожизненно в начале каждого года. Стоимость всех платежей, дисконтированная к настоящему моменту и равная современной стоимости аннуитета пренумерандо, выплачиваемого в течение $K(x)+1$ лет, равна $\ddot{Y}_x = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}} = \dfrac{1-v^{K(x)+1}}{d}$ [6, 15, 32, 33]. В предыдущем пункте было показано, что

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t E_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x .$$

Приведем другой подход к этой формуле.

Среднее значение случайной величины $\ddot{Y}_x$ равно

$$\ddot{a}_x = \mathrm{E}\left[\ddot{Y}_x\right] = \mathrm{E}\left\lfloor \ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-v^{k+1}}{d} \cdot {}_{k|}q_x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} (1+v+\ldots+v^k) d_{x+k} =$$

$$= \frac{(d_x + d_{x+1} + \ldots) + v(d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots) + v^2 (d_{x+2} + d_{x+3} + \ldots) + \ldots}{l_x} =$$

$$=\frac{l_x + v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots}{l_x} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x .$$

Далее,

$$\ddot{a}_x = \mathrm{E}\left[\ddot{Y}_x\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}\right] = \frac{1 - A_x}{d} .$$

Таким образом, аналогично предыдущему среднее значение современной стоимости полного пожизненного ежегодного аннуитета пренумерандо связано с нетто-премией для дискретного полного страхования жизни.

Приведем также выражение $\ddot{a}_x$ через коммутационные функции:

$$\ddot{a}_x = \frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + \ldots}{v^x l_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} = \frac{N_x}{D_x} .$$

Аннуитет постнумерандо

Пусть человек в возрасте x лет будет получать (выплачивать) пожизненно по 1 в конце каждого прожитого года. Среднее значение суммарной стоимости всех платежей, дисконтированной к настоящему моменту, равно

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t E_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x .$$

Поскольку справедливы соотношения

$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x$ и $a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x$, то $a_x = \ddot{a}_x - 1$. Далее,

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t E_x = \frac{1}{D_x} \sum_{k=1}^{\infty} D_{x+k} = \frac{N_{x+1}}{D_x} .$$

13.2.3. Полный пожизненный аннуитет, выплачиваемый m раз в год. Рассмотрим аннуитет пренумерандо. Пусть человек в возрасте x лет будет пожизненно получать (выплачивать) по $\frac{1}{m}$ в начале каждой m-й доли года. Среднее значение стоимости всех платежей, дисконтированной к настоящему моменту, обозначается $\ddot{a}_x^{(m)}$.

Отметим, что $\ddot{a}_x^{(1)}=\ddot{a}_x$ и $\ddot{a}_x^{(m)} \to \bar{a}_x$ при $m \to \infty$.

По известной формуле финансовой математики [6, 15, 32, 33] дисконтированная стоимость $\ddot{Y}_x^{(m)}$ подобного аннуитета вычисляется по формуле $\ddot{Y}_x^{(m)} = \dfrac{1 - v^{\frac{\lfloor m \cdot T(x) \rfloor + 1}{m}}}{d^{(m)}}$. В финансовой математике рассматривались подобные аннуитеты только за целое число лет, распространение на общий случай очевидно. Здесь $d^{(m)}$ – номинальная учетная ставка, выплачиваемая m раз в год. Математическое ожидание этой величины имеет вид

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - \mathrm{E}\left[v^{\frac{\lfloor m \cdot T(x) \rfloor + 1}{m}} \right]}{d^{(m)}} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}$$

(обозначение из п. 12.2).

Приняв предположение о равномерном распределении смертей внутри года, можно выразить $\ddot{a}_x^{(m)}$ через $\ddot{a}_x$. Из определения актуарного коэффициента дисконтирования (п. 13.1) следует равенство

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} {}_{k+\frac{j}{m}}E_x \,.$$

Вычислим сумму $U_k = \sum_{j=0}^{m-1} {}_{k+\frac{j}{m}}E_x = \sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j}{m}} {}_{k+\frac{j}{m}}p_x$ при $k = 0, 1, \ldots$ Из предположения о равномерном распределении смертей для дробных возрастов (п. 10.6) $s(k+t) = (1-t)s(k)+ts(k+1)$ при $t\in[0, 1]$. Отсюда

$$_{k+\frac{j}{m}}p_x = \frac{s\left(x+k+\frac{j}{m}\right)}{s(x)} = \left(1-\frac{j}{m}\right)_k p_x + \frac{j}{m}\,_{k+1}p_x.$$

Тем самым

$$U_k = \alpha v^k\,_k p_x + \beta v^{k+1}\,_{k+1}p_x = \alpha\cdot{}_k E_x + \beta\cdot{}_{k+1}E_x,$$

где $\alpha = \sum\limits_{j=0}^{m-1}\left(1-\frac{j}{m}\right)v^{\frac{j}{m}}$, $\beta = \sum\limits_{j=0}^{m-1}\frac{j}{m}v^{\frac{j}{m}-1}$. Окончательно

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}U_k = \frac{\alpha}{m}\sum_{k=0}^{\infty}{}_k E_x + \frac{\beta}{m}\sum_{k=0}^{\infty}{}_{k+1}E_x = \frac{\alpha}{m}\sum_{k=0}^{\infty}{}_k E_x + \frac{\beta}{m}\left(\sum_{k=0}^{\infty}{}_k E_x - 1\right) =$$

$$= \frac{\alpha+\beta}{m}\ddot{a}_x - \frac{\beta}{m}.$$

Вычисление значений α, β приводится в упражнениях.
Справедливы аналоги и других формул для величины $\ddot{a}_x$, а также для соответствующих аннуитетов постнумерандо.

Получим формулу для приближенного вычисления $\ddot{a}_x^{(m)}$ через $\ddot{a}_x$ в общем случае.

Формулу для приближенного вычисления $\ddot{a}_x^{(m)}$ через $\ddot{a}_x$ можно получить на основе формулы Эйлера – Маклорена для функций, удовлетворяющих условиям $f(t)\to 0$, $f'(t)\to 0$ при $t\to\infty$ [4, 16]:

$$\sum_{t=0}^{\infty}f(t) = \int_0^{\infty}f(t)dt + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) - \frac{1}{6}\int_0^1\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right)\sum_{k=0}^{\infty}f'''(k+1-t)dt.$$

С точностью до последнего слагаемого

$$\sum_{t=0}^{\infty} f(t) \approx \int_0^{\infty} f(t)dt + \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12} f'(0).$$

Из этой формулы следует, что

$$\sum_{t=0}^{\infty} f\left(\frac{t}{m}\right) \approx \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{m}\right)dt + \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12m} f'(0) =$$

$$= m\int_0^{\infty} f(t)dt + \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12m} f'(0).$$

Использовав приближение

$$\int_0^{\infty} f(t)dt \approx \sum_{t=0}^{\infty} f(t) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{12} f'(0),$$

получим

$$\frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} f\left(\frac{t}{m}\right) \approx \sum_{t=0}^{\infty} f(t) - \left(\frac{m-1}{2m}\right) f(0) + \left(\frac{m^2-1}{12m^2}\right) f'(0).$$

Выбрав в качестве $f(t)$ функцию

$$f(t) = v^t \cdot {}_t p_x = \exp(-\delta\, t) \cdot \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_u du\right),$$

для которой $f'(t) = -(\delta + \mu_x) \cdot f(t), f(0) = 1, \quad f'(0) = -(\delta + \mu_x)$, получим

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \left(\frac{m-1}{2m}\right) - \left(\frac{m^2-1}{12m^2}\right)(\mu_x + \delta).$$

Заметим, что для функции $f(t) = v^t \cdot {}_t p_x$ выполнены условия:

$f(t) \to 0$ и $f'(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

На практике, пренебрегая последним слагаемым, используют также следующее приближение [4]:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \left(\frac{m-1}{2m}\right).$$

Для аннуитета постнумерандо, учитывая его связь с аннуитетом пренумерандо, получим

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \approx \ddot{a}_x - \left(\frac{m-1}{2m}\right) - \frac{1}{m} = a_x + 1 - \left(\frac{m-1}{2m}\right) - \frac{1}{m} = a_x + \left(\frac{m-1}{2m}\right).$$

13.2.4. Полный пожизненный аннуитет с изменяющейся величиной платежа

1. Аннуитет, выплачиваемый непрерывно

Пусть человек в возрасте x лет начинает получать (выплачивать) деньги непрерывно со скоростью, равной $\beta(t)$ в момент t, до тех пор, пока жив. Стоимость всех платежей, дисконтированная к настоящему моменту, является случайной величиной, зависящей от остаточного времени жизни $T(x)$, и равна $Y(T(x)) = \int\limits_0^{T(x)} v^t \beta(t) dt$ (см. [6, 15, 32, 33]).

Математическое ожидание этой случайной величины вычисляется следующим образом:

$$E\left[Y(T(x)\right] = \int\limits_0^{\infty} Y(u) \cdot {}_u p_x \cdot \mu_{x+u} du = \int\limits_0^{\infty} \left(\int\limits_0^{u} v^t \beta(t) dt \right) \cdot {}_u p_x \cdot \mu_{x+u} du =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} du \int\limits_0^{u} v^t \beta(t) \cdot {}_u p_x \cdot \mu_{x+u} dt.$$

Меняя пределы интегрирования в двойном интеграле, получим

$$E[Y(T(x)]=\int_0^{\infty}dt\int_t^{\infty}v^t\beta(t)\cdot{}_u p_x\cdot\mu_{x+u}du=$$

$$=\int_0^{\infty}v^t\beta(t)(\int_t^{\infty}{}_u p_x\cdot\mu_{x+u}du)dt=\int_0^{\infty}v^t\beta(t)\cdot{}_t p_x dt\,.$$

Пусть скорость выплат в момент t равна t, т.е. $\beta(t) = t$. В этом случае стоимость всех платежей, дисконтированная к настоящему моменту, равна $Y(T(x)) = \int_0^{T(x)} v^t t dt$.

Математическое ожидание этой случайной величины обозначается $(\bar{I}\,\bar{a})_x$ и равно

$$(\bar{I}\,\bar{a})_x=\int_0^{\infty}v^t\cdot t\cdot{}_t p_x dt\,.$$

Если скорость выплат в момент t равна $\beta(t)=\lfloor t\rfloor+1$ (в первый год она равна 1, во второй 2 и т.д.), то стоимость всех платежей, дисконтированная к настоящему моменту, равна $Y(T(x))=\int_0^{T(x)} v^t(\lfloor t\rfloor+1)dt$. Математическое ожидание этой случайной величины обозначается $(I\,\bar{a})_x$ и равно

$$(I\,\bar{a})_x=\int_0^{\infty}v^t(\lfloor t\rfloor+1)\cdot{}_t p_x dt\,,$$

отсюда

$$(I\,\bar{a})_x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{\infty}v^t\cdot{}_t p_x dt=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{k|}\bar{a}_x=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\bar{N}_{x+k}}{D_x}=\frac{\bar{S}_x}{D_x}\,,$$

где $\bar{S}_x$ – коммутационная функция: $\bar{S}_x=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{N}_{x+k}$.

2. *Аннуитет, выплачиваемый один раз в год*

Пусть человек в возрасте x лет начинает получать (выплачивать) деньги пожизненно 1 раз в год. Величина выплаты в t-й год равна $\beta(t)$ (t = 0, 1, 2, . . .). Если $\beta(0) > 0$, то рассматриваемый аннуитет – аннуитет пренумерандо. Стоимость всех платежей, дисконтированная к настоящему моменту, зависит от округленного остаточного времени жизни $K(x)$ и равна $Y(K(x)) = \sum_{t=0}^{K(x)} v^t \beta(t)$.

Математическое ожидание этой случайной величины

$$\mathrm{E}\left[Y(K(x)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) \cdot {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) \frac{d_{x+k}}{l_x} =$$

$$= \frac{1}{l_x} \left\{ Y(0) \sum_{t=0}^{\infty} d_{x+t} + \sum_{t=1}^{\infty} [Y(t) - Y(t-1)] \sum_{j=t}^{\infty} d_{x+j} \right\} =$$

$$= \frac{1}{l_x} \left\{ \beta(0) l_x + \sum_{t=1}^{\infty} v^t \beta(t) l_{x+t} \right\} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \beta(t) {}_t p_x \, .$$

Если $\beta(t) = t + 1$ (в первый год – 1, во второй – 2 и т.д.), то математическое ожидание стоимости всех платежей, дисконтированной к настоящему моменту, обозначается $(I\ddot{a})_x$ и равно

$$(I\,\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) v^t \cdot {}_t p_x = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} (t+1) D_{x+t}}{D_x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=t}^{\infty} D_{x+k}}{D_x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}}{D_x} = \frac{S_x}{D_x},$$

где S_x – коммутационная функция: $S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}$.

Аналогично можно показать, что для аннуитета постнумерандо, т.е. в том случае, когда $\beta(t) = t$, математическое ожидание стоимости всех платежей, дисконтированной к настоящему моменту, равно

$$(I\,a)_x = \sum_{t=1}^{\infty} t v^t \cdot {}_t p_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}.$$

Использовав приближение

$$\int_0^\infty f(t)dt \approx \sum_{t=0}^\infty f(t) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{12}f'(0)$$

(см. п. 12.2) для $f(t) = t \cdot v^t \cdot {}_t p_x = t\exp(-\delta\, t)\cdot \exp(-\int_x^{x+t} \mu_u du)$ (для данной функции $f(0) = 0,\ \ f'(0) = 1$ и выполнены условия: $f(t) \to 0$ и $f'(t) \to 0$ при $t \to \infty$), получим

$$(\bar{I}\,\bar{a})_x \approx \sum_{t=0}^\infty t \cdot v^t \cdot {}_t p_x + \frac{1}{12} = (Ia)_x + \frac{1}{12}.$$

Мы рассмотрели полные пожизненные аннуитеты с изменяющейся величиной платежа, аналогичные вычисления можно провести и для других видов аннуитетов (временного, отсроченного).

13.3. Периодические нетто-премии

Как мы уже упоминали ранее, оплата страхового или пенсионного полисов обычно производится либо сразу в момент заключения договора, либо осуществляется в виде регулярных взносов, как правило, одной и той же величины. В главе 12 мы рассмотрели вычисление разовых премий для основных видов договоров долгосрочного страхования жизни. В этом пункте мы рассмотрим вычисление периодических премий.

Основу для периодической премии, как и для разовой, составляет нетто-премия. Брутто-премии находятся в соответствии с принципами п.1.2 (см. также главу 11 и упражнения к главе 12). Напомним, что основной принцип вычисления нетто-премии – это принцип эквивалентности финансовых обязательств страховщика и страхователя, который может быть выражен уравнением [4]
E[Z] = 0, где E[Z] – математическое ожидание прибыли страховщика, дисконтированной к моменту заключения контракта. Рассматривая Z как функцию от нетто-премии, можно найти последнюю из данного уравнения.

Принцип эквивалентности финансовых обязательств страховщика и страхователя также может быть выражен уравнением

$$\mathrm{E}[Z_1] = \mathrm{E}[Z_2] + \mathrm{E}[Z_3],$$

где $\mathrm{E}[Z_1]$ – математическое ожидание суммарной современной стоимости премий, $\mathrm{E}[Z_2]$ – математическое ожидание суммарной современной стоимости всех выплат по контракту, $\mathrm{E}[Z_3]$ – математическое ожидание суммарной современной стоимости всех расходов страховщика по контракту, если они учитываются. Напомним, что под современной стоимостью мы понимаем стоимость, дисконтированную к моменту заключения контракта. Правая часть данного уравнения представляет собой финансовые обязательства страховщика, а левая – страхователя. Как и $\mathrm{E}[Z] = 0$, данное уравнение – это уравнение относительно нетто-премии, поскольку от нее зависит $\mathrm{E}[Z_1]$, может зависеть $\mathrm{E}[Z_2]$, а в большинстве случаев и $\mathrm{E}[Z_3]$.

Заметим, что в некоторых случаях, например, когда можно оценить среднее настоящее значение будущей прибыли страховщика B, для нахождения премий вместо уравнений $\mathrm{E}[Z] = 0$ и $\mathrm{E}[Z_1] = \mathrm{E}[Z_2] + \mathrm{E}[Z_3]$ используют уравнения

$$\mathrm{E}[Z] = B \text{ и } \mathrm{E}[Z_1] = \mathrm{E}[Z_2] + \mathrm{E}[Z_3] + B.$$

Специальные обозначения имеют периодические нетто-премии по договорам страхования жизни с величиной страховой выплаты, равной 1, вычисленные без учета расходов страховщика. В остальных случаях нетто-премии обычно обозначаются просто буквой P.

Основные правила использования общепринятых обозначений следующие:

1. Периодические нетто-премии обозначаются $P(\ )$. Буква P может иметь различные индексы и знаки. В скобках обычно стоит обозначение разовой нетто-премии для данного договора страхования. Например, $P(\overline{A}_x)$ – периодическая нетто-премия для полного непрерывного страхования жизни.

Если рассматривается дискретный договор страхования жизни, то скобки при P и буква A могут опускаться, при этом все индексы буквы A должны быть перенесены на букву P. Например, $P(A_x) = P_x$.

2. Левый нижний индекс t в ${}_tP$ указывает продолжительность периода выплат премий, т.е. пока страхователь жив, но не более t лет. Если данный индекс отсутствует, то страхователь выплачивает премии в течение всего срока действия договора, пока жив.

3. Правый верхний индекс m в $P^{(m)}$ соответствует числу платежей за год.

4. Черта над P соответствует непрерывно выплачиваемым премиям, отсутствие знака над P соответствует премиям, выплачиваемым пренумерандо.

Формулы для вычисления периодических ежегодных нетто-премий пренумерандо для основных видов договоров страхования жизни приведены в прил. 9.

Поясним некоторые из них. Во всех приведенных ниже примерах задана постоянная годовая эффективная процентная ставка i.

Пример 13.1. Человек в возрасте x лет заключил дискретный договор полного страхования жизни с величиной страхового пособия, равной 1. Определим величину ежегодной премии пренумерандо, которая должна вноситься весь срок действия договора.

Как уже упоминалось выше, искомая премия обозначается P_x. Принцип эквивалентности финансовых обязательств страховщика и страхователя в данном случае выражается уравнением $P_x \cdot \ddot{a}_x = A_x$, где $P_x \cdot \ddot{a}_x$- финансовые обязательства страхователя, а A_x – финансовые обязательства страховщика. Следовательно, премия равна $P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$.

Пример 13.2. В рамках примера 13.1 рассмотрим вместо дискретного непрерывный договор полного страхования жизни. В этом случае искомая премия обозначается $P(\overline{A}_x)$ и изменятся обязательства страховщика, они будут равны $\overline{A}_x$. Принцип эквивалентности финансовых обязательств страховщика и страхователя выражается уравнением $P(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_x = \overline{A}_x$, следовательно,

$$P(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x}.$$

Пример 13.3. В рамках примера 13.1 пусть срок выплат премий ограничен t годами. В этом случае искомая премия обозначается ${}_tP_x$ и изменятся обязательства страхователя, они будут равны ${}_tP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|}$. Принцип эквивалентности финансовых обязательств страховщика и страхователя выражается уравнением ${}_tP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} = A_x$. В итоге

$${}_tP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}.$$

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 13.4. Человек в возрасте x лет заключил договор n-летнего чисто накопительного страхования с величиной страхового пособия S_b. По условиям договора если страхователь скончается до истечения срока действия договора, то в конце года смерти наследникам будут выплачены все уже внесенные премии: а) без начисленных процентов, б) с начисленными на них процентами. Найдем величину ежегодной премии пренумерандо, которая должна вноситься весь срок действия договора.

Обозначим величину ежегодной премии P.

Рассмотрим вариант *а*. Финансовые обязательства страхователя представляют собой: $P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Финансовые обязательства страховщика: $S_b \cdot A_{\underset{x:\overline{n}|}{\ \ 1}}$ – выплата страховой суммы страхователю при дожитии им до срока окончания договора плюс $P \cdot (IA)_{\underset{x:\overline{n}|}{1}}$ – выплата его наследникам уже внесенных премий без процентов. Приравнивая финансовые обязательства страхователя и страховщика, получим уравнение: $P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S_b \cdot A_{\underset{x:\overline{n}|}{\ \ 1}} + P \cdot (IA)_{\underset{x:\overline{n}|}{1}}$. Следовательно, искомая премия равна

$$P = S_b \cdot A_{\underset{x:\overline{n}|}{\ \ 1}} \Big/ \left\{ (\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (IA)_{\underset{x:\overline{n}|}{1}}) \right\}.$$

Рассмотрим вариант *б*. Пусть проценты на уже внесенные премии начисляются ежегодно в соответствии со сложной схемой по ставке j . Уравнение для вычисления премии в данном случае отличается от уравнения варианта *а* вторым слагаемым в правой части. Если страхователь скончается спустя k лет после заключения договора, то к этому времени он уже успеет выплатить kP премий, а с процентами эта величина уже составит $P \cdot \ddot{s}_{\overline{k+1|}} = P \dfrac{(1+j)^{k+1} - 1}{\frac{j}{1+j}}$ (см. [6, 15, 32, 33]). Таким образом, финансовые обязательства страховщика по возврату премий представляют собой математическое ожидание современной стоимости выплаты по дискретному n-летнему договору страхования с величиной страхового пособия в k-й год, равной $P \dfrac{(1+j)^{k+1} - 1}{\frac{j}{1+j}}$.

Математическое ожидание равно $\sum\limits_{k=0}^{n-1} P \dfrac{(1+j)^{k+1} - 1}{\frac{j}{1+j}} v^{k+1} {}_{k|}q_x =$

$$= P \frac{1+j}{j} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (1+j)^{k+1} \frac{1}{(1+i)^{k+1}} {}_{k|}q_x - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x \right\} =$$

$= P \dfrac{1+j}{j} (A^{1\;*}_{x:\overline{n}|} - A^{1}_{x:\overline{n}|})$, где $A^{1\;*}_{x:\overline{n}|}$ – нетто-премия, соответствующая годовой эффективной процентной ставке, равной $\dfrac{i-j}{1+i}$ (коэффициент дисконтирования равен $\dfrac{1+j}{1+i}$). Таким образом, премия P находится из уравнения

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S_b \cdot A^{\;1}_{x:\overline{n}|} + P \frac{1+j}{j} (A^{1\;*}_{x:\overline{n}|} - A^{1}_{x:\overline{n}|}).$$

Следовательно,

$$P = S_b \cdot A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} \Bigg/ \left\{ (\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1+j}{j} (A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}{}^{*} - A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}) \right\}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите формулы прил. 8.

2. (Р) Докажите, что $(I\,a)_x = (I\,\ddot{a})_x - \ddot{a}_x$.

3. (Р) Вычислите математическое ожидание современной стоимости аннуитета для человека в возрасте 20 лет, в случае если это:

a) полный пожизненный ежегодный аннуитет пренумерандо;
b) полный пожизненный ежегодный аннуитет постнумерандо;
c) 10-летний ежегодный аннуитет пренумерандо;
d) 10-летний ежегодный аннуитет постнумерандо;
e) полный пожизненный ежегодный аннуитет пренумерандо, отсроченный на 10 лет;
f) полный пожизненный ежегодный аннуитет постнумерандо, отсроченный на 10 лет;
g) полный пожизненный ежегодный аннуитет пренумерандо, с возрастающей выплатой (коэффициент 1).

Даны значения коммутационных функций: $D_{20} = 15557{,}436$; $N_{20} = 350537{,}04$; $N_{21} = 334979{,}60$; $N_{30} = 219735{,}21$; $N_{31} = 209301{,}91$; $S_{20} = 6578950{,}1$. Годовая эффективная процентная ставка равна 4 %.

4. (Р) Выведите формулу для дисперсии современной стоимости полного пожизненного аннуитета, выплачиваемого непрерывно.

5. (Р) Докажите, что для формулы из п. 13.2.3, полученной при предположении о равномерном распределении смертей внутри года, справедливо равенство

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{\alpha + \beta}{m} \ddot{a}_x - \frac{\beta}{m},$$

где $\alpha=\sum_{j=0}^{m-1}\left(1-\frac{j}{m}\right)v^{\frac{j}{m}}$, $\beta=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{j}{m}v^{\frac{j}{m}-1}$, константы $\frac{\alpha+\beta}{m}$ и $\frac{\beta}{m}$ можно выразить через годовые эффективные процентную i и учетную d, а также через соответствующие номинальные $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$ ставки [6, 15, 32, 33] следующим образом: $\frac{\alpha+\beta}{m}=\frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}$, $\frac{\beta}{m}=\frac{i-i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$.

6. (Р) Вычислите математическое ожидание современной стоимости полного пожизненного аннуитета, выплачиваемого непрерывно, для человека, остаточное время жизни которого характеризуется постоянной интенсивностью смертности, равной 0.05. Сила процента равна 10 %.

7. (Р) Найдите математическое ожидание современной стоимости 3-летнего аннуитета пренумерандо для 50-летних мужчины и женщины, подпадающих под статистику табл. П.5.2. Годовая эффективная процентная ставка равна 20 %.

8. (Р) Мужчина в возрасте 40 лет заключает 3-летний договор страхования жизни на сумму 10000, в соответствии с которым премия вносится в начале каждого года равными долями (если страхователь жив). В случае смерти страховое вознаграждение подлежит выплате в конце года. Компания включает в нетто-премию следующие обязательные расходы (п.1.3):

A) комиссионные страховому агенту, равные 10 % от первой выплачиваемой страховой премии и по 5 % от последующих (если они поступят), выплачиваемые при получении соответствующих премий;

B) расходы на подготовку документов, составляющие 100 рублей в момент заключения договора, по 10 рублей – при поступлении каждой из последующих премий, 120 рублей – при выплате вознаграждения;

C) налоги, равные 10 % от каждой поступающей премии;

D) административные расходы, составляющие 2 % от каждой из премий, взимаемые непосредственно при получении премий.

Найдите соответствующие премии, если смертность описывается табл. П.5.2, а годовая эффективная процентная ставка равна 10 %.

9. (Р) Человек в возрасте x лет заключил непрерывный договор полного страхования жизни с величиной страхового пособия, равной 1. Премии вносятся непрерывно весь срок действия договора. Найдите дисперсию прибыли страховщика, дисконтированной к моменту заключения договора.

10. (Р) Человек в возрасте 40 лет заключил договор пенсионного страхования: начиная с 65 лет пожизненно он будет получать в начале каждого месяца пенсию в размере S_b. Определите величину ежеквартальной премии пренумерандо, которая должна вноситься до наступления пенсионного возраста.

11. (Р) Человек в возрасте 25 лет заключил договор страхования жизни, согласно которому: спустя 30 лет, если он будет жив, то получит три выплаты по 50000 каждая (выплачиваются через год), если скончается раньше, то наследники получат в конце года смерти 100000. Определите величину ежегодной пожизненной премии пренумерандо, которая должна вноситься 10 лет и в первые 5 лет должна быть в два раза больше, чем в последующие 5 лет.

ГЛАВА 14. РЕЗЕРВЫ

14.1. Основные понятия

Пусть человек в возрасте x заключил со страховой компанией или пенсионным фондом тот или иной договор. Будем считать, что договором предусмотрена выплата страхователем только нетто-премии. Если по истечении t лет страхователь еще жив и при этом договор еще действует, то условие эквивалентности обязательств страхователя и страховщика нарушается. Пусть ${}_t a_B$ – средняя современная (на момент t) стоимость будущих обязательств страховщика, ${}_t a_C$ – обязательств страхователя. Величина ${}_tV = {}_t a_B - {}_t a_C$ называется *резервом (или нетто-резервом) по договору на момент t*. Это есть та сумма, которую страховая компания в среднем в будущем должна дополнительно привлечь для выполнения своих обязательств. Большая величина резервов означает просчеты в деятельности компании: возможны ошибочная оценка демографической ситуации, неверная инвестиционная политика и т.д. Заметим, что ${}_0V = 0$ по определению нетто-премии.

Резервы используются для различных целей, в частности, для определения суммы, которую нужно выплатить страхователю, если он досрочно прерывает договор; для вычисления новой величины страхового пособия или премии при изменении условий или даже вида договора; для оценки бонусной ставки для контрактов с прибылью; для расчетов, связанных с распределением прибыли.

Понятие резерва представляет особый интерес для договоров с периодически выплачиваемыми премиями. Для договоров полного страхования жизни с разовыми страховыми выплатами и нетто-премиями, описанных в главе 12, резервы на момент времени t после заключения договора равны $\bar{A}_{x+t}, A_{x+t}$ соответственно для непрерывного и дискретного договоров.

Определение резерва исходит из представления о будущем развитии событий. Этот подход называется *перспективным.* Возможен и иной подход – в этом случае оцениваются уже выполненные обязательства. Такой подход называется *ретроспективным.* В этом случае применяются следующие обозначения: ${}_t s_B$ – средняя современная (на момент t) стоимость уже исполненных обязательств страховщика, ${}_t s_C$ – обязательств страхователя.

Докажем, что

$$ {}_tV = {}_t s_C - {}_t s_B . $$

Действительно, ${}_t s_B + {}_t a_B = U / {}_t E_x$, где U – дисконтированная (к моменту заключения договора) средняя суммарная величина страховых выплат, при этом ${}_t s_C + {}_t a_C = A / {}_t E_x$, где A – дисконтированная средняя суммарная величина страховых премий. Здесь применен актуарный коэффициент дисконтирования, поскольку таковыми являются выплаты и премии. По принципу эквивалентности, $A = U$. Отсюда ${}_t s_B + {}_t a_B = {}_t s_C + {}_t a_C$, т.е. ${}_t s_C - {}_t s_B = {}_t a_B - {}_t a_C$, что и требовалось доказать. Для вычисления резервов в некоторых случаях удобнее использовать ретроспективный, в некоторых – перспективный подход.

Заметим, что обозначения для резервов в значительной мере наследуют особенности обозначений для соответствующих нетто-премий. Приведем некоторые примеры. Обозначения в других случаях формируются без труда:

- если премия выплачивается периодически, пока человек жив и страхование дискретное (непрерывное), то используются обозначения ${}_tV_x$ (${}_tV\left(\overline{A}_x\right)$);
- если премия выплачивается непрерывно, пока человек жив и страхование непрерывное, то используется обозначение ${}_t\overline{V}_x$;
- если срок действия договора ограничен временем *m,* то используется обозначение ${}^m_xV$.

14.2. Вычисление резервов для некоторых видов страхования: перспективный подход

14.2.1. Дискретное полное страхование жизни с периодическими премиями. Напомним (п. 13.3), что такой договор заключается в том, что страхователь будет вносить пожизненно периодически (будем считать в начале каждого года) в страховую компанию сумму P_x, в результате чего в конце года смерти наследникам будет выплачена единица средств. Как было установлено (п. 13.3), $P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$.

Пусть в возрасте $x+t$ страхователь еще жив.

Положим сначала, что t – целое число, которое обозначим k. Поскольку обязательства страховщика сохраняются, то можно считать, что заключен новый договор того же вида, современная стоимость выплат по которому равна A_{x+k}. Тем самым ${}_k a_B = A_{x+k}$. Страхователь должен продолжить выплаты премий, равных P_x, в начале каждого года пожизненно. При единичных выплатах дисконтированная стоимость соответствующего аннуитета составит $\ddot{a}_{x+k}$, отсюда ${}_k a_C = P_x \ddot{a}_{x+k}$. Таким образом,

$$ {}_kV_x = {}_k a_B - {}_k a_C = A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k}. $$

Из этой формулы можно получить и некоторые другие, имеющие интересную содержательную интерпретацию.

1. Величину A_{x+k} можно заменить на $P_{x+k}\ddot{a}_{x+k}$. В результате получим

$$ {}_kV_x = (P_{x+k} - P_x)\ddot{a}_{x+k}. $$

Эта формула называется *формулой разности премий*. Ее смысл состоит в следующем. Можно считать, что страхователю предстоит пожизненно в начале каждого года в среднем выплачивать сумму, равную P_{x+k} (это равносильно обязательствам страховщика в возрасте застрахованного, равном $x+k$), и получать P_x. Таким образом, недостающая для выполнения обязательств сумма, дисконтированная к настоящему моменту, в среднем равна $(P_{x+k}-P_x)\ddot{a}_{x+k}$.

2. Заменим теперь $\ddot{a}_{x+k}$ на $\dfrac{A_{x+k}}{P_{x+k}}$. Отсюда

$$ {}_kV_x=\left(1-\frac{P_x}{P_{x+k}}\right)A_{x+k}. $$

Эта формула называется *формулой оплаченного страхования.* Она показывает, что из будущих поступлений средств страхователя компания может выполнить в среднем только долю обязательств, равную $\dfrac{P_x}{P_{x+k}}$.

Пусть теперь t – произвольное нецелое число, $k=\lfloor t\rfloor$, $s=t-\lfloor t\rfloor>0$. Рассмотрим два взаимно дополнительных события: страхователь доживет до возраста $x+k+1$ (его вероятность ${}_{1-s}p_{x+t}$) и противоположное событие (его вероятность ${}_{1-s}q_{x+t}$). В первом случае все будущие поступления средств совпадают с таковыми для момента $k+1$, тем самым, для вычисления соответствующего резерва значение ${}_{k+1}V_x$ необходимо отнести к моменту t, что равно ${}_{k+1}V_x\cdot v^{1-s}$. Во втором случае предстоит единичная выплата в момент $k+1$. Отнесение этой выплаты к моменту t даст значение v^{1-s}, что и является резервом в этом случае. Применяя формулу полного математического ожидания, получаем: ${}_tV_x=({}_{1-s}p_{x+t}\cdot{}_{k+1}V_x+{}_{1-s}q_{x+t})\cdot v^{1-s}$.

14.2.2. Непрерывное полное страхование жизни с периодическими премиями. Этот договор отличается от предыдущего тем, что вознаграждение выплачивается сразу после смерти. В этом случае ежегодная нетто-премия $P(\bar{A}_x)$ вычисляется по формуле $\dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$ (п. 13.3).

Пусть, как и ранее, сначала число $t=k$ целое. Обязательство страховой компании состоит в выплате единичного вознаграждения сразу после смерти человека, которому ныне $x+k$ лет. Актуарная нынешняя стоимость этой выплаты равна $\bar{A}_{x+k}$. Страхователь должен выплачивать пожизненный аннуитет пренумерандо с ежегодными взносами $P(\overline{A}_x)$, отсюда

$$_kV(\overline{A}_x) = \overline{A}_{x+k} - P(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_{x+k}.$$

Аналогично предыдущему пункту, справедливы формулы

$$_kV(\overline{A}_x) = (\overline{P}_{x+k} - \overline{P}_x)\ddot{a}_{x+k} = \left(1 - \frac{\overline{P}_x}{\overline{P}_{x+k}}\right) A_{x+k}.$$

Их смысл тот же, что и в предыдущем пункте.

Если считать, что момент смерти распределен равномерно в течение последнего года жизни, то справедлива формула п. 12.3: $\overline{A}_{x+k} = \frac{i}{\delta} A_{x+k}$, поскольку $P(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x}$, то $P(\overline{A}_x) = \frac{i}{\delta} P(A_x)$. Тем самым справедливо равенство

$$_kV(\overline{A}_x) = \frac{i}{\delta} \cdot {}_kV_x.$$

Пусть теперь t – произвольное нецелое число, $k = \lfloor t \rfloor$, $s = t - \lfloor t \rfloor > 0$. В этом случае обязательства страхователя те же, что и в прошлом пункте, и находятся из следующих соображений. Если человек не доживет до возраста $x+k+1$, то он ничего дополнительно не выплатит. Если же человек доживет до возраста $x+k+1$, то ему предстоит выплатить актуарный аннуитет, стоимость которого, отнесенная к моменту $k+1$, составит $P(\overline{A}_x)\ddot{a}_{x+k+1}$. Относя эту сумму к нынешнему моменту t и учитывая формулу полной вероятности, получаем

$$_ta_C = v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot P(\overline{A}_x)\ddot{a}_{x+k+1}.$$

Актуарная нынешняя стоимость $_t\,a_B$ обязательств страховой компании, состоящих в выплате единицы сразу после смерти страховщика, равна (п. 12.2) $\overline{A}_{x+t}$, отсюда

$$_kV(\overline{A}_x) = \overline{A}_{x+t} - v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot P(\overline{A}_x)\ddot{a}_{x+k+1}.$$

Все величины, входящие в эту формулу, ранее вычислялись.

14.3. Вычисление резервов для некоторых видов страхования: ретроспективный подход

14.3.1. Дискретное полное страхование жизни с периодическими премиями. Резерв для такого вида страхования в п.14.2 был вычислен с помощью перспективного подхода. Приведем и соответствующую ретроспективную формулу.

Пусть, как и раньше, человек заключил договор в возрасте x, резерв определяем на момент времени k после этого (здесь ограничимся целым значением). Гипотетически уже выполненные обязательства страхователя ${}_k s_C$ на этот момент времени образуют актуарный аннуитет пренумерандо (п. 13.1), срок действия которого ограничен временем k. Выплаты по нему равны P_x. Отсюда средняя накопленная стоимость такой ренты имеет вид ${}_k s_C = P_x \cdot \ddot{s}_{x:\overline{k}|}$.

Обязательства компании состояли в том, что непосредственно после смерти страхователя выплачена единица средств. Выплата будет учтена в этих обязательствах, если человек умрет в возрасте, не превосходящем $x+k$. Соответствующая нетто-премия, вычисленная на момент заключения договора, обозначалась (п. 12.2) $A^{\;1}_{x:\overline{k}|}$. Для отнесения к моменту k эту величину необходимо умножить на актуарный коэффициент накопления $A(x,k) = \dfrac{1}{{}_k E_x}$ (п. 13.1). Отсюда ${}_k s_B = A^{\;1}_{x:\overline{k}|} / {}_k E_x$. Отсюда получаем следующую ретроспективную формулу для резерва:

$$
{}_k V_x = P_x \cdot \ddot{s}_{x:\overline{k}|} - A^{\;1}_{x:\overline{k}|} / {}_k E_x .
$$

В п. 14.1 было доказано в общем случае, что вычисления по ретроспективной и перспективной формулам дают один и тот же результат.

14.3.2. Отсроченные выплаты. Приведем пример вычисления резервов, когда для одних значений t удобно использовать ретроспективный, а для других – перспективный подход.

Пусть человек в возрасте x заключил договор с пенсионным фондом, согласно которому до возраста $x+n$ в начале каждого года он вносит некоторые премии, а начиная с возраста $x+n$ ему пожизненно в начале каждого года выплачивается единичная пенсия. В случае смерти до возраста $x+n$ фонд не несет никаких обязательств.

Найдем, прежде всего, величину страховых премий $P_x(n)$. Премии в совокупности образуют актуарный аннуитет пренумерандо со средней дисконтированной суммой $P_x(n)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ (п. 13.1). Выплаты образуют отсроченный актуарный аннуитет пренумерандо со средней дисконтированной суммой ${}_{n|}\ddot{a}_x$ (п. 13.1). По принципу эквивалентности $P_x(n)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n|}\ddot{a}_x$, откуда $P_x(n) = {}_{n|}\ddot{a}_x / \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$.

Перейдем к вычислению резервов. Пусть $0 \le k < n$ – целое число. В этом случае резерв проще вычислять по ретроспективной формуле. Уже выполненные обязательства страхователя представляют собой k-летний актуарный аннуитет, накопленная средняя стоимость которого составит ${}_t s_C = P_x(n)\ddot{s}_{x:\overline{k}|}$. При этом выполненные обязательства страховщика ${}_t s_B$ нулевые. Отсюда резерв ${}_k^n V_x$ вычисляется по формуле

$$ {}_k^n V_x = {}_t s_C - {}_t s_B = P_x(n)\ddot{s}_{x:\overline{k}|} = {}_{n|}\ddot{a}_x \cdot \ddot{s}_{x:\overline{k}|} / \ddot{a}_{x:\overline{n}|}. $$

Пусть теперь $k \ge n$. В этом случае проще использовать перспективную формулу. Невыполненные обязательства страхователя ${}_t a_C$ нулевые, а страховщика ${}_t a_B = \ddot{a}_{x+k}$, отсюда

$$ {}_k^n V_x = {}_t a_B - {}_t a_C = \ddot{a}_{x+k}. $$

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Докажите, что резервы, вычисленные по формулам п. 14.2.1 и 14.3.1, равны.

2. (Р) Найдите резерв для n-летнего смешанного страхования жизни с премиями, выплачиваемыми в начале каждого года для моментов $k = 0, 1, \ldots, n$.

3. (Р) Найдите резерв через 3 года по 5-летнему договору временного страхования жизни, заключенному с человеком в возрасте 40 лет, премии по которому выплачиваются непрерывно. Предполагается, что смертность описывается законом де Муавра с предельным возрастом 100 лет, сила процента составляет 10 %.

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ

Глава 2

1. В данном случае число исков N – случайная величина, принимающая значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями 0,9, 0,05, 0,04 и 0,01 соответственно. Примем 1000 руб. за 1 у.е., тогда размер предъявляемого иска Y – случайная величина, принимающая значения 3 и 5 с вероятностями 0,6 и 0,4 соответственно. Сумма исков за год – случайная величина $S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$. Ее математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам (2.19), (2.20):

$$\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[N],\ \mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[Y]\mathrm{E}[N] + \mathrm{Var}[N]\mathrm{E}^2[Y].$$

Так как $\mathrm{E}[Y] = 3{,}8$ у.е., $\mathrm{Var}[Y] = 0{,}96$ у.е.^{2}, $\mathrm{E}[N] = 0{,}16$, $\mathrm{Var}[N] = 0{,}2744$, то

$$\mathrm{E}[S] = 0{,}608 \text{ у.е.} = 608 \text{ руб.},$$

$$\mathrm{Var}[S] = 4{,}115936 \text{ у.е.}^2 = 4115936 \text{ руб.}^2.$$

2. Поскольку математическое ожидание и дисперсия суммы исков за год $S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$ (N – число исков за год, а Y – размер одного иска) вычисляются по формулам (2.19), (2.20):

$$\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[N],\ \mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[Y]\mathrm{E}[N] + \mathrm{Var}[N]\mathrm{E}^2[Y],$$

найдем средние значения и дисперсии числа исков и размера иска.

Производящая функция вероятностей числа исков (2.8):

$$m_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}[N = n]z^n = \sum_{n=0}^{\infty} pq^n z^n = \frac{p}{1 - qz},$$

мы использовали формулу суммы геометрической прогрессии.

$\mathrm{E}[N] = m_N'(1) = q/p$,

$\mathrm{Var}[N] = m_N''(1) + m_N'(1) - (m_N'(1))^2 =$

$= 2\,q^2/p^2 + q/p - q^2/p^2 = q/p^2.$

Определим плотность распределения величины одного иска Y:

$f_Y(x) = Cx/(1+x)^5$, при $x > 0$, где C – константа. Так как

$$C\int_0^\infty x/(1+x)^5 dx = C/12,$$

а $\int_0^\infty f_Y(x)dx = 1$, то $C = 12$. Следовательно,

$f_Y(x) = 12x/(1+x)^5$, при $x > 0$.

Математическое ожидание Y: $\mathrm{E}[Y] = 12\int_0^\infty x^2/(1+x)^5 dx = 1$,

второй момент: $\mathrm{E}[Y^2] = 12\int_0^\infty x^3/(1+x)^5 dx = 3$.

Дисперсия $\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{E}[Y^2] - \mathrm{E}^2[Y] = 2$.

Итак, $\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[N] = q/p$,

$\mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[Y]\mathrm{E}[N] + \mathrm{Var}[N]\mathrm{E}^2[Y] = 2\,q/p + q/p^2.$

5. Математическое ожидание ущерба строения от пожара равно $\mathrm{E}[X] = 4800$.

Случайную величину «ущерб от пожара» X можно представить в виде $X = IY$, где I – индикаторная величина, определяющая наличие пожара, а случайная величина Y – ущерб при наступлении пожара. Естественно предположить, что случайные величины I и Y независимы. Тогда средний размер ущерба при наступлении пожара равен $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[X]/\mathrm{E}[I]$. Так как индикаторная величина I принимает значение 0 с вероятностью 0,8 и значение 1 с вероятностью 0,2, то

E[I] = 0,2. Следовательно, E[Y] = 24000.

Глава 3

3. Вероятность того, что иск не превысит 220, равна

$$\mathrm{P}[Y \le 220] = \mathrm{P}[\ln Y \le \ln 220] = \mathrm{P}\left[\frac{\ln Y - \mathrm{E}[\ln Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\ln Y]}} \le \frac{\ln 220 - \mathrm{E}[\ln Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\ln Y]}}\right] =$$

$$= \mathrm{P}\left[\frac{\ln Y - \mathrm{E}[\ln Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\ln Y]}} \le \frac{\ln 220 - 7{,}5}{\sqrt{1{,}2}}\right] \approx \mathrm{P}\left[\frac{\ln Y - \mathrm{E}[\ln Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\ln Y]}} \le -1{,}92\right] \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{-1{,}92} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)dx.$$

По таблице значений функции стандартного нормального распределения (прил. 1) данная вероятность равна 0,02743 (таблица дает значения $\Phi(x)$ для неотрицательных x; для отрицательных x следует использовать соотношение $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$).

8. Пусть случайная величина Y – размер иска. Вероятность того, что иск не превысит 5: $\mathrm{P}[Y \le 5] = F_Y(5)$, где $F_Y(x)$ – функция распределения случайной величины Y.

По условию задачи $F_Y(x) = \mathrm{E}_\lambda[F_Y(x, \lambda)] = \mathrm{E}_\lambda[1 - \exp(-\lambda x)]$ (п. 3.4). Так как параметр λ равномерно распределен на отрезке [1,2], то

$$F_Y(x) = \mathrm{E}_\lambda[1 - \exp(-\lambda x)] = \int_1^2 (1 - \exp(-yx))dy = \left(y + \frac{1}{x}\exp(-yx)\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{x}(\exp(-2x) - \exp(-x)).$$

Поэтому $\mathrm{P}[Y \le 5] = F_Y(5) = 1 + \frac{1}{5}(\exp(-10) - \exp(-5)) \approx 0{,}999$.

9. Покажем, что производящая функция моментов случайной величины $\xi_1^2 + \xi_2^2 +...+ \xi_n^2$ совпадает с производящей функцией моментов гамма-распределения. Если $\lambda = 0{,}5$ и $\alpha = n/2$, то производящая функция моментов гамма-распределения равна $M(t) = (1-2t)^{-n/2}$.

Производящая функция моментов суммы независимых случайных величин

$$M_{\xi_1^2+...+\xi_n^2}(t) = (M_{\xi_i^2}(t))^n,$$

где $M_{\xi_i^2}(t)$ – производящая функция моментов произвольной из величин $\xi_1^2, \xi_2^2, ..., \xi_n^2$. Найдем $M_{\xi_i^2}(t)$.

Вычислим плотность распределения СВ ξ_i^2.

$$f(x) = F'(x) = \left(\mathrm{P}\left[\xi_i^2 \le x\right]\right)' = 2\left(\mathrm{P}\left[0 \le \xi_i \le \sqrt{x}\right]\right)' =$$

$$= 2\left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)dt\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp(-x/2) \text{ при } x \ge 0.$$

Производящая функция моментов $M_{\xi_i^2}(t)$ имеет вид

$$M_{\xi_i^2}(t) = \mathrm{E}[\exp(t\xi_i^2)] = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp(-x/2)\exp(tx)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} x^{-1/2} \exp(-(1/2-t)x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1/2-t)}} \int\limits_0^{\infty} \{(1/2-t)x\}^{-1/2} \exp\{-(1/2-t)x\} d\{(1/2-t)x\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1/2-t)}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}, \text{ так как } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ (п. 3.3).}$$

Таким образом, $M_{\xi_1^2+\ldots\xi_n^2}(t)=(M_{\xi_i^2}(t))^n=\left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right)^n$, что и требовалось доказать.

Глава 4

1. Обозначим через N – годовое число катастроф, а через S – годовые выплаты по рассматриваемому договору страхования. Пусть 20000 руб. = 1 у.е., тогда СВ S принимает неотрицательные целые значения, причем

$$\mathrm{P}[S=0]=\mathrm{P}[N=0]+\mathrm{P}[N=1] \text{ и } \mathrm{P}[S=n]=\mathrm{P}[N=n+1] \text{ при } n\geq 1.$$

Найдем математическое ожидание СВ S:

$$\mathrm{E}[S]=\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{P}[S=n]=\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{P}[N=n+1]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\mathrm{P}[N=n+1]-\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}[N=n+1]=$$

$$=(\mathrm{E}[N]-\mathrm{P}[N=1])-(1-\mathrm{P}[N=0]-\mathrm{P}[N=1])=$$

$$=\mathrm{E}[N]-1+\mathrm{P}[N=0].$$

Так как $\mathrm{E}[N]=1{,}5$, а $\mathrm{P}[N=0]=\exp(-1{,}5)$, то

$$\mathrm{E}[S]=1{,}5-1+\exp(-1{,}5)=0{,}723 \text{ у.е.} = 14460 \text{ руб.}$$

4. Число N смерчей за 20 лет – случайная величина, подчиненная биномиальному распределению с параметрами $K = 20$ и $p = 0{,}02$. Вероятность того, что число смерчей за 20 лет не превысит 3, равна $\mathrm{P}[N\leq 3]=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{P}[N=n]$. Так как

$$\mathrm{P}[N=n]=\frac{K!}{n!(K-n)!}(1-p)^{K-n}p^n,$$

то

$$\mathrm{P}[N=0]=0{,}98^{20}\approx 0{,}6676,$$

$$\mathrm{P}[N=1]=\frac{20!}{19!}0{,}98^{19}0{,}02\approx 0{,}2725,$$

$$\mathrm{P}[N=2]=\frac{20!}{2!18!}0{,}98^{18}0{,}02^{2}\approx 0{,}0528,$$

$$\mathrm{P}[N=3]=\frac{20!}{3!17!}0{,}98^{17}0{,}02^{3}\approx 0{,}0065.$$

Итак, $\mathrm{P}[N\le 3]\approx 0{,}9994$.

7. Пусть случайная величина N – число страховых случаев. Вероятность того, что будет предъявлено более одного иска:

$$\mathrm{P}[N>1]=1-\mathrm{P}[N=0]-\mathrm{P}[N=1].$$

По условию задачи $\mathrm{P}[N=n]=\mathrm{E}_\lambda\,[\mathrm{P}[N=n,\lambda]]=\mathrm{E}_\lambda\left[\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\right]$.

Так как параметр λ равномерно распределен на отрезке [1,4], то

$$\mathrm{P}[N=n]=\mathrm{E}_\lambda\left[\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\right]=\int_1^4\frac{y^n}{3n!}e^{-y}dy.$$

Так, $\mathrm{P}[N=0]=\int_1^4\frac{1}{3}e^{-y}dy=\frac{1}{3}\left(e^{-1}-e^{-4}\right)$,

$$\mathrm{P}[N=1]=\int_1^4\frac{1}{3}ye^{-y}dy=\frac{1}{3}\left(2e^{-1}-5e^{-4}\right).$$

Поэтому $\mathrm{P}[N>1]=1-e^{-1}+2e^{-4}\approx 0{,}67$.

Глава 5

4. Производящая функция моментов суммарного иска равна
$M_S(t)=(1-2t)^{-2}(1-2t)^{-2.5}(1-2t)^{-3}=(1-2t)^{-7.5}$.

Математическое ожидание и дисперсию суммарного иска можно вычислить по формулам:

$$E[S] = M_S'(0),\ Var[S]= M_S''(0) - (M_S'(0))^2.$$

Поскольку

$$M_S'(t) = 15(1-2t)^{-8,5},\ M_S''(t) = 255(1-2t)^{-9,5},$$

то E[S] = 15 и Var[S] = 30.

Математическое ожидание и дисперсию суммарного иска можно найти и следующим образом.

Производящую функцию моментов суммарного иска можно представить в виде

$$M_S(t) = \left(\frac{1/2}{1/2-t}\right)^{7,5}.$$

Это производящая функция моментов гамма-распределения с параметрами $\lambda = 1/2$ и $\alpha = 7.5$. Поэтому математическое ожидание и дисперсия суммарного иска: $E[S] = \alpha/\lambda = 15$ и $Var[S] = \alpha/\lambda^2 = 30$.

5. Представим СВ X – иск по одному договору страхования в виде произведения независимых случайных величин I и Y. СВ I – индикаторная величина, определяющая факт предъявления иска.

$P[I = 0] = 0,8$, $P[I = 1] = 0,2$. Поэтому $E[I] = 0,2$ $Var[I] = 0,16$.

СВ Y – размер предъявляемого иска. По условию, СВ Y подчинена экспоненциальному закону распределения с параметром равным 1/100 = 0,01. Отсюда

$$E[Y] = 100 \text{ и } Var[Y] = 10000.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию иска по одному договору по формулам

$$E[X] = E[I]E[Y] = 20,\ Var[X] = Var[I]E^2[Y]+Var[Y]E[I]=3600.$$

Математическое ожидание и дисперсия суммарного иска по 200 договорам страхования равны

$$\mathrm{E}[S] = 200\mathrm{E}[X] = 4000,\ \mathrm{Var}[S] = 200\mathrm{Var}[X] = 720000.$$

Сумма премий равна $u = 200(\mathrm{E}[X] + 10) = 6000$.

Применяя нормальное приближение, искомую вероятность можно вычислить следующим образом:

$$\mathrm{P}[S < u] = \mathrm{P}\left[\frac{S - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} < \frac{u - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right] = \mathrm{P}\left[\frac{S - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} < 2{,}36\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2{,}36} \exp(-x^2/2)dx \approx 0{,}99 \text{ (прил. 1).}$$

7. Примем 1000 руб. за 1 у.е.

Суммарный иск $S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$ представляет собой дискретную случайную величину с неотрицательными целыми значениями. Искомую вероятность найдем по формуле

$$\mathrm{P}[S > 2] = 1 - \mathrm{P}[S = 0] - \mathrm{P}[S = 1] - \mathrm{P}[S = 2].$$

Для вычисления $\mathrm{P}[S = n]$ применим формулу

$$\mathrm{P}[S = n] = m_S^{(n)}(0)/n!,$$

где $m_S(t)$ – производящая функция СВ – суммарного иска S.

Производящая функция случайной величины S имеет вид

$$m_S(t) = m_N(m_Y(t)) = \left(\frac{p}{1 - q m_Y(t)}\right)^{\alpha} =$$

$$= \left(\frac{0{,}2}{1 - 0{,}48t - 0{,}24t^2 - 0{,}08t^5}\right)^4,$$

где $m_Y(t) = 0{,}6t + 0{,}3t^2 + 0{,}1t^5$ – производящая функция величины иска Y.

Вычислим производные производящей функции суммарного иска.

$$m_S'(t) = 4 \cdot 0{,}2^4 \left(0{,}48 + 0{,}48t + 0{,}4t^4\right)\left(1 - 0{,}48t - 0{,}24t^2 - 0{,}08t^5\right)^{-5}.$$

$$m_S''(t) = 4 \cdot 0{,}2^4 \left(0{,}48 + 1{,}6t^3\right)\left(1 - 0{,}48t - 0{,}24t^2 - 0{,}08t^5\right)^{-5} +$$

$$+ 20 \cdot 0{,}2^4 \left(0{,}48 + 0{,}48t + 0{,}4t^4\right)^2 \left(1 - 0{,}48t - 0{,}24t^2 - 0{,}08t^5\right)^{-6}.$$

$\mathrm{P}[S = 0] = m_S(0) = 0{,}2^4 = 0{,}0016,$

$\mathrm{P}[S = 1] = m_S'(0) = 4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}48 \approx 0{,}00307$

$\mathrm{P}[S = 2] = m_S''(0)/2 = (4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}48 + 20 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}48^2)/2 \approx 0{,}00522.$

Таким образом,

$\mathrm{P}[S > 2] = 1 - \mathrm{P}[S = 0] - \mathrm{P}[S = 1] - \mathrm{P}[S = 2] \approx 0{,}99.$

Глава 6

1. Пусть I – индикаторная СВ, определяющая наступление страхового случая, тогда $\mathrm{P}[I = 1] = 1/6$, $\mathrm{P}[I = 0] = 5/6$. Обозначим через T – момент наступления страхового случая и через A – событие «выплаты компании больше ее капитала». Тогда вероятность разорения компании равна

$$\psi = \mathrm{P}[A|I = 0]\mathrm{P}[I = 0] + \mathrm{P}[A|I = 1]\mathrm{P}[I = 1] = \mathrm{P}[A|I = 1]\mathrm{P}[I = 1],$$

так как $\mathrm{P}[A|I = 0] = 0$.

Капитал компании к моменту T равен $1000 + 5000T$ руб., выплаты компании равны 7000 руб.

$P[A|I = 1] = P[7000 > 1000 + 5000T] =$

$$= P[T < 1{,}2] = \int_1^{1{,}2} 3t^{-4}dt \approx 0{,}421.$$

Вероятность разорения компании равна

$\psi = P[A|I = 1]P[I = 1] \approx 0{,}421/6 = 0{,}0702.$

2. Пусть СВ Y_i – величина иска предъявляемого в момент времени i. Скорость поступления премий

$c = (1+\Lambda)\lambda m = (1+0.25)10 = 12{,}5.$

В момент 1 капитал компании равен

$5+12{,}5 - Y_1 = 17{,}5 - Y_1.$

Капитал компании в момент 2 равен

$17{,}5 - Y_1 + 12{,}5 - Y_2 = 30 - Y_1 - Y_2.$

Вероятность разорения в момент 2 равна

$\psi\,(2) = P[17{,}5 - Y_1 \geq 0;\ 30 - Y_1 - Y_2 < 0].$

Так как случайные величины Y_1 и Y_2 независимы, то плотность распределения системы случайных величин Y_1, Y_2 равна

$$f_{Y_1,Y_2}(x, y) = f_{Y_1}(x) f_{Y_2}(y).$$

Отсюда $f_{Y_1,Y_2}(x, y)$ = 1/400 при $0 < x < 20$, $0 < y < 20$, и равна 0 при остальных значениях x и y.

Вероятность разорения в момент 2 равна

$\psi\,(2) = P[17{,}5 - Y_1 \geq 0,\ 30 - Y_1 - Y_2 < 0] =$

$$= \iint\limits_{\left\{\begin{smallmatrix} 0<Y_1\le 17,5, \\ 0<Y_2<20, \\ Y_1+Y_2>30 \end{smallmatrix}\right\}} f_{Y_1,Y_2}(x,y)dxdy = \int\limits_{10}^{17,5} dx \int\limits_{30-x}^{20} 1/400 dy =$$

$$= \frac{1}{400} \int\limits_{10}^{17,5} (x-10)dx \approx 0{,}0703.$$

4. Примем 1000 руб. за 1 у.е. Так как среднее число страховых случаев за год $\lambda = 12$, скорость поступления премий $c = 150$ у.е., размер исков m и относительная страховая надбавка Λ удовлетворяют уравнению

$$c = (1+\Lambda)\lambda m, \text{ то } \Lambda = c/(\lambda m) - 1 = 12{,}5/m - 1.$$

Уравнение для характеристического коэффициента в данном случае имеет вид

$$\exp(mr) = 1+(1+12{,}5/m - 1)mr \text{ или } \exp(mr) = 1+12{,}5r.$$

Так как характеристический коэффициент $R = 0{,}8$ удовлетворяет данному уравнению, то

$$\exp(0{,}8m) = 11.$$

Отсюда размер исков $m = 2{,}997$ тыс. руб.

Глава 7

1. Возможные значения иска X_1^* по договору первого типа для перестраховочной компании равны 0 и 3 000 руб. с вероятностями 0,99 и 0,01 соотвественно. Математическое ожидание иска X_1^* равно $E[X_1^*] = 30$ руб.

Возможные значения иска X_2^* по договору второго типа для перестраховочной компании равны 0 и 10 000 руб. с вероятностями $1-p$ и p соответственно. Математическое ожидание иска X_2^* равно

$E[X_2^*] = 10000p$ руб.

Общая плата за перестрахование (см. п. 7.5) равна

$$(1+\Lambda^*)(100\ E[X_1^*]+200\ E[X_2^*]) = 1{,}2(3000+2000000p).$$

По условию упражнения она составляет 8 400 руб. Отсюда

$$1{,}2(3000+2000000p) = 8400.$$

Решая это уравнение, получим $p = 0{,}002$.

2. Представим СВ X – иск по одному договору страхования в виде произведения независимых случайных величин I и Y. СВ I – индикаторная величина, определяющая факт предъявления иска, т.е.

$$P[I = 0] = 0{,}875,\ P[I = 1] = 0{,}125.\ \text{Поэтому } E[I] = 0{,}125.$$

СВ Y – размер предъявляемого иска. По условию СВ Y подчинена распределению Парето с параметрами $\alpha = 4$ и $\lambda = 900$. Отсюда (п. 3.2)

$E[Y] = \lambda/(\alpha-1) = 900/3 = 300.$

Найдем математическое ожидание иска по одному договору по формуле

$$E[X] = E[I]E[Y] = 37{,}5.$$

Математическое ожидание суммарного иска по 200 договорам страхования равно

$$E[S] = 200E[X] = 7500.$$

Средний доход страховой компании после перестрахования (п. 7.3) равен

$$(\Lambda - \Lambda^*)\ E[S]+ \Lambda^*\ \beta E[S] = 375 +1500\beta,$$

так как $\Lambda = 0{,}25$, $\Lambda^* = 0{,}2$.

По условию средний доход компании равен 1200. Отсюда

$$375+1500\beta = 1200.$$

Решая это уравнение, получим $\beta = 0{,}55$.

3. Пусть Y_1, Y_2 – величины предъявляемых исков по договорам первого и второго типов соответственно.

Суммарный иск по всему портфелю страховой компании на основе свойства составного пуассоноского распределения (см. п. 5.2.2) также подчинен составному распределению Пуассона с параметром

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 8$$

и возможными значениями предъявляемого иска Y, равными 10000 руб. и 20000 руб., причем

$$P[Y = 10000] = (\lambda_1 /\lambda)P[Y_1 = 10000] + (\lambda_2 /\lambda)P[Y_2 = 10000] =$$

$$= (3/8)0{,}6 + (5/8)0{,}8 = 0{,}725,$$

$$P[Y = 20000] = (\lambda_1 /\lambda)P[Y_1 = 20000] + (\lambda_2 /\lambda)P[Y_2 = 20000] =$$

$$= (3/8)0{,}4+(5/8)0{,}2 = 0{,}275.$$

Математическое ожидание величины предъявляемого иска равно

$$E[Y] = 12750 \text{ руб.}$$

Математическое ожидание суммарного иска по всему портфелю равно

$$E[S] = \lambda E[Y] = 102000 \text{ руб.}$$

После эксцедентного перестрахования с пределом удержания, равным 5 000 руб. по каждому иску, среднее число исков λ не изменится. Возможное значение предъявляемого иска $Y^{(r)}$ и его математическое ожидание $\mathrm{E}[Y^{(r)}]$ равны 5000 руб.

Математическое ожидание суммарного иска по всему портфелю после перестрахования равно

$$\mathrm{E}[S^{(r)}] = \lambda \mathrm{E}[Y^{(r)}] = 40000 \text{ руб.}$$

Средний доход передающей страховой компании после перестрахования (п. 7.4) равен

$$(\Lambda - \Lambda^*)\ \mathrm{E}[S] + \Lambda^*\ \mathrm{E}[S^{(r}] = 4900 \text{ руб.},$$

так как $\Lambda = 0{,}2$, $\Lambda^* = 0{,}25$.

Глава 8

1. Суммарный иск по всему портфелю страховой компании на основе свойства составного пуассоноского распределения (п. 5.2.2) также подчинен составному распределению Пуассона с параметром λK. В этом случае среднее число исков по портфелю равно λK.

Математическое ожидание и дисперсия суммарного иска по всему портфелю равны

$$\mathrm{E}[S] = \lambda K\ \mathrm{E}[Y] = 1320\lambda K \text{ руб.},$$

$$\mathrm{Var}[S] = \lambda K\ (\mathrm{Var}[Y] + \mathrm{E}^2[Y]) = 2092400\lambda K \text{ руб}^2.$$

Приблизим распределение суммарного иска нормальным распределением с математическим ожиданием $1320\lambda K$ и дисперсией $2092400\lambda K$. В этом случае, чтобы класс исков по портфелю был ($k = 0{,}1$, $p = 0{,}95$) вполне доверительным должно выполняться условие (см. пример 8.1)

$$\Phi\left(k\frac{\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right) = \Phi\left(0{,}1\frac{1320\lambda K}{\sqrt{2092400\lambda K}}\right) \geq \frac{p}{2} + 0{,}5 = 0{,}975.$$

Из таблицы квантилей стандартного нормального распределения (прил. 2) находим, что

$$0{,}1\frac{1320\lambda K}{\sqrt{2092400\lambda K}} \ge 1{,}96\,.$$

Из этого неравенства следует, что $\lambda K \ge 461$, т.е. среднее число исков по портфелю должно быть не менее 461, а число договоров в этом случае должно быть не менее $461/\lambda \approx 154$.

2. Обозначим через СВ X – среднее число исков по одному договору, предъявляемых за год. По условию априорное распределение СВ X – гамма-распределение с параметрами λ и α. В качестве априорного значения среднего числа исков по договору выбирается математическое ожидание $\mathrm{E}[X] = \alpha/\lambda$.

Плотность распределения X имеет вид

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \text{ при } x > 0.$$

При достаточно малых Δx

$$\mathrm{P}[x < X \le x + \Delta x] \approx \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \Delta x$$

с точностью до бесконечно малых высшего порядка.

При условии, что среднее число исков по одному договору за год равно x, число исков N по портфелю из K договоров подчиняется распределению Пуассона с параметром xK. Поэтому вероятность того, что за год по портфелю будет n исков, определяется по формуле:

$$\mathrm{P}[N = n \mid X = x] = \frac{(Kx)^n}{n!} e^{-Kx}\,.$$

Вычислим условную вероятность $P[x < X \le x + \Delta x | N = n]$, применяя формулу Байеса

$$P[x < X \le x + \Delta x | N = n] =$$

$$= \frac{P[N = n | X = x] P[x < X \le x + \Delta x]}{\int_0^\infty P[N = n | X = x] f_X(x) dx} =$$

$$= \frac{\frac{(Kx)^n}{n!} e^{-Kx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \Delta x}{\int_0^\infty \frac{(Kx)^n}{n!} e^{-Kx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx} =$$

$$= \frac{x^{n+\alpha-1} e^{-(K+\lambda)x} \Delta x}{\int_0^\infty x^{n+\alpha-1} e^{-(K+\lambda)x} dx} = \frac{(K+\lambda)^{n+\alpha} x^{n+\alpha-1} e^{-(K+\lambda)x} \Delta x}{\int_0^\infty t^{n+\alpha-1} e^{-t} dt} =$$

(переходя в интеграле к новой переменой $(K+\lambda)x = t$)

$$= \frac{(K+\lambda)^{n+\alpha} x^{n+\alpha-1} e^{-(K+\lambda)x} \Delta x}{\Gamma(n+\alpha)}.$$

Следовательно, плотность распределения СВ X при условии, что $N = n$, имеет вид

$$\frac{(K+\lambda)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} x^{n+\alpha-1} e^{-(K+\lambda)x},$$

т.е. апостериорное распределение СВ X также является гамма-распределением с параметрами $\overline{\lambda} = \lambda + K$ и $\overline{\alpha} = \alpha + n$.

В качестве апостериорной оценки среднего числа исков по договору выберем

$$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\lambda}} = \frac{\alpha + n}{\lambda + K} = \frac{K}{\lambda + K}\frac{n}{K} + \frac{\lambda}{\lambda + K}\frac{\alpha}{\lambda} = z\frac{n}{K} + (1 - z)\frac{\alpha}{\lambda},$$

где $z = \dfrac{K}{\lambda + K}$.

Итак, апостериорное значение среднего числа исков по договору вычисляется как взвешенное среднее его априорной оценки $\dfrac{\alpha}{\lambda}$ и оценки этого параметра на основе данных наблюдений $\dfrac{n}{K}$.

3. Воспользуемся результатами предыдущего упражнения.

Так как математическое ожидание и дисперсия априорного распределения СВ X – среднего числа исков по одному договору вычисляются по формулам

$$\mathrm{E}[X] = \alpha/\lambda \text{ и } \mathrm{Var}[X] = \alpha/(\lambda^2),$$

то значения параметров априорного гамма-распределения равны

$$\lambda = \mathrm{E}[X]/\ \mathrm{Var}[X] = 0{,}16\ /0{,}00256 = 62{,}5,$$

$$\alpha = \mathrm{E}^2[X]/\ \mathrm{Var}[X] = (0{,}16)^2/0{,}00256 = 10.$$

Поскольку по условию упражнения число договоров K = 2300, а число предъявленных в течение года исков n = 480, то апостериорное распределение СВ X является гамма-распределением с параметрами

$$\overline{\lambda} = \lambda + K = 62{,}5+2300= 2362{,}5 \text{ и}$$

$$\overline{\alpha} = \alpha + n = 10+480=580.$$

Поэтому в качестве новой оценки среднего числа исков выберем $\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\lambda}} \approx 0{,}2455$.

Глава 10.

1. Из данного равенства следует, что функция выживания $s(x)= = \frac{1}{(1+kx)^2}$. Отсюда кривая смертей $f(x) = -s'(x) = \frac{2k}{(1+kx)^3}$, интенсивность смертности $\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{2k}{1+kx}$.

$$\overset{\circ}{e}_0 = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \frac{2kx}{(1+kx)^3}dx = \int_0^\infty \frac{2}{(1+kx)^2}dx - \int_0^\infty \frac{2}{(1+kx)^3}dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{k(1+kx)} + \frac{1}{k(1+kx)^2}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{k}.$$

$$\mu_1 = \frac{2k}{1+k}.$$

$$_{1|}q_0 = \frac{s(1)-s(2)}{s(0)} = \frac{1/(1+k)^2 - 1/(1+2k)^2}{1} = \frac{2k+3k^2}{(1+k)^2(1+2k)^2}.$$

$$\overset{\circ}{e}_{10} = \frac{1}{s(10)}\int_0^\infty s(x+10)dx = (1+10k)^2 \cdot \left(-\frac{1}{k(1+k(x+10))}\right)\Bigg|_0^\infty = 10 + \frac{1}{k}$$

(см. п.10.4).

Рост k соответствует менее «живучей» популяции. Данный закон неправдоподобен, поскольку кривая смертей является монотонной. Реальная кривая, как отмечалось, имеет максимум.

2. Проверим выполнение нужных свойств. Функция $f(x) = \frac{x}{a^2}e^{-x/a}$ на промежутке $[0,\infty)$ неотрицательная.

Далее, $\int_0^\infty \frac{x}{a^2}e^{-x/a}dx = \frac{1}{a^2}\left(uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty vdu\right)$ при $u = x,\ v = -ae^{-x/a}$. Тем самым искомый интеграл равен $\frac{1}{a^2}\left(0 + a^2 e^{-x/a}\Big|_0^\infty\right) = 1$. Здесь использованы формулы $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x/a}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(xe^{-x/a}\right) = 0$ при $a > 0$, в последнем случае можно использовать правило Лопиталя. Нужные свойства выполняются.

Функция выживания $s(x)$ удовлетворяет условиям $s'(x) = -f(x)$, $s(0)=1$. Отсюда вытекает равенство $s(x) = 1 - \int\limits_0^x f(t)dt$. Вычисляя интеграл аналогично предыдущему, получим $s(x) = 1 - \frac{t}{a}e^{-t/a}\Big|_0^x + e^{-t/a}\Big|_0^x = \frac{x+a}{a}e^{-x/a}$. Отсюда $\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{x}{a(x+a)}$. Среднюю продолжительность предстоящей жизни проще всего вычислить по формуле $\overset{0}{e}_x = \frac{1}{s(x)}\int\limits_0^\infty s(x+y)dy$ из п. 10.4. Имеем $\overset{0}{e}_x = \frac{ae^{x/a}}{x+a}\int\limits_0^\infty \frac{x+y+a}{a}e^{-(x+y)/a}dy = a + \frac{a^2e^{x/a}}{x+a}$. В частности, при $x = 0$ получаем $\overset{0}{e}_0 = 2a$.

Для оценки правдоподобности приведенного закона исследуем функцию $f(x) = \frac{x}{a^2}e^{-x/a}$. $f'(x) = \frac{a-x}{a^3}e^{-x/a}$. Видно, что кривая смертей имеет максимум при $x = a$. Как отмечалось, для реальных законов эта величина примерно равна средней продолжительности предстоящей жизни, что не соответствует результатам вычислений.

3. Все функции в точке 0 обращаются в 0 и стремятся к 0 при $x\to\infty$. Очевидно, что вторая и третья функции убывают, в то же время первая функция при $x = 1$ равна $\exp(1 - 0.5(3^1 - 1)) = 1$. Тем самым на отрезке [0,1] первая функция убывающей не является. Отсюда свойствами функции выживания первая функция не обладает, а вторая и третья обладают.

4. ${}_{t+r}p_x=\dfrac{s(x+t+r)}{s(x)}$, ${}_{r}p_{x+t}=\dfrac{s(x+t+r)}{s(x+t)}$.

${}_{r}q_{x+t}=\dfrac{s(x+t)-s(x+t+r)}{s(x+t)}$, ${}_{t|r}q_x=\dfrac{s(x+t)-s(x+t+r)}{s(x)}$.

Оба неравенства следуют из убывания функции $s(x)$. Читателю рекомендуется понять и неформальный смысл этих неравенств.

5. Воспользуемся равенствами ${}_t p_x=\dfrac{s(x+t)}{s(x)}$, $\mu_{t+x}=-\dfrac{s'(x+t)}{s(x+t)}$, отсюда ${}_t p_x\cdot\mu_{x+t}=-\dfrac{s'(x+t)}{s(x)}$. Далее $q_x=\dfrac{s(x)-s(x+1)}{s(x)}$, откуда по формуле Лагранжа $q_x=-\dfrac{s'(x+\xi)}{s(x)}$, где $\xi\in(0,1)$. Из-за убывания величины ${}_t p_x\cdot\mu_{x+t}=-\dfrac{s'(x+t)}{s(x)}$ справедливо неравенство $q_x=-\dfrac{s'(x+\xi)}{s(x)}<-\dfrac{s'(x)}{s(x)}=\mu_x$, что и требовалось.

6. Рассмотрим событие, состоящее в том, что первый человек умрет в возрастном интервале $[x+u,\ x+u+\Delta u]$, а второй – в возрастном интервале $[y+v,\ y+v+\Delta v]$ ($x+u+\Delta u<n$). Из условия задачи

$$\mathrm{P}[u\le T(x)<u+\Delta u]=\frac{s_1(x+u)-s_1(x+u+\Delta u)}{s_1(x)}=$$

$$=\frac{(\omega-x-u)/\omega-(\omega-x-u-\Delta u)/\omega}{(\omega-x)/\omega}=\Delta u/(\omega-x),$$

$$\mathrm{P}[v\le T(y)<v+\Delta v]=\frac{s_2(y+v)-s_2(y+v+\Delta v)}{s_2(y)}.$$

Для функции выживания второго человека справедливо равенство $s_2(x)=e^{-\int_0^x\mu_t dt}=e^{-\mu x}$, отсюда,

$$\mathrm{P}[v \le T(y) < v+\Delta v] = \frac{e^{-\mu(y+v)} - e^{-\mu(y+v+\Delta v)}}{e^{-\mu y}} =$$

$$= e^{-\mu v} - e^{-\mu(v+\Delta v)} \approx e^{-\mu v}\left(1-(1-\mu\Delta v)\right) = e^{-\mu v}\,\mu\Delta v.$$

Из независимости случайных величин $T(x)$ и $T(y)$ следует, что вероятность произведения событий $\{u \le T(x) < u+\Delta u\}$ и $\{v \le T(y) < v+\Delta v\}$ равна произведению их вероятностей. Разбивая область $D=\{0 \le u \le n,\ 0 \le v \le u\}$ плоскости (u,v) на прямоугольники, суммируя вероятности полученных несовместных событий и переходя к пределу, когда диаметры областей стремятся к 0, получаем, что искомая вероятность равна двойному интегралу $\iint\limits_D \frac{1}{\omega - x}\mu e^{-\mu v}\,du dv$. Переходя к повторному интегралу, получаем

$$\iint\limits_D \frac{1}{\omega-x}\mu e^{-\mu v}\,dudv = \int_0^n du \int_0^u \frac{\mu}{\omega-x}e^{-\mu v}\,dv = \int_0^n du\left(-\left.\frac{e^{-\mu v}}{\omega-x}\right|_0^u\right) =$$

$$= \frac{1}{\omega-x}\int_0^n \left(1-e^{-\mu u}\right)du = \frac{1}{\omega-x}\left(n+\frac{e^{-\mu n}-1}{\mu}\right).$$

7. Функция выживания находится по формуле $s(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt} = e^{-\int_0^x Bc^x dt} = \exp\left(\frac{B}{\ln c}\left(1-c^x\right)\right)$.

$l_x \cdot \mu_x = l_0 s(x)(-s'(x)/s(x)) = -\,l_0\, s'(x) = l_0 \exp\left(\frac{B}{\ln c}\left(1-c^x\right)\right) Bc^x$.

Для нахождения наибольшего значения функции $l_x \cdot \mu_x$ найдем ее производную. $(l_x \cdot \mu_x)' = l_0 \exp\left(\frac{B}{\ln c}\left(1-c^x\right)\right) Bc^x\left(-Bc^x + \ln c\right)$. Отсюда видно, что максимум достигается при $x = \log_c(\ln c / B)$. Тогда $\mu_x = Bc^x = \ln c$. Тем самым найденное значение x расположено в области определения функции.

8. Для равномерного распределения для дробных возрастов справедлива формула $s(x+t)=(1-t)s(x)+ts(x+1)$. Отсюда

$$_{t-u}q_{x+u} = \frac{s(x+u)-s(x+t)}{s(x+u)} =$$

$$= \frac{(1-u)s(x)+us(x+1)-(1-t)s(x)-ts(x+1)}{(1-u)s(x)+us(x+1)} = \frac{(t-u)(s(x)-s(x+1))}{(1-u)s(x)+us(x+1)}.$$

Из равенства $q_x = \dfrac{s(x)-s(x+1)}{s(x)}$ следует, что $s(x+1)=s(x)(1-q_x)$. Подставляя это выражение в предыдущее равенство, имеем

$$_{t-u}q_{x+u} = \frac{(t-u)(s(x)-s(x+1))}{(1-u)s(x)+us(x+1)} = \frac{(t-u)q_x}{1-uq_x}.$$

9. В предположении Балдуччи справедлива формула $s(x+t) = \dfrac{s(x+1)}{p_x+tq_x}$. Отсюда

$$_{t-u}q_{x+u} = \frac{s(x+1)/(p_x+uq_x)-s(x+1)/(p_x+tq_x)}{s(x+1)/(p_x+uq_x)} =$$

$$= 1-\frac{p_x+uq_x}{p_x+tq_x} = \frac{(t-u)q_x}{p_x+tq_x} = \frac{(t-u)q_x}{1-(1-t)q_x},$$ что и требовалось.

10.

1. Равномерное распределение

$$q_{x+1/2} = \frac{s(x+1/2)-s(x+3/2)}{s(x+1/2)} =$$

$$= \frac{s(x)/2+s(x+1)/2-s(x+1)/2-s(x+2)/2}{s(x)/2+s(x+1)/2} =$$

$$= \frac{s(x)-s(x+2)}{s(x)+s(x+1)} = \frac{s(x)/s(x+1)-s(x+2)/s(x+1)}{s(x)/s(x+1)+1} =$$

$$= \frac{1/(1-q_x)-1+q_{x+1}}{1/(1-q_x)+1} = 0{,}015008.$$

$$ {}_{1/2}q_x = \frac{s(x)-s(x+1/2)}{s(x)} = \frac{s(x)-s(x+1)}{2s(x)} = q_x\ /\ 2 = 0.008. $$

2. Предположение о постоянстве силы смертности.

В этом случае $s(x+t) = s(x)\, p_x^t$. Тогда

$$ q_{x+1/2} = \frac{s(x+1/2)-s(x+3/2)}{s(x+1/2)} = \frac{s(x)p_x^{1/2} - s(x+1)p_{x+1}^{1/2}}{s(x)p_x^{1/2}} = $$

$$ = 1-(1-q_x)(p_{x+1}\ /\ p_x)^{1/2} = 0.0150005. $$

$$ {}_{1/2}q_x = \frac{s(x)-s(x+1/2)}{s(x)} = \frac{s(x)-s(x)p_x^{1/2}}{2s(x)} = \frac{1-p_x^{1/2}}{2} = 0.00402. $$

3. Предположение Балдуччи

Поскольку $s(x+t) = \dfrac{s(x+1)}{p_x + tq_x}$, имеем

$$ q_{x+1/2} = \frac{s(x+1/2)-s(x+3/2)}{s(x+1/2)} = $$

$$ = \frac{s(x+1)/(1-q_x\ /\ 2) - s(x+2)/(1-q_{x+1}\ /\ 2)}{s(x+1)/(1-q_x\ /\ 2)} = $$

$$ = 1-(1-q_{x+1})\frac{2-q_{x+1}}{2-q_x} = 0.013. $$

$$ {}_{1/2}q_x = \frac{s(x)-s(x+1/2)}{s(x)} = \frac{s(x)-s(x+1)/(1-q_x\ /\ 2)}{s(x)} = $$

$$ = 1-(1-q_x)/(1-q_x\ /\ 2) = 0.00806. $$

11. $\mu_x=-\dfrac{s'(x)}{s(x)}=\dfrac{\alpha\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)^{\alpha-1}}{\omega\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)^{\alpha}}=\dfrac{\alpha}{\omega}\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)^{-1}.$

$$\overset{0}{e}_x=\frac{1}{s(x)}\int_0^{\infty}s(x+y)dy=\frac{1}{s(x)}\int_0^{\omega-x}\left(1-\frac{x+y}{\omega}\right)^{\alpha}dy=$$

$$=-\frac{\omega}{(\alpha+1)s(x)}\left(1-\frac{x+y}{\omega}\right)^{\alpha+1}\Bigg|_0^{\omega-x}=\frac{\omega\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)^{\alpha}}=\frac{\omega\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)}{(\alpha+1)}.$$

$${}_{10}p_{60}=\frac{s(70)}{s(60)}=\frac{\left(1-\dfrac{70}{\omega}\right)^{\alpha}}{\left(1-\dfrac{60}{\omega}\right)^{\alpha}}=\left(\frac{\omega-70}{\omega-60}\right)^{\alpha}.$$

$${}_{20|10}q_{40}=\frac{s(60)-s(70)}{s(40)}=\frac{(\omega-60)^{\alpha}-(\omega-70)^{\alpha}}{(\omega-40)^{\alpha}}.$$

12. ${}_2q_{[50]}=\dfrac{l_{[50]}-l_{[50]+2}}{l_{[50]}}$; ${}_2p_{[50]}=\dfrac{l_{[50]+2}}{l_{[50]}}$;

$${}_{2|}q_{[50]}=\frac{l_{[50]+2}-l_{[50]+3}}{l_{[50]}}=\frac{l_{[50]+2}-l_{53}}{l_{[50]}};$$

$${}_{2|3}q_{[50]+1}=\frac{l_{[50]+3}-l_{[50]+6}}{l_{[50]}}=\frac{l_{53}-l_{56}}{l_{[50]}}.$$

${}_3p_{53}=\dfrac{l_{56}}{l_{53}}$, ${}_{2|3}q_{[50]+1}=\dfrac{l_{[50]+3}-l_{[50]+6}}{l_{[50]+1}}=\dfrac{l_{53}-l_{56}}{l_{[50]+1}}=\dfrac{l_{[50]+1}}{l_{53}}(1-{}_3p_{53}).$

Далее $q_{[50]} = 1 - \frac{l_{[50]+1}}{l_{[50]}}$, откуда $\frac{l_{[50]+1}}{l_{[50]}} = 0.9399$,

$$\frac{l_{[50]+2}}{l_{[50]}} = {}_2p_{[50]} = 0.9641,$$

$$_{2|}q_{[50]} = \frac{l_{[50]+2} - l_{[50\}+3}}{l_{[50]}} = \frac{l_{[50]+2} - l_{53}}{l_{[50]}} = {}_2p_{[50]} - \frac{l_{53}}{l_{[50]}},$$ т.е.

$\frac{l_{53}}{l_{[50]}} = 0.9641 - 0.02410 = 0.94$. Отсюда

$\frac{l_{53}}{l_{[50]+1}} = \frac{l_{53}}{l_{[50]}} \cdot \frac{l_{[50]}}{l_{[50]+1}} = 0.94 / 0.9399 = 1.001$. Окончательно,

$$_3p_{53} = 1 - 0.09272 \cdot 1.001 = 0.90719.$$

13. $p_{60} = \frac{l_{61}}{l_{60}} = 1 - q_{60}$, откуда $l_{61} = 12{,}65(1 - 0{,}021) = 12{,}384$,

$1 - q_{[60]} = \frac{l_{[60]+1}}{l_{[60]}} = \frac{l_{61}}{l_{[60]}}$, отсюда $l_{[60]} = l_{61}/(1 - q_{60}/2) = 12{,}515$.

14. $_2q_{[32]+1} = q_{[32]+1} + (1 - q_{[32]+1})q_{[32]+2} =$

$= 19 \cdot 10^{-5} + (1 - 19 \cdot 10^{-5}) \cdot 23 \cdot 10^{-5} = 41 \cdot 10^{-5}$.

$_{1|1}q_{[32]+1} = (1 - q_{[32]+1})(1 - q_{[32]+2})q_{33} =$

$= (1 - 19 \cdot 10^{-5})(1 - 23 \cdot 10^{-5}) \cdot 23 \cdot 10^{-5} = 22{,}99 \cdot 10^{-5}$.

15. $_2p_{[31]}=\dfrac{l_{[31]+2}}{l_{[31]}}=\dfrac{l_{33}}{l_{[31]}}=\dfrac{988}{996}=0.992.$

$$_2p_{[30]+1}=\frac{l_{[30]+3}}{l_{[30]+1}}=\frac{l_{33}}{l_{[30]+1}}=\frac{988}{998}=0.990.$$

$$_1q_{[31]}=\frac{l_{[31]+1}-l_{33}}{l_{[31]}}=\frac{994-988}{996}=0.006.$$

$$_{1|}q_{[30]+1}=\frac{l_{32}-l_{33}}{l_{[30]+1}}=\frac{995-988}{998}=0.007.$$

$$_2q_{[32]}=\frac{l_{34}-l_{35}}{l_{[32]}}=\frac{982-970}{994}=0.012.$$

$$_2q_{[31]+1}=\frac{l_{34}-l_{35}}{l_{[31]+1}}=\frac{982-970}{988}=0.0121.$$

16. А) Мужчины

$$_2p_{50}=\frac{l_{52}'}{l_{50}'}=\frac{71030}{73998}=0,9599,$$

$$_2q_{60}=\frac{l_{60}'-l_{62}'}{l_{60}'}=\frac{56706-52416}{56706}=0,0756,$$

$$_{1|2}q_{60}=\frac{l_{61}'-l_{63}'}{l_{60}'}=\frac{54488-50240}{56706}=0,0749.$$

В) Женщины

$$_{2}p_{50}=\frac{l_{52}''}{l_{50}''}=\frac{89603}{90772}=0{,}9871,$$

$$_{2}q_{60}=\frac{l_{60}''-l_{62}''}{l_{60}''}=\frac{83107-80904}{83107}=0{,}0265,$$

$$_{1|2}\,q_{60}=\frac{l_{61}''-l_{63}''}{l_{60}''}=\frac{82011-79662}{83107}=0{,}0283.$$

17. Выпишем все пары продолжительностей жизни мужчины и женщины, которые удовлетворяют условию задачи: (60, 60), (61, 60), (61, 61), (62, 60), (62, 61), (62, 62). Поскольку соответствующие события несовместны, искомая вероятность равна сумме вероятностей реализации соответствующих пар.

Отсюда вероятность равна

$$\left(1-\frac{l'_{61}}{l'_{60}}\right)\cdot\left(1-\frac{l''_{61}}{l''_{60}}\right)+\left(\frac{l'_{61}-l'_{62}}{l'_{60}}\right)\cdot\left(1-\frac{l''_{61}}{l''_{60}}\right)+\left(\frac{l'_{61}-l'_{62}}{l'_{60}}\right)\cdot\left(\frac{l''_{61}-l''_{62}}{l''_{60}}\right)+$$

$$+\left(\frac{l'_{62}-l'_{63}}{l'_{60}}\right)\cdot\left(1-\frac{l''_{61}}{l''_{60}}\right)+\left(\frac{l'_{62}-l'_{63}}{l'_{60}}\right)\cdot\left(\frac{l''_{61}-l''_{62}}{l''_{60}}\right)+\left(\frac{l'_{62}-l'_{63}}{l'_{60}}\right)\cdot\left(\frac{l''_{62}-l''_{63}}{l''_{60}}\right).$$

Получить конкретное значение вероятности предоставляется читателю.

Задачи такого типа приходится решать при вычислении премий по сложным договорам, относящимся, например, к супругам. Правда, в этом случае предположение о независимости представляется не вполне корректным.

Глава 11.

1. Размер страховой выплаты примем за 1. Найдем числовые характеристики случайной величины – суммы исков по всем 200

договорам. Закон распределения иска по одному договору X_1 имеет вид
0 с вероятностью 1–0.01839; 1 с вероятностью 0.01839, отсюда

$$\mathrm{E}[X_1] = 0{,}01839,\ \mathrm{Var}[X_1] = 0{,}01805.$$

Тогда числовые характеристики суммарного иска S равны

$$\mathrm{E}[S] = 200\cdot 0.01839 = 3{,}678,\ \mathrm{Var}[S] = 200\cdot 0.01805 = 3{,}61.$$

Сумма брутто-премий в первом случае составит $3{,}678\cdot 1{,}1 = 4{,}0458$. Условие разорения состоит в том, что $S > 4.0458$. Вычислим вероятность этого события, используя нормальное приближение.

$$\mathrm{P}[S > 4{,}0458] = \mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{S} - 3{,}678}{\sqrt{\mathrm{Var[S]}}} > \frac{4{,}0458 - 3{,}678}{\sqrt{\mathrm{Var[S]}}}\right] = \mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{S} - 3{,}678}{1.9} > \frac{0{,}3678}{1.9}\right] \approx$$

$$\approx \mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{S} - 3{,}678}{1{,}9} > 0{,}19\right] = 1 - \Phi(0{,}19) = 0{,}42465.$$

Аналогично, при 50 %-й страховой надбавке сумма брутто-премий будет равна $3{,}678\cdot 1{,}5 = 5{,}517$,

$$\mathrm{P}[S > 5{,}517] = \mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{S} - 3{,}678}{\sqrt{\mathrm{Var[S]}}} > \frac{5{,}517 - 3{,}678}{\sqrt{\mathrm{Var[S]}}}\right] = \mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{S} - 3{,}678}{1.9} > \frac{1{,}839}{1.9}\right] \approx$$

$$\approx \mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{S} - 3{,}678}{1{,}9} > 0{,}97\right] = 1 - \Phi(0{,}97) = 0{,}16602.$$

При 20000 договоров

$$\mathrm{E}[S] = 20000\cdot 0{,}01839 = 367{,}8,\ \mathrm{Var}[S] = 20000\cdot 0{,}01805 = 361.$$

При 10 %-й надбавке

$$P[S > 404{,}58] = P\left[\frac{S - 367{,}8}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > \frac{404{,}58 - 367{,}8}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right] = P\left[\frac{S - 367{,}8}{19} > \frac{36{,}78}{19}\right] \approx$$

$$\approx P\left[\frac{S - 367{,}8}{19} > 1{,}94\right] = 1 - \Phi(1{,}94) = 0{,}02619.$$

При 50 %-й надбавке сумма брутто-премий будет равна
$367{,}8 \cdot 1{,}5 = 551{,}7$,

$$P[S > 551{,}7] = P\left[\frac{S - 367{,}8}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > \frac{551{,}7 - 367{,}8}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right] = P\left[\frac{S - 367{,}8}{19} > \frac{183{,}9}{19}\right] \approx$$

$$\approx P\left[\frac{S - 367{,}8}{19} > 9{,}68\right] = 1 - \Phi(9{,}68) \approx 0.$$

Эти результаты показывают влияние страховой надбавки и числа договоров на риск страховщика. Стоимость договоров равна 101 руб. 14 коп. при 10 %-й надбавке и 137 руб. 92 коп. – при 50 %-й надбавке.

2. Прежде всего, найдем законы распределения случайных величин – исков для мужчины и женщины. Имеем

$$q_{50}' = \frac{l_{50}' - l_{51}'}{l_{50}'} = \frac{73998 - 72392}{73998} = 0{,}02170,$$

$$q_{50}'' = \frac{l_{50}'' - l_{51}''}{l_{50}''} = \frac{90772 - 90163}{90772} = 0{,}00671.$$

Закон распределения иска X_1 для мужчины имеет вид

Значение, тыс. руб.	0	1	5
Вероятность	0.97830	0.02120	0.0005

Закон распределения иска X_2 для женщины имеет вид

Значение, тыс. руб.	0	1	5
Вероятность	0.99329	0.00641	0.0003

Тогда $\mathrm{E}[X_1] = 0{,}02370$, $\mathrm{Var}[X_1] = 0{,}03314$; $\mathrm{E}[X_2] = 0{,}00791$, $\mathrm{Var}[X_2] = 0{,}01385$.
Отсюда математическое ожидание и дисперсия суммы исков S равны
$\mathrm{E}[S] = 200(0{,}02370+0{,}00791) = 6{,}322$,
$\mathrm{Var}[S] = 200(0{,}03314+0{,}01385) = 9{,}398$.

Можно считать, что случайная величина $\dfrac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}$ имеет стандартное нормальное распределение. Пусть B – сумма премий по всем договорам. По условию задачи должно выполняться неравенство $\mathrm{P}[B < S] \geq 0{,}99$. Это неравенство равносильно неравенству

$$\mathrm{P}\left[\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > \frac{B-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right] \geq 0.99.$$

Из таблицы квантилей для стандартного нормального распределения получаем минимальное допустимое значение B, которое находится из равенства

$$\frac{\mathrm{B}-\mathrm{E[S]}}{\sqrt{\mathrm{Var[S]}}} = \frac{\mathrm{B}-6{,}322}{3{,}066} = 2{,}33.$$

Отсюда суммарная страховая надбавка равна $B-6{,}322 \approx 7{,}14378$.

Если применяется принцип пропорционального увеличения (п.1.2), то

$$\Lambda = 7{,}14378/6{,}322 \approx 1{,}12999.$$

Отсюда брутто-премии для мужчин составят

$$1000(0{,}02370+ \Lambda\cdot 0{,}02370) \approx 50{,}48 \text{ руб.},$$

для женщин

$1000(0{,}00791 + \Lambda\cdot 0{,}00791) \approx 16{,}85$ руб.

Для вычисления премий по принципу дисперсии (п.1.2) вычислим значение α.

$$\alpha = \frac{7{,}14378}{200\,\mathrm{Var}[X_1] + 200\,\mathrm{Var}[X_2]} = \frac{7{,}14378}{\mathrm{Var}[S]} = \frac{7{,}14378}{9{,}398} \approx 0{,}76014.$$

Отсюда брутто-премия для мужчины составит

$$1000(0{,}02370 + \alpha\mathrm{Var}[X_1]) =$$

$$= 1000(0{,}02370 + 0{,}76014\cdot 0{,}03314) \approx 48{,}89 \text{ руб.};$$

для женщин

$$1000(0.00791 + \alpha\mathrm{Var}[X_2]) =$$

$$= 1000(0{,}00791 + 0{,}76014\cdot 0{,}01385) \approx 18{,}44 \text{ руб.}$$

Аналогично применение принципа среднего квадратического отклонения связано с вычислением коэффициента β.

$$\beta = \frac{7{,}14378}{200\sqrt{\mathrm{Var}[X_1]} + 200\sqrt{\mathrm{Var}[X_2]}} = \frac{7{,}14378}{200(0{,}18204 + 0{,}11769)} \approx 0{,}11917.$$

Соответственно премии равны для мужчин

$$1000(0{,}02370 + \beta\sqrt{\mathrm{Var}[X_1]}) =$$

$$= 1000(0{,}02370 + 0{,}11917\cdot 0{,}18204) \approx 45{,}39 \text{ руб.},$$

для женщин

$$1000(0.00791 + \beta\sqrt{\mathrm{Var}[X_2]}) =$$
$$= 1000(0{,}00791 + 0{,}11917\cdot 0{,}11769) \approx 21{,}94 \text{ руб.}$$

Вычисления демонстрируют перераспределение премий между страхователями с различным уровнем риска в зависимости от применяемого принципа. Разумеется, сумма премий во всех случаях равна 13436,38 руб.

При 20000 договоров имеем E[S] = 632,2, Var[S] = 939,8. Минимальное допустимое значение B находится из условия

$$\frac{B - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} = \frac{B - 632{,}2}{30{,}656} = 2{,}33,$$

т.е. суммарная страховая надбавка равна $B - 632{,}2 \approx 71{,}428$ тыс. руб. В среднем надбавка на один договор составит 71428/40000 ≈ 1,78 руб. против 7143,8/400 ≈ 17,86 руб. при 400 договорах. Это наглядно демонстрирует большую надежность крупных компаний. Дальнейшие вычисления предоставляются читателю.

Глава 12

1. $A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}$ – нетто-премия для n-летнего чисто накопительного страхования, следовательно, соответствующая случайная величина

$$Z = \begin{cases} v^n, T(x) \geq n; \\ 0,\ T(x) < n. \end{cases}$$

$A^{1}_{x:\overline{n|}}$ – нетто-премия для дискретного n-летнего страхования, следовательно, соответствующая случайная величина

$$Z = \begin{cases} 0, & K(x) \geq n; \\ v^{k+1}, & k = K(x) < n. \end{cases}$$

2. Воспользуемся формулами из прил. 7.

А) $A_{20} = \dfrac{M_{20}}{D_{20}} \approx 0.1334;$

$$\overline{A}_{20} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A_{20} = (1+0.04)^{\frac{1}{2}} \cdot 0.1334 \approx 0.1360;$$

B) $A_{\substack{\ \ \ 1\\ 20:\overline{10}|}} = \dfrac{D_{30}}{D_{20}} \approx 0.6706;$

C) $A^{\ 1}_{20:\overline{10}|} = \dfrac{M_{20} - M_{30}}{D_{20}} \approx 0.0060;$

$$\overline{A}^{\ 1}_{20:\overline{10}|} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A^{\ 1}_{20:\overline{10}|} \approx 0.0061;$$

D) $A_{20:\overline{10}|} = \dfrac{M_{20} - M_{30} + D_{30}}{D_{20}} \approx 0.6766;$

$$\overline{A}_{20:\overline{10}|} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A^{\ 1}_{20:\overline{10}|} + A_{\substack{\ \ \ 1\\ 20:\overline{10}|}} \approx 0.6767;$$

E) $\quad {}_{10|}A_{20} = \dfrac{M_{30}}{D_{20}} \approx 0.1274;$

$${}_{10|}\overline{A}_{20} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}}\ {}_{10|}A_{20} \approx 0.1299;$$

F) $\quad (IA)_{20} = \dfrac{R_{20}}{D_{20}} \approx 6.2671;$

$$\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_{20} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} (IA)_x - \frac{1}{2}(1+i)^{\frac{1}{2}} A_x \approx 6.323.$$

3. Рассмотрим n-летнее чисто накопительное страхование. Стоимость страховой выплаты величиной S_b, дисконтированная к моменту заключения договора, как следует из задачи 1, равна

$$Z = \begin{cases} S_b v^n, \ T(x) \ge n; \\ \ 0, \ T(x) < n. \end{cases}$$

Ее математическое ожидание и дисперсия равны

$$S_b \cdot A_{\substack{\ \ 1\\ x:\overline{n}|}} = S_b \cdot v^n \cdot P\big[T(x) \ge n\big] = S_b \cdot v^n \cdot {}_n p_x ,$$

$$\mathrm{Var}[\mathrm{Z}] = \mathrm{E}\big[Z^2\big] - \mathrm{E}^2[\mathrm{Z}] = S_b{}^2 v^{2n} \cdot {}_n p_x - S_b{}^2 \cdot (A_{\substack{\ \ 1\\ x:\overline{n}|}})^2 =$$

$$=S_b^{\,2}({}^2A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}-(A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}})^2).$$

Здесь ${}^2A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}$ – принятое обозначение нетто-премии для n-летнего временного страхования жизни при $v^* = v^2$.

Получим формулу для дисперсии современной стоимости страховой выплаты для n-летнего временного страхования.

Стоимость страховой выплаты величиной S_b, дисконтированная к моменту заключения договора, как следует из задачи 1, равна

$$Z = \begin{cases} 0, & K(x) \ge n; \\ S_b v^{k+1}, & k = K(x) < n. \end{cases}$$

Ее математическое ожидание $S_b \cdot A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = S_b \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x$.

Ее дисперсия:

$$\mathrm{Var}[\mathrm{Z}] = \mathrm{E}\left[\mathrm{Z}^2\right] - \mathrm{E}^2[\mathrm{Z}] = S_b^{\,2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (v^2)^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x - S_b^{\,2} \cdot (A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}})^2 =$$

$$=S_b^{\,2}({}^2A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}-(A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}})^2).$$

Обозначение ${}^2A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}$ аналогично предыдущему.

4. Пусть 100000 руб.= 1 у.е. Тогда дисконтированная к моменту заключения договора страховая выплата составит

$$Z = \begin{cases} 2 \cdot v^{10}, T(50) \ge 10; \\ \mathrm{v}^{10}, \ \ T(50) < 10. \end{cases}$$

Ее математическое ожидание равно

$$\mathrm{E}[Z] = 2 \cdot v^{10} \cdot \mathrm{P}[T(50) \ge 10] + v^{10} \cdot \mathrm{P}[T(50) < 10] =$$

$$= v^{10} \cdot (2 \cdot {}_{10}p_{50} + 1 - {}_{10}p_{50}) = (1+i)^{-10} \cdot ({}_{10}\mathrm{p}_{50} + 1).$$

Дисперсия современной стоимости страховой выплаты равна

$$\mathrm{Var}[Z] = 4 \cdot v^{20} \cdot \mathrm{P}[T(50) \geq 10] + \mathrm{v}^{20} \cdot \mathrm{P}[T(50) < 10] - \mathrm{E}^2[Z] =$$

$$= v^{20} \cdot (4 \cdot {}_{10}p_{50} + 1 - {}_{10}p_{50}) - \mathrm{E}^2[\mathrm{Z}] =$$

$$= (1+i)^{-20} \cdot (3 \cdot {}_{10}p_{50} + 1) - \mathrm{E}^2[Z].$$

Вычислим искомые величины как для мужчины, так и для женщины.

Используя табл. П 5.2, получим, что для мужчины

$${}_{10}p_{50}{}' = \frac{l_{60}{}'}{l_{50}{}'} = \frac{56706}{73998} \approx 0{,}76632,$$

и, следовательно,

$\mathrm{E}[Z] \approx 1{,}08437$ у.е. = 108437 руб.,

$\mathrm{Var}[Z] \approx 0{,}06748$ у.е.^{2} = $0{,}06748 \cdot 10^{10}$ руб.^{2}.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma \approx 0{,}25977 \cdot 10^5$ руб.

Проводя аналогичные вычисления, получим, что для женщины

$${}_{10}p_{50}{}'' = \frac{l_{60}{}''}{l_{50}{}''} = \frac{83107}{90772} \approx 0{,}91556,$$

$\mathrm{E}[Z] \approx 1{,}17599$ у.е. = 117599 руб.,

$\mathrm{Var}[Z] \approx 0{,}02913$ у.е.^{2} = $0{,}02913 \cdot 10^{10}$ руб.^{2},

$\sigma \approx 0{,}17068 \cdot 10^5$ руб.

5. Современная стоимость суммарной страховой выплаты равна $Z = \sum_{i=1}^{K} Z_i$, где Z_i – современная величина страховой выплаты по i-му договору.

Поскольку

$$Z_i = \begin{cases} 0, & K(x_i) < m; \\ S_{b_i} \cdot v^{K(x_i)+1}, & K(x_i) \geq m, \end{cases}$$

то

$$\mathrm{E}[\mathrm{Z}] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{K} \mathrm{Z}_i\right] = \sum_{i=1}^{K} \mathrm{E}[\mathrm{Z}_i] = \sum_{i=1}^{K} (\sum_{k=m}^{\infty} S_{b_i} \cdot v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x) = \sum_{i=1}^{K} S_{b_i} \cdot {}_{m|}A_{x_i} .$$

Из независимости остаточных времен жизни страхователей

$$\mathrm{Var}[Z] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{K} Z_i\right] = \sum_{i=1}^{K} \mathrm{Var}[Z_i] = \sum_{i=1}^{K} \left(\mathrm{E}\left[Z_i^2\right] - \mathrm{E}^2[Z_i]\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \left(\sum_{k=m}^{\infty} S_{b_i}{}^2 \cdot v^{2(k+1)} \cdot {}_{k|}q_x - \left(S_{b_i} \cdot {}_{m|}A_{x_i}\right)^2 \right) = \sum_{i=1}^{K} S_{b_i}{}^2 \cdot \left({}^{2}_{m|}A_{x_i} - \left({}_{m|}A_{x_i}\right)^2 \right),$$

где ${}^{2}_{m|}A_{x_i}$ – нетто-премия по i-му договору при силе процента $\delta^*=2\delta$. Это соответствует обозначению из решения упражнения 3. Действительно, $\delta^* = -\ln(v^*) = -\ln\left(v^2\right) = -2\ln(v) = 2\delta$.

6. Из прил. 7 нетто-премия по договору полного непрерывного страхования жизни равна $\overline{A}_x = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{50} \cdot \mu_{x+t}\, dt$.

Поскольку ${}_t p_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y dy \right)$ и при постоянной интенсивности смертности μ справедливы равенства

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu \, dy \right) = \exp(-\mu \cdot t) \text{, то}$$

$$\overline{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} \cdot \mu \, dt = \frac{\mu}{\mu + \delta} = \frac{0.05}{0.05 + 0{,}1} \approx 0{,}333 .$$

7. Примем величину страховой выплаты за 1.

Как следует из формул прил. 7, нетто-премия по непрерывному договору при предположении о равномерном распределении смертей может быть вычислена по формуле

$\overline{A}_{50:\overline{3}|} = \frac{i}{\delta} A^{1}_{50:\overline{3}|} + A_{50:\overline{3}|}^{\;\;\;\;1}$, нетто-премия по дискретному договору

$A_{50:\overline{3}|} = A^{1}_{50:\overline{3}|} + A_{50:\overline{3}|}^{\;\;\;\;1}$.

В свою очередь

$$A^{1}_{50:\overline{3}|} = \frac{M_{50} - M_{53}}{D_{50}} = \frac{\sum\limits_{t=50}^{\infty} v^{1+t} \cdot d_t - \sum\limits_{t=53}^{\infty} v^{1+t} \cdot d_t}{v^{50} \cdot l_{50}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{t=50}^{52} v^{1+t} \cdot d_t}{v^{50} \cdot l_{50}} = \frac{v(l_{50} - l_{51}) + v^2 (l_{51} - l_{52}) + v^3 (l_{52} - l_{53})}{l_{50}} .$$

$$A_{50:\overline{3}|}^{\;\;\;\;1} = \frac{D_{53}}{D_{50}} = \frac{v^{53} \cdot l_{53}}{v^{50} \cdot l_{50}} = \frac{v^3 \cdot l_{53}}{l_{50}} .$$

Из табл. П.5.2 для мужчины

$l_{50}' = 73998$, $l_{51}' = 72392$, $l_{52}' = 71030$, $l_{53}' = 69352$.

А так как $v = \dfrac{1}{1+i} = 0.83333$, $\delta = \ln(1+i) = 0.18232$, то $\overline{A}_{50:\overline{3}|}' \approx 0{,}59062$

и $A_{50:\overline{3}|}' \approx 0{,}58635$.

Аналогично для женщины

$l_{50}'' = 90772$, $l_{51}'' = 90163$, $l_{52}'' = 89603$, $l_{53}'' = 88902$. Следовательно, $\bar{A}_{50:\overline{3}|}'' \approx 0{,}58251$ и $A_{50:\overline{3}|}'' \approx 0{,}58112$.

8. Пусть величина страховой выплаты равна 1.
Обозначим через $Z_{50:\overline{3}|}'$, $Z_{50:\overline{3}|}''$ величины исков по одному договору для мужчины и женщины соответственно, $S, \mathrm{E}[S], \mathrm{Var}[S]$ – значения суммарного иска, его математического ожидания и дисперсии. Поскольку число договоров, равное 2000, достаточно велико, то можно считать, что случайная величина $\dfrac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}$ имеет стандартное нормальное распределение. Пусть B – сумма брутто-премий по всем договорам. По условию задачи должно выполняться неравенство $\mathrm{P}[S > B] \le 0{,}05$. Это неравенство равносильно неравенству $\mathrm{P}\left[\dfrac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > \dfrac{B-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right] \le 0{,}05$. Из таблицы квантилей для стандартного нормального распределения получим минимальное допустимое значение B: $\mathrm{E}[S] + 1{,}645\sqrt{\mathrm{Var}[S]}$.

Таким образом, чтобы вычислить брутто-премии, необходимо найти математическое ожидание и дисперсию суммарного иска. Как следует из результатов задачи 7, нетто-премия по одному договору находится следующим образом:

$$A_{50:\overline{3}|} = \frac{v(l_{50}-l_{51}) + v^2(l_{51}-l_{52}) + v^3(l_{52}-l_{53})}{l_{50}} + \frac{v^3 \cdot l_{53}}{l_{50}}$$

и составляетдля мужчины $A_{50:\overline{3}|}' \approx 0{,}58635$ и для женщины $A_{50:\overline{3}|}'' \approx 0{,}58112$.

Очевидно, что $\mathrm{E}[S] = 1000\left(A_{50:\overline{3}|}' + A_{50:\overline{3}|}''\right) \approx 1167{,}47$.

$\mathrm{Var}[Z_{50:\overline{3}|}] = {}^2A_{50:\overline{3}|} - \left(A_{50:\overline{3}|}\right)^2$, где ${}^2A_{50:\overline{3}|}$ – нетто-премия при

$$v^* = v^2 = \frac{1}{(1+i)^2} \approx 0,69444.$$

Из табл. П.5.2 для мужчины $l_{50}' = 73998$, $l_{51}' = 72392$, $l_{52}' = 71030$. Отсюда $\mathrm{Var}[Z_{50:\overline{3}|}'] \approx 0,0016$.

Для женщины $l_{50}'' = 90772$, $l_{51}'' = 90163$, $l_{52}'' = 89603$. $\mathrm{Var}[Z_{50:\overline{3}|}''] \approx 0,0005$.

Дисперсия суммарного иска

$$\mathrm{Var}[S] = 1000\left(\mathrm{Var}\left[Z_{50:\overline{3}|}'\right] + \mathrm{Var}\left[Z_{50:\overline{3}|}''\right]\right) \approx 2,1.$$

Отсюда брутто-премия по всем договорам равна

$$B = \mathrm{E}[S] + 1,645\sqrt{\mathrm{Var}[S]} \approx 1167,47 + 1,645 \cdot \sqrt{2,1} \approx 1169,85.$$

Если применяется принцип пропорционального увеличения (п. 1.2), то $\Lambda = \frac{B - \mathrm{E}[S]}{\mathrm{E}[S]} \approx 0,00204$. Отсюда брутто-премия по одному договору для мужчин составит 0,58635(1+ Λ) ≈ 0,58755, для женщины 0.58112(1+Λ) ≈ 0,58231 соответственно.

9. Пусть величина страховой выплаты равна 1 и *S,* как обычно, суммарный иск. Поскольку число договоров *K* = 10000 достаточно велико, то можно считать, что случайная величина $\frac{S - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}$ имеет стандартное нормальное распределение. Пусть *B* – сумма брутто-премий по всем договорам. По условию задачи должно выполняться неравенство $\mathrm{P}[S > B] \le 0,05$. Это неравенство равносильно неравенству $\mathrm{P}\left[\frac{S - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > \frac{B - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right] \le 0,05$. Из таблицы квантилей для стандартного нормального распределения получим минимальное допустимое значение *B*, равное $\mathrm{E}[S] + 1,645\sqrt{\mathrm{Var}[S]}$. Поскольку все договоры однотипны, то брутто-премия по одному договору будет

равна $p = \frac{B}{N} = \bar{A}_x + 1{,}645\sqrt{\frac{\mathrm{Var}[\bar{Z}_x]}{N}}$, где $\bar{A}_x$ – нетто-премия, а $\mathrm{Var}[\bar{\mathrm{Z}}_{\mathrm{x}}]$ – дисперсия современной стоимости страховой выплаты для одного договора. Как следует из результатов задачи 6,

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} \cdot \mu\, dt = \frac{\mu}{\mu+\delta} = \frac{0.05}{0.05+0{,}1} \approx 0{,}333.$$

Вычислим дисперсию:

$$\mathrm{Var}[\bar{Z}_x] = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2 = \frac{\mu}{\mu+2\delta} - (\bar{A}_x)^2 =$$

$$= \frac{0{,}05}{0{,}05+2\cdot 0{,}1} - \left(\frac{0{,}05}{0{,}05+0{,}1}\right)^2 \approx 0{,}222.$$

Брутто-премия по одному договору будет равна

$$p = \bar{A}_x + 1.645\sqrt{\frac{\mathrm{Var}[\bar{Z}_x]}{N}} \approx 0.333 + 1.645\sqrt{\frac{0.222}{10000}} \approx 0.3411.$$

10. Нетто-премия для рассматриваемого договора при простой схеме начисления бонусов равна

$$\int_0^\infty [1 + 0.02(\lfloor t \rfloor + 1)] v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\, dt = \bar{A}_x + 0.02(I\bar{A})_x.$$

Как следует из решения задачи 6, $\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+\delta} \approx 0{,}333$.

Для вычисления $(I\bar{A})_x$ воспользуемся приближением

$$(I\bar{A})_x \approx (\bar{I}\,\bar{A})_x + \tfrac{1}{2}\bar{A}_x.$$

Вычислим $(\bar{I}\,\bar{A})_x$. Из прил. 7

$$(\bar{I}\,\bar{A})_x = \int_0^\infty t v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty t e^{-\delta\cdot t} \cdot e^{-\mu\cdot t} \cdot \mu dt = \frac{\mu}{(\mu+\delta)^2} \approx 2{,}222.$$

Следовательно, $(I\bar{A})_x \approx 2{,}3885$.

Нетто-премия для рассматриваемого договора равна

$$\bar{A}_x + 0{,}02(I\bar{A})_x \approx 0{,}333 + 0{,}02 \cdot 2{,}3885 = 0{,}38077.$$

Глава 13

2. $$(I\,a)_x = \sum_{t=0}^{\infty} t v^t \cdot {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1-1) v^t \cdot {}_t p_x =$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) v^t \cdot {}_t p_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x = (I\,\ddot{a})_x - \ddot{a}_x.$$

3. Воспользуемся формулами из прил. 8:

a) $\ddot{a}_{20} = \dfrac{N_{20}}{D_{20}} \approx 22.532;$

b) $a_{20} = \dfrac{N_{21}}{D_{20}} \approx 21.532;$

c) $\ddot{a}_{20:\overline{10}|} = \dfrac{N_{20} - N_{30}}{D_{20}} \approx 8.408;$

d) $a_{20:\overline{10}|} = \dfrac{N_{21} - N_{31}}{D_{20}} \approx 8.078;$

e) ${}_{10|}\ddot{a}_{20} = \dfrac{N_{30}}{D_{20}} \approx 14.124;$

f) ${}_{10|}a_{20} = \dfrac{N_{31}}{D_{20}} \approx 13.453;$

g) $(I\,\ddot{a})_{20} = \dfrac{S_{20}}{D_{20}} \approx 422.881.$

4. Пусть скорость выплат составляет 1 в год. Из п. 13.2.1 современная стоимость пожизненного аннуитета, выплачиваемого непрерывно, равна $\overline{Y}_x = \overline{a}_{\overline{T(x)|}} = \dfrac{1 - v^{T(x)}}{\delta}$. Следовательно, дисперсия этой случайной величины $\mathrm{Var}[\overline{Y}_x] = \mathrm{Var}[\overline{a}_{\overline{T(x)|}}] = \dfrac{1}{\delta^2}\mathrm{Var}\left[v^{T(x)}\right]$.

$v^{T(x)}$ – современная стоимость единичной страховой выплаты при непрерывном полном страховании жизни, поэтому $\mathrm{Var}[\overline{Y}_x] = \dfrac{1}{\delta^2}\left({}^2\overline{A}_x - \left(\overline{A}_x\right)^2\right)$, где ${}^2\overline{A}_x$ – разовая нетто-премия по договору непрерывного полного страхования жизни при силе процента $\delta^* = 2\delta$. Для дисперсии $\mathrm{Var}[\overline{Y}_x]$ можно получить выражение и через $\overline{a}_x$ на основе того, что $\overline{a}_x = \dfrac{1 - \overline{A}_x}{\delta}$. Так как $\overline{A}_x = 1 - \delta\overline{a}_x$ и ${}^2\overline{A}_x = 1 - (2\delta)({}^2\overline{a}_x)$ (${}^2\overline{a}_x$ – современная стоимость пожизненного аннуитета, выплачиваемого непрерывно, при силе процента $\delta^* = 2\delta$), то

$$\mathrm{Var}[\overline{Y}_x] = \frac{1}{\delta^2}\{{}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2\} = \frac{1}{\delta^2}\{1 - (2\delta)({}^2\overline{a}_x) - (1 - \delta\overline{a}_x)^2\} =$$

$$= \frac{1}{\delta}\{2(\overline{a}_x - {}^2\overline{a}_x) - \delta(\overline{a}_x)^2\}.$$

5. Известны следующие соотношения для годовых эффективных процентной i и учетной d и соответствующих номинальных $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$ ставок [6, 15, 32, 33]:

$$\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m} = (1-d)^{-1} = v^{-1} = 1 + i = \left(1 - \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}.$$

Из них легко получить равенства

$$d^{(m)} = m(1 - v^{\frac{1}{m}}) \text{ и } i^{(m)} = mv^{-\frac{1}{m}}(1 - v^{\frac{1}{m}}).$$

По формуле для суммы m слагаемых геометрической прогрессии

$$\sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j}{m}} = \frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}}.$$

Дифференцируя по v обе части данного равенства, получим

$$\beta = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m} v^{\frac{j}{m}-1} = \frac{-(1-v^{\frac{1}{m}}) + (1-v)\frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}-1}}{(1-v^{\frac{1}{m}})^2} =$$

$$= \frac{-mv^{-\frac{1}{m}}(1-v^{\frac{1}{m}}) + (1-v)v^{-1}}{mv^{-\frac{1}{m}}(1-v^{\frac{1}{m}})(1-v^{\frac{1}{m}})} = \frac{m(i-i^{(m)})}{i^{(m)}d^{(m)}}.$$

$$\alpha = \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j}{m}}(1-\frac{j}{m}) = \frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}} - \beta \cdot v = \frac{md}{d^{(m)}} - \beta \cdot v.$$

Таким образом,

$$\frac{\beta}{m} = \frac{i-i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}} = \frac{i-i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}.$$

$$\frac{\alpha+\beta}{m} = \frac{d}{d^{(m)}} + \frac{(i-i^{(m)})}{i^{(m)}d^{(m)}}(1-v) = \frac{di}{i^{(m)}d^{(m)}}.$$

6. Математическое ожидание современной стоимости пожизненного аннуитета, выплачиваемого непрерывно: $\overline{a}_x = \int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_x dt$. При постоянной интенсивности смертности μ имеем

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y dy \right) = \exp(-\mu \cdot t),$$

тогда $\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t}\, dt = \dfrac{1}{\mu+\delta} = \dfrac{1}{0{,}05+0{,}1} \approx 6{,}667$.

Этот же результат можно получить иначе. Поскольку мы находимся в рамках предположений упражнения 6 к главе 12, в котором найдена нетто-премия по договору полного непрерывного страхования жизни $\bar{A}_x \approx 0{,}333$, и верно соотношение $\bar{a}_x = \dfrac{1-\bar{A}_x}{\delta}$, то $\bar{a}_x \approx \dfrac{1-0{,}333}{0{,}1} = 6{,}667$.

7. Примем величину ежегодной выплаты за 1. Математическое ожидание современной стоимости 3-летнего аннуитета пренумерандо равно $\ddot{a}_{50:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^{2} {}_tE_{50} = \sum_{t=0}^{2} \dfrac{D_{50+t}}{D_{50}} = \sum_{t=0}^{2} \dfrac{v^{50+t} \cdot l_{50+t}}{v^{50} \cdot l_{50}} = \dfrac{1}{l_{50}} \sum_{t=0}^{2} v^t \cdot l_{50+t}$.

Коэффициент дисконтирования $v = \dfrac{1}{1+i} = 0{,}83333$.

Из табл. П.5.2 для мужчины $l_{50}' = 73998$, $l_{51}' = 72392$, $l_{52}' = 71030$, следовательно, $\ddot{a}_{50:\overline{3}|}' \approx 2{,}48183$.

Для женщины $l_{50}'' = 90772$, $l_{51}'' = 90163$, $l_{52}'' = 89603$, поэтому $\ddot{a}_{50:\overline{3}|}'' \approx 2{,}51323$.

Тот же самый результат можно получить иначе. Мы находимся в рамках предположений упражнения 7 к главе 12, в котором найдены разовые нетто-премии по договору 3-летнего дискретного страхования жизни для мужчины $A_{50:\overline{3}|}' \approx 0.58635$ и для женщины $A_{50:\overline{3}|}'' \approx 0.58112$; покажем, что $\ddot{a}_{50:\overline{3}|}$ можно выразить через $A_{50:\overline{3}|}$.

Современная стоимость n-летнего аннуитета пренумерандо равна $\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{\min(K(x)+1,n)}|} = \dfrac{1-v^{\min(K(x)+1,n)}}{d}$, где $\ddot{a}_{\overline{m}|}$ – детерминированный m-летний аннуитет, известный из финансовой математики [6, 15, 32, 33], $K(x)$ – округленное остаточное время жизни, а d – эффективная учетная ставка. Переходя к математическим ожиданиям величин $\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}$ и $\dfrac{1-v^{\min(K(x)+1,n)}}{d}$, получим $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\dfrac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d}$.

Подставляя в формулу $\ddot{a}_{50:\overline{3}|}=\dfrac{1-A_{50:\overline{3}|}}{d}$ значения d = 1−v и $A_{50:\overline{3}|}$, получим значения искомых величин.

8. Пусть P – искомая премия.

Опишем сначала расходы компании. Компания должна выплатить 10000 руб. в конце года смерти, современная актуарная стоимость этой выплаты равна $10000A^{\,1}_{40:\overline{3}|}$.

A) Выплаты агенту являются суммой разовой выплаты, равной 0.05P, и трехлетнего актуарного аннуитета пренумерандо, современная актуарная стоимость которого равна $0.05P\ddot{a}_{40:\overline{3}|}$.

B) Расходы на подготовку документов, дисконтированные к моменту заключения договора, аналогично предыдущему равны $90+10\ddot{a}_{40:\overline{3}|}+120\ A^{\,1}_{40:\overline{3}|}$.

C) Дисконтирование налогов даст сумму $0.1\ P.\ddot{a}_{40:\overline{3}|}$.

D) Дисконтированные административные расходы равны $0.02\ P\ddot{a}_{40:\overline{3}|}$.

Дисконтированные доходы страховой компании от договора составляют $P\ddot{a}_{40:\overline{3}|}$. Условие эквивалентности обязательств приводит к уравнению

$$10000\ A^{\,1}_{40:\overline{3}|}+0.05P+0.05P\ddot{a}_{40:\overline{3}|}+90+10\ddot{a}_{40:\overline{3}|}+120\ A^{\,1}_{40:\overline{3}|}+0.1P\ddot{a}_{40:\overline{3}|}+$$

$$+0.02P\ddot{a}_{40:\overline{3}|}=P\ddot{a}_{40:\overline{3}|}.$$

Отсюда

$$P=\frac{10120A^{\,1}_{40:\overline{3}|}+90+10\ddot{a}_{40:\overline{3}|}}{0.83\ddot{a}_{40:\overline{3}|}-0.05}.$$

Вычислим необходимые величины. Дисконт v равен

$$(1+i)^{-1} = 1{,}1^{-1} \approx 0{,}90909,$$

$$A^{\;1}_{40:\overline{3|}} = q'_{40} \cdot v + {}_{1|}q'_{40} \cdot v^2 + {}_{2|}q'_{40} \cdot v^3 =$$

$$= \frac{(l'_{40} - l'_{41})v + (l'_{41} - l'_{42})v^2 + (l'_{42} - l'_{43})v^3}{l'_{40}} \approx 0{,}02631,$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{3|}} = 1 + {}_1p_{40} \cdot v + {}_2p_{40} \cdot v^2 = 1 + \frac{l'_{41}v + l'_{42}v^2}{l'_{40}} \approx 2{,}70858.$$

Окончательно, $P \approx 174{,}40$ руб.

9. Прибыль страховщика по данному договору, дисконтированная к моменту заключения договора, равна

$$Z = \overline{P}(\overline{A}_x) \cdot \overline{a}_{\overline{T(x)|}} - v^{T(x)} =$$

$$= \overline{P}(\overline{A}_x)\frac{1 - v^{T(x)}}{\delta} - v^{T(x)} = \frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta} - \frac{\overline{P}(\overline{A}_x) + \delta}{\delta} v^{T(x)}.$$

Дисперсия этой величины

$$\mathrm{Var}[Z] = \left(\frac{\overline{P}(\overline{A}_x) + \delta}{\delta}\right)^2 \mathrm{Var}[v^{T(x)}] = \left(\frac{\overline{P}(\overline{A}_x) + \delta}{\delta}\right)^2 \cdot \{{}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2\}.$$

10. Пусть P – искомая премия. Финансовые обязательства страховщика по данному договору: $12S_b \cdot {}_{25|}\ddot{a}^{(12)}_{40}$, финансовые обязательства страхователя: $4P \cdot \ddot{a}^{(4)}_{40:\overline{25|}}$. На основе принципа эквивалентности обязательств страховщика и страхователя:

$$4P\cdot\ddot{a}^{(4)}_{40:\overline{25|}}=12S_b\cdot{}_{25|}\ddot{a}^{(12)}_{40},$$

следовательно,

$$P=3S_b\cdot{}_{25|}\ddot{a}^{(12)}_{40}\Big/\ddot{a}^{(4)}_{40:\overline{25|}}.$$

11. Пусть P – величина ежегодной премии в первые 5 лет. Финансовые обязательства страховщика по данному договору: $50000\,{}_{30|}\ddot{a}_{25:\overline{3|}}+100000A^{\ 1}_{25:\overline{30|}}$, финансовые обязательства страхователя: $P\cdot\ddot{a}_{25:\overline{5|}}+\frac{1}{2}P\cdot{}_{5|}\ddot{a}_{25:\overline{5|}}$. Принцип эквивалентности обязательств страховщика и страхователя приводит к уравнению

$$P\cdot\ddot{a}_{25:\overline{5|}}+\frac{1}{2}P\cdot{}_{5|}\ddot{a}_{25:\overline{5|}}=50000\,{}_{30|}\ddot{a}_{25:\overline{3|}}+100000A^{\ 1}_{25:\overline{30|}}.$$

Следовательно, премия, которая должна выплачиваться первые 5 лет, равна

$$P=100000\left({}_{30|}\ddot{a}_{25:\overline{3|}}+2A^{\ 1}_{25:\overline{30|}}\right)\Big/\left(2\ddot{a}_{25:\overline{5|}}+{}_{5|}\ddot{a}_{25:\overline{5|}}\right),$$

в последующие 5 лет – в два раза меньше.

Глава 14

1. Сумма $\ddot{s}_{x:\overline{k|}}+\ddot{a}_{x+k}$ учитывает все выплаты по актуарному аннуитету, современная (на момент заключения контракта) стоимость которого равна $\ddot{a}_x$. Поскольку указанная сумма выражает стоимость аннуитета, отнесенного к моменту k, то справедливо равенство $(\ddot{s}_{x:\overline{k|}}+\ddot{a}_{x+k})\,{}_kE_x=\ddot{a}_x$. Напомним (п. 13.1), что ${}_kE_x$ – актуарный коэффициент дисконтирования.

Далее, если человек умрет до возраста $x+k$, то актуарно дисконтированная величина страхового вознаграждения совпадает с $A^{1}_{x:\overline{k|}}$ (п. 12.1). Если же человек умрет позднее этого возраста, то дисконтированная к моменту k величина страхового вознаграждения равна A_{x+k}. Эта сумма, актуарно дисконтированная к моменту заключения договора, равна ${}_kE_x\, A_{x+k}$. Тем самым сумма $A^{1}_{x:\overline{k|}}+{}_kE_x\, A_{x+k}$ равна дисконтированному (к начальному моменту) страховому вознаграждению, т.е $A^{1}_{x:\overline{k|}}+{}_kE_x{\cdot}A_{x+k} = A_x$. Подставляя в ретроспективную формулу выражения для $\ddot{s}_{x:\overline{k|}}$ и $A^{1}_{x:\overline{k|}}$, получим

$$ {}_kV_x = P_x{\cdot}\ddot{s}_{x:\overline{k|}} - A^{1}_{x:\overline{k|}} / {}_tE_x = \left(\ddot{a}_x / {}_kE_x - \ddot{a}_{x+k}\right) - \left(A_x - {}_kE_x A_{x+k}\right) / {}_tE_x = $$

$$ = \left(A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}\right) + \left(P_x\ddot{a}_x - A_x\right) / {}_kE_x = A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}. $$

Последнее следует из формулы для премии P_x (п. 13.3). Нужное утверждение доказано. Отметим, что это просто модификация для частного случая общего рассуждения из п. 14.1.

2. Прежде всего, найдем разовые нетто-премии $P_{x:\overline{n|}}$ по договору. Среднее значение дисконтированной страховой выплаты равно $A_{x:\overline{n|}}$ (п. 12.2); среднее значение суммы дисконтированных премий $-P_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ (п. 13.3). Из принципа эквивалентности $P_{x:\overline{n|}} = \dfrac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$.

В момент времени k оставшиеся средние обязательства страховщика состоят в выплате страхового вознаграждения по схеме смешанного $n-k$-летнего страхования, если страхователь в момент k жив. Тем самым ${}_t a_B = A_{x+k:\overline{n-k|}}$. Страхователю предстоит выплатить остаток актуарного аннуитета, стоимость которого, отнесенная к моменту k, равна ${}_t a_C = \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}$. Тем самым

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}. $$

Поскольку $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ (прил. 8), то

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. $$

3. Вычислим интенсивность поступления нетто-премии (премия в единицу времени) $\overline{P}(\overline{A}^{\,1}_{40:\overline{5}|})$. Аналогично предыдущему, справедливо равенство $\overline{A}^{\,1}_{40:\overline{5}|} = \overline{P}(\overline{A}^{\,1}_{40:\overline{5}|})\,\overline{a}_{40:\overline{5}|}$ (п. 13.3). Остаточное время жизни равномерно распределено на отрезке [0,60]. Отсюда получаем:

$$ \overline{A}^{\,1}_{40:\overline{5}|} = \int_0^5 \frac{e^{-0,1u}}{60}du = \frac{1-e^{-0,5}}{6} \approx 0,0656, $$

$$ \overline{a}_{40:\overline{5}|} = \int_0^5 \frac{e^{-0,1u}(100-u)}{60}du = 15 + \left(-15 + \frac{5}{6}\right)e^{-0,5} \approx 6,407, $$

отсюда $\overline{P}(\overline{A}^{\,1}_{40:\overline{5}|}) \approx 0,0102$.

Далее, как и в предыдущей задаче, резерв вычисляется по перспективной формуле

$$ {}_3V(\overline{A}^{\,1}_{40:\overline{5}|}) = \overline{A}^{\,1}_{43:\overline{2}|} - \overline{P}(\overline{A}^{\,1}_{40:\overline{5}|})\,\overline{a}_{43:\overline{2}|}. $$

Необходимые величины равны $\overline{A}^{\,1}_{43:\overline{2}|} = \int_0^2 \frac{e^{-0,1u}}{57}du \approx 0,318$, $\overline{a}_{43:\overline{2}|} = \int_0^2 \frac{e^{-0,1u}(100-u)}{57}du \approx 3,15$. Окончательно ${}_3V(\overline{A}^{\,1}_{40:\overline{5}|}) \approx 0,286$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Daykin C.D., Pentikäinen T. and Pesonen M.* Practical Risk Theory for Actuaries. (Monographs on Statistics and Applied Probability, 53) – London: Chapman & Hall, 1996.

2. *Gerber H.* An Introduction to Mathematical Risk Theory. – Philadelphia: University of Pennsylvania, 1979.

3. *Hart D.G., Buchanan R.A. and Howe B.A.* The Actuarial Practice of General Insurance. – Sydney: Institute of Actuaries of Australia, 1996.

4. *Scott W.F.* Life Contingencies (Part A2). – Edinburg: Herriot-Watt University, 1996.

5. *Актуарная математика.* Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. – М.: "Янус-К", 2001.

6. *Бронштейн Е. М.* Основы финансовой математики: учеб. пособие. – Уфа: Изд-во УГАТУ, 2002.

7. *Бронштейн Е. М., Прокудина Е. И.* Основы актуарной математики. Общее страхование: учеб. пособие. – Уфа: Изд-во УГАТУ, 2006.

8. *Бронштейн Е. М., Прокудина Е. И.* Основы актуарной математики. Страхование жизни и пенсионные схемы: учеб. пособие. – Уфа: Изд-во УГАТУ, 2002.

9. *Бронштейн Е.* Страховые премии и функция спроса // Страховое дело. 2004. № 8. С. 15–20.

10. *Булинская Е. В.* Теория риска и перестрахование. Часть 1. Упорядочивание рисков. – М.: Изд-во МГУ, 2001.

11. *Гвозденко А. А.* Основы страхования. – М.: Финансы и статистика, 1998.

12. *Гербер Х.* Математика страхования жизни. – М.: Мир, 1995.

13. *Голубин А. Ю.* Математические модели в теории страхования: построение и оптимизация. – М.: Анкил, 2003.

14. *Корнилов И. А.* Основы страховой математики. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

15. *Кутуков В. Б.* Основы финансовой и страховой математики: методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем. – М.: Дело, 1998.

16. *Математическая энциклопедия.* Т. 5. – М.: Советская энциклопедия, 1984.

17. *Мельников А. В*. Риск-менеджмент: Стохастический анализ рисков в экономике финансов и страхования. – М.: Анкил, 2001.

18. *Митькин Б. В.* Оптимальный страховой тариф с точки зрения спроса на страхование. http://conf.mitme.ru/articles/232.html

19. *Новоселов А. А.* Страховой тариф на рынке. Лекция для студентов СибГТУ http://anov.narod.ru/lectures.htm

20. *Ротарь В. И., Бенинг В. Е.* Введение в математическую теорию страхования // Обозр. прикл. и индустр. матем., 1994. т.1, вып. 5. С. 698–779.

21. *Рудерман С. Ю.* Законы в мире случая. Том 1. Теория вероятностей. учеб. пособие. – Уфа: БГУ, 2001.

22. *Рудерман С. Ю.* Законы в мире случая. Том 2. Теория вероятностей в задачах. Имитация. Статистические выводы. Учебное пособие. – Уфа: БГУ, 2005.

23. *Справочник* по прикладной статистике: в 2 т. / Под ред. Э. Лойда, У. Ледермана, С. А. Айвазяна, Ю. Н. Тюрина. – М.: Мир, 1990.

24. *Справочник* по теории вероятностей и математической статистике / Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. – М.: Наука, 1985.

25. *Управление* риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. – М.: Наука, 2000.

26. *Фалин Г. И.* Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. – М.: МГУ, 1996.

27. *Фалин Г. И.* Математический анализ рисков в страховании. – М.: Рос. юрид. издат. дом, 1994.

28. *Фалин Г. И., Фалин А. И.* Введение в актуарную математику. – М.: МГУ, 1994.

29. *Фалин Г. И., Фалин А. И.* Теория риска для актуариев в задачах. – М.: Изд-во ф-та ВМиК МГУ, 2001.

30. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. – М.: Мир, 1984.

31. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. – М.: Физматлит, т. 1, 2, 2001; т.3, 2002.

32. *Четыркин Е. М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело ЛТД, 1995.

33. *Четыркин Е. М.* Финансовая математика. – М.: Дело Лтд, 1995.

34. *Шахов В. В.* Страхование. – М.: ЮНИТИ, 2001.

35. *Шахов В. В., Миллерман А. С., Медведев В. Г.* Теория и управление рисками в страховании. – М.: Финансы и статистика, 2002.

Приложение 1

Приближенные значения функции стандартного нормального распределения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$, умноженные на 10^5

Таблица П.1.1

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56750	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59484	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0.4	65542	65910	66276	66640	67003	67365	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72241
0.6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76731	77035	77337	77637	77935	78231	78524
0.8	78815	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0.9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1,0	84135	84375	84614	84850	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1.1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1.2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90148
1.3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92786	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93575	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95544	95637	95728	95819	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97671
2,0	97725	97778	97831	97882	97933	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98746	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99586	99598	99609	96219	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99737
2,8	99745	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3,0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99897	99900
3,1	99903	99907	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99982	99982	99983	99984
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99993
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997

Приложение 2

Приближенные значения квантилей x_α стандартного нормального распределения

Таблица П.2.1

$1-\alpha$	x_α	$1-\alpha$	x_α
0,50	0,000	0,023	1,995
0,45	0,126	0,022	2,014
0,40	0,253	0,021	2,034
0,35	0,385	0,020	2,054
0,30	0,524	0,019	2,075
0,25	0,675	0,018	2,097
0,20	0,842	0,017	2,120
0,15	1,036	0,016	2,144
0,10	1,282	0,015	2,170
0,05	1,645	0,014	2,197
0,048	1,665	0,013	2,226
0,046	1,685	0,012	2,257
0,044	1,706	0,011	2,290
0,042	1,728	0,010	2,326
0,040	1,751	0,009	2,366
0,038	1,774	0,008	2,409
0,036	1,799	0,007	2,457
0,034	1,825	0,006	2,512
0,032	1,852	0,005	2,576
0,030	1,881	0,004	2,652
0,029	1,896	0,003	2,748
0,028	1,911	0,002	2,878
0,027	1,927	0,001	3,090
0,026	1,943	0,0005	3,291
0,025	1,960	0,0001	3,719
0,024	1,977	0,00005	3,891

Приложение 3

Приближенные значения квантилей $x_\alpha(n)$ уровня α распределения χ^2 с n степенями свободы

Таблица П.3.1

n \1−α	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,688	13,277	18,467
5	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,696
16	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	18,383	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	24,337	38,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	25, 336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	26, 336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	27, 336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	28, 336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	29, 336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703
32	31, 336	35,665	38,466	42,585	46,194	50,487	53,486	62,487
34	33, 336	37,795	40,676	44,903	48,602	52,995	56,061	65,247
36	35, 336	39,922	42,879	47,212	50,999	55,489	58,619	67,985
38	37, 335	42,045	45,076	49,513	53,384	57,969	61,162	70,703
40	39, 335	44,165	47,269	51,805	55,759	60,436	63,691	73,402
42	41, 335	46,282	49,456	54,090	58,124	62,892	66,206	76,084
44	43, 335	48,396	51,639	56,369	60,481	65,337	68,710	78,750
46	45, 335	50,507	53,818	58,641	62,830	67,771	71,201	81,400
48	47, 335	52,616	55,993	60,907	65,171	70,197	73,683	84,037
50	49, 335	54,723	58,164	63,167	67,505	72,613	76,154	86,661

Окончание табл. П.3.1

52	51, 335	56,827	60,332	65,422	69,832	75,021	78,616	86,271
54	53,335	58,930	62,496	67,673	72,153	77,422	81,069	91,872
56	55, 335	61,031	64,658	69,919	74,468	79,815	83,513	94,461
58	57, 335	63,129	66,816	72,160	76,778	82,201	85,950	97,039
60	59, 335	65,227	68,972	74,397	79,082	84,580	88,379	99,607
62	61, 335	67,322	71,125	76,630	81,381	86,953	90,802	102,166
64	63, 335	69,416	73,276	78,860	83,675	89,320	93,217	104,716
66	65, 335	71,508	75,424	81,085	85,965	91,681	95,626	107,258
68	67, 335	73,600	77,571	83,308	88,250	94,037	98,028	109,791
70	69, 334	75,689	79,715	85,527	90,531	96,388	100,425	112,317

Для определения $x_\alpha(n)$ при нечетных значениях n между 30 и 70 можно усреднить табличные значения для $x_\alpha(n-1)$ и $x_\alpha(n+1)$.

Приложение 4

Законы распределения случайных величин

Таблица П.4.1

Дискретные распределения (СВ N – число исков)

Название	Параметры	$P[N = n]$	Математическое ожидание	Дисперсия	Коэффициент асимметрии	Производящая функция $m(z)$
Распределение Пуассона	$\lambda > 0$	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$e^{\lambda z - \lambda}$, $-\infty < z < +\infty$
Биномиальное	$K = 1, 2, ...,$ $0 < p < 1$ $(q = 1 - p)$	$\binom{K}{n} p^n q^{K-n}$	Kp	Kpq	$\frac{q-p}{\sqrt{Kpq}}$	$(q + pz)^K$, $-\infty < z < +\infty$
Отрицательное биномиальное	$\alpha > 0,$ $0 < p < 1$ $(q = 1 - p)$	$\binom{\alpha + n - 1}{n} p^\alpha q^n$	$\frac{\alpha q}{p}$	$\frac{\alpha q}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{\alpha q}}$	$\left(\frac{p}{1-qz}\right)^\alpha$, $\lvert z \rvert < \frac{1}{q}$
Геометрическое	$0 < p < 1$ $(q = 1 - p)$	$p(1-p)^n$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$	$\left(\frac{p}{1-qz}\right)$, $\lvert z \rvert < \frac{1}{q}$

Таблица П.4.2

Непрерывные распределения (СВ Y – размер предъявляемого иска)

Название	Параметры	Плотность распределения $f(x)$	Математическое ожидание	Дисперсия	Коэффициент асимметрии	Производящая функция моментов $M(t)$
1	2	3	4	5	6	7
Равномерное	$-\infty < a < b < +\infty$	$\frac{1}{b-a}$, $a \le x \le b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$, $t \neq 0$
Экспоненциальное	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	2	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$, $t < \lambda$
Гамма-распределение	$\lambda > 0,$ $\alpha > 0$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$ $x > 0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$, $t < \lambda$

Окончание табл. П.4.2

1	2	3	4	5	6	7
Распределение $\chi^2(\alpha)$	$\alpha > 0$	$\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} x^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$, $x > 0$	α	2α	$\sqrt{\frac{8}{\alpha}}$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$, $t < 1/2$
Распределение Парето	$\lambda > 0$, $\alpha > 0$	$\frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha+1}$, $x > 0$	$\frac{\lambda}{\alpha-1}$, $\alpha > 1$	$\frac{\lambda^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ $\alpha > 2$	–	–
Нормальное	$-\infty < m < +\infty$, $\sigma > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	0	$e^{mt+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, $-\infty < t < +\infty$

Таблица П.4.3

Составные распределения (СВ $S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$ – суммарный иск)

Составное распредел.	Распределение СВ N	Параметры	Математическое ожидание	Дисперсия	Третий центральный момент $\mathrm{E}[S - \mathrm{E}[S]]^3$	Производящая функция моментов $m_N(M_Y(t))$
Пуассона	Пуассона	$\lambda > 0$, $F(x) = \mathrm{P}[Y \le x]$	$\lambda\mathrm{E}[Y]$	$\lambda\mathrm{E}[Y^2]$	$\lambda\mathrm{E}[Y^3]$	$e^{\lambda M_Y(t)-\lambda}$
Биномиальное	Биномиальное	$K = 1, 2,...$, $0 < p < 1$, $F(x) = \mathrm{P}[Y \le x]$ $(q = 1 - p)$	$Kp\mathrm{E}[Y]$	$Kp\mathrm{E}[Y^2] - Kp^2\mathrm{E}^2[Y]$	$Kp\mathrm{E}[Y^3] + 2Kp^3\mathrm{E}^3[Y] - 3Kp^2\mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[Y^2]$	$(q + pM_Y(t))^K$
Отрицательное биномиальное	Отрицательное биномиальное	$\alpha > 0$, $0 < p < 1$, $F(x) = \mathrm{P}[Y \le x]$ $(q = 1 - p)$	$\frac{\alpha q}{p}\mathrm{E}[Y]$	$\frac{\alpha q}{p}\mathrm{E}[Y^2] + \frac{\alpha q^2}{p^2}\mathrm{E}^2[Y]$	$\frac{\alpha q}{p}\mathrm{E}[Y^3] + 3\frac{\alpha q^2}{p^2}\mathrm{E}[Y] \times \mathrm{E}[Y^2] + 2\frac{\alpha q^3}{p^3}\mathrm{E}^3[Y]$	$\left(\frac{p}{1-qM_Y(t)}\right)^\alpha$

Таблица П.4.4

Свойства составных распределений

Распределение СВ S_i, $i=\overline{1,n}$	Распределение S = $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, (S_1, S_2 ,..., S_n взаимно независимы)
Составное Пуассона с параметрами λ_i и $F_i(x)$	Составное Пуассона с параметрами $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $F(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x)$
Составное биномиальное с параметрами K_i, p и $F(x)$	Составное биномиальное с параметрами $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$, p и $F(x)$
Составное отрицательное биномиальное с параметрами α_i, p и $F(x)$	Составное отрицательное биномиальное с параметрами $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, p и $F(x)$

Приложение 5

Таблица П.5.1

Таблицы смертности населения России для 1970 г.
(«Демоскоп Weekly», Электронная версия бюллетеня «Население и общество». М.: ЦДЭЧ ИНП РАН,2002, № 75-76, www.demoscope.ru\weekly)

Возраст, *x* лет	l_x'(число дожив-ших мужчин)	l_x''(число дожив-ших женщин)	Возраст, *x* лет	l_x' (число дожив-ших мужчин)	l_x''(число дожив-ших женщин)
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
0	100000	100000	56	72060	88155
1	97438	98097	57	70650	87495
2	97150	97866	58	69219	86792
3	97013	97743	59	67645	86037
4	96908	97662	60	66030	85230
5	96811	97595	61	64235	84255
6	96723	97531	62	62456	83349
7	96632	97480	63	60545	82271
8	96547	97422	64	58435	81095
9	96463	97373	65	56282	79859
10	96391	97331	66	53980	78442
11	96325	97290	67	51659	76968
12	96264	97252	68	49288	75320
13	96202	97215	69	46846	73576
14	96134	97174	70	44284	71547
15	96060	97132	71	41509	69120
16	95963	97086	72	39046	66910
17	95842	97034	73	36327	64094
18	95668	96978	74	33657	61349
19	95466	96914	75	31051	58419
20	95273	96844	76	28437	55323
21	95072	96767	77	25863	52118
22	94831	96690	78	23392	48804
23	94579	96620	79	20887	45153
24	94283	96534	80	18517	41687
25	93999	96457	81	16346	37975
26	93677	96367	82	14423	34760

Окончание табл. П.5.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
27	93336	96274	83	12196	30856
28	93008	96182	84	10492	27508
29	92616	96073	85	8819	24104
30	92213	95967	86	7335	20871
31	91788	95854	87	5977	17792
32	91347	95735	88	4867	15008
33	90904	95610	89	3898	12537
34	90434	95473	90	3117	10504
35	89938	95326	91	2389	8328
36	89398	95156	92	1909	6992
37	88864	94991	93	1455	5503
38	88303	94822	94	1083	4388
39	87684	94623	95	816	3456
40	87065	94427	96	584	2582
41	86396	94206	97	410	1891
42	85740	93986	98	282	1356
43	85018	93736	99	191	953
44	84287	93485	100	126	655
45	83513	93206	101	82	440
46	82710	92903	102	52	289
47	81847	92560	103	32	185
48	80975	92220	104	20	116
49	80064	91815	105	12	71
50	79082	91397	106	7	42
51	78055	90912	107	4	24
52	77032	90427	108	2	14
53	75868	89895	109	1	8
54	74674	89349	110	1	4
55	73410	88764	–	–	–

Таблица П.5.2

Таблицы смертности населения России для 1999 г.
(«Демоскоп Weekly», Электронная версия бюллетеня «Население и общество». М.: ЦДЭЧ ИНП РАН,2002, № 75-76, www.demoscope.ru\weekly)

Возраст, *x* лет	l_x'(число дожив-ших мужчин)	l_x''(число дожив-ших женщин)	Возраст, *x* лет	l_x' (число дожив-ших мужчин)	l_x''(число доживших женщин)
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
0	100000	100000	56	64212	86695
1	98153	98584	57	62586	85942
2	97963	98417	58	60574	85004
3	97857	98328	59	58684	84095
4	97777	98267	60	56706	83107
5	97701	98216	61	54488	82011
6	97640	98173	62	52416	80904
7	97584	98137	63	50240	79662
8	97525	98099	64	48026	78290
9	97463	98061	65	45760	76836
10	97405	98026	66	43525	75329
11	97353	97998	67	41243	73668
12	97303	97973	68	38908	71843
13	97247	97943	69	36527	69919
14	97184	97911	70	34160	67835
15	97108	97874	71	31824	65592
16	97011	97821	72	29449	63187
17	96865	97750	73	27235	60704
18	96663	97667	74	25065	58046
19	96417	97574	75	22946	55229
20	96112	97475	76	20860	52129
21	95756	97363	77	18960	49055
22	95350	97254	78	17093	45807
23	94909	97147	79	15330	42464
24	94449	97038	80	13725	39145
25	93964	96927	81	11881	35341
26	93490	96809	82	10291	31812
27	93018	96695	83	9050	28655

Окончание табл. П.5.2

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
28	92537	96571	84	7712	25191
29	92043	96446	85	6450	21846
30	91555	96310	86	5329	18629
31	91003	96161	87	4396	15671
32	90435	96010	88	3555	12990
33	89856	95851	89	2875	10495
34	89255	95688	90	2375	8275
35	88628	95523	91	1994	6623
36	87955	95339	92	1637	5155
37	87282	95143	93	1314	3930
38	86564	94936	94	1039	2955
39	85820	94713	95	818	2170
40	85010	94477	96	630	1557
41	84114	94211	97	480	1092
42	83223	93934	98	363	748
43	82310	93640	99	271	500
44	81315	93335	100	200	326
45	80253	92986	101	146	207
46	79095	92609	102	106	128
47	77919	92209	103	76	77
48	76663	91761	104	53	46
49	75363	91287	105	37	26
50	73998	90772	106	26	15
51	72392	90163	107	18	8
52	71030	89603	108	12	4
53	69352	88902	109	8	2
54	67803	88263	110	5	1
55	66061	87511	–	–	–

Приложение 6

АКТУАРНАЯ ПОДГОТОВКА В СОЕДИНЕННОМ КОРОЛЕВСТВЕ

Актуарная деятельность в Соединенном Королевстве имеет давние и глубокие традиции: формально она существует с образования Лондонского института актуариев в 1848 году и факультета актуариев в Эдинбурге в 1856 году. Члены этих учреждений работают актуариями в разных частях света. Профессия актуария относится к числу самых высокооплачиваемых, поэтому стать актуарием весьма сложно.

Выпускник математического или экономического факультета (бакалавр или магистр), желающий стать актуарием, подает необходимые документы в институт или на факультет, после рассмотрения документов и их одобрения будущий актуарий уплачивает вступительный взнос и приобретает статус студента института или факультета актуариев. После этого начинается долгий и сложный процесс сдачи экзаменов. Экзамены ныне можно сдавать в 70 городах мира, в их числе и некоторые города России. Ежегодно проводятся две сессии – весной и осенью. Каждый из экзаменов, о которых речь пойдет далее, всюду сдается в один день. Уполномоченное лицо получает задания, перед началом экзамена вскрывает конверт, следит за порядком во время экзамена, через 4 часа собирает работы, запечатывает их и тут же экспресс-почтой отправляет в Лондон. Затем сложная и длительная проверка и через два-три месяца оглашаются списки студентов, сдавших тот или иной экзамен. На сегодняшний день студентами являются около 3000 жителей Соединенного Королевства и Ирландии и 1700 других стран. Ежегодно завершает сдачу экзаменов примерно 400 студентов, им присваивается титул членов института или факультета (FIA, FFA), что торжественно фиксируется на визитных карточках.

Сдача всех экзаменов может занять от трех до шести лет. Разумеется, подготовка к экзаменам проводится в основном самостоятельно, институт и факультет осуществляют консультативную помощь.

Перечислим экзамены, которые сдают будущие актуарии.

1 серия.

101. Статистическое моделирование.
102. Финансовая математика.
103. Стохастическое моделирование.
104. Модели выживания.
105. Актуарная математика 1.
106. Актуарная математика 2.
107. Экономика.
108. Финансы и финансовая отчетность.
109. Финансовая экономика.

На подготовку каждого из этих экзаменов рекомендуется затратить 120–150 часов. Для того чтобы успешно сдать экзамены, необходимо не только свободно владеть предметом, но и иметь очень хорошие навыки вычислений. Студенту, сдавшему экзамены первой серии, выдается диплом специалиста в области актуарной техники. Материал данного пособия относится к экзаменам 104 и 105.

Вторая серия состоит из одного экзамена, призванного продемонстрировать умение будущего актуария общаться с неспециалистами (то, что сейчас у нас называется паблик рилейшнс – калька соответствующего английского выражения). Студенту выдается гипотетическая заметка из газеты, относящаяся к проблемам страхования или демографии, содержащая небесспорные суждения. Требуется написать письмо редактору объемом в одну страницу, содержащее профессиональный комментарий. При проверке оценивается не только профессионализм ответа, но и стиль.

Третья серия состоит из четырех экзаменов.

301. Инвестиционный и финансовый менеджмент.
302. Жизненное страхование.
303. Нежизненное страхование.
304. Пенсионные и другие выплаты.

На последнем четвертом этапе студент должен представить статью, демонстрирующую квалификацию в одной из четырех перечисленных областей.

Приложение 7

Таблица П.7.1

Нетто-премии для основных видов страхования жизни

Вид страхования жизни		Символ	Выражение через вероятности	Выражение через коммутационные функции	Соотношение между непрерывными и дискретными величинами
n-летнее чисто накопительное		$A_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;\;1}$	$v^n \cdot {}_n p_x$	$\dfrac{D_{x+n}}{D_x}$	–
Полное	Непрер.	$\bar{A}_x$	$\int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\,dt$	$\dfrac{\bar{M}_x}{D_x}$	$\bar{A}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A_x$ $\bar{A}_x \approx \left(1+\frac{1}{2} i\right) A_x$ $\bar{A}_x = \dfrac{i}{\delta} A_x$ (*)
	Дискрет.	A_x	$\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_{t\rvert} q_x$	$\dfrac{M_x}{D_x}$	
Отсроченное на m лет полное	Непрер.	${}_{m\rvert}\bar{A}_x$	$\int_m^\infty v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\,dt$	$\dfrac{\bar{M}_{x+m}}{D_x}$	${}_{m\rvert}\bar{A}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}}\, {}_{m\rvert}A_x$ ${}_{m\rvert}\bar{A}_x = \dfrac{i}{\delta}\, {}_{m\rvert}A_x$ (*)
	Дискрет.	${}_{m\rvert}A_x$	$\sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_{t\rvert} q_x$	$\dfrac{M_{x+m}}{D_x}$	
Полное с непрерывно возрастающим страховым пособием	Непрер.	$(\bar{I}\bar{A})_x$	$\int_0^\infty t \cdot v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\,dt$	–	$(\bar{I}\bar{A})_x \approx (I\bar{A})_x - \frac{1}{2}\bar{A}_x$, $(I\bar{A})_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} (IA)_x$, $(I\bar{A})_x = \dfrac{i}{\delta}(IA)_x$ (*)
		$(I\bar{A})_x$	$\int_0^\infty ([t]+1) \cdot v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\,dt$	$\dfrac{\bar{R}_x}{D_x}$	
	Дискрет.	$(IA)_x$	$\sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \cdot v^{t+1}\, {}_{t\rvert} q_x$	$\dfrac{R_x}{D_x}$	
n-летнее временное	Непрер.	$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$	$\int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\,dt$	$\dfrac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x}$	$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$ $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert} = \dfrac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$ (*)
	Дискрет.	$A^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$	$\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\, {}_{t\rvert} q_x$	$\dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$	
n-летнее смешанное	Непрер.	$\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}$	$\int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\,dt + v^n \cdot {}_n p_x$	$\dfrac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A^{1}_{x:\overline{n}\rvert} + A_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;\;1}$ $\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert} = \dfrac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{n}\rvert} + A_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;\;1}$ (*)
	Дискрет.	$A_{x:\overline{n}\rvert}$	$\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\, {}_{t\rvert} q_x + v^n \cdot {}_n p_x$	$\dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$	

(∗) – при предположении о равномерном распределении смертей в течение года.

Приложение 8.

Таблица П.8.1

Средние значения современных стоимостей основных видов аннуитетов

Вид аннуитета		Символ	Выражение через актуарн. коэфф. дисконтирования	Выражение через вероятности	Выражение через коммутационные функции	Соотношение между аннуитетами и нетто-премиями для договоров страхования
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Полный пожизненный	Непрер.	$\bar{a}_x$	–	$\int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x dt$	$\dfrac{\bar{N}_x}{D_x}$	$\bar{a}_x = \dfrac{1}{\delta}(1-\bar{A}_x)$
	Ежегод. пренумерандо	$\ddot{a}_x$	$\sum\limits_{t=0}^{\infty} {}_tE_x$	$\sum\limits_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x$	$\dfrac{N_x}{D_x}$	$\ddot{a}_x = \dfrac{1}{d}(1-A_x)$
	Ежегод. постнумерандо	a_x	$\sum\limits_{t=1}^{\infty} {}_tE_x$	$\sum\limits_{t=1}^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x$	$\dfrac{N_{x+1}}{D_x}$	$a_x = \dfrac{1}{d}(1-A_x)-1$
Отсроченный на m лет пожиз.	Непрер.	${}_{m\|}\bar{a}_x$	–	$\int_m^\infty v^t \cdot {}_tp_x dt$	$\dfrac{\bar{N}_{x+m}}{D_x}$	${}_{m\|}\bar{a}_x = \dfrac{1}{\delta}(\bar{A}_{x:\overline{m}\|} - \bar{A}_x)$
	Ежегод. пренумерандо	${}_{m\|}\ddot{a}_x$	$\sum\limits_{t=m}^{\infty} {}_tE_x$	$\sum\limits_{t=m}^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x$	$\dfrac{N_{x+m}}{D_x}$	${}_{m\|}\ddot{a}_x = \dfrac{1}{d}(A_{x:\overline{m}\|} - A_x)$
	Ежегод. постнумерандо	${}_{m\|}a_x$	$\sum\limits_{t=m+1}^{\infty} {}_tE_x$	$\sum\limits_{t=m+1}^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x$	$\dfrac{N_{x+m+1}}{D_x}$	${}_{m\|}a_x =$ $= \dfrac{1}{d}(A_{x:\overline{m}\|} - A_x)$ - ${}_mE_x$
Пожизненный с возраст. величиной платежа	Непрер.	$(\bar{I}\,\bar{a})_x$	–	$\int_0^\infty t \cdot v^t \cdot {}_tp_x dt$	–	$(\bar{I}\,\bar{a})_x =$ $= \dfrac{1}{\delta}\{\bar{a}_x - (\bar{I}\,\bar{A})_x\}$
	–	$(I\,\bar{a})_x$	–	$\int_0^\infty ([t]+1)v^t \cdot {}_tp_x dt$	$\dfrac{\bar{S}_x}{D_x}$	$(I\,\bar{a})_x =$ $= \dfrac{1}{\delta}\{\ddot{a}_x - (I\,\bar{A})_x\}$
	Ежегод. пренумерандо	$(I\,\ddot{a})_x$	$\sum\limits_{t=0}^{\infty} (t+1)\,{}_tE_x$	$\sum\limits_{t=0}^{\infty} (t+1)v^t \cdot {}_tp_x$	$\dfrac{S_x}{D_x}$	$(I\,\ddot{a})_x =$ $= \dfrac{1}{d}\{\ddot{a}_x - (I\,A)_x\}$
	Ежегод. постнумерандо	$(I\,a)_x$	$\sum\limits_{t=1}^{\infty} t\,{}_tE_x$	$\sum\limits_{t=1}^{\infty} t \cdot v^t \cdot {}_tp_x$	$\dfrac{S_{x+1}}{D_x}$	$(I\,a)_x =$ $= \dfrac{1}{d}\{\ddot{a}_x - (I\,A)_x\}$ - $\ddot{a}_x$

Окончание табл. П.8.1

1	2	3	4	5	6	7
n-летний временный	Непрер.	$\bar{a}_{x:\overline{n}\|}$		$\int_0^n v^t \cdot {}_t p_x dt$	$\dfrac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}$	$\bar{a}_{x:\overline{n}\|} = \dfrac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_{x:\overline{n}\|})$
	Ежегод. прену-мерандо	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}$	$\sum_{t=0}^{n-1} {}_t E_x$	$\sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_t p_x$	$\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\|} = \dfrac{1}{d}(1 - A_{x:\overline{n}\|})$
	Ежегод. постну-мерандо	$a_{x:\overline{n}\|}$	$\sum_{t=1}^{n} {}_t E_x$	$\sum_{t=1}^{n} v^t \cdot {}_t p_x$	$\dfrac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$	$a_{x:\overline{n}\|} =$ $= \dfrac{1}{d}(1 - A_{x:\overline{n+1}\|}) - 1$

Приложение 9

Таблица П.9.1

Периодические ежегодные нетто-премии для основных дискретных видов страхования жизни

Вид страхования жизни		Символ	Выражение через а и А	Выражение через коммутационные функции
n-летнее чисто накопительное	Премии выплачиваются, пока действует договор	$P_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1}$	$\dfrac{A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}}$	$\dfrac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
	Премии выплачиваются самое большее t лет	${}_tP_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1}$	$\dfrac{A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}\vert}}$	$\dfrac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}$
Полное	Премии выплачиваются, пока действует договор	P_x	$\dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$	$\dfrac{M_x}{N_x}$
	Премии выплачиваются самое большее t лет	${}_tP_x$	$\dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}\vert}}$	$\dfrac{M_x}{N_x - N_{x+t}}$
Отсроченное на m лет полное	Премии выплачиваются, пока действует договор	$P({}_{m\vert}A_x)$	$\dfrac{{}_{m\vert}A_x}{\ddot{a}_x}$	$\dfrac{M_{x+m}}{N_x}$
	Премии выплачиваются самое большее t лет	${}_tP({}_{m\vert}A_x)$	$\dfrac{{}_{m\vert}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}\vert}}$	$\dfrac{M_{x+m}}{N_x - N_{x+t}}$
Полное с непрер. возраст. страховым пособием	Премии выплачиваются, пока действует договор	$P((IA)_x)$	$\dfrac{(IA)_x}{\ddot{a}_x}$	$\dfrac{R_x}{N_x}$
	Премии выплачиваются самое большее t лет	${}_tP((IA)_x)$	$\dfrac{(IA)_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}\vert}}$	$\dfrac{R_x}{N_x - N_{x+t}}$
n-летнее временное	Премии выплачиваются, пока действует договор	$P^1_{x:\overline{n}\vert}$	$\dfrac{A^1_{x:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}}$	$\dfrac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
	Премии выплачиваются самое большее t лет	${}_tP^1_{x:\overline{n}\vert}$	$\dfrac{A^1_{x:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}\vert}}$	$\dfrac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}$
n-летнее смешанное	Премии выплачиваются, пока действует договор	$P_{x:\overline{n}\vert}$	$\dfrac{A_{x:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}}$	$\dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
	Премии выплачиваются самое большее t лет	${}_tP_{x:\overline{n}\vert}$	$\dfrac{A_{x:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}\vert}}$	$\dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

БРОНШТЕЙН Ефим Михайлович

ПРОКУДИНА Елена Ивановна

ОСНОВЫ АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Подписано в печать Формат 60×84 1/16

Усл. печ. л. 20.

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Редакционно-издательский комплекс УГАТУ

450000, Уфа-центр, ул. К.Маркса, 12