Задача 1. Матрица поворота на угол φ вокруг точки $A(a,b)$ на плоскости

M - матрица поворота в исх. СК

T - матрица перехода от M к R_φ

R_φ - матрица поворота в новой СК

$$M = T^{-1} R_\varphi T$$

1) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$

2) $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix}$

3) $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 3. Матрица поворота на угол φ вокруг прямой L в 3D-пр-ве проход. через т. $A(a,b,c)$ и имеющей напр. вектор (l,m,n) с модулем $= 1$.

Совместим Oz с L + паралл. перенос $0{:}0{:}0 \to A$

Q - м-ца перехода;

$R_z'(\varphi)$ - м-ца поворота в новой ск.

$R_z(\varphi)$ - — " — в исход. ск.

$R_z(\varphi) = Q^{-1} \times R_z'(\varphi) \times Q$; $Q = R \times T$

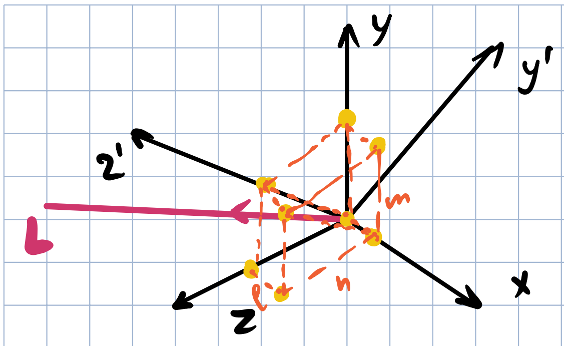
м-ца повор. $Oz \to L$

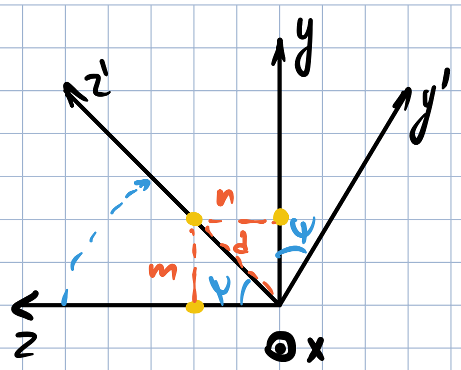
м-ца паралл. перен. $O \to A$.

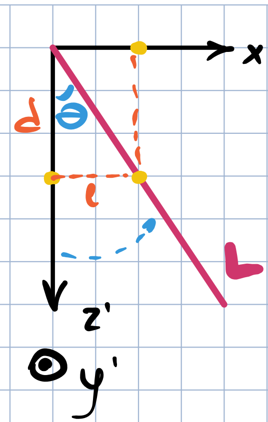
$R = R_y(\theta) \times R_x(\psi)$

против часовой

по часовой







$d = \sqrt{(m^2+n^2)}$; $\sin\varphi = \frac{m}{d}$; $\cos\varphi = \frac{n}{d}$

$$R_x(-\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/d & -m/d & 0 \\ 0 & m/d & n/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sin\theta = \frac{l}{1} = l$

$\cos\theta = \frac{d}{1} = d$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} d & 0 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{M = Q^{-1} \times R_z(\varphi) \times Q}_{\text{ответ.}}, \text{ где } Q = R_y(\theta) \times R_x(-\varphi) \times T$$

Задача 8.

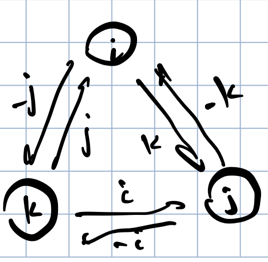
1й поворот вокруг оси x на угол $\frac{\pi}{2}$
2й поворот —//— y —//— $\frac{\pi}{2}$

результирующий?

$$Q_1 = \cos\frac{\pi}{4} + (1\ 0\ 0)^T \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$Q_2 = \cos\frac{\pi}{4} + (0\ 1\ 0)^T \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j$$

$$Q_2 Q_1 = \frac{1}{2}(1+i+j-k) = 1/2 + 1/2\,(1\ 1\ {-1})^T = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ {-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^T$$



$$\varphi = 2\pi/3$$

$$v = (1/\sqrt{3}\ \ 1/\sqrt{3}\ \ {-1/\sqrt{3}})^T$$

(теорема об операторе вращения)