

Fizika e Grimcave Elementare — Pjesa I

Themelet e Fizikes se Grimcave Elementare

Ervin Kafexhiu

Tetor 2025

Master Shkencore II Fizike

Permbajtja

Hyrje dhe të dhëna për kursin

Historiku i zbulimeve të grimcave

Aplikimet e Fizikës së Grimcave

Njësitë natyrore

Transformimet, Simetritë dhe Ligjet e Ruajtjes

Numrat Kuantike të Grimcave & Klasifikimi i Grimcave

Klasifikimi i Grimcave Elementare: Modeli Standart

Mekanika Kuantike Relativiste dhe Teoria Kvantike Fushes

Heliciteti

Hyrje dhe të dhëna për kursin

Struktura

- Kursi përbëhet nga: **Leksion** (2h, *fakultativ*) + **Seminare** (2h, *detyrueshme*)
- **ECTS:** 5
- **Literatura kryesore:** Griffiths + PDG (Reviews)
- **Pjesëmarrja:** 15%, **Kontrollet e ndërmjetme:** 25%, **Provimi final:** 60%.
- **Njohuri paraprake të rekomanduara:**
 - Analizë komplekse
 - Algjebër lineare
 - Mekanikë kuantike e avancuar

Pjesa I: Hyrje në Fizikën e Grimcave Elementare

- ▶ Historiku.
- ▶ Simetritë dhe ligjet e ruajtjes; Teorema e Noether-it.
- ▶ Klasifikimi i grimcave elementare.
- ▶ Parimet bazë të Mekanikës Kuantike Relativiste dhe Teorisë Kuantike të Fushës.
- ▶ Modeli Standard i grimcave elementare.

Pjesa II: Diagramet e Feynman-it dhe aplikime

- ▶ Rregullat bazë; seksionet e tërthorta; shpejtësia e zbërthimit.
- ▶ Elektrodinamika Kuantike (QED).
- ▶ Bashkëveprimi i dobët.
- ▶ Kromodinamika Kuantike (QCD).

Vleresimi

Kursi ka 100 pikë:

- **Pjesëmarrja dhe aktivizimi: 15%**
- **Kontrolle të ndërmjetme (midterm/projekt): 25%**
- **Provimi final: 60%**

Projekte Potenciale

- Cloud Chamber – Detektojmë dhe identifikojmë gjurmët që lënë grimcat.
- NaI(Tl) spektroskopi γ — kalibrim, fotopeak/Compton.
- Teleskop myonesh (2-3 pllaka shintiluese) — koincidencë, $I(\theta)$.
- Analizë të dhënash reale eksperimentale (psh nga LHC).
- etj...

Literatura

Hyrje në fizikën e grimcave

- **Introduction to Elementary Particle Physics**, D. J. Griffiths (2008), edition 2.
- **Elementary Particle Physics (an intuitive introduction)**, A. J. Larkoski (2019).
- **Introduction to High Energy Physics**, D. H. Perkins (2000), edition 4.
- **Particle Data Group Reviews (PDG)**.

Hyrje në Teorinë Kuantike të Fushës

- **An Introduction to Quantum Field Theory**, M. E. Peskin & D. V. Schroeder (1995).
- **Field Quantization**, W. Greiner & J. Reinhardt (1996).
- **Teoritë kalibruese të fizikës së grimcave elementare**, A. Boriçi & P. Rexhepi (2010).

Burime profesionale të dhënash

- **Particle Data Group** — pdg.lbl.gov: bazë e të dhënave për të gjitha grimcat e njohura.
- **NIST / CODATA** — nist.gov/pml/productsservices/physical-reference-data: vlera të përditësuara të madhësive fizike (rekomandimet CODATA).

Burime të tjera do t'i përmendim sipas nevojës gjatë kursit.

Historiku i zbulimeve të grimcave

Pse fizika e grimcave?

Duam të kuptojmë përbërjen e materies dhe si funksionon bota në nivel nënatomik! Këtë e studion fizika e grimcave elementare. Kjo është një nga qëllimet e fizikës fondamentale!

Fizika Grimcave = Fizika e Energjive të Larta

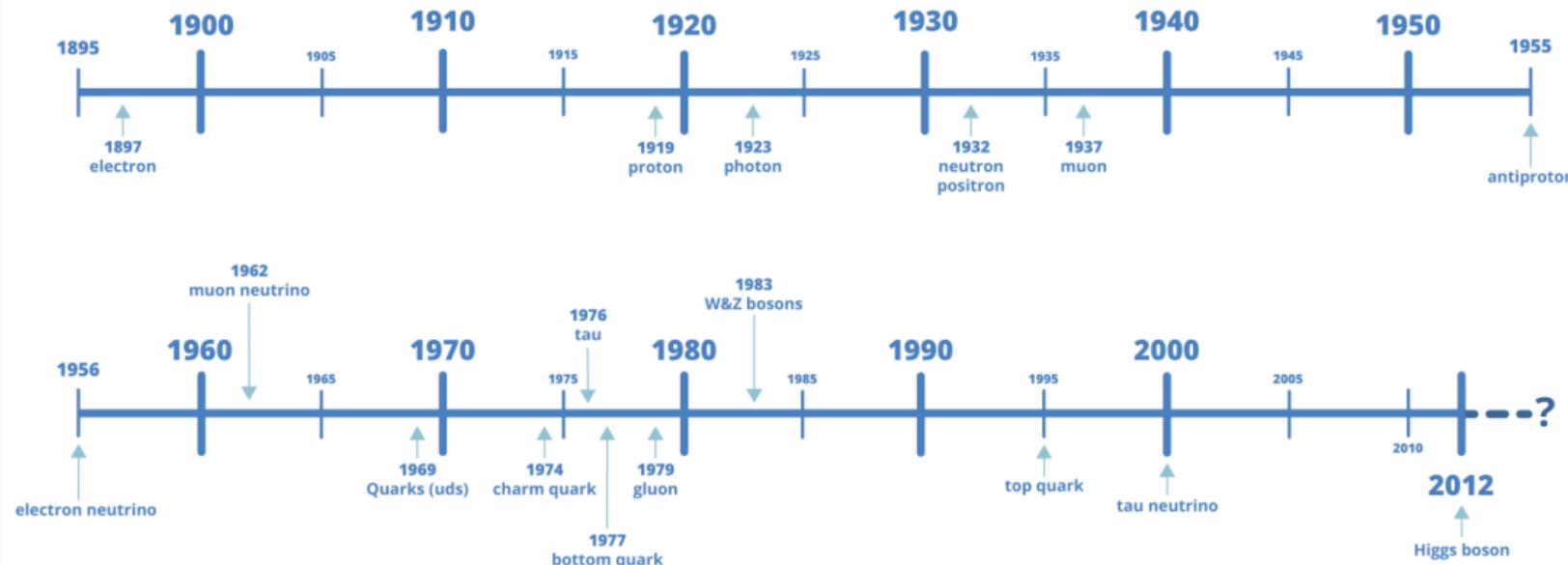
Fizika e Grimcave është sot sinonim me Fizikën e Energjive të Larta. Arsyja lidhet me parimin e papërcaktueshmërisë së Heisenbergut: $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$.

Pra energjitë/impulset e mëdha mundësojnë studimin e zonave to vogla!

Kronologjia e zbulimeve të grimcave nënatomike



Key particle discoveries



Modeli atomik

- **1897** – *Thomson*: zbulon **elektronin** e^- . Atomi përmban elektrone të përziera me ngarkesën pozitive (si “kek me fruta”).
- **1911** – *Rutherford*: atomi është kryesisht hapësirë bosh; ngarkesa pozitive dhe masa janë të përqendruara në një bërthamë shumë të vogël.
- **1913** – *Bohr*: modeli i parë kuantik i atomit. Elektronet rrotullohen në orbita rrrethore të kuantizuara, $L = n\hbar$.
- **1917** – *Rutherford*: provon ekzistencën e protonit nga reaksiuni bërthamor $\alpha + ^{14}N \rightarrow ^{17}O + p$. Protonit i ishte *postuluar* që në 1815 nga masat atomike.
- **1932** – *Chadwick*: zbulon **neutronin** nga $\alpha + ^9Be \rightarrow ^{12}C + n$. Bërthama përmban protone dhe neutrone.

Fotoni (γ)

- **1900** – *Planck*: shpjegon spektrin e trupit të zi.
- **1905** – *Einstein*: shpjegon efektin fotoelektrik. Rrezatimi elektromagnetik është thelbësish i kuantizuar. Teoria u prit fillimisht me skepticizëm.
- **1916** – *Millikan*: vërteton eksperimentalish teorinë e Einstein-it.
- **1923** – *Compton*: zbulon efektin Compton, $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$, thelbësish kuantik.

Mezonet

- **1934** – *Yukawa*: parashikon që bashkëveprimi bërthamor përshkruhet nga shkëmbimi i pioneve (π -mezonet, kuantet e fushës).
- **1937** – *Anderson & Neddermeyer*: kërkojnë pionet në rrezatimin kozmik, por gjejnë grimca që bashkëveprojnë dobët: **muonet** (μ).
- **1947** – *Powell*: zbulon si pionet, ashtu edhe muonet, në analizën e fotografive me emulsion nga rrezatimi kozmik.

Mezonet luajnë rol themelor në bashkëveprimet hadronike në gjithë universin. Njohuri të sakta për prodhimin e tyre kanë interes fondamental në astrofizikë.

Antimateria

- **1927** – *Dirac* interpreton energjitetë “negative” të zgjidhjeve të ekuacioneve të Klein–Gordon si nivele energetike të “vrimave” (pozitronet) në detin e pafund të elektroneve (deti i Dirac-ut).
- **1931** – *Anderson*: zbulon pozitronin e^+ në rrezatimin kozmik.
- **1933** – *Blackett & Occhialini*: regjistrojnë krijimin dhe zhdukjen e çiftit e^+e^- në dhomë mjegulle (Cloud Chamber).
- **1950** – *Feynman & Stückelberg*: rishpjegojnë “energjitetë negative” si zgjidhje me energji pozitive të *antigrimcave*: lindja moderne e QED.

Megjithë simetrinë mes materies dhe antimateries në nivel nënatomik, antimateria në univers është shumë e pakët. E vërejmë në rrezatimin kozmik (e^+ dhe \bar{p}) dhe në akseleratorë.

Neutrinot (ν)

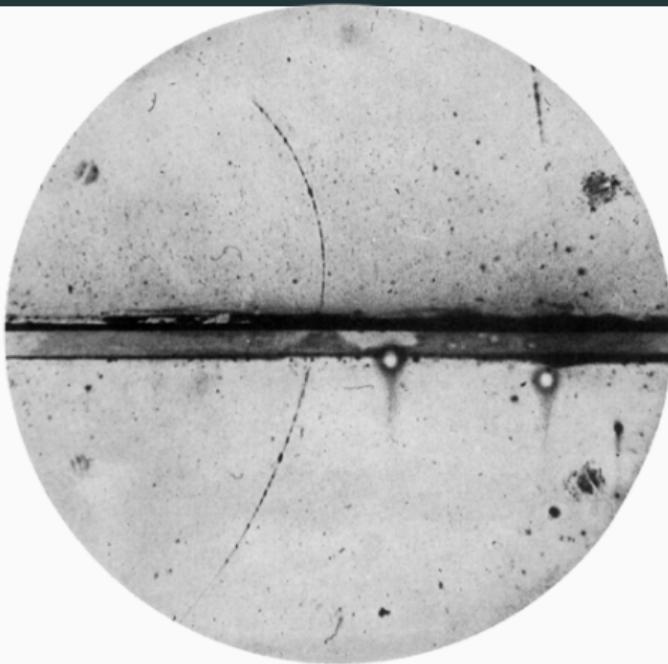
- **1930** – *Pauli & Fermi* propozojnë që neutrinot prodhohen në zbërthimet beta (me $m_\nu = 0$ në modelin fillestar).
- **1934** – *Fermi*: formulon teorinë e parë kuantike të bashkëveprimit të dobët.
- **1956** – *Cowan & Reines*: vëzhgojnë zbërthimin beta invers.
- **1962** – *Lederman & Schwarz*: tregojnë se $\nu_e \neq \nu_\mu$; ruhet numri leptonik.
- **1965** – vëzhgohen neutrinot atmosferike.
- **1968** – *Davis & Bahcall*: vëzhgojnë neutrinot diellore.
- **1987** – Vëzhgohen neutrinot e para nga supernova SN 1987A — nis “astronomia e neutrinove”.

Zbulimi i strukturës bërthamore

- **1919–1930** – studiohen shpërndarjet e elektroneve dhe grimave α në materiale të ndryshme \Rightarrow materies i zbulohet struktura e brendshme (bërthama).
- **1932** – *Cockcroft & Walton*: prodhojnë reaksionet e para bërthamore të kontrolluara duke përdorur grimca të përshtypetuara artificialisht.

Lindja e fizikës së akseleratorëve.

Era para akseleratorëve ($t \leq 1950$)

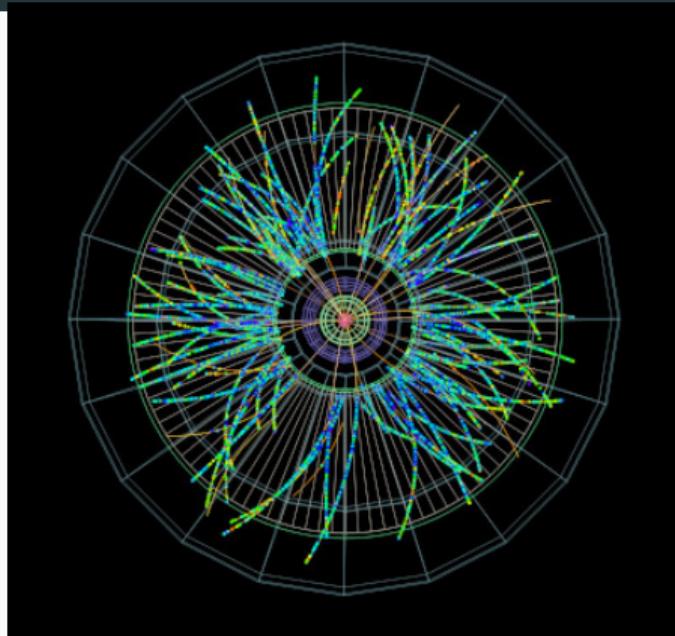


Kjo është një "cloud chamber". Shikoni këtë video në YouTube për trajktoret e grimcave.

Në këtë periudhë zbulimet u bënë kryesisht nga rrezatimi kozmik. U zbuluan disa nga mezonet dhe leptonet kryesore:

- Leptone: e^\pm, μ^\pm .
- Mezone: π^\pm, K^\pm .
- Teknikat eksperimentale të përdorura:
 - Cloud chamber (dhoma e Wilson-it)
 - Emulsioni fotografik (nuklear)
 - Numëruesi Geiger–Müller
 - Metoda e koincidencës (Rossi)

Era e akseleratorëve ($t > 1950$)



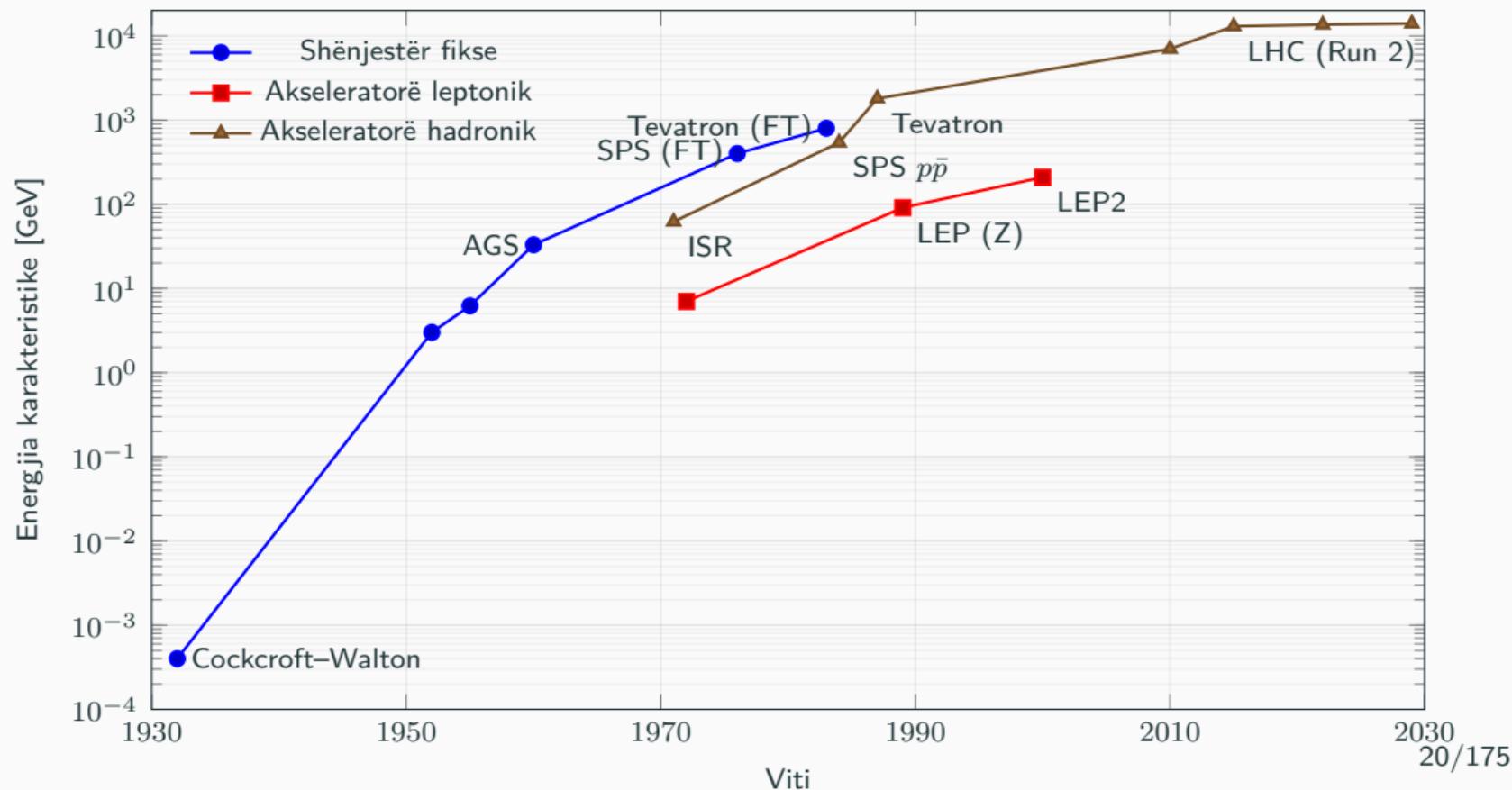
Rikonstruktimi i rrugëve që lënë grimcat në detektor.

Nga rrezatimi kozmik kalojmë te “**fabrikat e grimcave**”: laboratorë që rikrijojnë kushtet e universit të hershëm.

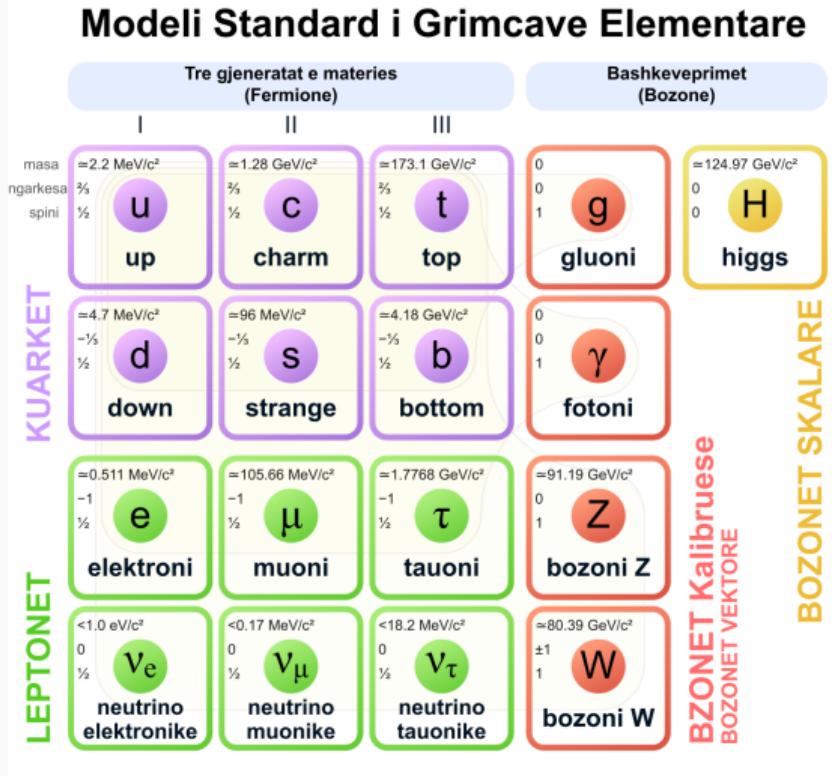
- Zhvillimi i akseleratorëve solli një revolucion në fizikën e grimcave elementare.
- U zbulua një “kopësht zoologjik” i tërë grimcash.
- Lindi nevoja për kategorizimin e tyre dhe zhvillimin e teorive themelore.
- **1954** – themelimi i **CERN**-it si qendër ndërkombëtare kërkimore.
- **1970+** – akseleratorët me energji të lartë zbuluan kuarket, bozonet W, Z dhe më vonë **bozonin e Higgs-it**.

Për një listë të plotë të grimcave: [PDG Live Database](#)

Evolucioni i energjive të akseleratorëve kryesorë



Kategorizimi sot i grimcave: Modeli Standart



Llojet e grimcave

- Fushat Materiale
 - Leptonet
 - Hadronet
- Bozonet e Fushave Kalibruese
 - Mezonet ($q\bar{q}$)
 - Barionet (qqq)
- Bozonet e Fushave Kalibruese
- Higgs (fushë skalare)

Bashkëveprimet Themelore

Katër Bashkëveprimet Themelore

- Fusha Elektromagnetike (kuanti fushës fotoni γ)
- Fusha e Dobët (kuantet e fushës, bozonet W^\pm dhe Z^0)
- Fusha e Fortë (kuanti fushës, gluoni g)
- Fusha Gravitacionale (nuk e dime nese kuantizohet – gravitoni)?!

Origjina e Masës së Grimcave

Në teorinë kuantike moderne

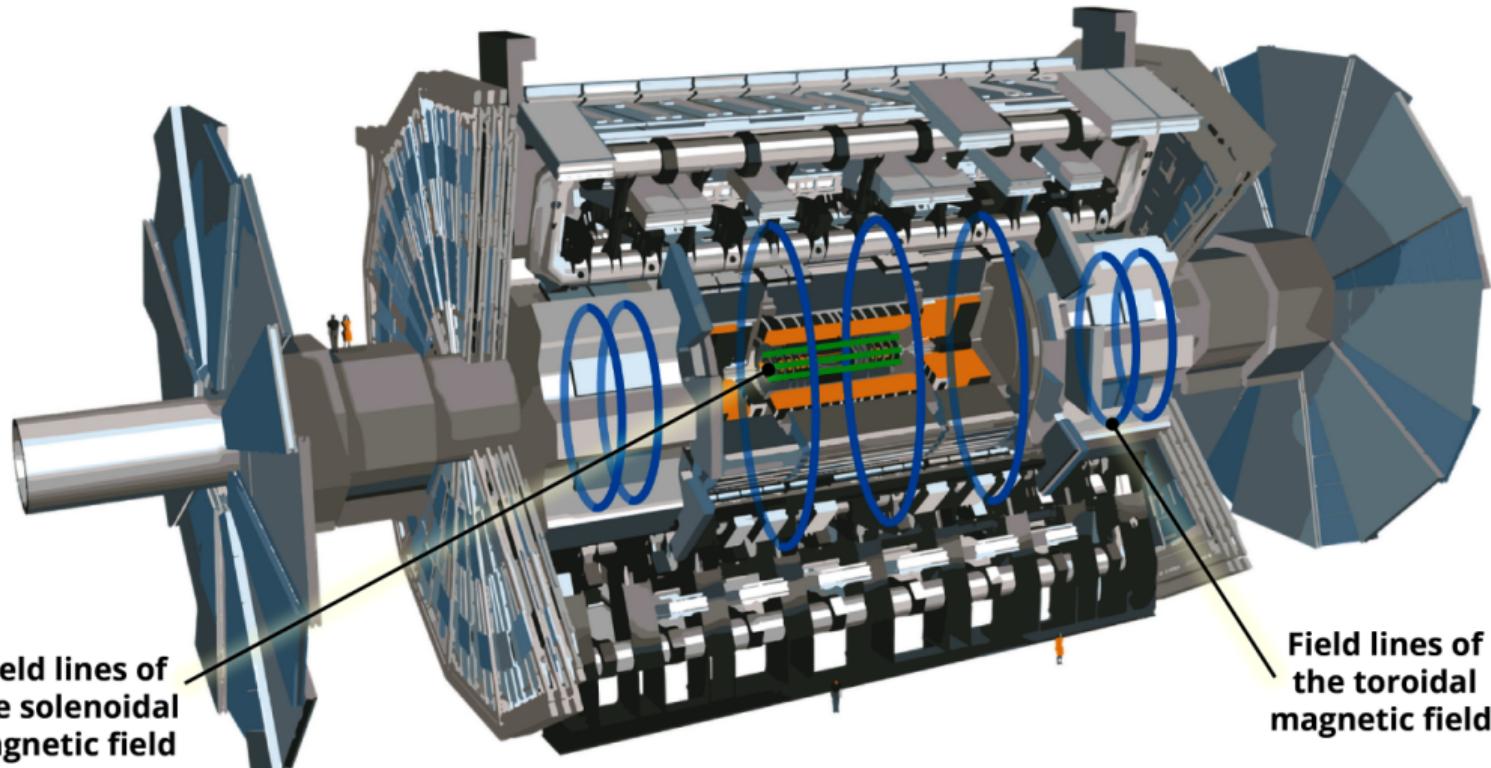
- Grimcat janë pa masë!
- Grimcat si leptonet, quarket apo bozonet e fushës, fitojnë masë nga energjia e bashkëveprimit me fushën Higgs.
- Grimca Higgs u zbulua në LHC në 2013.

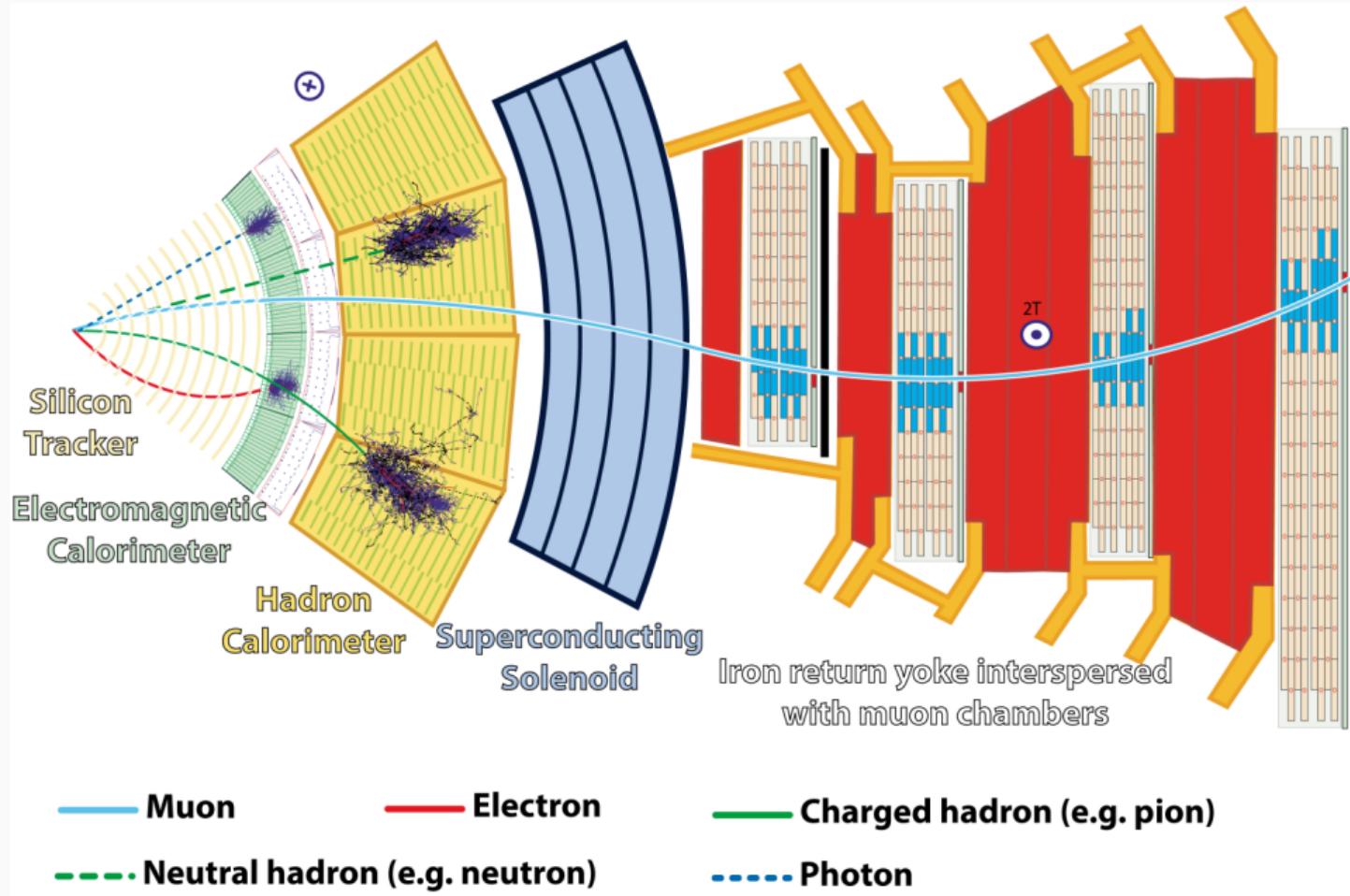
Matjet në Fizikën e Grimcave

Qëllimi i matjeve

Të identifikojmë grimcat, të masim kinematikën e tyre dhe të nxjerrim vetitë e bashkëveprimit.

- **Çfarë grimcash janë?** Identifikimi i grimcave (ID: e , μ , γ , ν , etj.).
- **Si lëvizin?** Kinematika: $E, \vec{p} \Rightarrow$ 4-impulsi $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ (ose $p^\mu = (E, \vec{p})$ në njësitë natyrore).
- **Çfarë vetish kanë?** Masë, ngarkesë, jetëgjatësi (τ), spini dhe numra të tjera kuantikë.
- **Si bashkëveprojnë?** Shkalla e prodhimit σ (seksioni i tërthortë) dhe shpërndarjet hapësinore/këndore.
- **A përputhet me teorinë?** Krahasim me parashikimet; kërkim devijimesh/sinjalesh të reja.





Çfarë masim në fizikën e grimcave

- **Sinjal që prodhon detektori:** gjurmë/hite në silikon, depozitime energjie në kalorematra, kohë-mbërritje, shenja në sistemet e muoneve.
- **Rikonstruksioni i ngjarjeve:** *identifikimi i grimcave* (elektron, muon, foton), *jete hadronike*, *neutrino* (si energji e humbur).
- **Variablat kinematike:** p_T , η , ϕ , masa invariante, kënde, energjia e humbur, etj.
- **Bashkëveprimi:** seksione efektive (σ), jetëgjatësi (τ), asimetri dhe shpërndarje këndore ($d\sigma/d\Omega$).
- **Pasiguritë:** statistikore & sistematike; kalibrimi, modelimi i background-it, efikasitetet.

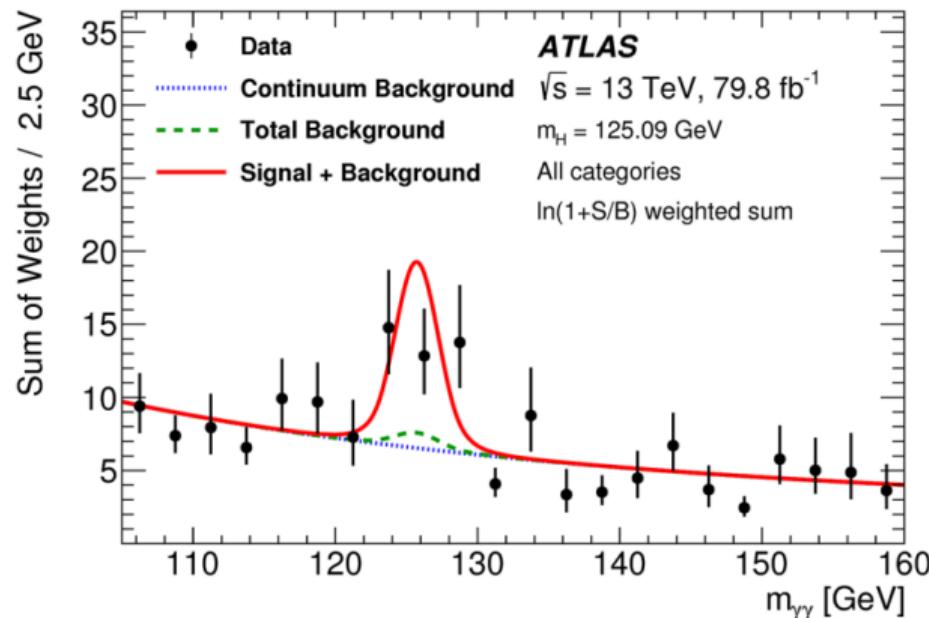
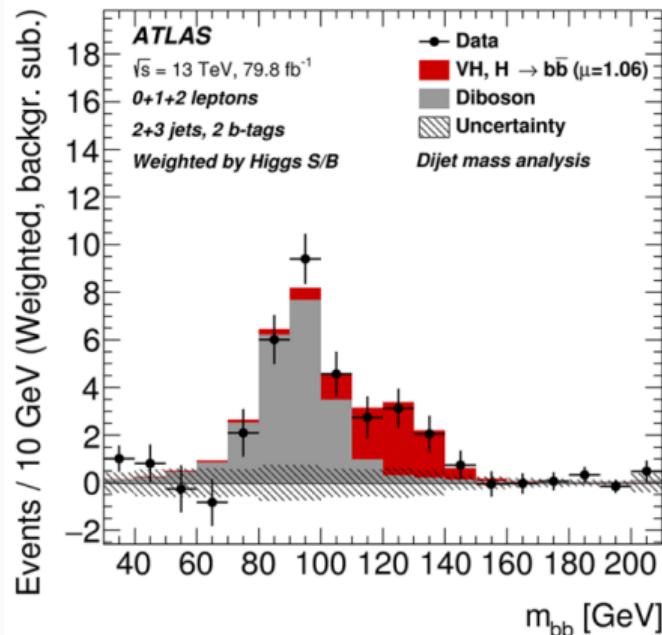
Madhësitë bazë

- **Pozicioni/rruga** \Rightarrow tracking (silikon/drift/MWPC).
- **Shenja e ngarkesës** \Rightarrow tracking + fushë magnetike.
- **Impulsi** (p, p_T) \Rightarrow kurbatura e trajektores në fushën B .
- **Energjia** E \Rightarrow ECAL (EM), HCAL (HAD).
- **Koha** (ToF, timing) \Rightarrow ToF/Tiles/LGAD.
- **Cherenkov & scintilim** \Rightarrow RICH, shufra/scintilatorë.

Skema e detektorit (brenda \rightarrow jashtë)

- **Silikon (pixel/strip)**: gjurmë, vertex, b -tag.
- **ECAL**: e^\pm, γ (depozita kompakte elektromagnetike).
- **HCAL**: jets hadronike (energjia e hadroneve).
- **Sistemet e muoneve**: μ^\pm me depërtim.
- **Timing/ToF/RICH**: identifikim llojesh (PID).

Rezultatet e eksperimenteve



Për më tepër rreth Fizikës së Detektorëve

Fizika dhe ndërtimi i detektorëve është jashtë syllabusit të kësaj lënde. Gjithsesi, për çdo njeri që është i interesuar për më shumë, lexoni psh:

- Arxiv: [Physics of Particle Detection](#), Grupen (1999).
- Libër: [Particle Detectors](#), Second Edition, Grupen & Schwartz (2008).
- PDG Rev.: [Accelerator physics of colliders](#).
- PDG Rev.: [High-energy collider parameters](#).
- PDG Rev.: [Passage of particles through matter](#).
- PDG Rev.: [Particle detectors at accelerators](#).
- PDG Rev.: [Particle detectors for non-accelerator physics](#).

Aplikimet e Fizikës së Grimcave

Aplikimet: Shkencë fundamentale

- **Studimet Teorike:** Modeli Standard & përtej tij, matje precise, CP-violation, materien e errët, origjina e masës së neutrinove etj.
- **Akseleratorë:** Rritje e energjisë & intensitetit (LHC/HL-LHC), neutrino beamlines, laboratorë të nëndheshëm, etj.
- **Kozmologji & Astrofizikë Grimcash:** Rezatimi kozmik, astronomi me neutrino, valë gravitacionale, etj.
- **Teknologji Detektorësh:** silici (pixel/strip), fotodetektorë (SiPM), timing ps–ns (TOF/LGAD) & aplikime më pas në mjekësi/industri.
- **Shkenca Kompjuterike:** “Grid Computing”, Big-Data, ML/AI që transferohen në fusha të tjera.

Mjekësi

- **Diagnostikë:** PET/TOF-PET (anihilim e^+e^- , detektorë SiPM/LYSO), SPECT, CT me doza të optimizuara.
- **Terapitë me Grimca:** Terapia me protone ose jone të rënda.
- **Radiofarmaceutikë:** prodhim izotopesh me ciklotron/akselerator, planifikim doze & dozimetri.
- **Sterilizim me Rrezatim:** e^-/γ për pajisje mjekësore/ushqime.

Industri & Siguri

- **Implantim Jonik** në mikroelektronikë, analizë materialesh (PIXE/RBS, XRF).
- **Burime sinkrotroni/neutronesh:** Farmaceutikë, bateri, proteina, etj.
- **Inspektim & Siguri:** Skanime kargo, Tomography muonesh (shpella, piramida etj.)
- **Non-Destructive Testing** me rreze, monitorim korrozioni/defektesh.

Njësitë natyrore

Njësitë natyrore

Ashtu si në fizikën e grimcave, do të përdorim *njësitë natyrore* ku

$$\hbar = c = 1.$$

Quhen "natyrale" sepse heqin konstantet \hbar dhe c nga formulat: energjia, masa dhe impulsi shprehen në eV/GeV; koha dhe gjatësia në GeV^{-1} . Ngarkesa elementare e merret si njësi bazë për matjen e ngarkesës.

Konstantet themelore (shih CODATA)

- $e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$
- $c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$
- $\hbar = 6.582\,119\,57 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s} = 1.054\,571\,817 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Energjia [eV]

$$1 \text{ eV} \equiv 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ J} = 6.242 \times 10^{18} \text{ eV}$$

Koha [eV^{-1}]

Duke përdorur $\hbar = 6.582 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$:

$$1 \text{ s} = \frac{1}{\hbar} \text{ eV}^{-1} \Rightarrow 1 \text{ s} = 1.52 \times 10^{15} \text{ eV}^{-1}$$

Gjatësia [eV^{-1}]

Duke përdorur $\hbar c = 1.973 \times 10^{-7} \text{ eV} \cdot \text{m}$:

$$1 \text{ m} = \frac{1}{\hbar c} \text{ eV}^{-1} \Rightarrow 1 \text{ m} = 5.07 \times 10^6 \text{ eV}^{-1}$$

Masa [eV]

Nga $E = mc^2$ dhe $c = 1$ në njësi natyrore:

$$1 \text{ kg} = 5.62 \times 10^{35} \text{ eV} \quad (= 5.62 \times 10^{26} \text{ GeV})$$

Përbledhje (GeV si njësi “e përbashkët”)

Madhësia	Faktori i konvertimit	Nj. natyrore	Nj. SI
Energjia E	$1 \text{ J} = 6.24 \times 10^9 \text{ GeV}$	GeV	J
Koha T	$1 \text{ s} = 1.52 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1}$	GeV^{-1}	s
Gjatësia L	$1 \text{ m} = 5.07 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1}$	GeV^{-1}	m
Masa M	$1 \text{ kg} = 5.62 \times 10^{26} \text{ GeV}$	GeV	kg

Shënim: $1 \text{ GeV}^{-1} \simeq 1.97 \times 10^{-16} \text{ m}$ dhe $1 \text{ GeV}^{-1} \simeq 6.58 \times 10^{-25} \text{ s}$.

Ushtrimi 1

Gjeni vlerat numerike *dhe gabimet* (uncertainties) për konstantet:

- h dhe \hbar (Planck dhe Planck i reduktuar),
- e (ngarkesa e elektronit),
- G (konstantja gravitacionale),
- c (shpejtësia e dritës në vakum),
- ε_0 (përshkueshmëria elektrike e vakumit).

Ushtrimi 2

Shkruani masën, ngarkesën, spinin dhe nëse zbërthehen:

- e (elektroni), p (protoni), n (neutroni), γ (fotoni), μ (muoni), H^0 (Higgs-i).

Ushtrimi 3

Verifikoni faktorët e konvertimit në tabelën “Përbledhje”.

Transformimet, Simetritë dhe Ligjet e Ruajtjes



M. C. Escher



M. C. Escher

Simetritë & Transformimet

Në Fizikë

Koncepti i simetrisë është thelbësor në zgjidhjen e problemeve praktike. Ju e dini tashmë që **problemët thjeshtohen shumë kur shfrytëzojmë simetri** (p.sh. simetria sferike, cilindrike, planare, etj).

Transformimet

Simetritë lidhen ngushtë me transformimet. **Themi se një sistem ka simetri ndaj një transformimi kur ai transformim vepron mbi sistemin/objektin dhe e lë atë të pandryshuar (invariant).**

Tipet

Transformimet mund të jenë **diskrete** ose **të vazhduara** si dhe **globale** ose **lokale**.

Transformimet

Çdo veprim që mund të kryejmë mbi një objekt — si zhvendosje, rrotullim apo reflektim — quhet **transformim**. Të gjitha transformimet e mundshme që ruajnë disa veti të sistemit përbëjnë një strukturë matematikore të quajtur **Grup**.

Grupet

Grupi është bashkësia e transformimeve që mund të kompozohen mes tyre dhe që plotësojnë kushtet e mbylljes, shoqërimit, ekzistencës së elementit njësi dhe të inversit. Shembuj: rrotullimet në plan $SO(2)$, reflektimet në një bosht, translacionet, etj.

Grupet Lie

Në rastet kur transformimet varen nga parametra të vazhduar, grupi quhet **grup Lie**. Çdo element i tij mund të përftohet nga një gjenerator G dhe një parametër i vazhduar ϵ ,

$$U(\epsilon) = e^{i\epsilon G}.$$

Këto grupe përshkruajnë simetritë e vazhduara që lidhen me ligjet e ruajtjes.

Transformime Diskrete

Transformimet diskrete përfaqësojnë ndryshime që ndodhin vetëm në vlera të veçanta të parametrit — pra jo të vazhduara. Nuk mund të përshkruhen me parametra infinitesimalë dhe formojnë **grupe të fundme**.

- Rrotullim diskret me $2\pi/N$ i një poligoni të rregullt me N kulme.
- Reflektimi hapësinor (pariteti) $P : \vec{r} \rightarrow -\vec{r}$.
- Kthimi i kohës $T : t \rightarrow -t$.
- Konjugimi (inversioni) i ngarkesës $C : q \rightarrow -q$.

Kombinime si CP , CT ose CPT janë thelbësore në fizikën e grimave.

Transformime të Vazhduara

- Translacion në hapësirë.
- Translacion në kohë.
- Rrotullime me kënd të çfarëdoshëm, etj.

Transformime Globale

Transformimet globale janë ato që veprojnë njësoj në çdo pikë të hapësirës ose kohës. Parametri i transformimit është **i njëjtë** për të gjithë sistemin.

- Shembull: ndryshimi global i fazës $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, ku α është konstant.
- Kjo është simetria globale e grupit $U(1)$ që con në **ruajtjen e ngarkesës elektrike**.

Simetria globale përfaqëson të njëtin transformim për të gjitha pikat e hapësirë–kohës.

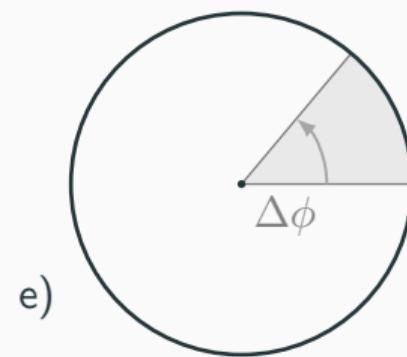
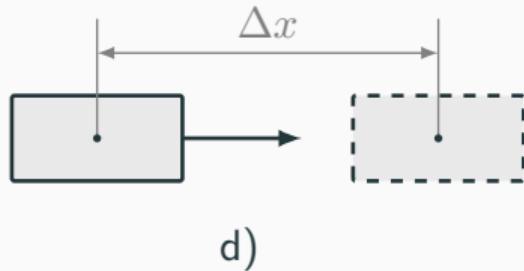
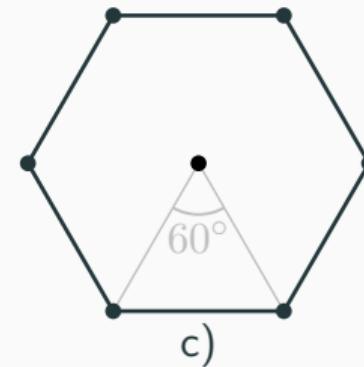
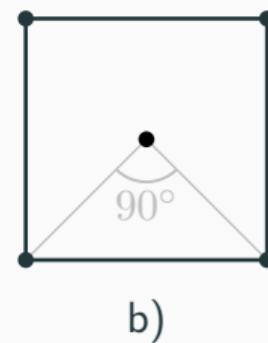
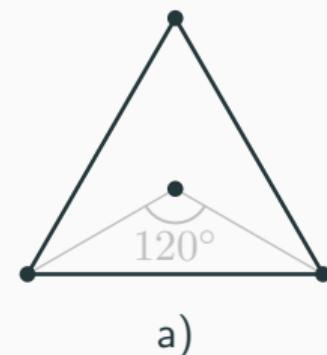
Transformime Lokale

Transformimet lokale lejojnë që parametri i transformimit të ndryshojë nga pika në pikë: $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x)$. Kjo kërkon futjen e një **fushe lidhëse (gauge field)** për të ruajtur invariancën, p.sh. fusha elektromagnetike $A_\mu(x)$.

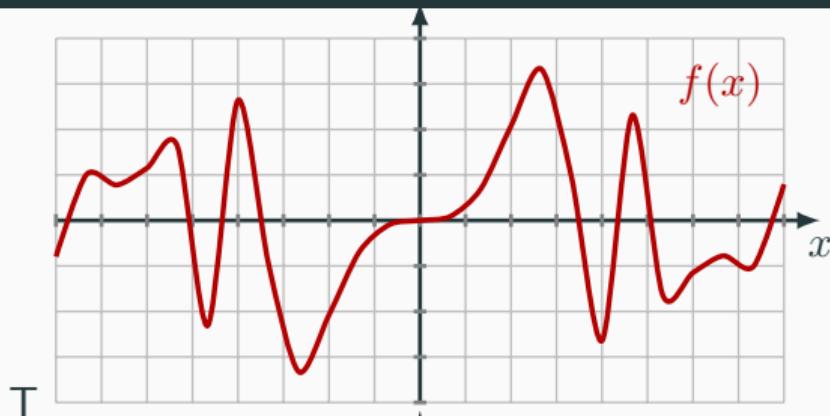
- Shembull: $U(1)_{\text{lokal}} \Rightarrow$ Elektrodinamika kuantike (QED).
- Shembuj më të përgjithshëm: $SU(2)_L$, $SU(3)_C$ në SM.

Simetritë lokale (kalibruese/gauge) janë themeli i bashkëveprimeve themelore.

Gjeni Simetritë



Ç'mund të thoni për simetritë e funksioneve?



Ç'veti ka $f(x)$?

Testoni barazinë/çiftësinë:

- $f(-x) = ?$,
- derivati: $f'(-x) = ?$,
- simetria e integralit: $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = ?$.

Ç'veti ka $g(x)$?

- $g(-x) = ?$,
- $g'(-x) = ?$,
- $\int_{-a}^{+a} g(x) dx = ?$.

Teoria e Grupeve

Idetë kryesore

- Transformimet studiohen matematikisht në **Teorinë e Grupeve**.
- **Grupet formalizojnë simetritë.**
- Çdo grup simetrie përmban një bashkësi transformimesh që lënë objektin invariant.
- **Çdo grup ka një operacion binar** që vepron mbi çdo dyshe elementesh të bashkësisë.

Konsiderojmë bashkësinë $\mathcal{G} = \{a, b, c, \dots\}$ dhe operacionin \circ që plotëson aksiomat më poshtë.

Përkufizimi i Grupit

Sistemi (\mathcal{G}, \circ) është një grup atëherë dhe vetëm atëherë kur:

1. **(Mbyllja)** $\forall a, b \in \mathcal{G} \Rightarrow a \circ b \in \mathcal{G}.$
2. **(Shoqërimi)** $\forall a, b, c \in \mathcal{G} \Rightarrow a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$
3. **(Njësia)** $\exists e \in \mathcal{G}$ e tillë që $\forall a \in \mathcal{G} : e \circ a = a \circ e = a.$
4. **(I kundërti)** $\forall a \in \mathcal{G}, \exists a^{-1} \in \mathcal{G}$ i tillë që $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$

Grupi Abelian

Grupi është *Abelian* nëse operacioni \circ është komutativ: $a \circ b = b \circ a.$

Këto janë vetitë që çdo grup, pavarësisht natyrës së tij (diskret apo i vazhduar), duhet të plotësojë.

Paraqitjet e Grupeve

Pse duhen?

Grupet janë struktura abstrakte; për t'i përdorur në fizikë, i paraqesim si transformime lineare mbi hapësira vektoriale.

Përkufizim (Paraqitje)

Një paraqitje e grupit (\mathcal{G}, \circ) në një hapësirë vektoriale \mathbb{V} mbi fushën \mathcal{F} është një **homomorfizëm** $\rho : \mathcal{G} \rightarrow GL(\mathbb{V})$ i tillë që

$$\rho(g_1 \circ g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}.$$

Këtu $GL(\mathbb{V})$ është grapi linear i të gjitha automorfizmave të invertueshëm të \mathbb{V} .

Kur $\dim \mathbb{V} = n$

$GL(\mathbb{V}) \simeq GL(n, \mathcal{F})$: elementet paraqiten si matrica $n \times n$, dhe operacioni i grupit bëhet produkt matricor.

Shembull: Një paraqitje e Grupi Ciklik C_3

Le të jetë $u = e^{i2\pi/3}$ numer kompleks me $u^3 = 1$. Paraqitje 2-dimensionale e C_3 është:

$$\rho(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}, \quad \rho(u^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix}.$$

Shembull: Një paraqitje e Grupi C_3 në R^3

Një paraqitje e mundëshme e C_3 në R^3 është seti i matricave të permutimit ciklik:

$$\rho(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(u^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Produkti i Drejtë i Dy Grupeve

Pse duhet?

Në shumë sisteme fizike veprojnë disa simetri të pavarura (p.sh. rrrotullimet në hapësirë dhe izospini). Për t'i përshkruar njëkohësisht, bashkojmë grupet e tyre në një strukturë të vetme — **produktin e drejtë**.

Përkufizim

Jepen dy grupe (\mathcal{G}, \circ) dhe (\mathcal{H}, \bullet) . **Produkti i drejtë** $(\mathcal{G} \times \mathcal{H}, \odot)$ përkufizohet si:

1. Bashkësia $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ (çifte të radhitura (g, h) me $g \in \mathcal{G}$ dhe $h \in \mathcal{H}$).
2. Operacioni: $(g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 \bullet h_2)$.

Shembull fizik

Grupi i simetrive në Modelin Standard: $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ bashkon simetritë e ngjyrës të bashkëveprimit të fortë, sidhe izospini dhe hiper-ngarkesën e bashkëveprimit elektro të dobët (electroweak int.).

Ushtrimi 4

A formojnë grupe? A janë Abeliante?

- a) $(\mathbb{Z}, +)$
- b) (\mathbb{Z}, \cdot)
- c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- d) (Σ, \cdot) me $\Sigma = \{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ dhe produkt matricor.

Vërejtje: për (d) nuk është e mbyllur sepse $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 \notin \Sigma$.

Grupe që i keni hasur

Grupi ciklik i rendit n

$\mathbb{Z}_n = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ me $a^n = 1$.

- Grup i fundëm dhe Abelian.
- Shembull: rrotullimet diskrete të një poligoni me n kulme.

Grupi simetrik (permutimet) S_n

Grupi i të gjitha permutimeve të n objekteve. I fundëm dhe jo Abelian për $n \geq 3$.

Grupi Ortogonal Special $SO(n)$

Matrica reale $n \times n$ me $A^T A = I$ dhe $\det A = 1$.

Shembull: $SO(3)$

Rrotullimet 3D. P.sh. rrotullim rreth boshtit z me kënd θ :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invarianti: gjatësitetë (norma e vektorit) ruhet.

Grupi Unitar $U(n)$

Bashkësia e matricave unitare $n \times n$: $U^\dagger U = UU^\dagger = I$. Për $n > 1$ është në përgjithësi jo-Abelian. $U(1)$ është Abelian (ndryshim faze $e^{i\delta}$).

Grupi Unitar Special $SU(n)$

Matrica unitare $n \times n$ me $\det U = 1$. Lie-algebra ka dimension $n^2 - 1$; elementet afër njësisë shkruhen si $U = \exp(iH)$ me H hermitian pa gjurmë ($\text{tr}(H) = 0$).

Ushtrimi 5

Tregoni se në $SU(n)$ mund të zgjidhen gjeneratorë hermitianë me $\text{tr } H = 0$.

Ndihmë: përdorni $\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$ dhe $\det U = 1$.

Paraqitja e $SU(2)$ dhe $SU(3)$

$SU(2)$

Lie-algebra ka **3 gjeneratorë**. Në paraqitjen standarde:

$$U(\vec{\epsilon}) = \exp\left(i \sum_{a=1}^3 \epsilon_a \sigma_a / 2\right), \quad [J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k, \quad J_a = \sigma_a / 2.$$

Operatori i momentit këndor / spinit

$SU(2)$ është izomorf si Lie-algebra me $SO(3)$, ndaj J_a identifikohen me operatorët e momentit këndor. Në njësi natyrore, $J_a = \sigma_a/2$; për njësi fizike, vendosni \hbar .

Ushtrimi 6

Jepni paraqitjen e J_a dhe $J^2 = \sum_a J_a^2$ (Casimir) për spin $j = \frac{1}{2}$ dhe $j = 1$; gjeni vektorët vetjakë.

Lie-algebra ka **8 gjeneratorë**. Një element shkruhet si

$$U(\epsilon_1, \dots, \epsilon_8) = \exp\left(i \sum_{a=1}^8 \epsilon_a \lambda_a / 2\right),$$

ku λ_a janë matricat e Gell-Mann (hermitiane, pa gjurmë).

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Konstantat e Strukturës për $SU(3)$

Duke marrë $F_a = \lambda_a/2$, kemi komutatorin

$$[F_a, F_b] = i f_{abc} F_c,$$

me koeficientë strukturorë tipikë:

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = \frac{1}{2}, \quad f_{156} = f_{367} = -\frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ushtrimi 7

- Tregoni që λ_a janë hermitiane dhe $\text{tr}(\lambda_a) = 0$.
- Provoni $\text{tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$ dhe $[F_a, F_b] = i f_{abc} F_c$.

Teorema e Noether & Ligjet e Ruajtjes

Grupet Lie

Transformimet e vazhduara — si translacionet apo rrotullimet — përshkruhen nga **grupet e Lie**, të cilat janë grupe të pafundme me elemente të diferencueshme në mënyrë të vazhduar. Ideja themelore e grupeve Lie është që çdo transformim i afërt me identitetin mund të shprehet si një **shndërrim infinitesimal**, i gjeneruar nga operatorë linearë.

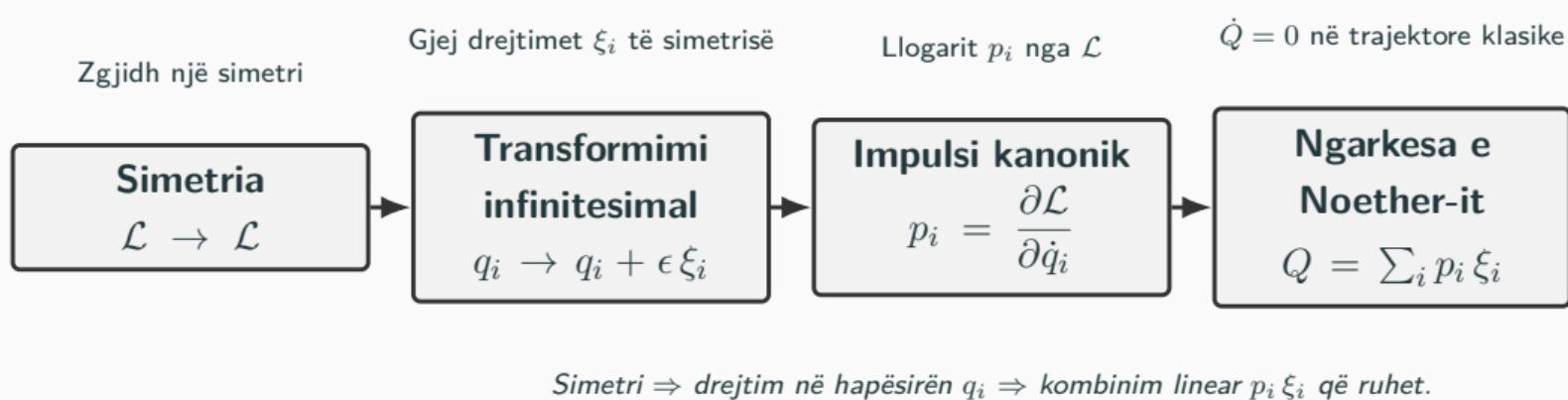
Teorema e Noether

Këtu e paraqesim në formë joformale:

Nëse një sistem fizik është invariant ndaj një grupei Lie transformimesh, atëherë ekziston një madhësi që ruhet me kohën.

Simetri \implies Ligj ruajtjeje

Noether: nga Simetria te Madhësia që Ruhet



Algoritmi Përdorimit i Teoremës Noether

Hyrja

Sistem klasik me koordinata $q^i(t)$, Lagranzhian $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, veprim $S = \int \mathcal{L} dt$. Një grup Lie G vepron në hapësirën e konfigurimit: $q \mapsto \Phi_g(q)$.

Hapat (nga grapi te madhësia e ruajtur)

1. **Zgjidh simetrinë:** gjej grupin G që lë S invariant.
2. **Gjeneratori X_a :** për parametër infinitesimal ϵ , $q^i \rightarrow q^i + \epsilon \xi_{(a)}^i(q)$ me $X_a = \xi_{(a)}^i(q) \partial/\partial q^i$.
3. **Variacioni i L:** $\delta \mathcal{L} = \frac{d}{dt} F_{(a)}$ (shpesh $F_{(a)} = 0$ për simetri të forta).
4. **Rryma / ngarkesa e Noether-it:**

$$Q_{(a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \xi_{(a)}^i(q) - F_{(a)}.$$

5. **Përfundim:** Në trajktore klasike (E-L), $\frac{dQ_{(a)}}{dt} = 0$.

Grupi në nivelin Hamiltonian, Q_a gjeneron simetrinë dhe $\{Q_a, H\} = 0$; gjithashtu $\{Q_a, Q_b\} = f_{ab}{}^c Q_c$.

Noether: formula e përgjithshme (klasike)

Formulimi Lagrange-it

Nëse për një gjenerator X vlen

$$\delta q^i = \epsilon \xi^i(q), \quad \delta \mathcal{L} = \epsilon \frac{d}{dt} F(q, \dot{q}, t),$$

atëherë **ngarkesa e Noether-it** është

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \xi^i(q) - F(q, \dot{q}, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (\text{në E-L}).$$

Interpretimi

- X është gjeneratori në algjebrën e Lie; $[X_a, X_b] = f_{ab}{}^c X_c$.
- Ngarkesat përputhen me të njëjtën algjebër përmes kllapave të Poisson:
 $\{Q_a, Q_b\} = f_{ab}^c Q_c$.

Shembull: Translacion \Rightarrow Impulsi

Grupi dhe veprimi

Grupi: \mathbb{R}^n (translacione). Veprimi: $q^i \mapsto q^i + a^i$. Gjeneratori: $X_j = \partial/\partial q^j$ (pra $\xi_{(j)}^i = \delta^i{}_j$).

Aplikimi i Teoremës Noether

Për translacion homogjen $\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt}F$ me $F = 0$.

$$Q_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta^i{}_j = p_j,$$

ku $p_i := \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}^i$. **Përfundim:** $\frac{dp_j}{dt} = 0$ – komponentët e impulsit ruhen.

Grupi $[X_i, X_j] = 0 \Rightarrow \{p_i, p_j\} = 0; \{p_i, H\} = 0$ për sisteme me invariance nga translacioni hapsinorë.

Shembull: Rrotullim \Rightarrow Momenti këndor

Grupi dhe veprimi

Grupi: $SO(3)$. Veprimi: $\vec{q} \mapsto R\vec{q}$, me $R \in SO(3)$. Gjeneratorët X_k (rreth boshtit k):
$$\delta\vec{q} = \epsilon(\hat{e}_k \times \vec{q}) \quad \Rightarrow \quad \xi_{(k)}^i = \epsilon_{kij} q^j.$$

Aplikimi i Teoremës Noether

Me $F = 0$:

$$Q_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \epsilon_{kij} q^j = (\vec{q} \times \vec{p})_k \equiv L_k.$$

Përfundim: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ për sisteme izotrope (invarianca ndaj rrotullimit).

Grupor: $[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k \Rightarrow \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k.$

Shembull: Translacion në kohë \Rightarrow Energjia

Grupi dhe veprimi

Grupi: $(\mathbb{R}, +)$. Veprimi: $t \mapsto t + \tau$. Variacioni induktuar: $\delta q^i = \tau \dot{q}^i$, $\delta \dot{q}^i = \tau \ddot{q}^i$.

Aplikimi i Noether-it

Për $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$ pa varësi eksplikite në t , $\delta \mathcal{L} = \frac{d}{dt} F$ me $F = \tau \mathcal{L}$.

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H} \quad (\text{Hamiltoniani}).$$

Përfundim: $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$ (ruajtja e energjisë).

Grupor: gjeneratori kohor $X = \partial_t$; në Hamiltonian, $\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$.

Pamje Hamiltoniane

Në hapësirën fazore (q, p) me **formën simpletike** $\omega = dq^i \wedge dp_i$, veprimi i G ka fushë vektoriale X_a . **Harta Fazore** $\mu : \text{Phase} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ jep ngarkesat:

$$\langle \mu, X_a \rangle \equiv Q_a(q, p), \quad \text{me} \quad \iota_{X_a} \omega = -dQ_a.$$

Struktura e algjebrës

$$\{Q_a, Q_b\} = f_{ab}^c Q_c, \quad \{Q_a, H\} = 0 \Rightarrow \dot{Q}_a = 0.$$

Kjo është forma “grupore” e Noether-it: ngarkesat Q_a janë komponentët e hartimit fazorë.

Ushtrimi 8: Grimca e lirë 1D

Lagranzhiani:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

- a) Gjeni madhësinë e ruajtur që lidhet me translacionin $x \rightarrow x + \epsilon$.
- b) Gjeni madhësinë e ruajtur që lidhet me translacionin në kohë $t \rightarrow t + \epsilon$.

Ushtrimi 9: Rrotullim në plan

Lagranzhiani për lëvizjen në plan (x, y) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ku $V(r)$ varet vetëm nga largësia.

- Gjeni transformimin infinitesimal për një rrotullim të vogël rrreth boshtit z .
- Përdorni teoremën e Noether-it për të gjetur madhësitë që ruhen.

Simetritë e Lagranzhianit

Simetritë fizike shfaqen në ekuacionet e lëvizjes dhe kodohen në Lagranzhianin \mathcal{L} .

▪ Energjia E

- **Transformimi:** Translacion në kohë Δt .
- **Grupi:** Poincaré.
- **Gjeneratori i grupit:** Hamiltoniani \mathcal{H} .
- **Simetria:** Homogjeniteti i kohës.
- **Ligji i ruajtjes:** Ruajtja e energjisë.

▪ Impulsi \vec{p}

- **Transformimi:** Translacion në hapësirë Δx .
- **Grupi:** Poincaré.
- **Gjeneratori i grupit:** Impulsi p .
- **Simetria:** Homogjeniteti i hapësirës.
- **Ligji i ruajtjes:** Ruajtja e impulsit.

Shembuj të tjerë

- **Momenti këndor \vec{L}**

- **Transformimi:** Rrotullim në hapësirë me kënd $\Delta\phi$.
- **Grupi:** $SO(3)$ (ose ekuivalent $SU(2)$).
- **Gjeneratori i grupit:** Operatori i momentit këndor L .
- **Simetria:** Izotropia e hapësirës.
- **Ligji i ruajtjes:** Ruajtja e momentit këndor.

- **Ngarkesa elektrike Q**

- **Transformimi:** Transformim lokal (kalibrim i fazës).
- **Grupi:** $U(1)$ lokal.
- **Gjeneratori i grupit:** Operatori i ngarkesës.
- **Simetria:** Invarianca e fushës elektromagnetike.
- **Ligji i ruajtjes:** Ruajtja e ngarkesës elektrike.

Izospini I

Izospini është një simetri afërsisht e saktë e ndërveprimit të fortë kur $m_u \simeq m_d$.

Matematikisht përshkruhet nga grapi $SU(2)$ të aromave (u, d) dhe mund të shihet si nën-simetri e $SU(3)_{\text{flavor}}$.

- (p, n) formojnë një *duble* me $I = \frac{1}{2}$: p : $I_3 = +\frac{1}{2}$, n : $I_3 = -\frac{1}{2}$.
- (π^+, π^0, π^-) formojnë një *triple* me $I = 1$: $I_3 = (+1, 0, -1)$, me masa afërsisht të barabarta.
- Në kufirin $m_u \neq m_d$ dhe me elektromagnetizmin, simetria thyhet dobët.

Simetritë në Mekanikë Kuantike

Nëse U është një transformim i një sistemi kuantik (zhvendosje, rrotullim, ...), ai vepron si

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U |\psi\rangle.$$

Sipas teoremës së Wigner-it, transformimet që ruajnë probabilitetet janë **unitare** (ose anti-unitare; ne fokusohemi te unitarët). Kërkesa që norma të ruhet jep:

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \boxed{U^\dagger U = I}.$$

U^\dagger është konjugimi Hermitian (transpozim + konjugim kompleks). Pra transformimet U janë *unitare*; gjeneratorët e tyre janë *hermitianë*.

Invarianca dhe Hamiltoniani

Që parashikimet fizike të mos ndryshojnë, duhet që hapësira e zgjidhjeve të mbahet fikse:

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad \hat{H} |\psi'\rangle = E |\psi'\rangle.$$

Me $|\psi'\rangle = U |\psi\rangle$ rezulton

$$\hat{H}U |\psi\rangle = U\hat{H} |\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad [\hat{H}, U] = 0.$$

Me fjalë: **çdo simetri e sistemit përfaqësohet nga një operator unitar U që komuton me Hamiltonianin.** Nëse $U = \exp(i\epsilon G)$, atëherë

$$\frac{d}{dt}\langle G \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, G] \rangle = 0,$$

pra $\langle G \rangle$ është madhësi e ruajtur (kur G s'varet shprehimisht nga koha).

Përshkrimi i simetrive të vazhduara

Për transformim infinitesimal me parameter të vogël ϵ :

$$U(\epsilon) = I + i\epsilon G + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

ku G quhet *gjenerator*. Nga unitariteti $U^\dagger U = I$ rrjedh

$$(I - i\epsilon G^\dagger)(I + i\epsilon G) = I + i\epsilon(G - G^\dagger) + \dots = I \Rightarrow [G^\dagger = G].$$

Pra gjeneratorët G janë operatorë hermitianë (vlerat vetjake reale).

Konservimi prej komutimit

Nga $[\hat{H}, U] = 0$ me $U = I + i\epsilon G + \dots$ përftohet

$$[\hat{H}, G] = 0.$$

Si pasojë, për vlerën pritëse:

$$\frac{d}{dt} \langle G \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, G] \rangle = 0,$$

që formalizon lidhjen *simetri* \iff *madhësi e ruajtur* në formalizmin kuantik.

Shënim: forma eksponenciale

Transformimi i plotë shprehet si seri Taylor:

$$U(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\epsilon G)^n}{n!} = e^{i\epsilon G}.$$

Në këtë formë është e qartë që $U(\epsilon_1)U(\epsilon_2) = e^{i(\epsilon_1 + \epsilon_2)G}$ kur $[G, G] = 0$, dhe shfaqen rregullat e zakonshme të komutimit për shumë gjeneratorë.

Simetri bazë: Ndryshim global i fazës ($U(1)$)

Në MQ, gjendja përshkruhet nga një funksion valor kompleks (amplitudë + fazë). Një ndryshim *global* i fazës:

$$\psi'(x) = U(\alpha)\psi(x) = e^{i\alpha}\psi(x)$$

lë probabilitetet invariante:

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \int \psi'^{\dagger} \psi' dx = \int \psi^{\dagger} e^{-i\alpha} e^{i\alpha} \psi dx = \langle \psi | \psi \rangle .$$

Kështu $U(\alpha) = e^{i\alpha}$ është **unitar** dhe formon grupin $U(1)$ global. (Gjeneratori hermitian është identiteti; në teori fushash, lokalizimi i $U(1)$ çon te elektromagnetizmi.)

Simetri bazë: Translacioni në hapësirë

Nga invarinca ndaj zhvendosjes pozicionale

$$\psi'(x) = \psi(x + \Delta x) = \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x).$$

Duke përdorur $\hat{p}_x = -i\hbar \partial_x$, kemi

$$U(\Delta x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta x \hat{p}_x\right),$$

pra impulsi është gjenerator i translacioneve.

Simetri bazë: Translacioni në kohë

Nga ekuacioni i Schrödinger-it

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle ,$$

del që evolucioni në interval të vogël Δt jepet nga

$$U(\Delta t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}\right),$$

pra **Hamiltoniani** është gjenerator i translacioneve kohore. (Shenja minus varet nga konventa; këtu kemi $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$.)

Simetri bazë: Rrotullimi në hapësirë (klasik vs kuantik)

(Klasik, mbi vektorë 3D) Rrotullimi rreth z :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq I + \theta A_z, \quad A_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Simetri bazë: Rrotullimi në hapësirë (klasik vs kuantik)

(Kuantik, mbi gjendje) operatori unitar i rrotullimit është

$$U_z(\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{J}_z\right), \quad \hat{J} = \text{operatorët e momentit këndor.}$$

Në paraqitjen me spin 1 (vektor 3D), gjeneratorët hermitianë janë

$$\hat{J}_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Këta përbushin

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{J}_k,$$

algebra e $SO(3)$ (izomorfe me $SU(2)$).

Numrat Kuantike të Grimcave & Klasifikimi i Grimcave

Ngarkesa Elektrike Q

- Cdo grimce qe observohet ne natyre ka ngarkesa elektrike shumefish te ngarkeses se elektronit.
- Çdo grimce ka ngarkese $Q = 1, 2, \dots$ (ne njesi e).
- Kuarket kane ngarkese elektrike te pjeseshme $Q = \frac{1}{3}$ ose $\frac{2}{3}$, por kuarket nuk vezhgohen te lira ne eksperimente. Ato formojne ose mezone ose barione.
- **Ligji Ruajtjes:** **Ne cdo proces, ngarkesa elektrike ruhet.**

Spini S

- **FERMIONET** kane spin te pjeseshem $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ (njesi \hbar).
- **BOZONET** kane spin te plotë $S = 0, 1, 2, \dots$ (njesi \hbar).
- **Ligji Ruajtjes:** Shuma $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ e momentit kendore L
dhe spinit S , ruhet ne cdo process.

Simetria e Kryqëzimit (“Crossing Symmetry”)

Formulimi i Crossing Symmetry në fizikën e grimcave

Konsideroni një reaksion të tipit



Crossing symmetry thotë se nëse një grimcë zhvendoset nga hyrja në dalje (ose anasjelltas), atëherë ajo zëvendësohet me **antigrimcën përkatëse** dhe 4-momenti i saj ndryshon shenjë:

$$P^\mu \longrightarrow -P^\mu.$$

Procesi i ri ka të njëjtën dinamikë (ndryshon vetëm kinematika). **Amplituda \mathcal{M}** përshkruhet nga i njëti funksion analistik; ndryshojnë vetëm **variablat Mandelstam** (s, t, u) sipas kanalit të ri (s-, t- ose u-channel).

Simetria e Kryqëzimit dhe variablat e Mandelstam

Për procesin e përgjithshëm

$$A + B \rightarrow C + D,$$

amplituda shkruhet si $\mathcal{M}(s, t, u)$ ku

$$s = (P_A + P_B)^2, \quad t = (P_A - P_C)^2, \quad u = (P_A - P_D)^2.$$

Kur një grimcë “kalohet” në anën tjetër, ajo zëvendësohet me antigrimcën dhe variablit përkatës Mandelstam i ndryshon shenja.

Shembuj të tre kanaleve:

kanali-s: $A + B \rightarrow C + D$

kanali-t: $A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D$

kanali-u: $A + \bar{D} \rightarrow \bar{B} + C$

Kanali dominues ndryshon nga s në t ose u , por amplituda bazë është e njëjtë $\mathcal{M}(s, t, u)$. Crossing symmetry = rishpërndarje e kinematikës (s, t, u) , jo ndryshim i dinamikës.

Perkufizim

- Leptonet jane grimcat qe nuk marrin pjese ne bashkeveprimet e forta.
- Vezhgohen tre tipe (aroma) leptonesh:
 - e^- elektroni (dhe antigrimca e^+ pozitroni),
 - μ^- myoni (dhe antigrimca μ^+),
 - τ^- tauoni (dhe antigrimca τ^+).
- Si dhe tre tipe neutrinos (aromash):
 - ν_e neutrino elektronike (dhe antigrimca $\bar{\nu}_e$),
 - ν_μ neutrino myonike (dhe antigrimca $\bar{\nu}_\mu$),
 - ν_τ neutrino taonike (dhe antigrimca $\bar{\nu}_\tau$).

Numri Leptonik Elektronik L_e

- Vezhgohen proceset: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$.
- Nuk vezhgohet psh. procesi: $\bar{\nu}_e + n \not\rightarrow p + e^-$ apo $\nu_\mu + n \not\rightarrow p + e^-$.
- Eksperimentet tregojne qe numri i e^- dhe ν_e dhe numri i e^+ dhe $\bar{\nu}_e$, ne hyrje dhe ne dalje te nje procesi, ruhet. Kjo le ne konceptin e numrit leptonik elektronik.
- $L_e = +1$ per e^- dhe ν_e dhe $L_e = -1$ per e^+ dhe $\bar{\nu}_e$.

Numrat Leptonike

Numri Leptonik Myonik L_μ

- Vezhgohen proceset: $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$,
 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$.
- Nuk vezhgohet psh. procesi: $\mu \not\rightarrow e + \gamma$, $\bar{\nu}_\mu + p \not\rightarrow n + e^+$.
- Njelloj si me elektronet, eksperimentet tregojne qe numri i μ^- dhe ν_μ dhe numri i μ^+ dhe $\bar{\nu}_e$, ruhet. Kjo le ne konceptin e numrit leptonik myonik.
- $L_\mu = +1$ per μ^- dhe ν_μ dhe $L_\mu = -1$ per μ^+ dhe $\bar{\nu}_\mu$.

Numri Leptonik Taonik L_τ

Njelloj si me proceset me e apo me μ , edhe tauonet kane $L_\tau = +1$ per τ^- dhe ν_τ dhe $L_\tau = -1$ per τ^+ dhe $\bar{\nu}_\tau$.

Ushtrimi 10

Zberthimet qe vihen re ne natyre jane nga grimca me te renda ne ato me te lehta. Nese nuk ka grimca me te lehta se grimca ne fjale, atehere ajo nuk mund te zberthehet dot.

- Tregoni cfare i kushtezon zberthimet e tilla? Cfare madhesish duhet te ruhen?
- Tregoni nga ana kinematike qe procesi $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ eshte i mundur ndersa $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ eshte i ndaluar.

Ushtrimi 11

π^0 eshte grimce jo stabel dhe mund te zberhet ne fotone. Kush nga proceset me poshte eshte i ndaluar dhe pse?

- $\pi^0 \rightarrow \gamma$
- $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$
- $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$
- $\pi^0 \rightarrow \gamma + \mu^+ + \mu^-$

Numri Barionik B

- Protoni eshte nje grimce stabel, nuk zberthehen si psh neutroni.
- Ne fakt atomet (lenda dhe vete jeta) jane stabel sepse protonet nuk zberthehen.
- Çfare i mban protonet stabel kur ato kinematikisht mund te zberthen psh $p \rightarrow e + \gamma$ ose $p \rightarrow e + \nu$.
- Per te shpjeguar stabilitetin e protonit duhet qe nje madhesi qe ruhet te pengojë zberthimin. Kjo madhesi eshte numri barionik.
- Barionet kane $B = +1$ dhe antibarionet kane $B = -1$.
Çdo grimce tjeter ka $B = 0$.
- Shembull: Protoni apo neutroni kane $B = 1$ ndersa antiprotoni \bar{p} apo antineutroni \bar{n} kane $B = -1$, ndersa e ose π kane $B = 0$.

Ushtrimi 12

A jane te lejuar proceset e meposhteme?

- a) $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$
- b) $p + p \rightarrow p + \pi^+$
- c) $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$
- d) $p + p \rightarrow p + \bar{p} + \pi^-$
- e) $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$

Nuk Ekziston Numri Mezonik!

- p eshte barioni me i lehte nga grimcat dhe nuk zberhet meqe ruhet numri barionik.
- Mezonet nga ana tjeter zberthehen, psh mezioni me i lehte eshte pioni dhe ato zverthehen.
 - $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$ ketu pioni shnderrohet ne leptone.
 - $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ketu pioni shnderrohet ne fotone.
 - $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ ketu pioni krijohet nga zberthimi i nje barioni.
- Si rrjedhoje nuk ekziston numri mezonik analog me ate barionik.

Çuditshmeria s (Strangeness)

- Me zbulimin e grimcave me te renda u vu re nje “fenomen i çuditshem”. Disa grimca prodhohenin shume shpejt por zberthehenin shume ngadale.
- Shembull: $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ ose $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$.
- Keto grimca prodhohenin shpejt nga bashkeveprimi i forte (psh i protoneve nga rrezatimi kozmik me nje flete plumbi) dhe zberthehen ngadale nepermjet bashkeveprimit te dobet.
- Barionet me veti te çuditeshme quhen *Hiperone* (Λ , Σ ,...).

Çuditshmeria s (Strangeness)

- $\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-$
 $\rightarrow K^0 + \Sigma^0$
 $\rightarrow K^0 + \Lambda$
- Meqe çuditshmeria e π , p apo n eshte $s = 0$ atehere, kaonet K kane $s = +1$ ndersa Σ dhe Λ kane $s = -1$.
- Çuditshmeria ruhet ne bashkeveprimet e forta por jo ato te dobeta, sepse psh
 - $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$
 - $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$
 - $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^+$

Jane zberthime si shkak i bashkeveprimeve te dobeta dhe çuditshmeria zhduket.

Izospini I

- Sic dhe kemi permendur, grimcat qe kane ngarkesa elektrike te ndryshme por sillen njelloj ndaj bashkeveprimit te forte formojne nje multiplet te izospinit.
- Shembull
 - Singlet izospini $I = 0$: Λ^0 .
 - Dublet izospini $I = \frac{1}{2}$: (n, p) , (K^-, \bar{K}^0) ose (K^+, K^0) .
 - Triplet izospini $I = 1$: (π^+, π^0, π^-) , $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$.
 - Quartet izospini $I = \frac{3}{2}$: $(\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-)$, etj...

Permblehdhe e Numrave Kuantik

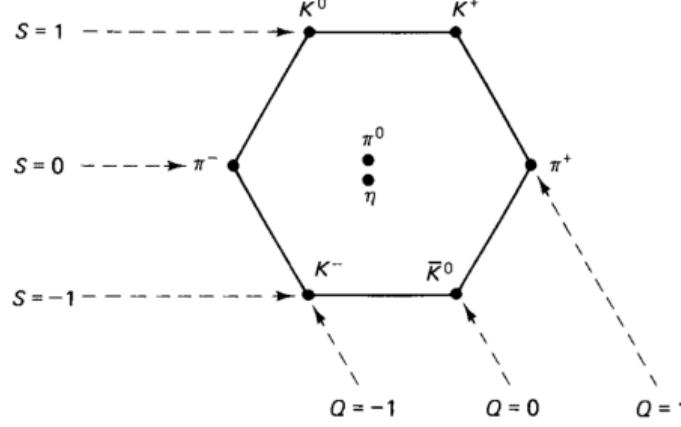
Madhesia Fizike	Simboli	Bashkeveprimet		
		EM	Dobet	Forte
Energjia (& masa)	E	+	+	+
Impulsi	p	+	+	+
Spini (Momenti Impulsit)	$S(L)$	+	+	+
Ngarkesa Elektrike	Q	+	+	+
Çiftesia	P	+	-	+
Konjugimi Ngarkeses	C	+	-	+
Izospini	I	-	-	+
Numri Leptonik	$L_{e,\mu,\tau}$	+	+	!!!
Numri Barionik	B	+	+	+
Numri Barionik	B	+	+	+
Çuditshmeria	s	+	-	+

Klasifikimi i Grimcave Elementare: Modeli Standart

- Siç kemi thënë, deri para viteve 1950 njiheshin vetëm p , n , e^\pm , μ^\pm , π^\pm .
- Pas viteve 1950, me zhvillimin e akseleratorëve, numri i grimcave të reja të zbuluara u rrit menjëherë – u formua një “*kopsht zoologjik grimcash*”.
- Vështirësi me emërtimin e grimcave të reja – mbaroi alfabeti grek dhe latin për emërtimin e tyre – p , n , π^\pm , π^0 , Σ^\pm , Λ , η , η' , K^\pm , K^0 , ρ , ω , Ω^- , ϕ , a_1 , a_2 , f_1 , f_2 , J/ψ , Δ , ...
- Fillimisht kategorizimi i grimcave u bë në varësi të masës (njëloj si kategorizimi i atomeve). Grimcat u ndanë në **LEPTONE** (grimca të lehta), **MEZONE** (grimca të mesme me masë midis elektronit dhe protonit) dhe **BARIONE** (grimca të rënda).
- Kategorizimi sipas masës nuk rezultoi i suksesshëm, sepse vetitë brenda të njëjtë grup mase ndryshonin shumë.

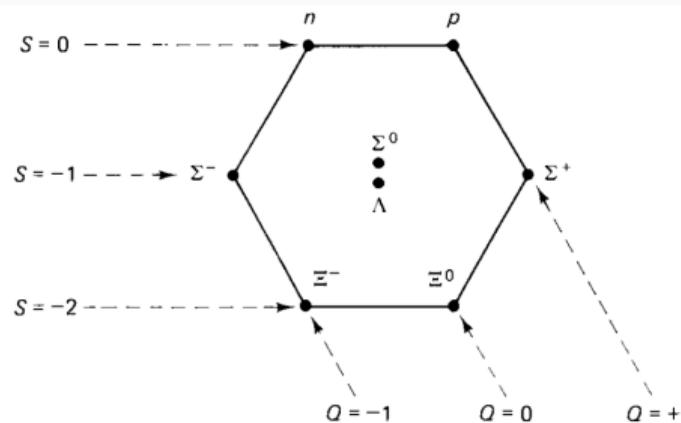
“Tabela e Mendelejevit” për grimcat (Eightfold Way)

- Në kërkim të ndonjë rregulli në “kopshtin zoologjik” të grimcave, Gell-Mann dhe Ne’eman, në vitin 1961 dhe në mënyrë të pavarur, organizuan mezonet dhe barionet në varësi të ngarkesës elektrike dhe çuditshmërisë.
- Kjo mënyrë renditjeje u quajt “Eightfold Way” (mënyra tetësh) nga Gell-Mann, ngaqë i përngjan gjeometriskisht “Rrugës së Tetëfishtë të Shenjtë” në Budizëm (ciklet e rilindjes deri në nirvana).
- Sipas “Eightfold Way”, çuditshmëria S vendoset në boshtin e y dhe ngarkesa Q përgjatë diagonales.
- Në drejtimin e boshtit x paraqitet izospini.
- Kjo lloj renditjeje vuri në pah simetri të që ekzistojnë te mezonet dhe barionet.



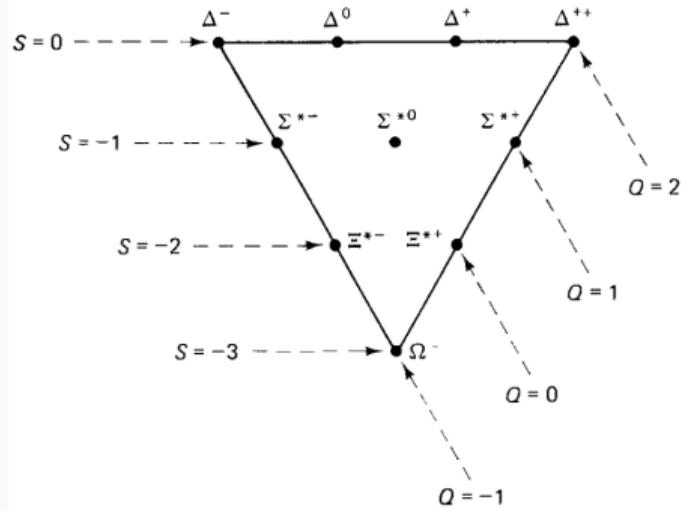
Okteti i mezoneve të lehta

Mezonet pseudoskalare të lehta (okteti).



Okteti i barioneve të lehta

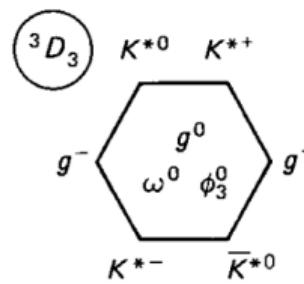
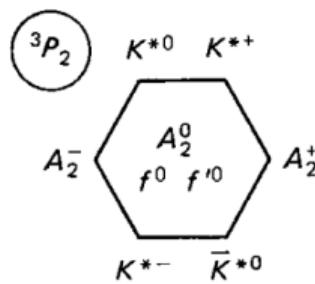
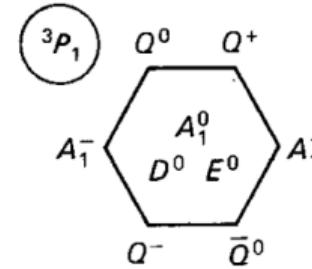
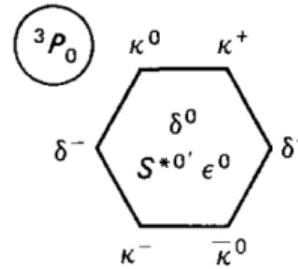
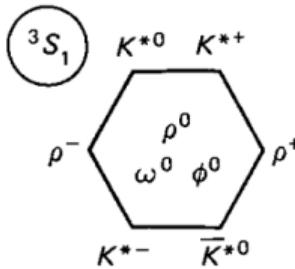
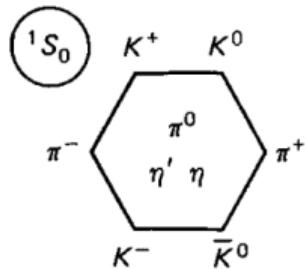
$J = \frac{1}{2}$ barionet (fermione).



Dekuplet i barioneve

$J = \frac{3}{2}$ barionet (fermione).

Nonetet mezonike



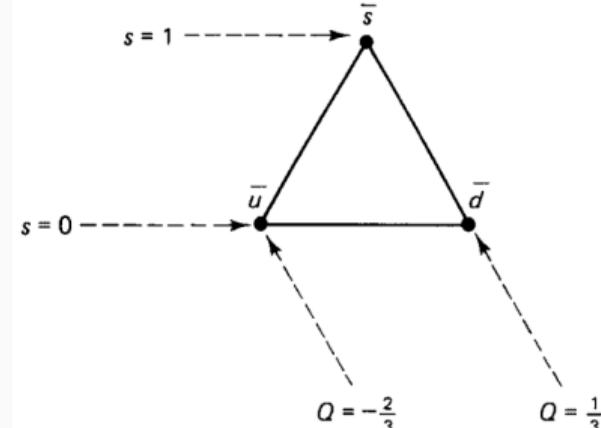
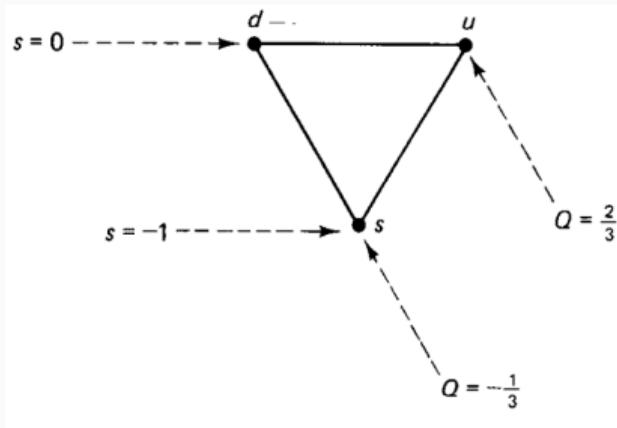
Kështu

hadronet klasifikohen si gjendje të ndryshme energjetike të diçkaje më fundamentale (analoge me gjendjet energjetike të një atomi).

Modeli i kuarkeve

Kuarket

Në themel, të gjitha format gjeometrike që formojnë hadronet janë në fakt paraqitje të grupit $SU(3)$ në një hapësirë me tre drejtime u , d dhe s (hapësira e aromave).



Modeli i kuarkeve

q	B	Q	I	s
u	$1/3$	$2/3$	$1/2$	0
d	$1/3$	$-1/3$	$-1/2$	0
s	$1/3$	$-1/3$	0	-1

\bar{q}	B	Q	I	s
\bar{u}	$-1/3$	$-2/3$	$-1/2$	0
\bar{d}	$-1/3$	$1/3$	$1/2$	0
\bar{s}	$-1/3$	$1/3$	0	1

$q\bar{q}$	Q	S	Meson
$u\bar{u}$	0	0	π^0
$u\bar{d}$	1	0	π^+
$d\bar{u}$	-1	0	π^-
$d\bar{d}$	0	0	η
$u\bar{s}$	1	1	K^+
$d\bar{s}$	0	1	K^0
$s\bar{u}$	-1	-1	K^-
$s\bar{d}$	0	-1	\bar{K}^0
$s\bar{s}$	0	0	??

qqq	Q	S	Baryon
uuu	2	0	Δ^{++}
uud	1	0	Δ^+
udd	0	0	Δ^0
ddd	-1	0	Δ^-
uus	1	-1	Σ^{**+}
uds	0	-1	Σ^{*0}
dds	-1	-1	Σ^{*-}
uss	0	-2	Ξ^{*0}
dss	-1	-2	Ξ^{*-}
sss	-1	-3	Ω^-

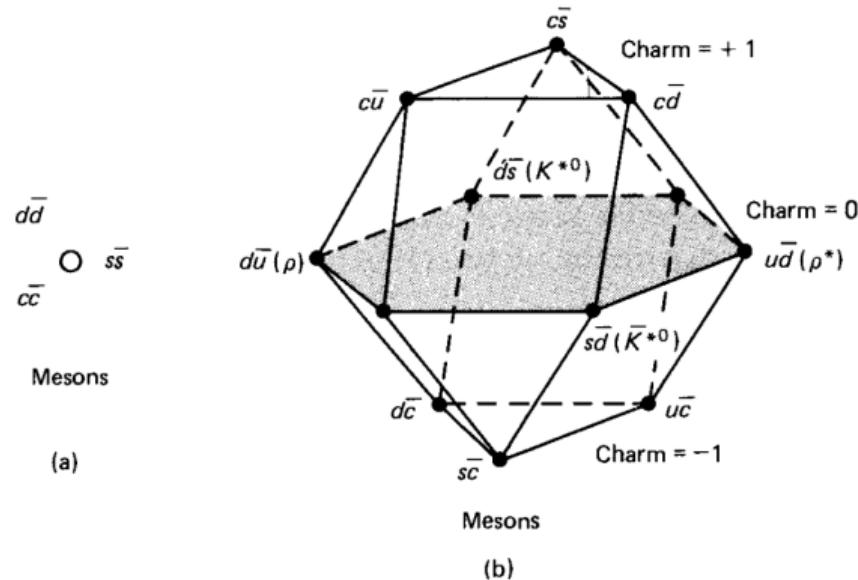
Ushtrimi 13

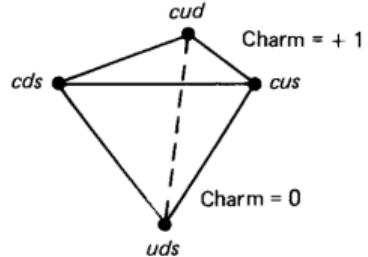
Bazuar në përbërjen e kuarkeve të mezoneve dhe barioneve, si dhe në numrat kuantikë të kuarkeve (të paraqitur në tabelat më lart), gjeni sa janë Q , B , I dhe s për të gjitha grimcat aty.

Ngjashmëria që sektori i kuarkeve shfaq me sektorin e leptoneve:

- Leptonet: e , μ , τ , ν
- Kuarket: u , d , s , ?

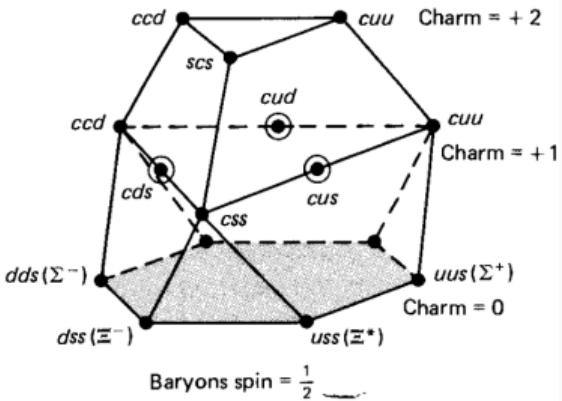
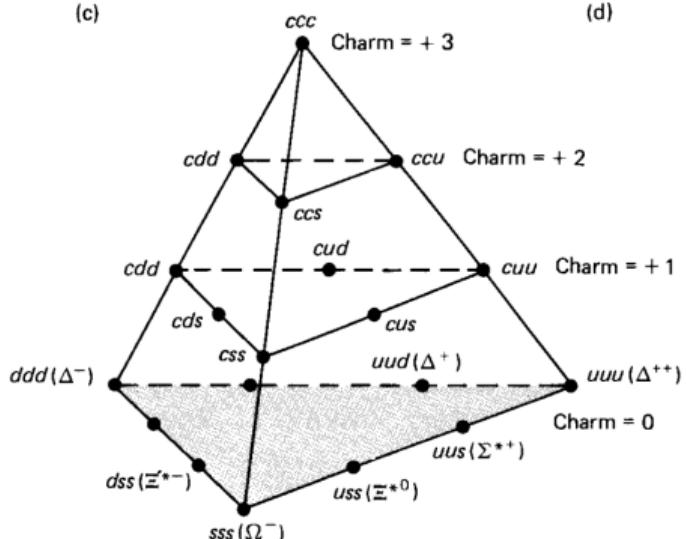
Kështu u sugjerua një kuark tjetër, i quajtur c .





Baryons

(c)



Baryons spin = $\frac{1}{2}$

Charm = + 2

Charm = + 1

Charm = 0

(d)

Baryons spin = $\frac{3}{2}$

Zbulimet e mëvonshme të grimcave sugjeruan ekzistencën edhe të dy kuarkeve të tjera më të rënda, t dhe b . Kështu kemi një simetri më të plotë mes aromave të kuarkeve dhe leptoneve.

QUARK CLASSIFICATION

	q	Q	D	U	S	C	B	T
First generation	d	$-\frac{1}{3}$	-1	0	0	0	0	0
	u	$\frac{2}{3}$	0	1	0	0	0	0
Second generation	s	$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	0	0
	c	$\frac{2}{3}$	0	0	0	1	0	0
Third generation	b	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	-1	0
	t	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0	1

LEPTON CLASSIFICATION

	l	Q	L_e	L_μ	L_τ
First generation	e	-1	1	0	0
	ν_e	0	1	0	0
Second generation	μ	-1	0	1	0
	ν_μ	0	0	1	0
Third generation	τ	-1	0	0	1
	ν_τ	0	0	0	1

Modeli Standart

Fizika e grimcave

Fizika e grimcave studion: **MATERIEN** dhe **FORCAT** në nivelin më fundamental. Në kuptimin e sotëm:

- **MATERIA** – përbëhet nga **leptonet** dhe **kuarket**, që janë fermione me spin 1/2. Këto grimca nuk kanë përmasa fizike (janë pikësore).
- **FORCAT** – janë bashkëveprimet themelore të natyrës. Përshkruhen nga fusha kuantike, të cilat kanë si kuante bozonet e fushës dhe kanë spin 1, përveç gravitonit që pritet të ketë spin 2. Kuantet e fushës shkëmbohen mes grimcave të materies duke mundësuar bashkëveprimin e tyre. Këto kuante janë:
 - Bashkëveprimi elektromagnetik – fotoni γ .
 - Bashkëveprimi i dobët – grimcat W^\pm dhe Z^0 .
 - Bashkëveprimi i fortë – gluoni g .
 - Bashkëveprimi gravitacional – gravitoni G (me spin 2)*.

*Bashkëveprimi gravitacional midis grimcave elementare është totalisht i neglizhueshëm.

Modeli Standart (MS)

Modeli Standart i grimcave elementare është një teori kuantike fushe shumë e suksesshme, e cila ka parashikuar me shumë saktësi çdo rezultat eksperimental të përfthuar deri tani.

Materia në MS

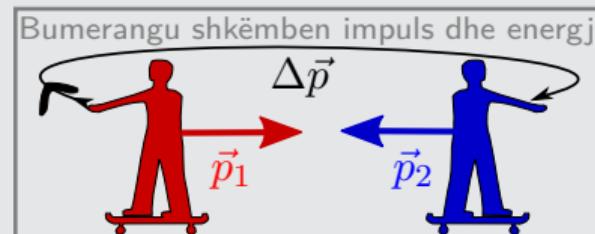
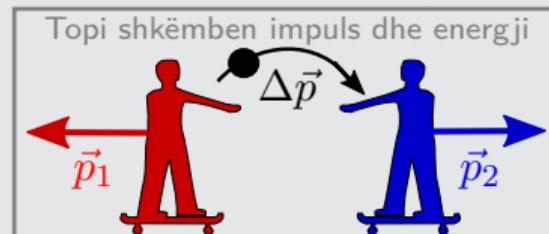
- Materia në Modelin Standart përshkruhet nga leptonet dhe kuarket.
- Janë gjithsej 6 aroma leptonesh dhe 6 aroma kuarkesh, së bashku me antigrimcat e tyre.
- Leptonet dhe kuarket formojnë 3 gjenerata (grupe dyshe). Gjeneratat sillen njëloj dhe ndryshojnë vetëm nga masat.
- Kuarket gjithashtu vijnë në tre “ngjyra” (të **kuqe**, **jeshile** dhe **blu**), që janë ngarkesat e bashkëveprimit të fortë.
- Pra, materia në MS ka gjithsej 48 grimca themelore.

Tre gjenerat e materies (Fermione)			Bashkeveprimet (Bozone)		
	I	II	III		
KUARKET	masa $\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa up u up	masa $\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa c charm	masa $\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa t top	masa 0 0 1 spin ngarkesa g gluoni	masa $\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$ 0 0 0 spin ngarkesa H higgs
	masa $\approx 4.7 \text{ MeV}/c^2$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa d down	masa $\approx 96 \text{ MeV}/c^2$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa s strange	masa $\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa b bottom	masa 0 0 1 spin ngarkesa γ fotoni	
	masa $\approx 0.511 \text{ MeV}/c^2$ -1 $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa e elektroni	masa $\approx 105.66 \text{ MeV}/c^2$ -1 $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa μ muoni	masa $\approx 1.7768 \text{ GeV}/c^2$ -1 $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa τ tauoni	masa 0 0 1 spin ngarkesa Z bozoni Z	
	masa $<1.0 \text{ eV}/c^2$ 0 $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa ν_e neutrino elektronike	masa $<0.17 \text{ MeV}/c^2$ 0 $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa ν_μ neutrino muonike	masa $<18.2 \text{ MeV}/c^2$ 0 $\frac{1}{2}$ spin ngarkesa ν_τ neutrino tauonike	masa $\approx 80.39 \text{ GeV}/c^2$ ± 1 1 spin ngarkesa W bozoni W	
					BZONET Kalibruese BZONET VEKTORE
					BOZONET SKALARE

Modeli Standart (MS)

Forcat në MS

- MS merret me bashkëveprimet elektromagnetike, të dobëta dhe të forta. Për shkak të dobësisë së tij dhe meqë nuk ka akoma një teori kuantike të plotë, graviteti nuk është pjesë e MS.
- Bashkëveprimet në teorinë kuantike të fushës përshkruhen nëpërmjet shkëmbimit të grimcave të fushës (bozonet e fushës).



- MS është një teori efektive dhe jo teoria themelore e natyrës. Ajo ka një shkallë energjie përtej së cilës pushon së funksionuari.

Karakteristikat e bashkëveprimeve

Madhësia fizike	Gravitacioni	Elektromagnetizmi	Bashk. e dobët	Bashk. e fortë
Vepron mbi	çdo grimcë	grimcat e ngarkuara	leptonet & kuarket	kuarket & gluonet
Ngarkesa/Burimi	masa–energjia	ngark. elektrike	ngark. e aromës	ngark. e ngjyrës
Forca relative*	$\sim 10^{-39}$	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-7}$	~ 1
Potenciali $V(r)$ në distancë	$\sim 1/r$	$\sim 1/r$	$\sim e^{-(mr)}/r$	$\sim r$
Distanca tipike [m]	∞	∞	$\sim 10^{-18}$	$\sim 10^{-15}$
Jetëgjatësia tipike [s]	–	$10^{-21} - 10^{-16}$	$10^{-13} - 10^{-8}$	$\sim 10^{-23}$
Sektioni tërthor tipik [mb]	–	10^{-3}	10^{-16}	~ 10
Teoria përshkruese	Gjeometrodinamika	Elektrodinamika	Aromodinamika	Kromodinamika

*Forca relative lidhet me atë që quhet konstantja e çiftimit α (p.sh. konstanta e strukturës fine në elektrodinamikë).

Karakteristikat e bozoneve të fushës

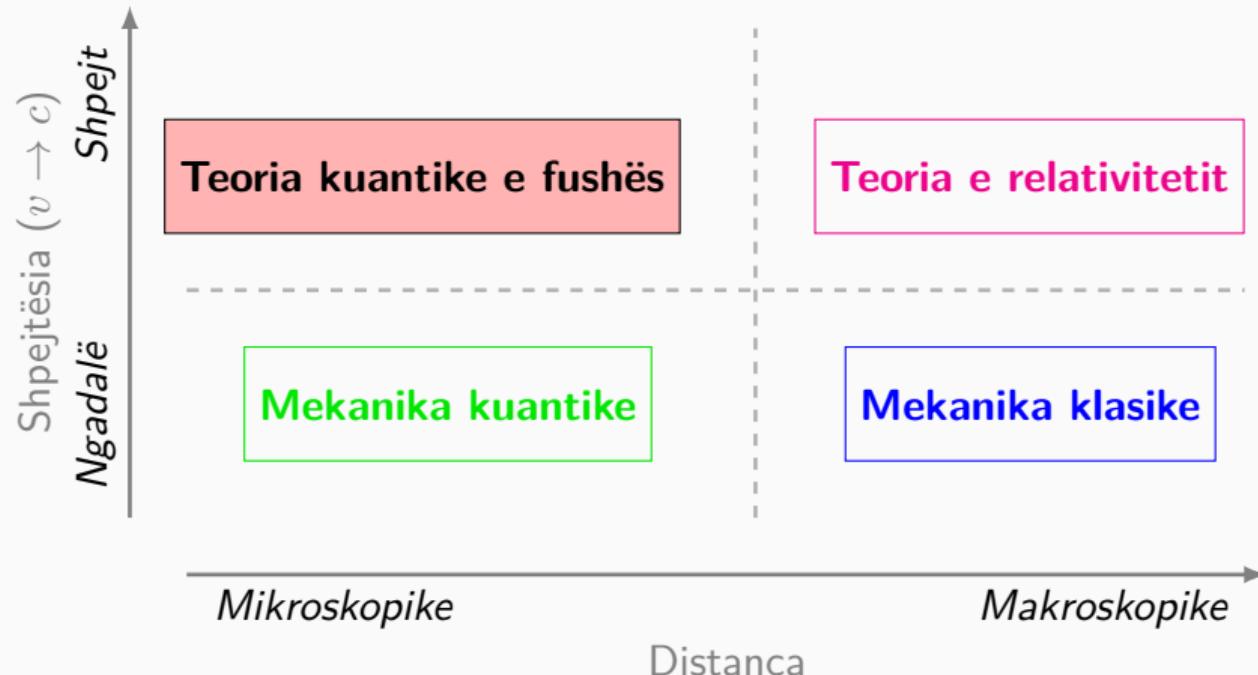
Madhësia fizike	Gravitacioni	Elektromagnet.	Bashk. e dobët	Bashk. e fortë
Kuanti i fushës	G	γ	W^\pm, Z^0	g
Masa [GeV/c^2]	0	0	80.4, 91.2	0
Ngarkesa elektrike	0	0	$\pm e$, 0	0
Spini [\hbar]	2	1	1	1

Ushtrimi 14

Llogarisni forcën e Coulomb-it, forcën gravitacionale si dhe raportin e tyre për: a) dy elektrone, b) dy protone, të cilët ndodhen në distancën $r = 1 \text{ fm}$.

Mekanika Kuantike Relativiste dhe Teoria Kuantike Fushes

Teoria e grimcave elementare



Rikujtesë: Teoria e relativitetit special

- Teoria speciale e relativitetit ndërton një hapësirë ngjarjesh 4-dimensionale (3 hapësirë dhe 1 kohë), ku një vektor shprehet $x^\mu = (ct, x, y, z)$ me $\mu = 0, 1, 2, 3$.
- Kjo hapësirë-kohë është minkowskiane me metrike diagonale $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.
- Gjatësia (norma) e një vektori x^μ në këtë hapësirë jepet nga

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

që quhet interval.

- Themel i teorisë janë transformimet e Lorentz-it, të cilat janë "rrotullime" në hapësirën e Minkowski-t.
- Këto rrotullime formojnë një grup ortogonal special $SO(1, 3)$, që quhet grupei i Lorentz-it. Indeksi $(1, 3)$ tregon 1 dimension kohe dhe 3 dimensione hapësire.
- Paraqitja matricore e elementeve të $SO(1, 3)$ në hapësirën e ngjarjeve jep transformimet e Lorentz-it për vektorët.

- Rrotullimet në hapësirë janë si në 3D, me matrica me $\cos \theta$ dhe $\sin \theta$. Për shembull, rrotullimi sipas boshtit z :

$$\Lambda_{\nu}^{\mu}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rrotullimet që përfshijnë koordinatën e kohës ("boosts") përdorin funksione hiperbolike: \cosh dhe \sinh në vend të \cos dhe \sin . Për shembull, boost sipas boshtit x :

$$\Lambda_{\nu}^{\mu}(\psi) = \begin{bmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transformimi nga sistemi S në një tjetër S' që lëviz me shpejtësi v sipas boshtit x bëhet përmes një boost-i:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu}(\psi) x^{\nu}.$$

- Madhësitë fizike në teorinë e relativitetit shkruhen në formë kovariante për hapësirën 4D minkowskiane. Për shembull, translacionet në hapësirë-kohë gjenerohen nga 4-impulsi

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right),$$

që bashkon zhvendosjet në kohë dhe në hapësirë (në mekanikën klasike trajtoheshin veçmas nga Hamiltoniani dhe impulsi).

- Simetritë në relativitet lidhen me transformimet e grupit të Lorentz-it $SO(1, 3)$ që lënë invariant normën e vektorëve 4D.

Shembuj madhësish invariante:

$$\begin{aligned} x^2 &= \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 t^2 - \vec{r}^2, \\ P^2 &= \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2. \end{aligned}$$

- Prej këtej rrjedh lidhja relativiste e energji-impulsit:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

4-impulsi ruhet

Në çdo bashkëveprim grimcash 4-impulsi ruhet:

$$\sum_i P_i^\mu = \sum_j P_j'^\mu.$$

Kjo jep:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_i E_i &= \sum_j E'_j, \\ \sum_i \vec{p}_i &= \sum_j \vec{p}'_j. \end{cases}$$

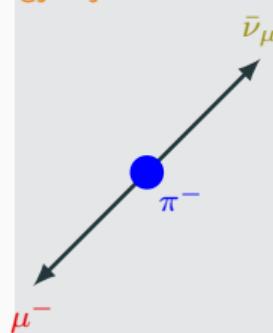
Për çdo grimcë vlen $P_i^2 = m_i^2 c^2$.

Shembull

Gjeni energjinë dhe impulsin e muonit dhe neutrinos nga zbërthimi i një pioni në prehje

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Zgjidhje:



- Nga ligji i ruajtjes: $P_{\pi^-}^\lambda = P_{\mu^-}^\lambda + P_{\bar{\nu}_\mu}^\lambda$.
- Ngrisim në katror: $(P_{\pi^-})^2 = (P_{\mu^-} + P_{\bar{\nu}_\mu})^2$ (shënim: ngritja në katror është $P^2 = \eta_{\lambda\delta} P^\lambda P^\delta$).
- Kemi: $P_\pi^2 = P_\mu^2 + P_\nu^2 + 2 \eta_{\lambda\delta} P_\mu^\lambda P_\nu^\delta$.
- $\Rightarrow m_\pi^2 c^2 = m_\mu^2 c^2 + m_\nu^2 c^2 + 2 \left(\frac{E_\mu E_\nu}{c^2} - \vec{p}_\mu \cdot \vec{p}_\nu \right)$.
- Meqë $m_\nu = 0 \Rightarrow E_\nu = |p_\nu|$ dhe meqë $\vec{p}_\pi = 0$ kemi $\vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu$ dhe $E_\mu = E_\pi - E_\nu$.

Gjejmë:

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 = \frac{(140 \text{ MeV})^2 - (106 \text{ MeV})^2}{2 \times 140 \text{ MeV}} \approx 110 \text{ MeV},$$

$$E_\nu = |p_\mu| = |p_\nu| \approx 30 \text{ MeV}.$$

Ushtrimi 15

Gjeni energjinë dhe impulsin e fotonëve nga zbërthimi $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

Ushtrimi 16

Në eksperimentet me grimca dallohen dy tipe:

- objekte fikse (grimca të përshpejtuara godasin një material në prehje);
- përshpejtues (dy grumbuj grimcash të përshpejtuara që goditen kokë më kokë).

Gjeni formulën e madhësisë invariante

$$s = (P_1^\mu + P_2^\mu)^2,$$

si funksion i energjisë dhe impulsit të grimcave në laborator. Këtu

$$P_1^\mu = \left(\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1 \right), \quad P_2^\mu = \left(\frac{E_2}{c}, \vec{p}_2 \right)$$

janë 4-impulset e grimcave që goditen në laborator.

Rikujtesë: Mekanika kuantike

- Në mekanikën kuantike, hapësira e gjendjeve është hapësira e Hilbertit (hapësira e funksioneve valorë).
- Impulsi dhe energjia (Hamiltoniani) si gjenerues të zhvendosjeve në hapësirë dhe në kohë, përkatësisht, paraqiten si operatorë në hapësirën e Hilbertit.
- Në paraqitjen koordinative, operatorët e energjisë dhe impulsit janë:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} = \hat{E} &= i\hbar \partial_t, \\ \hat{\vec{p}} &= -i\hbar \nabla.\end{aligned}$$

- Ekuacioni i Schrödinger-it është ekuacioni i evolucionit të gjendjes:

$$\boxed{\hat{\mathcal{H}} |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle}.$$

- Për një grimcë të lirë ($V = 0$), kemi:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

- Zgjidhja është vala planare

$$\psi = A e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})},$$

ku $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ dhe $E = \hbar \omega = \vec{p}^2 / 2m$.

- Ky ekuacion ka derivat të rendit të parë në kohë dhe të rendit të dytë në hapësirë, prandaj nuk është invariant Lorentzian (pra nuk është relativist).
- Funksioni valor këtu është skalar dhe nuk përfaqëson grimcat me spin.
- Grimcat elementare lëvizin shpesh me shpejtësi relativiste, prandaj na duhet një version relativist i ekuacionit të Schrödinger-it, që të përfshijë edhe spinin.

Schrödinger: Densiteti dhe Rryma Probabilitare

Ekuacioni i Schrödinger-it:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{dhe i konjuguari} \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi^* = i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$$

Duke shumëzuar ekuacionin e parë me ψ^* dhe të dytin me ψ nga e majta dhe duke përkufizuar densitetin dhe rrymen e probabilitetit:

$$\rho = |\psi|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*),$$

përftojmë ekuacionin e vazhdueshmërisë

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Ku densiteti është gjithmonë

$$\rho > 0.$$

Spini i grimcavë

- Spini është një gradë tjetër lirie e grimcës (analog me rrotullimin, por jo identik me rrotullimin klasik).
- Spini i grimcës modelohet matematikisht njësoj si momenti i impulsit kuantik; është paraqitje e grupit $SU(2)$.
- Mund të mendohet si një rrotullim i grimcës, por nuk ka interpretim të thjeshtë klasik (grimcat elementare janë pikesore).
- Momenti i impulsit/spini në mekanikën kuantike është i kuantizuar.
- Kujtoni që grimcat elementare nuk kanë madhësi të matura hapësinore. Intuita klasike vështirë se mund të vizualizojë rrotullimin e një “pike gjeometrike”.
- Grimcat me spin $S = s\hbar$ kanë një simetri rrotullimi: gjendja mbetet e njëjtë pas një rrotullimi me kënd $\alpha = 2\pi/s$.

Ka një lidhje të ngushtë mes grupit të Lorentz-it $SO(3, 1)$ (relativiteti) dhe spinit $SU(2)$ (përmes paraqitjeve e tyre). Si rrjedhojë:

- Grimcat me spin $S = 0$ quhen grimca skalare (nga mënyra si transformohen nën Lorentz).
- Fermionet me $S = 1/2$ kanë simetri rrotullimi me $\alpha = 4\pi$ (duhet një rrotullim $2 \times 360^\circ$ për t'u kthyer në të njëjtën gjendje).
- Bozonet me $S = 1$ transformohen si vektorë të hapësirës dhe kanë simetri rrotullimi me $\alpha = 2\pi$.
- Fermionet me $S = 3/2$ kanë simetri rrotullimi me $\alpha = 4\pi/3$.
- Bozonet me $S = 2$ transformohen si tenzor i rangut 2 dhe janë invariantë nën rrotullim me $\alpha = \pi$, etj.

- Në ekuacionin e Schrödinger-it nuk kemi përfshirë në mënyrë eksplikite spinin.
- Pauli formuloi ekuacionin e Schrödinger-it për grimcat jo relativiste me spin 1/2 në fushë elektromagnetike:

$$\left[\frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\vec{\mathbf{p}} - q\vec{\mathbf{A}}))^2 + q\phi \right] |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle,$$

ku σ_i janë matricat e Paulit dhe

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{bmatrix},$$

me ψ_+ dhe ψ_- funksionet që i korrespondojnë gjendjeve të spinit $+1/2$ dhe $-1/2$.

- Pra kërkojmë një formulim të mekanikës kuantike që të jetë relativist dhe të përfshijë në mënyrë natyrshme spinin dhe gradët e tjera të lirisë së grimcave.

Ushtrimi 17

Vertetoni që:

a) $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = p^2.$

b) $\left(\frac{E}{c} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{p}\right)\left(\frac{E}{c} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{p}\right) = \frac{E^2}{c^2} - p^2.$

Ushtrimi 18

Vertetoni që matricat e Pauli-t kanë antikomutator:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2 \delta_{ij}.$$

Shënim: Antikomutatori përkufizohet si $\{A, B\} = AB + BA$, ndryshe nga komutatori $[A, B] = AB - BA$. Kujtoni që komutatori i matricave të Pauli-t është

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k.$$

Ekuacioni i Klein–Gordon-it ($S = 0$)

- Lidhja energji–impuls në relativitet është $\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$. Versioni i kuantizuar merr formën $\frac{\hat{E}^2}{c^2} = \hat{p}^2 + m^2 c^2$.
- Duke zëvendësuar operatorët, $\hat{E} = i\hbar \partial_t$, $\hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla$, gjejmë ekuacionin e Klein–Gordon-it:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{c^2 \partial t^2} = -\hbar^2 \Delta \psi + m^2 c^2 \psi.$$

- Zgjidhja e tij është sërisht vala planare $\psi = A e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$, ku $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ dhe $E = \hbar \omega = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$.
- Ekuacioni është relativist, por dalin zgjidhje me energji negative!

Klein–Gordon: Densiteti dhe Rryma

Ekuacioni KG:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0 \quad \text{dhe} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi^* = 0.$$

Shumëzojmë ekuacionin e parë nga e majta me ϕ^* dhe të dytin me ϕ dhe marrim:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}, \quad \rho = i(\phi^* \partial_t \phi - (\partial_t \phi^*) \phi), \quad \mathbf{j} = i(\phi^* \nabla \phi - (\nabla \phi^*) \phi).$$

Ku $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$.

Apliko zgjidhjen e valës plane dhe gjejmë $\rho = E A^2$ që bëhet negative $\rho < 0$ për zgjidhjet me energji negative $E < 0$! Ky ishte problemi historik që motivoi Dirac-un.

Tani $\phi^* \phi$ nuk mund të interpretohet më si probabilitet! ϕ në rastin relativist nuk mund të interpretohet më si funksion valor por si një **fushë kuantike!**

Ushtrimi 19

Provoni nga perkufizimi i j^μ

$$\rho = i (\phi^* \partial_t \phi - (\partial_t \phi^*) \phi), \quad \mathbf{j} = i (\phi^* \nabla \phi - (\nabla \phi^*) \phi),$$

dhe ekuacioni KG $((\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0)$ përftojmë:

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Kujtese: Fushat e Bashkëveprimit

Çfarë është një potencial bashkëveprimi?

Ideja kryesore

Një potencial përshkruan energjinë e një grimce test kur ajo ndodhet në një fushë të krijuar nga një burim fushe (psh ngarkesë).

- Në gravitacion: $V = mgh \rightarrow$ energjia ndryshon me pozicionin.
- Në elektrostatikë: $V = q\phi_{EM} \rightarrow$ grimca test reagon ndaj fushës së krijuar nga ngarkesa.
- **Modeli universal:**



Burimi → Fusha → Potenciali për grimcën test.

- Potenciali është mënyra më e thjeshtë që fusha ndikon mekanikisht një grimcë.

Nga burimi te fusha: pse ekuacione diferenciale?

- **Fizika është lokale:** fusha në një pikë varet vetëm nga fqinjët e saj \rightarrow kërkon ekuacione diferenciale (jo algjebrike si rasti jo-lokal).
- **Fushat bartin energji dhe mund të përhapin valë** \rightarrow nga formulimi Lagrange duhet të kenë terma të rendit të dytë.
- **Relativiteti** kufizon formën: operatori i vetëm Lorentz-invariant për një fushë skalarë është

$$\partial^\mu \partial_\mu = \square.$$

- Prandaj modeli më i thjeshtë i mundshëm i një fushe masive (= me masë), ku J është burimi:

$$(\square + m^2)\phi = J.$$

- Shembuj:

$$\nabla^2 \phi_{\text{EM}} = -\rho/\varepsilon_0 \quad (\text{pa masë}), \quad (\nabla^2 - m^2)\phi = -g \rho.$$

Burimi: pse ekuacioni fushë ka një anë të djathtë?

Interpretimi fizik

Burimi është përgjegjës për “kurbimin” e fushës. Pa burimin, fusha është e rrafshët (homogjene me gradient zero).

- Në elektrostatikë: $\nabla^2 \phi_{EM} = -\rho \rightarrow$ ngarkesa elektrike e shtyn fushën larg nga zeroja.
- Për një fushë skalarë masive: $(\nabla^2 - m^2)\phi = -g\rho \rightarrow$ ngarkesa skalarë e deformon fushën sipas gjatësisë valore të Compton-it $\lambda_c = 1/m$.
- **Pa praninë e burimit ($\rho = 0$) përftojmë zgjidhet e lira që janë ose ekuacion vale ose forma eksponenciale.**

Analogjia

E mendoni fushën si një membranë elastike: burimi është forca që e shtyn membranën nga qëndrimi natyral.

Burimi pikësorë: pse $\delta^3(\mathbf{r})$ e Dirac-ut?

- Nëse një ngarkesë Q është pikësore, atëherë densiteti i saj jipet nga:

$$\rho(\mathbf{r}) \rightarrow Q \delta^3(\mathbf{r}).$$

- Kjo përcaktohet nga kërkesa:

$$\int \rho(\mathbf{r}) d^3r = Q.$$

- Delta është forma e vetme që ka vëllim zero por ruan shumën totale.
- **Gauss:** Integrimi i ekuacionit me burim fikson koeficientin:

$$\int (\nabla^2 \phi) d^3x = -g \quad \Rightarrow \quad \phi(r) \propto \frac{e^{-mr}}{r}.$$

Kujtoni

Delta nuk është abstrakte: është mënyra e vetme për të modeluar fizikisht një burim pikësorë (me shtrirje hapësinore zero).

Nga fusha te potenciali: forma e bashkëveprimit

Rregulli universal: burim fushe (ngarkesa) \times fushë

$$V(\mathbf{r}_a) = \text{burimi (ngarkesa e grimcës)} \times \phi(\mathbf{r}_a).$$

- Elektromagnetizëm:

$$V = q \phi_{\text{EM}}. \quad \left(\text{Rasti magnetik} \quad V = \vec{j} \cdot \vec{A} \right)$$

- Fushë skalarë:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= -g \phi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}). \\ \rho(\mathbf{x}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}_a) \Rightarrow \boxed{V(\mathbf{r}_a) = g \phi(\mathbf{r}_a)}. \end{aligned}$$

- Në kufirin jo-relativist, kjo jep potencialin efektiv të grimcës test.

Intuitë

Grimca test “sheh” vlerën e fushës në pozicionin e saj \mathbf{r}_a , $V(\mathbf{r}_a)$.

Nga ekuacioni i KG te potenciali Yukawa

Ekuacioni statik me burim pikësor:

$$(\nabla^2 - m^2)\phi(\mathbf{r}) = -g \delta^3(\mathbf{r}).$$

Zgjidhja për $r > 0$:

$$\phi(r) = -\frac{g}{4\pi r} e^{-mr}.$$

Potenciali i Yukawa-s

$$V(r) = g \phi(r) = -\frac{g^2}{4\pi r} e^{-mr}.$$

- $m = 0 \rightarrow$ Coulomb: $V(r) \sim -1/r$.
- $m > 0 \rightarrow$ rrze e kufizuar: $r \sim \lambda_c = 1/m$.
- Shembull: Yukawa përdori $r \sim 1.5$ fm për të parashikuar m_π .

Nga fusha klasike te bozonet ndërmjetësues

- Fusha $\phi(\mathbf{x}, t)$ ka mode lëkundjeje të pavarura.
- Kuantizimi i çdo modi lëkundjeje nëpërmjet oshilatorit harmonik kuantik \rightarrow prodhon kuanta që janë grimcat e fushës.
- Kuantat e ϕ janë grimca reale me masë m .
- **Këto grimca ndërmjetësojnë forcën** (grimcat mesenxhere): në kufirin jo-relativist, shkëmbimi i një kuanti prodhon potencialin,

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi r} e^{-mr}.$$

- Pra:

potenciali Yukawa \Leftrightarrow shkëmbimi i një bozonit me masë m .

Mesazh final

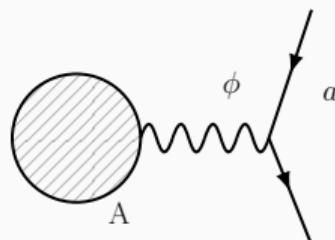
Fusha klasike, burimi, potenciali dhe bozonet janë pikëpamje të ndryshme të së njëjtës fizikë₁₄₁/175

Zgjidhja statike e ekuacionit Klein–Gordon

Ushtimi 20

Një grimcë A e pa-lëvizshme bashkëvepron nëpërmjet një fushe skalare masive statike me një grimcë test a . Gjeni potencialin e bashkëveprimit të grimcës a .

Zgjidhje:



Supozojmë që grimca A prodhon një fushë statike ϕ (ndërmjetësuar nga bozoni skalarë ϕ). Si fushë skalare masive, ϕ përshkruhet nga ekuacioni KG. Meqë fusha është statike atëherë $\partial_t \phi = 0$ dhe rrjedhimisht përshkruhet nga ekuacioni:

$$\Delta\phi - \frac{\phi}{\lambda_c^2} = -g \delta^3(\vec{r}),$$

ku $\lambda_c = \hbar/(mc)$ është gjatësia valore e Compton-it.

Zgjidhja për simetrinë sferike është: $\phi(r) = -\frac{g}{4\pi r} e^{-r/\lambda_c}$, ku g është ngarkesa e grimcës burim A dhe $\phi(r)$ është fusha në pikën r ku ndodhet grimca test a .

Potenciali i Yukawa-s

- Potenciali i bashkëveprimit është

$$V(r) = g \phi(r) = -\frac{g^2}{4\pi r} e^{-r/\lambda_c},$$

ku g tani është ngarkesa e grimcës test a . Ky potencial quhet **Potenciali i Yukawa-s**.

- Konstantja

$$\alpha = \frac{g^2}{4\pi},$$

shpreh fortësinë e bashkëveprimit, dhe lidhet me **konstanten e çiftimit**.

- Yukawa propozoi këtë formë për të shpjeguar forcat bërthamore; λ_c jep rrezen karakteristike të bashkëveprimit bërthamor, prej nga mund të nxirret masa e mezonit π (që u zbulua më vonë).

Ushtrimi 21: Grimca e Yukawa-s

Duke ditur rrezen e bashkëveprimit bërthamor, gjeni sa duhet të jetë masa e grimcës Yukawa që ndërmjetëson këtë bashkëveprim.

Krahasimi i Potencialeve: Coulomb vs. Yukawa

Potenciali Coulomb (EM)

$$V_{\text{Coul}}(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

- Ndërmjetësi: fotoni, $m = 0$.
- Ekuacioni i fushës nuk ka term mase.
- **Nuk ka dobësim eksponenciale.**
-

$$\lambda_c = \frac{1}{m} \rightarrow \infty$$

- **Reze e pakufizuar (bashkë-)veprimi.**

Potenciali Yukawa

$$V_{\text{Yuk}}(r) = -\frac{g^2}{4\pi r} e^{-mr}$$

- Ndërmjetësi: fushë skalarë me $m > 0$.
- Termi masës $m^2 \phi$ dobëson fushën.
- **Faktori eksponencial e^{-mr} .**
-

$$\lambda_c = \frac{1}{m} \ll \infty$$

- **Reze e kufizuar (bashkë-)veprimi.**

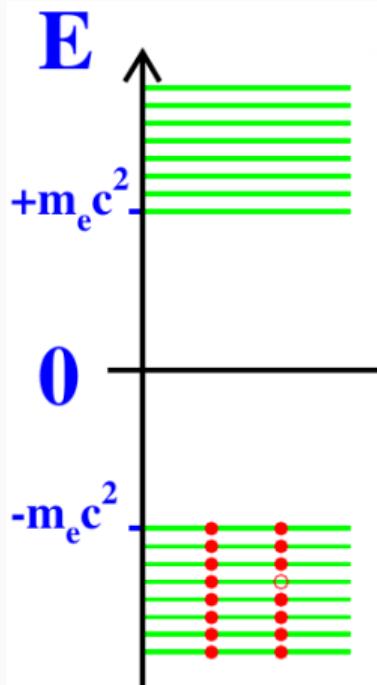
Përfundimi

Masë zero \Rightarrow pa dobësim \Rightarrow forcë me rreze ∞ .

Masë jo-zero \Rightarrow dobësim eksponencial \Rightarrow forcë me rreze të kufizuar.

Antigrimcat: Zgjidhjet me energji negative

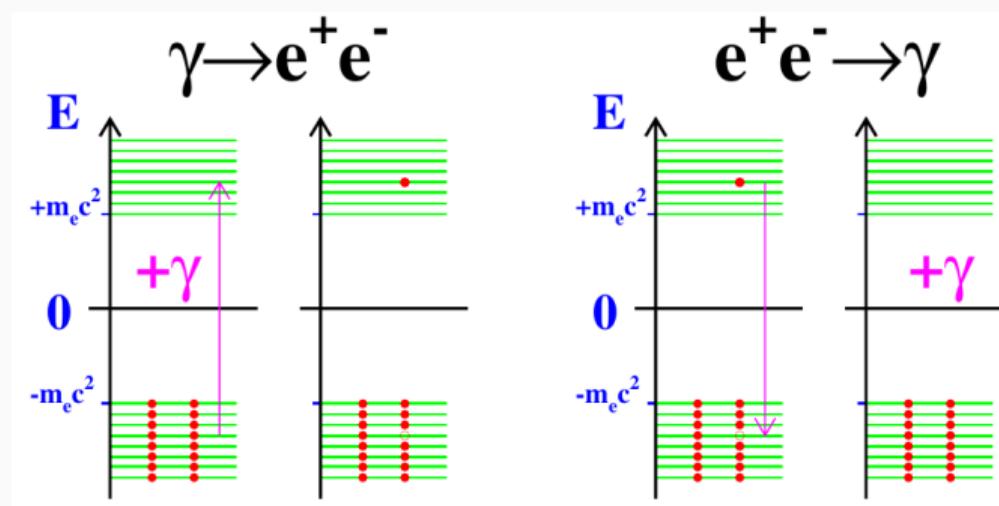
Zgjidhjet me energji negative: antigrimca



Interpretimi i Dirac-ut

- Dirac nuk i hodhi poshtë zgjidhjet me energji negative që dalin nga ekuacionet relativiste.
- Ai i interpretoi ato përmes asaj që quhet “deti i Dirac-ut”.
- Vakumi përmban të gjitha gjendjet me energji negative, ku secila gjendje është e mbushur me elektrone me spine të kundërt, në përputhje me parimin e Pauli-t.

Deti i Dirac-ut



Vakuumi i ka të gjitha gjendjet me energji negative të zëna (është "i mbushur"). Grimcat me energji pozitive nuk mund të zbresin në energji më të ulëta. Nëse injektohet energji (p.sh. një foton), një grimcë e vakuumit kalon në bandën me energji pozitive duke lënë pas një "vrimë" në bandën me energji negative. Nga elektroneutraliteti i vakuumit, vrima ka ngarkesë të kundërt. Dirac i interpretoi vrimat si antigrimca.

Interpretimi i Feynman-it

Në kuptimin modern, zgjidhjet me energji negative interpretohen si gjendje të një grimce që lëviz mbrapsht në kohë. Këto interpretohen si antigrimca me energji pozitive, por me ngarkesë të kundërt, që lëvizin në drejtimin pozitiv të kohës. Antigrimcat kanë të njëjtën masë dhe madhësi ngarkese, por shenjë të kundërt me grimcat përkatëse.

Për të dhënë një ide, shikoni evolucionin në kohë të një vale planare:

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)}.$$

Ekuacioni i Weyl-it

- Konsiderojmë ekuacionin e Klein–Gordon-it për një grimcë pa masë:

$$\left(\frac{\hat{E}^2}{c^2} - \hat{p}^2 \right) \psi = 0.$$

- Meqë energjitetë negative i lidhim me antigrimcat, përpinqemi ta faktorizojmë ekuacionin në dy ekuacione të rendit të parë në derivata:

$$\left(\frac{\hat{E}}{c} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right) \left(\frac{\hat{E}}{c} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right) = \frac{\hat{E}^2}{c^2} - \hat{p}^2.$$

- Në hapësirë–kohë kjo merr formën:

$$\left(\frac{1}{c} I \partial_t + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \left(\frac{1}{c} I \partial_t - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta = \square.$$

Nga ekuacioni më sipër ndërtojmë trajtën matricore:

$$\frac{1}{c} I \partial_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \partial_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \partial_y \\ i \partial_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} I \partial_t + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t + \partial_z & \partial_x - i \partial_y \\ \partial_x + i \partial_y & \frac{1}{c} \partial_t - \partial_z \end{pmatrix}, \\ \left(\frac{1}{c} I \partial_t - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t - \partial_z & -(\partial_x - i \partial_y) \\ -(\partial_x + i \partial_y) & \frac{1}{c} \partial_t + \partial_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{c} \partial_t + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right) \left(\frac{1}{c} \partial_t - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t + \partial_z & \partial_x - i \partial_y \\ \partial_x + i \partial_y & \frac{1}{c} \partial_t - \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t - \partial_z & -(\partial_x - i \partial_y) \\ -(\partial_x + i \partial_y) & \frac{1}{c} \partial_t + \partial_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 \end{pmatrix} = I \square. \end{aligned}$$

Ekuacioni

$$\left(\frac{1}{c} \partial_t + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \left(\frac{1}{c} \partial_t - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \psi = 0$$

ka si zgjidhje ekuacionet e Weyl-it:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} \partial_t + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \varphi &= 0, \\ \left(\frac{1}{c} \partial_t - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \xi &= 0. \end{aligned}$$

Meqenëse matricat e Pauli-t janë 2×2 , funksionet valorë duhet të kenë 2 komponentë: **spinorët e Weyl-it**. Zgjidhja për grimcën relativiste të lirë dhe pa masë është e tipit:

$$\varphi = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

Pra **funksioni valor** është i detyruar të ketë një gradë tjetër lirie – **spinin e fermionit**.

Ushtrimi 22

Konsideroni një spinor Weyl (fermion pa masë) me impuls $p = p_z$ në drejtim të boshtit z . Zbatoni ekuacionin e parë të Weyl-it për zgjidhjen e valës planare dhe tregoni që:

$$(E/c - |p|)\varphi_1 = 0,$$

$$(E/c + |p|)\varphi_2 = 0.$$

Gjeni zgjidhjen analoge për ξ nga ekuacioni i dytë i Weyl-it dhe krahasojini.

Zgjidhja

$$(E/c - |p|)\varphi_+ = 0,$$

$$(E/c + |p|)\varphi_- = 0$$

jep spinoret $\varphi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ për grimcën me energji pozitive $E = +|p|$ dhe $\varphi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ për zgjidhjen me energji negative $E = -|p|$ (antigrimca).

Nëse ndajmë ekuacionin e Weyl-it me $|p|$ marrim:

$$\left(\frac{E}{|p|c} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{p}}}{|p|} \right) \varphi = 0.$$

Heliciteti

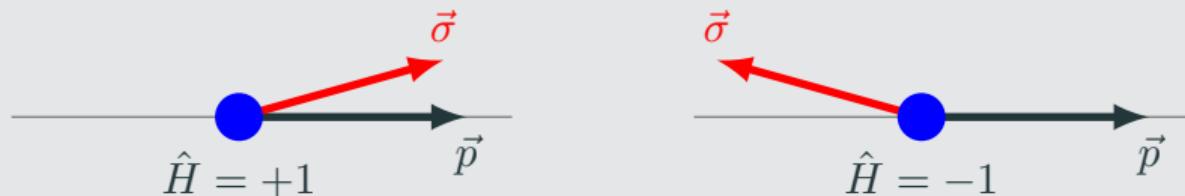
Heliciteti përkufizohet si operatori

$$\hat{H} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{p}}{|p|}$$

Për fermionët ($s = 1/2$) pa masë, vlerat vetjake janë

$$\hat{H} = \frac{E}{|p|c} = \begin{cases} +1, & E > 0 \quad (\text{grimca}), \\ -1, & E < 0 \quad (\text{antigrimca}). \end{cases}$$

Heliciteti është shenja e projeksionit të spinit në drejtimin e impulsit.



Heliciteti dhe “left/right-handed”

Zakonisht përdorim terminologjinë: $H = +1$ “i djathë” (right-handed) dhe $H = -1$ “i majtë” (left-handed).

Për spinoret φ të Weyl-it:

$$E > 0, \hat{H} = +1$$



Grimcë e djathë

$$E < 0, \hat{H} = -1$$



Antigrimcë e majtë

Ndërsa për ξ :

$$E > 0, \hat{H} = -1$$



Grimcë e majtë

$$E < 0, \hat{H} = +1$$



Antigrimcë e djathë

Shënim: Terminologjia “left/right-handed” lidhet në fakt me kiralitetin. Për fermionët pa masë heliciteti dhe kiraliteti përkijnë, prandaj shpesh përdoren në mënyrë të ndërkëmbyeshme.

Përbledhje: Ekuacionet e Weyl-it

- Ekuacionet e Weyl-it përshkruajnë fermionët pa masë me spin $1/2$.
- Faktorizimi i ekuacionit të Klein–Gordon-it në ekuacione lineare nxori në mënyrë natyrore gradë të re lirie të lidhura me spinin.
- Ende marrim zgjidhje me energji negative, të cilat interpretohen si antigrimca.
- Dendësia e probabilitetit është pozitive.
- Gjendjet e grimcës përshkruhen nga gjendjet vetjake të operatorit të helicitetit.

Rikujstesë: Ekuacioni i Dirac-ut

- Ekuacioni i Weyl-it përshkruan fermionet pa masë, ndërkokë që fermionet e materies që njohim kanë masë.
- Ekuacioni që përshkruan fermionet relativiste me masë quhet ekuacioni i Dirac-ut.
- Nisim nga ekuacioni i Klein–Gordon-it:

$$\frac{\hat{E}^2}{c^2} - \hat{p}^2 = m^2 c^2$$

dhe e linearizojmë në derivate të rendit të parë në hapësirë dhe kohë:

$$\frac{\hat{E}}{c} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc = \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta mc.$$

- Kërkojmë që $\boldsymbol{\alpha}$ dhe β të plotësojnë ekuacionin e Klein–Gordon-it kur ngrihet në katror:

$$\frac{\hat{E}^2}{c^2} = (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta mc)^2.$$

Ushtrimi 23

Duke u nisur nga forma lineare

$$\frac{\hat{E}^2}{c^2} = (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta mc)^2,$$

tregoni që:

- $\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1$;
- antikomutatori $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$ për $i \neq j$;
- antikomutatori $\{\alpha_i, \beta\} = 0$ për $i = x, y, z$.

Ekuacioni i Dirac-ut

- Shumëzojmë me β dhe përkufizojmë matricat γ^μ :

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta \alpha_i.$$

- Ekuacioni i Dirac-ut merr formën

$$\left[i\hbar \left(\frac{1}{c} \gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \partial_x + \gamma^2 \partial_y + \gamma^3 \partial_z \right) - mc \right] \psi = 0.$$

- Në njësi natyrore $\hbar = c = 1$:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0.$$

Ky është një nga ekuacionet më ikonike të fizikës moderne.

Matricat e Dirac-ut

Matricat e Dirac-ut ("matricat gama") plotësojnë:

- $(\gamma^0)^2 = +1$,
- $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$,
- $\{\gamma^i, \gamma^j\} = 0$ për $i \neq j$.

Përbledhtazi:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \eta^{\mu\nu} \mathbb{I}_4,$$

ku $\eta^{\mu\nu}$ është metrika e Minkowski-t dhe \mathbb{I}_4 është matrica njësi 4×4 .

Paraqitja e matricave të Dirac-ut

Një nga paraqitjet më të zakonshme është:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ushtrimi 24

Provoni që paraqitja më sipër e matricave të Dirac-ut plotëson

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \eta^{\mu\nu} \mathbb{I}_4.$$

Zgjidhjet e ekuacionit të Dirac-ut në prehje

Funksioni valor ψ quhet spinor i Dirac-ut dhe ka 4 komponente:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Në prehje ($\vec{p} = 0 \Rightarrow \nabla\psi = 0$), kemi:

$$(i\gamma^0 \partial_t - m)\psi = 0$$

që jep:

$$i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \psi_1 \\ \partial_t \psi_2 \\ \partial_t \psi_3 \\ \partial_t \psi_4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Zgjidhjet e ekuacionit të Dirac-ut

- Për grimcën ($E = +m$) dhe antigrimcën ($E = -m$):

$$\partial_t \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = -i m \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \partial_t \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = +i m \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

- Në një bazë të përshtatshme, zgjidhjet mund të zgjidhen si:

- **Për grimcën me spin lart/poshtë:**

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt};$$

- **Për antigrimcën me spin lart/poshtë:**

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt}.$$

Ekuacioni në hapësirën e impulsit

Ekuacioni i Dirac-ut për grimcën e lirë:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0, \quad p^2 = m^2.$$

Në prehje:

$$p^\mu = (E, \mathbf{0}), \quad E = \pm m.$$

Në paraqitjen e Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Kjo jep 2 zgjidhje me $E = +m$ dhe 2 me $E = -m$ (katër gjendje të pavarura).

Zgjidhjet e lira, valët plane

Kërkojmë $\psi(x) = u(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}$, nga ekuacioni Dirac përftojmë $(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$. Duke shkruar

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix},$$

marrim ekuacionet e çiftuara:

$$\begin{cases} (E - m)u_A - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_B = 0, \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_A - (E + m)u_B = 0. \end{cases}$$

Prej këtyre:

$$u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} u_A.$$

Spinorët e Grimcës dhe Antigrimcës

Normalizimi relativist:

$$u^\dagger u = 2E, \quad v^\dagger v = 2E.$$

Spinorët e grimcës (u):

$$u^{(s)}(\mathbf{p}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Spinorët e antigrimcës (v):

$$v^{(s)}(\mathbf{p}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \eta^{(s)} \\ \eta^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Dy $u \rightarrow$ gjendje elektronike; dy $v \rightarrow$ gjendje pozitroni.

Konjugimi i Ngarkesës

Ekuacioni me bashkëveprim elektromagnetik:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu.$$

Përcaktojmë spinorin e konjuguar:

$$\psi^c = C \bar{\psi}^T,$$

me kushtin

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T.$$

Atëherë ψ^c kënaq:

$$(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi^c = 0, \quad D'_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu,$$

→ grimcë me ngarkesë të kundërt (antigrimcë).

Heliciteti

Operatori i Helicitetit

Spin-i Dirac:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

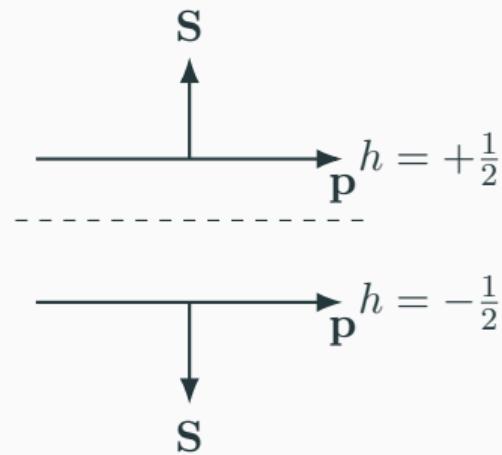
Heliciteti:

$$h = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad h = \pm \frac{1}{2}.$$

RH: $h = +\frac{1}{2}$ (spin paralel me impulsin)

LH: $h = -\frac{1}{2}$ (spin antiparalel).

Heliciteti: Vizualizim Konceptual



Gjendjet e Helicitetit të Dirac-ut

Kërkojmë:

$$h u_h(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p}|} u_h = \lambda u_h, \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

Pauli-spinorët:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \chi_h = (2\lambda) \chi_h.$$

Zgjidhet relativiste:

$$u_h(\mathbf{p}) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi_h \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi_h \end{pmatrix}.$$

Pariteti i Brendshëm i Spinorëve

Transformimi i paritetit:

$$(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t, -\mathbf{x}), \quad \psi'(t, \mathbf{x}') = \gamma^0 \psi(t, \mathbf{x}).$$

Në pushim:

$$P u(\mathbf{0}) = \eta_P u(\mathbf{0}),$$

ku η_P është **pariteti i brendshëm**.

Konventa:

$$\eta_P(\text{grimca}) = +1 \quad \Rightarrow \quad \eta_P(\text{antigrimca}) = -1.$$

Dirac: Densiteti dhe Rryma

Ekuacioni i Dirac-ut:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

Me spinorin e adjoint:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0,$$

merret rryma me katër-komponente:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \partial_\mu j^\mu = 0.$$

Komponenta kohore:

$$j^0 = \bar{\psi} \psi > 0,$$

gjithmonë pozitive → zgjidh problemin e KG.

Rryma hapësinore:

$$\mathbf{j} = \bar{\psi} \boldsymbol{\alpha} \psi, \quad \alpha^i = \gamma^0 \gamma^i.$$

Përbledhje e ekuacionit të Dirac-ut

- Jep në mënyrë të bashkuar zgjidhjet për fermionin dhe antifermionin me masë.
- Integron natyrshëm gradët e lirisë së spinit.
- Në limitin $m \rightarrow 0$, ekuacioni i Dirac-ut ndahet në dy ekuacione të Weyl-it (një përkomponetën e majtë dhe një përtë djathtën).
- Funksioni valor është një spinor 4-komponentësh, pra ekuacioni i Dirac-ut përfaqëson katër ekuacione të ndërlidhura.

Përbledhje

- Ekuacioni i Dirac-ut ka katër zgjidhje të pavarura $\{u^{(s)}, v^{(s)}\}$.
- $u = \text{grimcë me energji pozitive}$; $v = \text{antigrimcë me energji pozitive}$.
- Densiteti probabiliteti: $j^0 = \psi^\dagger \psi > 0$ gjithmonë.
- Helikiteti është madhësi kyçë për grimcat relativiste me spin $1/2$.
- Pariteti: $\psi'(x') = \gamma^0 \psi(x) \rightarrow$ përcakton paritetin e brendshëm.