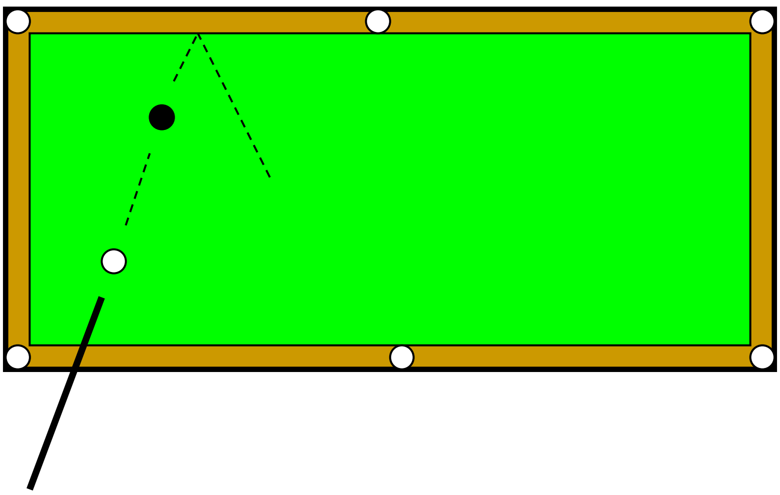
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ Φ.Π.Ψ.

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Θεωρία, Πράξη και Αξιολόγηση
του
Εκπαιδευτικού Έργου

Η κρυφή Γεωμετρία του μπιλιάρδου: Σενάριο παιδαγωγικής αξιοποίησης του εκπαιδευτικού λογισμικού ‘The Geometer’s Sketchpad’



Ελισάβετ Καλογερία,
Α.Μ.: 240016

Κατεύθυνση: Σύγχρονες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση

Εργασία Γ΄ Εξαμήνου, Φεβρουάριος 2006

Μάθημα: Αξιολόγηση, Σχεδιασμός και Ανάπτυξη Εκπαιδευτικών Σεναρίων Βασισμένων στις Σύγχρονες Τεχνολογίες

Διδάσκουσα: Δρ. Νικολέτα Γιαννούτσου

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

Σκοπός της εκπαίδευσης στην Κοινωνία της Πληροφορίας, είναι να καλλιεργήσει στους αυριανούς πολίτες νοητικές ικανότητες δόμησης της γνώσης, συνεργασίας και παραγωγικότητας σε πλαίσια που να έχουν νόημα γι' αυτούς και να διαμορφώσει ανθρώπους ικανούς να «μαθαίνουν», να θέτουν ενεργητικά στόχους, να κρίνουν και επιλέγουν πληροφορίες αλλά και τις χρησιμοποιούν αποτελεσματικά. Το κέντρο βάρους της εκπαιδευτικής διαδικασίας μετατοπίζεται από την δυνατότητα πρόσβασης στη «γενική γνώση» προς την «ικανότητα μάθησης» (Κυνηγός, 1995) που απαιτεί ορθολογική, αναλυτική και αφαιρετική σκέψη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια στο συλλογισμό, δυνατότητες πρόβλεψης ή εικασίας, ανάπτυξη παρατηρητικότητας, προσοχής και αυτοσυγκέντρωσης, ικανότητα διαμόρφωσης κρίσης, λογικής σκέψης, γενίκευσης και αναγνώρισης λογικών σχέσεων μεταξύ ανεξάρτητων γεγονότων (Τουμάσης, 2002).

Οι απαιτήσεις αυτές που σκιαγραφούν τα χαρακτηριστικά του πολίτη του 21ου αιώνα φέρνουν *τα Μαθηματικά στο κέντρο του ενδιαφέροντος*, *καθώς η μάθησή τους μπορεί να αναβαθμίσει την ποιότητα των διεργασιών της σκέψης* *και να καλλιεργήσει πολύτιμες μεθοδολογικές ικανότητες και δεξιότητες*, που αναμένεται να λειτουργήσουν άμεσα ή έμμεσα και σε κάποιες άλλες σχετικές περιοχές ή να μεταφερθούν σε άλλες καταστάσεις στην ενήλικη ζωή (Καραγεώργος, 2000). Η Ε.Ε. αναγνωρίζοντας τη σπουδαιότητα των Μαθηματικών, συνέστησε στα κράτη – μέλη της «*τη χρήση πιο αποτελεσματικών και ελκυστικών τρόπων διδασκαλίας, που να συνδέουν τη μάθηση με τις εμπειρίες της πραγματικής ζωής, την επαγγελματική ζωή και την κοινωνία συνδυάζοντας την εντός της αίθουσας διδασκαλία με κατάλληλες δραστηριότητες εκτός του Προγράμματος Σπουδών*» (Europa, 2003).

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με γνώμονα το ρόλο που καλείται να παίξει η μάθηση των Μαθηματικών στην απόκτηση και διαμόρφωση διανοητικών γνωρισμάτων απαραίτητων στον πολίτη της Κοινωνίας της Πληροφορίας, λαμβάνοντας υπόψη τις σύγχρονες αντιλήψεις της Διδακτικής Μαθηματικών, κάποια από τα προβλήματα της διδασκαλίας τους και έχοντας συγκεκριμένους διδακτικούς, αλλά και ευρύτερους παιδαγωγικούς στόχους. Οι μαθητές μέσα από την εξερεύνηση με χρήση του Sketchpad των κρυμμένων Μαθηματικών του μπιλιάρδου, αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητά τους και τα συνδέουν με παιγνιώδη τρόπο με δραστηριότητες της καθημερινής ζωής, αλλά και με άλλα διδακτικά αντικείμενα όπως τη Φυσική.

2. Θεωρητική θεμελίωση

2.1 Ενσωμάτωση σύγχρονων τάσεων της Διδακτικής Μαθηματικών

Η βελτίωση της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών, υπήρξε το αντικείμενο πολλών θεωριών αλλά και ερευνητικών προσπαθειών, αλλάζοντας κατά καιρούς το περιεχόμενο και τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης, η εξέλιξη της οποίας - όπως ιστορικά αποδεικνύεται - επηρεάζεται από τις τρέχουσες κοινωνικές και πολιτικοοικονομικές συνθήκες και διαμορφώνεται με βάση τον τρόπο θέασης του τρίπτυχου: μαθητής - μαθηματική επιστήμη - σχέση με τις άλλες επιστήμες (Καλαβάσης, 2001).

Την τελευταία δεκαετία του 20^{ου} αιώνα οι παραδοσιακές διδακτικές πρακτικές αμφισβητήθηκαν έντονα παγκοσμίως, έχοντας ως ισχυρά τεκμήρια αξιόλογες ερευνητικές προσπάθειες που αποδείκνυαν πως η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών είναι μια ***κοινωνικοπολιτισμική δραστηριότητα κατασκευής της γνώσης*** και όχι μια διαδικασία μεταφοράς της από τον εκπαιδευτικό προς τον μαθητή, ούτε επίλυση προβλημάτων με αλγοριθμικό τρόπο, χωρίς την παραμικρή κριτική τους θεώρηση (Μπαρκάτσας, 2003). Η άποψη αυτή συνθέτει δυο διαφορετικές θεωρητικές σχολές που απορρέουν από τις γνωστικές θεωρίες των Piaget που εστιάζει στο άτομο, το οποίο θεωρεί ως κατασκευαστή της γνώσης και Vygotsky, που δίνει έμφαση στην κοινωνική και πολιτισμική προέλευση της γνώσης, υπογραμμίζοντας την άμεση επίδραση του περιβάλλοντος στη διαδικασία απόκτησης γνώσης από το άτομο (Κολέζα, 2000).

Συστατικά στοιχεία του περιεχομένου και των μεθόδων διδασκαλίας είναι μεταξύ άλλων η ανάσυρση και μαθησιακή αξιοποίηση των ατομικών βιωμάτων και εμπειριών, η ένταξή τους σε συγκεκριμένες καταστάσεις – προβλήματα που επιλύονται με Μαθηματικά, η εξοικείωση και λειτουργική χρήση της σύγχρονης μαθηματικής και μαθηματικοποιημένης γλώσσας, η ανακάλυψη των Μαθηματικών που ενυπάρχουν στις σύγχρονες κοινωνικές δομές, μηχανισμούς και πληροφοριακά συστήματα (Καλαβάσης, 2001). Οι εσωτερικές διαδικασίες της σκέψης των μαθητών έχουν πολύ μεγαλύτερη σημασία για το δάσκαλο από ότι η εξωτερικά παρατηρήσιμη συμπεριφορά, η επικοινωνία στην τάξη δεν εξυπηρετεί την μεταφορά γνώσεων από τον δάσκαλο στους μαθητές, αλλά επιτρέπει την διαπραγμάτευση των μαθηματικών νοημάτων και τα λάθη των μαθητών δεν αποτελούν ανεπιθύμητες συμπεριφορές, αλλά βασικό εργαλείο στην προσπάθεια του δασκάλου να κατανοήσει την μαθηματική συμπεριφορά των μαθητών του (Μπούφη, 1996).

Έτσι, στο κατώφλι του 21ου αιώνα, παρατηρείται μια έμφαση *στις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος*, *στην αξιοποίηση της τεχνολογίας του ηλεκτρονικού υπολογιστή για τη διδακτική πράξη*, *σε διαθεματικές – διεπιστημονικές προσεγγίσεις* *και στη δημιουργία θετικών στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά*, θέματα που θα αναλυθούν διεξοδικότερα παρακάτω.

2.1.1 Επίλυση προβλήματος - μοντελοποίηση

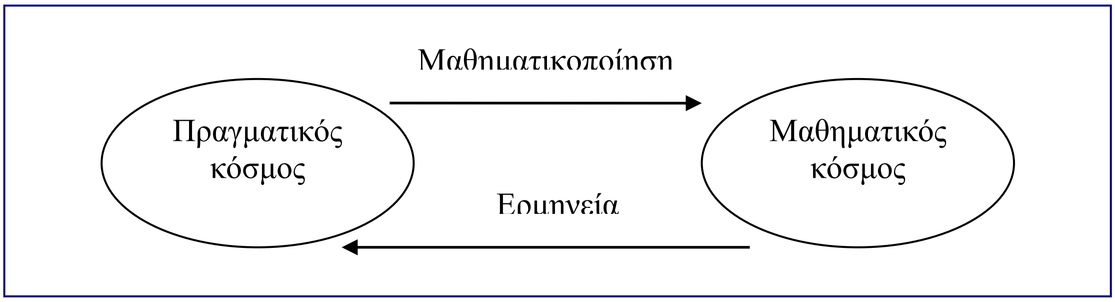
Ένα από τα βασικά ζητούμενα της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι η ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης των μαθηματικών εννοιών και μεθόδων ως μέσων κατανόησης, οργάνωσης και χειρισμού του περιβάλλοντος και των προβλημάτων του, γι’ αυτό το λόγο η επίλυση προβλημάτων πρέπει να αποτελεί το κέντρο ενδιαφέροντος ενός προγράμματος σπουδών Μαθηματικών γύρω από το οποίο οργανώνεται η διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών (ΥΠ.Ε.Π.Θ., 1997). Στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος εμπλέκονται τρία αλληλοσυνδεόμενα σύνολα παραγόντων: α) Εμπειρίας (προσωπικοί και περιβάλλοντος), β) Συναισθηματικοί (ενδιαφέρον, κίνητρο, αγωνία, υπομονή, επιμονή, αμφιβολία, φόβος κ.ά.) γ) Γνωστικοί (ικανότητα ανάγνωσης, κατανόησης, ανάλυσης, σύνθεσης, μνήμη, λογική, υπολογιστικές δεξιότητες, κ.ά.) (Καραγεώργος, 2000).

Μέσα από την αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων αναπτύσσεται ο επιστημονικός τρόπος σκέψης, δηλαδή: προσδιορισμός προβλήματος, εικασία για το αποτέλεσμα, πειραματισμός με τη βοήθεια παραδειγμάτων, σύνθεση συλλογισμού, διατύπωση λύσης, έλεγχος αποτελεσμάτων και αξιολόγηση ορθότητας σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα (ΥΠ.Ε.Π.Θ., 1997).

Η πραγματικότητα και τα Μαθηματικά είναι δυο ξεχωριστοί κόσμοι, οι οποίοι μπορούν να συνδεθούν με τη βοήθεια της ***μοντελοποίησης***: Οι Davis & Hersh, ορίζουν ως μαθηματικό μοντέλο οποιοδήποτε πλήρες και συνεπές σύνολο μαθηματικών δομών, που έχει σχεδιαστεί να ανταποκρίνεται σε κάποια άλλη οντότητα, το πρότυπό του, που μπορεί να είναι φυσικό, βιολογικό, κοινωνικό, ψυχολογικό, μια αφηρημένη οντότητα, ή κάποιο άλλο μαθηματικό μοντέλο. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούμε τόσο στα Μαθηματικά, όσο και στη Φυσική, επειδή δεν μπορούν να ανταποκριθούν απολύτως σε ένα πραγματικό αντικείμενο που παρατηρείται σε έναν ιδιαίτερο χώρο και χρόνο, συνήθως περιέχουν εξιδανικεύσεις ή απλουστεύσεις (Davis, Hersh, 1980).

Η σπουδαιότερη λειτουργία ενός μοντέλου είναι να γεννά (να παράγει) και να αναπαριστάνει ένα απεριόριστο πλήθος ιδιοτήτων, ξεκινώντας από έναν περιορισμένο αριθμό στοιχείων και κανόνων συνδυασμού τους. Ένα μοντέλο είναι ένας τρόπος αναπαράστασης, αλλά μια αναπαράσταση δεν είναι μοντέλο αν δεν έχει τον παραπάνω γενεσιουργό και ευρετικό χαρακτήρα, καθώς πρέπει να οδηγεί από το αρχικό σύστημα που αναπαριστά, σε νέες πληροφορίες σχετικά με αυτό (Σκοπέτος, 1999).

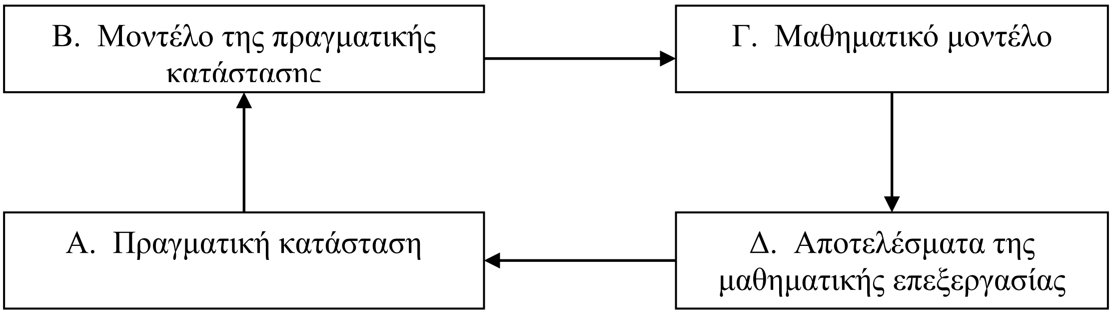
Ο Κλαουδάτος περιγράφει τη διαδικασία της μοντελοποίησης με το παρακάτω διάγραμμα (Κλαουδάτος, 1991):



Ένα πραγματικό πρόβλημα για να λυθεί πρέπει να μετασχηματισθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να έλθει σε κατάλληλη μορφή για μαθηματική επεξεργασία. Η διαδικασία που «μεταφράζει» το πραγματικό πρόβλημα έτσι ώστε να μπορεί να μεταφερθεί στον κόσμο των Μαθηματικών ονομάζεται «***μαθηματικοποίηση***» (Καλαβάσης, Ορφανός, 2004) και έχει δυο μορφές: ***οριζόντια*** και ***κατακόρυφη***. Στην οριζόντια οι μαθητές μετασχηματίζουν το πραγματικό πρόβλημα σε μαθηματικό μετακινούμενοι από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των συμβόλων ενώ στην κατακόρυφη κινούνται μέσα στον κόσμο των συμβόλων, δηλαδή το πρόβλημα λύνεται αποκλειστικά και μόνο με τη βοήθεια των μαθηματικών εργαλείων (αλγόριθμοι, αξιώματα, θεωρήματα, τύποι, κ.ά.).

Στην οριζόντια μαθηματικοποίηση, το πρώτο βήμα που κάνουμε είναι να μετακινηθούμε από τις διαισθήσεις που έχουμε για την πραγματική κατάσταση, σε μια άλλη περιγραφή των στοιχείων και των σχέσεων της κατάστασης αυτής. Αυτό συνήθως γίνεται με τη διαδικασία της ***οπτικοποίησης***, η οποία μπορεί να είναι είτε μια νοητική κατασκευή (***εσωτερική αναπαράσταση***), είτε να καταγραφεί σε κάποιο εποπτικό μέσο, όπως χαρτί, πίνακα, οθόνη Η/Υ (***εξωτερική αναπαράσταση***).

Στη φάση αυτή διατυπώνονται εικασίες, ελέγχονται και διαμορφώνεται η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος για να ακολουθήσει στη συνέχεια η επόμενη φάση της εφαρμογής των τελικών συμπερασμάτων στο πραγματικό πρόβλημα. Θα μπορούσαμε να πούμε πως η μοντελοποίηση είναι μια δραστηριότητα ανακύκλωσης όπου με αφετηρία μια πραγματική κατάσταση μεταφερόμαστε στο άλλο μέρος του σχήματος αναπτύσσοντας τα κατάλληλα Μαθηματικά και στη συνέχεια επιστρέφουμε στην αρχική κατάσταση ερμηνεύοντας ή εφαρμόζοντας τα μαθηματικά αποτελέσματα ή ακόμα κάνοντας πάλι τον κύκλο από την αρχή αν τα αποτελέσματα δεν είναι ικανοποιητικά (Σκοπέτος, 1999). Αναλυτικότερα περιγράφεται με το παρακάτω σχήμα:



Πραγματικός κόσμος Μαθηματικά

2.1.2 Διδακτική αξιοποίηση της τεχνολογίας του ηλεκτρονικού υπολογιστή

Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών βοηθά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην επίλυση προβλήματος, καθώς παρέχει πολλαπλές αναπαραστάσεις τους, δυναμικό χειρισμό τους και δίνει τη δυνατότητα ανακάλυψης της γνώσης μέσα από διερευνητικές διαδικασίες (Φιλίππου, Χρίστου, 2004), παρέχει πρόσβαση στην πληροφορία δίνοντας δυνατότητες αναζήτησης, επισκόπησης και επεξεργασίας της, αλλά και ικανότητες αυτοδιαχείρισης στης μάθηση, αυτενέργεια, εμπλοκή σε αυθεντικές καταστάσεις και προβλήματα, ικανότητα εποικοδομητικής αμφισβήτησης, κριτικής, επικοινωνίας και συνεργασίας, δημιουργία και πειραματισμό (Κυνηγός, Δημαράκη, 2002).

2.1.3 Διαθεματικότητα – διεπιστημονικότητα

Συνδέεται με την ανάπτυξη παιδοκεντρικών Α.Π. που εμπλέκουν τις φυσικές, συναισθηματικές, κοινωνικές και γνωστικές ανάγκες του μαθητή (Ματσαγγούρας, 2002), αλληλοσυσχετίζοντας τα μαθηματικά θέματα μεταξύ τους ή συνδέοντας τα Μαθηματικά με άλλα αντικείμενα του Α.Π., επεκτείνοντας και εφαρμόζοντας τις μαθηματικές γνώσεις τους σε άλλους τομείς και συνδέοντας τα Μαθηματικά με τα ενδιαφέροντα των μαθητών, την εμπειρία τους και την πραγματική ζωή.

Η διεπιστημονική προσέγγιση πηγάζει από μια ευρύτερη επιστημολογική αντίληψη που αναφέρεται στη χρήση της γνώσης και οδηγεί στην αλληλοσυσχέτιση και τον αλληλο-εμπλουτισμό όμορων επιστημονικών κλάδων.

2.1.4 Δημιουργία θετικών στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά

Οι στάσεις τον μαθητών προς τα Μαθηματικά, σύμφωνα με τον Husen (Φιλίππου, Χρίστου, 2001), είναι σχεδόν το ίδιο σημαντικές με τη γνωστική μάθηση στα Μαθηματικά, έτσι λοιπόν προτείνεται η χρήση σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας, όπως είναι η διερευνητική και η συνεργατική, αλλά και η ενασχόληση με δραστηριότητες ελκυστικές, δημιουργικές, χωρίς ανιαρές πράξεις, με τρόπο παιγνιώδη (Φιλίππου, Χρίστου, 2004), χρήση κατάλληλα σχεδιασμένου εκπαιδευτικού διερευνητικού λογισμικού που επιτρέπει στο μαθητή να κάνει λάθη και να μαθαίνει από αυτά (Donaldson, 1995) ώστε να αποτραπούν οι αρνητικοί μαθησιακοί παράγοντες που έχουν να κάνουν με το συναίσθημα με τους οποίους *η ατέλεια γίνεται ταυτότητα* (Papert, 1991).

Παιγνιώδεις δραστηριότητες: Αναπτύσσουν τη μαθηματική επικοινωνία δεδομένου ότι οι μαθητές καταστρώνουν στρατηγικές, εξηγούν και δικαιολογούν τις κινήσεις τους ο ένας στον άλλο. Συμβάλλουν στην ανάπτυξη της γνώσης - καθώς υπάρχουν τα εγγενή μαθηματικά που είναι πάντα παρόντα - μέσα από την δημιουργία θετικού κλίματος, υψηλού επιπέδου ενδιαφέροντος και κινήτρου, που στη συνέχεια παράγουν μια καλύτερη διανοητική στάση απέναντι στα μαθηματικά, παρέχοντας μια μοναδική ευκαιρία για τις γνωστικές, συναισθηματικές και κοινωνικές πτυχές της μάθησης. Εξετάζοντας μερικές από τις ερωτήσεις που οι μαθητές πρέπει να αναρωτηθούν κατά την έναρξη ενός παιχνιδιού, και δίνοντάς τους έναν μαθηματικό τίτλο, παίρνουμε μια καλή ιδέα των υψηλού επιπέδου δεξιοτήτων που εμπλέκονται (BBC, 2006):

Μορφή ερώτησης	**μαθηματικός τίτλος**
Πώς το παίζω αυτό;	ερμηνεία
Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος;	βελτιστοποίηση
Πώς μπορώ να σιγουρευτώ για τη νίκη;	ανάλυση
Τι θα συμβεί εάν...;	παραλλαγή
Ποιες είναι οι πιθανότητες...;	πιθανότητα
Μορφή δήλωσης	**μαθηματική ιδέα**
Αυτό το παιχνίδι είναι ίδιο με...	ισομορφισμός
Μπορείτε να κερδίσετε κάνοντας...	ιδιαίτερη περίπτωση
Αυτό γίνεται σε όλα αυτά τα παιχνίδια…	γενίκευση
Κοιτάξτε, μπορώ να σας δείξω αυτό...	παρουσίαση αποδείξεων
Καταγράφω το παιχνίδι έτσι...	συμβολισμός και σημείωση

2.2 Παιδαγωγικά και διδακτικά προβλήματα αναφοράς του σεναρίου:

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες προσπαθούν να δώσουν απάντηση στα προβλήματα που περιγράφονται παρακάτω:

1. Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση παρουσιάζεται ως ένα ευφυές και πλήρως θεμελιωμένο οικοδόμημα, το οποίο μερικώς διασυνδέεται με πρακτικά θέματα και προβλήματα που συναντάει ο μαθητής στην καθημερινή του ζωή και σε άλλους κλάδους της Επιστήμης, με αποτέλεσμα την μερική μόνο ανάπτυξη γνώσεων και δεξιοτήτων, καθώς οι μαθητές βλέπουν τα Μαθηματικά ως ένα αυστηρά θεωρητικό και μη πρακτικά εφαρμόσιμο μάθημα (Κορρές, Σεφερλής, 2005). Τα προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια επιχειρούν να κάνουν αυτή τη σύνδεση, ωστόσο η επίλυσή τους προέρχεται από μια αυτοματοποιημένη διαδικασία, έχουν ασαφή εκφώνηση, μερικές πληροφορίες που σχετίζονται με τη λύση αναφέρονται στην εκφώνηση και άλλες υπονοούνται, τις περισσότερες φορές έχουν μια μόνο σωστή απάντηση και η λύση τους απαιτεί εξειδικευμένη γνώση εννοιών και κανόνων που συνήθως υπάρχουν στο ίδιο κεφάλαιο με το πρόβλημα (Καλαβάσης, Ορφανός, 2004).

2. Η φύση των Μαθηματικών, με την αλυσιδωτή σειρά των εννοιών, την πυραμιδωτή – παραγωγική ανάπτυξή τους, τη συνοχή και συνεκτικότητά τους, την ειδική

ορολογία και τα αφηρημένα σύμβολα, καθώς και την αυστηρότητα και τον φορμαλισμό τους (Τουμάσης, 2002) αποτελούν προβλήματα σύμφυτα με το αντικείμενο και έχουν ως αποτέλεσμα τη βίωση αποτυχιών, που αυτές με τη σειρά τους οδηγούν στην ανάπτυξη αρνητικών στάσεων απέναντι στη μάθησή τους (Φιλίππου, Χρίστου, 2001).

3. Τα Μαθηματικά και η Φυσική, είναι δυο επιστήμες με παράλληλη πορεία ανάπτυξης, καθώς η οποιαδήποτε εξέλιξη στη μια από αυτές έχει άμεσες συνέπειες και στην άλλη. Αυτή η σχέση αλληλεξάρτησης, ελάχιστα λαμβάνεται υπόψη και υλοποιείται στο σχεδιασμό των Α.Π., στα οποία δεν προβλέπεται καμία συνεργασία μεταξύ αντίστοιχων μαθημάτων και εκπαιδευτικών με σοβαρές συνέπειες στο διδακτικό έργο, αφού είναι δυνατόν Μαθηματικός και Φυσικός να μιλούν στην ίδια τάξη, την ίδια μέρα, για το ίδιο θέμα με διαφορετικές λέξεις, διαφορετικά σύμβολα και διαφορετική διδακτική προσέγγιση, με αποτέλεσμα, οι μαθητές να μην αναγνωρίζουν στο περιεχόμενο της Φυσικής τις «κρυμμένες» μαθηματικές έννοιες, αλλά και αντίστροφα, να μην μπορούν να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις στις έννοιες της Φυσικής (Καραγεώργος, 2000).

4. Ένα ακόμα σημαντικό πρόβλημα σχετίζεται με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, η οποία βοηθά στην ανάπτυξη ικανοτήτων αντίληψης του χώρου και νοερής σύλληψης των αντικειμένων, συνδέει άμεσα τα Μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο και βοηθά στην κατανόηση άλλων αφηρημένων μαθηματικών εννοιών από διαφορετικές περιοχές των Μαθηματικών μέσω της δημιουργίας γεωμετρικών μοντέλων ερμηνείας. Οι μαθητές ενώ αναγνωρίζουν με σχετική ευκολία τα σχήματα, δυσκολεύονται στη μάθηση των ιδιοτήτων των σχημάτων αυτών, στην ειδική ορολογία που τα περιγράφει και στην εφαρμογή της θεωρίας για την επίλυση προβλημάτων (Τουμάσης, 2002).

5. Η έννοια της συμμετρίας, βρίσκει μια ποικιλία εφαρμογών στην καθημερινή ζωή και στις επιστήμες και κατέχει ειδικό ρόλο στην επίλυση προβλήματος. Η συμμετρία συνδέει μεταξύ τους διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών όπως η άλγεβρα, η γεωμετρία, οι πιθανότητες, εντούτοις, χρησιμοποιείται σπάνια στα μαθηματικά δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ως τεχνική επίλυσης προβλήματος (Leikin et al, 2000).

3. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες

3.1 Σκοπός - στόχοι του σεναρίου:

Με βάση τις τάσεις της Διδακτικής Μαθηματικών που ενσωματώνονται στις προτεινόμενες δραστηριότητες και τα διδακτικά και παιδαγωγικά προβλήματα που αναλύσαμε παραπάνω, βασικός σκοπός του σεναρίου θεωρείται ***η ανάδειξη της χρησιμότητας των Μαθηματικών σε προβλήματα της καθημερινής ζωής***, καθώς οι μαθητές μυούνται σε τεχνικές ανακάλυψης κρυμμένων μαθηματικών εννοιών πίσω από αυτά.

1. Η σύνδεση των Μαθηματικών με την καθημερινή ζωή γίνεται μέσα από τη διαδικασία της μοντελοποίησης, η οποία υπηρετεί ένα ευρύ φάσμα παιδαγωγικών στόχων (Νικολουδάκης, Χουστουλάκης, 2005):

1α. Απαιτεί πλήρη *κατανόηση του πραγματικού προβλήματος* το οποίο πρόκειται να μοντελοποιηθεί

1β. Καλλιεργεί *την αφαιρετική σκέψη και την ικανότητα τυποποίησης του προβλήματος*, ώστε να μπορεί να αντιμετωπισθεί με μαθηματικό τρόπο

1γ. *Επιστρατεύει γνώσεις και διαδικασίες από οποιαδήποτε περιοχή των Μαθηματικών*

1δ. Διδάσκει τη *διαδικασία της ανατροφοδότησης*.

2. Η χρήση του Sketchpad σε συνδυασμό με την ύπαρξη μοντέλων έχει τους παρακάτω στόχους:

- ✓ *ενθάρρυνση του πειραματισμού*
- ✓ *ανάπτυξη εικασιών*
- ✓ *ανάπτυξη στρατηγικών*
- ✓ *ανακάλυψη σχέσεων*
- ✓ *αναγνώριση σχέσεων*
- ✓ *πολλαπλές αναπαραστάσεις ενός φαινομένου, μετάβαση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη*
- ✓ *αναστοχασμό*
- ✓ *εμπλουτισμό της διδακτικής εμπειρίας των μαθητών*
- ✓ *μύηση των μαθητών στον επιστημονικό τρόπο σκέψης*.

Παράλληλα, η αξιοποίηση του υπολογιστικού περιβάλλοντος (di Sessa, 2000) θέτει τις βάσεις για την *καλλιέργεια τόσο της αντιληπτικής όσο και της εκφραστικής ικανότητας των μαθητών*. Η βαθύτερη πρόσβαση στο μέσο έκφρασης, τον υπολογιστή, σύμφωνα με τον di Sessa, επιτρέπει στο μαθητή όχι μόνο να αντιληφθεί τι «δουλεύει» σε μια περίπτωση και τι δεν «δουλεύει» σε μια άλλη, αλλά να καταλάβει και το *γιατί συμβαίνει αυτό*.

3. Η σύνδεση Μαθηματικών και Φυσικής επιτυγχάνεται μέσα από την έννοια της συμμετρίας όπου αναδεικνύονται οι αλληλεξαρτήσεις, αλληλεπιδράσεις, διαφοροποιήσεις και εξειδικεύσεις των δυο κλάδων και υλοποιείται ένας σπουδαίος παιδαγωγικός στόχος, αυτός *της ανάδειξης της ενότητας– πολλαπλότητας της γνώσης και των ορίων της*..

4. Η επιλογή του μπιλιάρδου ως πραγματικού προβλήματος, σχετίζεται με το ενδιαφέρον που δείχνουν οι μαθητές για παιγνιώδεις δραστηριότητες και στόχο έχει την *καλλιέργεια θετικών στάσεων για τη μάθηση των Μαθηματικών*.

5. *Η διαθεματική έννοια της συμμετρίας* χρησιμοποιείται ως τεχνική επίλυσης προβλήματος, με άμεσο διδακτικό στόχο την *αναγνώρισή* της από τους μαθητές σε καθημερινές δραστηριότητες, και απώτερο διδακτικό στόχο την *εφαρμογή* και *επέκτασή* της και σε άλλους τομείς. Συνδέει με τη βοήθεια του λογισμικού την Γεωμετρία με την Άλγεβρα και τη Φυσική και οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν την έκβαση ενός φαινομένου μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις του

6. Η συνεργασία σε ομάδες, έχει στόχο την ανάπτυξη *επικοινωνιακών και κοινωνικών δεξιοτήτων, ικανότητας ανάληψης πρωτοβουλιών και λήψης αποφάσεων*. Ταυτόχρονα, οι μαθητές μέσα από τις συζητήσεις τους *επικοινωνούν τις μαθηματικές τους ιδέες και επιχειρηματολογούν για αυτές* (Mariotti, 2000).

3.2 Πρόσθετη αξία από τη χρήση του λογισμικού

Ένα από τα πιο δύσκολα προβλήματα στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι το πώς μπορεί να αναδειχθεί αβίαστα και πειστικά το μεγάλο εύρος εφαρμογών και η χρησιμότητα τους, ώστε οι μαθητές να ανακαλύπτουν «κρυμμένα» Μαθηματικά σε καθημερινές ανθρώπινες δραστηριότητες. Πρόσφατες έρευνες δείχνουν ότι δραστηριότητες σε περιβάλλον λογισμικού που δίνουν τη δυνατότητα πειραματισμού για την κατασκευή και τον έλεγχο μοντέλων, μπορούν να συνεισφέρουν στην αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού (Παπαδόπουλος, 2004). Το Sketchpad αξιοποιεί την ύπαρξη μοντέλου: Η σχέση μοντέλου και πραγματικής κατάστασης είναι αμφίδρομη και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ο τρόπος με τον οποίο ένας μετασχηματισμός του μοντέλου μπορεί να ερμηνευθεί μέσω ενός μετασχηματισμού των παραμέτρων της κατάστασης προβλήματος. Αυτή ακριβώς η διερεύνηση είναι δυνατόν να υλοποιηθεί αποτελεσματικότερα μέσα από τη χρήση λογισμικού, μέσω του οποίου έχει κατασκευασθεί μια προσομοίωση της κατάστασης προβλήματος. Η χρήση του υπολογιστή, εκτός από την οπτικοποίηση, επιτρέπει στον μαθητή *να πειραματισθεί*, *να αναζητήσει ακραίες καταστάσεις του προβλήματος* μέσα από μετρήσεις, συγκρίσεις, δυναμικές αλλαγές ή και παραμορφώσεις των σχημάτων (Κεΐσογλου, 2005α).

Σε σχέση με το παραδοσιακό περιβάλλον «χαρτί – μολύβι – πίνακας» που παρουσιάζουν στατικά τις διάφορες έννοιες, το Sketchpad με την βοήθεια κατάλληλα σχεδιασμένων δραστηριοτήτων, δημιουργεί πολλαπλές *εξωτερικές αναπαραστάσεις δυναμικού χαρακτήρα* με τις οποίες ο μαθητής *οπτικοποιεί άμεσα* το αποτέλεσμα των συλλογισμών του. Η αναπαράστασή τους με εικόνες, παρέχει στο μαθητή το υπόβαθρο για τη δημιουργία *διαισθητικής* κατ' αρχήν γνώσης.

Παράλληλα, αποτελεί ιδανικό χώρο ανάπτυξης μαθηματικών δραστηριοτήτων, για την *προσωπική κατασκευή της γνώσης*, δεδομένου ότι επιτρέπει την *αναγωγή από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο* μέσω εμπράγματων κατασκευών και αναπαραστάσεων (Papert, 1991, 1993). Ο δυναμικός χειρισμός των σχημάτων που πραγματοποιείται με τη λειτουργία του dragging, βοηθά το μαθητή να καταλάβει πως *το σχήμα που μελετά δεν είναι ένα, αλλά στιγμιότυπο μιας κλάσης σχημάτων και οι ιδιότητες που προκύπτουν από τη δυναμική μεταβολή μπορούν να γενικευθούν σε όλα τα σχήματα της κλάσης αυτής*. Καθώς αλλάζει η μορφή ενός γεωμετρικού αντικειμένου, το μέγεθος, ή ο προσανατολισμός, οι μετρήσεις του ενημερώνονται σχεδόν συνεχώς, αλλά όχι συνεχώς. Αυτό επιτρέπει στο μαθητή να διαπιστώσει την *ανάγκη για παραγωγικό συλλογισμό*, καθώς η ανάδυση τάσεων από τα εμπειρικά στοιχεία δεν αποτελεί απόδειξη στα μαθηματικά (Wares, 2004). Επίσης, διατηρεί την εγγενή τους λογική, δηλαδή τη λογική της κατασκευής τους, επιτρέποντας έτσι στο μαθητή να την εξερευνήσει και να την ανακαλύψει, κάτι που σημαίνει τη *μετατόπιση της εστίασης από το σχήμα στη διαδικασία που το παρήγαγε* (Mariotti, 2000).

Ένα ακόμα σημαντικό πλεονέκτημα από τη χρήση του Sketchpad, είναι ότι *ευνοεί τη συγκέντρωση στο συγκεκριμένο προς διδασκαλία στόχο*: επιτρέπει στο μαθητή να αποφεύγει κάποιες άσκοπες και χρονοβόρες ενέργειες που θα έκανε στο παραδοσιακό περιβάλλον χαρτί – μολύβι – πίνακας, διώχνοντας με αυτό τον τρόπο κάθε τι άσχετο προς τον επιδιωκόμενο στόχο (π.χ. όπου δεν μας ενδιαφέρει το σχεδιαστικό κομμάτι λεπτομερειακά αλλά η μελέτη ιδιοτήτων από τους μαθητές, το λογισμικό αναλαμβάνει τη διαδικασία του σχεδιασμού, ή το σχήμα δίνεται έτοιμο) (Δαγδιλέλης, Σατρατζέμη, 1997).

3.3 Διαστάσεις διδακτικής διαχείρισης

Για την εφαρμογή του σεναρίου στην εκπαιδευτική πράξη, είναι σημαντικό να προσδιορισθούν με σαφήνεια οι παρακάτω διαστάσεις διδακτικής διαχείρισης (Δημητρακοπούλου, 2002):

3.3.1. Ετήσιο πλάνο και προγραμματισμός:

Το σενάριο μπορεί να εφαρμοσθεί στο μάθημα της Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου (είτε σε αυτό της Φυσικής), όπου διδάσκεται για πρώτη φορά σε θεωρητικό επίπεδο η έννοια της συμμετρίας. Πιθανός χρόνος διεξαγωγής: Β΄ τετράμηνο. Σε απλουστευμένο επίπεδο μπορεί να εφαρμοσθεί στην Β΄ Γυμνασίου. Πιθανός χρόνος διεξαγωγής: Β΄ Τρίμηνο

Χώρος διεξαγωγής: Εργαστήριο Πληροφορικής

3.3.2. Ένταξη σε πλάνο θεματικής ενότητας:

Το σενάριο εφαρμόζεται μετά την διδασκαλία της συμμετρίας για ολοκλήρωση και σύνθεση, με συνεργασία των καθηγητών Μαθηματικών και Φυσικής.

3.3.3. Χρονοπρογραμματισμός δραστηριοτήτων: διάρκεια - φάσεις

Διάρκεια εφαρμογής (με τις συγκεκριμένες δραστηριότητες): 3-4ώρες.

Α΄ Φάση:

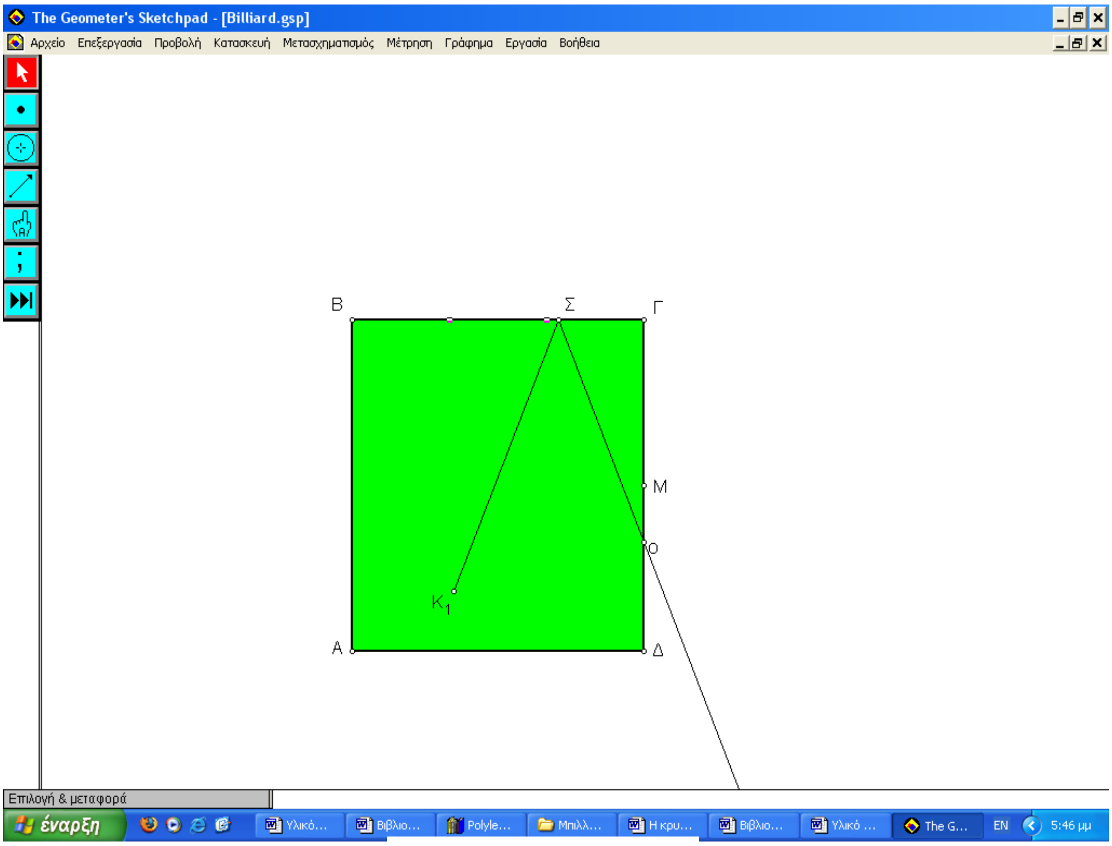
Α) Χωρισμός μαθητών σε ομάδες: Ο καθηγητής ρωτά ποιοι από τους μαθητές γνωρίζουν αμερικάνικο μπιλιάρδο και τους συνιστά να τοποθετηθούν σε διαφορετικές ομάδες για να μπορούν να μεταφέρουν τις γνώσεις τους στους συμμαθητές τους. Καθορίζονται οι (κυλιόμενοι) ρόλοι των μαθητών στις ομάδες (5λεπτά).

Β) Γνωριμία με τους κανόνες του μπιλιάρδου - αφόρμηση: Ο διδάσκων δίνει κάποιες διευθύνσεις στο Internet, μέσω των οποίων οι μαθητές μαθαίνουν τους κανόνες και μπορούν ακόμα και να παίξουν (30-40 λεπτά). Εναλλακτικά, οι μαθητές που παίζουν μπιλιάρδο παρουσιάζουν τις βασικές αρχές, χρησιμοποιώντας τον πίνακα ή/και μολύβι – χαρτί. Στην περίπτωση αυτή, καλό θα ήταν να μοιράσει ο διδάσκων ένα φύλλο χαρτί με τους βασικούς κανόνες (20λεπτά).

Β΄ Φάση:

Διερεύνηση: Η προτεινόμενη διαδικασία διερεύνησης βασίζεται στο μοντέλο του Jonassen για διδασκαλία με χρήση εργαλείων μοντελοποίησης (Κορρές, Σεφερλής, 2005) σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές αρχικά «τρέχουν» και ελέγχουν ένα υπάρχον υπόδειγμα μοντέλου, κάνουν προβλέψεις, παράγουν υποθέσεις και ελέγχουν τις προβλέψεις τους με χρήση του μοντέλου, στη συνέχεια χειρίζονται το υπάρχον μοντέλο, για να δημιουργήσουν αργότερα ένα ομαδικό μοντέλο μιας παρόμοιας κατάστασης, το οποίο ελέγχουν και παρουσιάζουν στην τάξη. Τέλος δημιουργούν τις δικές τους θεωρίες και αναστοχάζονται σχετικά με τη δραστηριότητα.

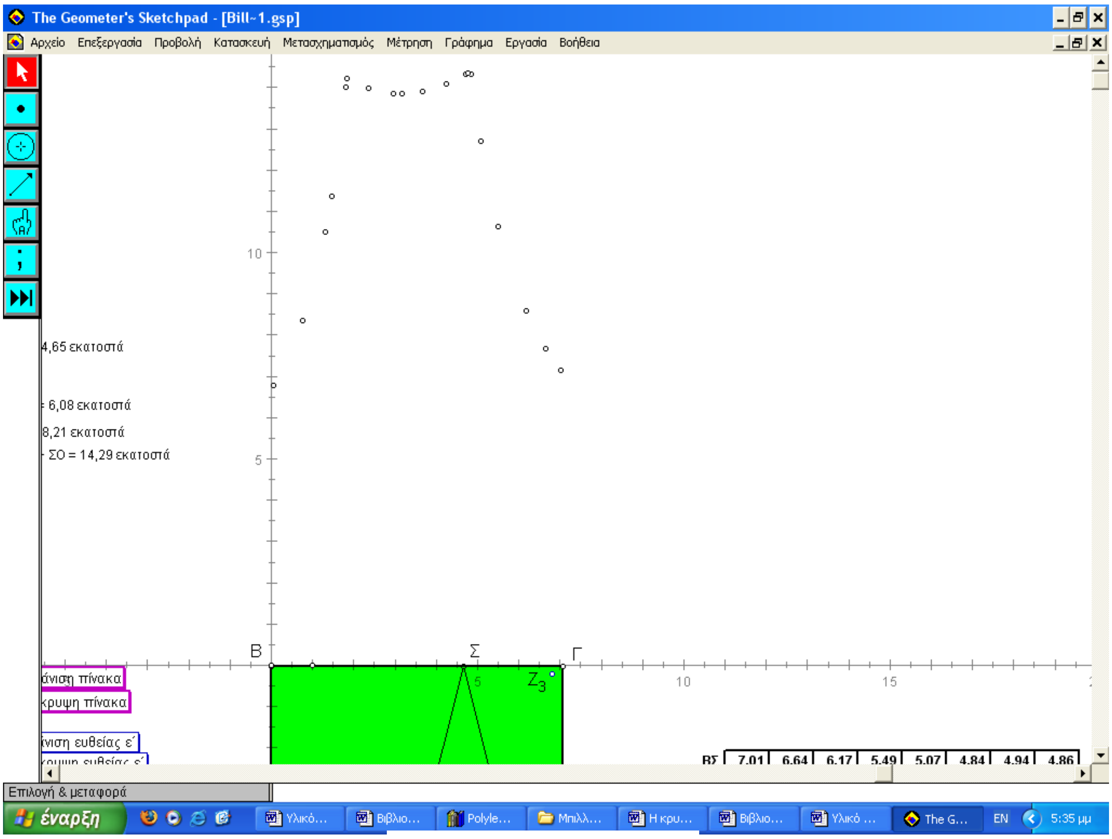
♦ Οι μαθητές ανοίγουν ένα έτοιμο αρχείο στο Sketchpad (σχήμα1), το οποίο προσομοιώνει την πρόσκρουση της μπίλιας σε ένα τοίχωμα του τραπεζιού (σπόντα) και καλούνται με σύρσιμο του σημείου πρόσκρουσης Σ, να βρουν σχέση ανάμεσα στην πορεία της μπίλιας πριν την πρόσκρουση και μετά από αυτήν (νόμος ανάκλασης, σύνδεση Φυσικής με Γεωμετρία) και να διατυπώσουν τα συμπεράσματά τους (10λεπτά).



Σχήμα 1

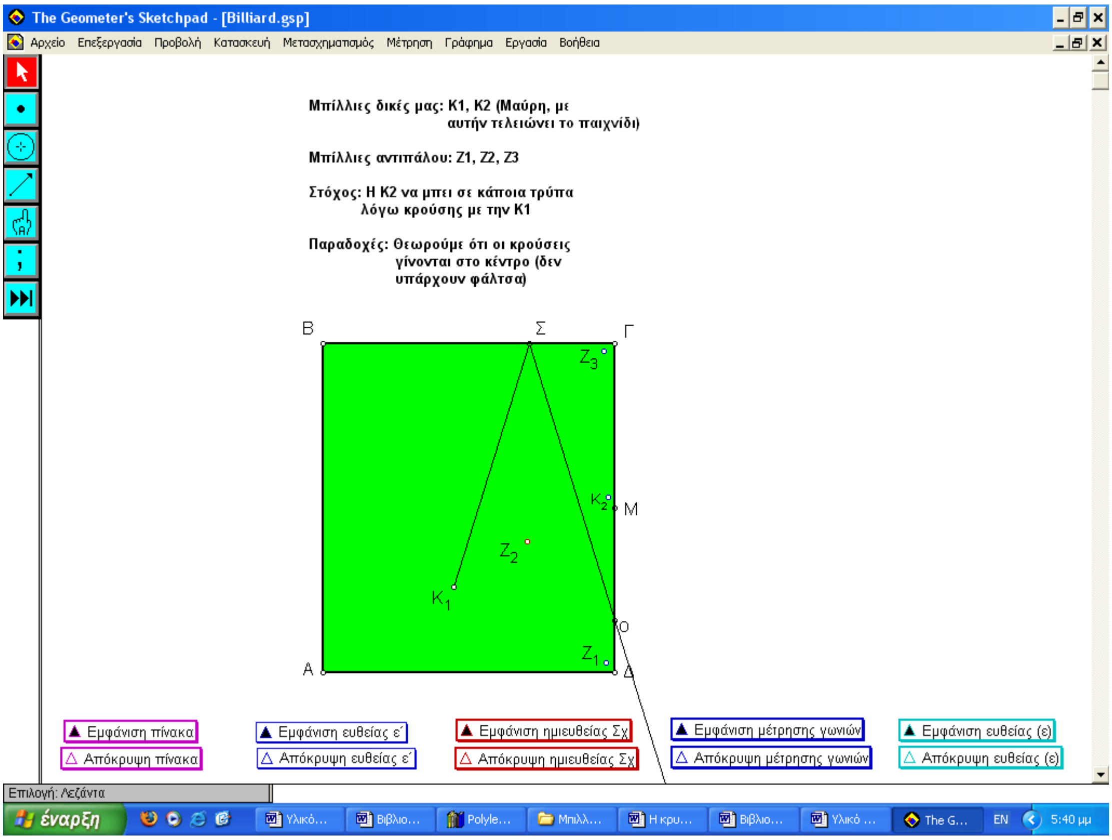
♦ Στη συνέχεια, πρέπει να συνδέσουν τη θέση του Σ στην ΒΓ (ΒΣ ή ΣΓ) με το συνολικό μήκος της διαδρομής που κάνει η μπίλια μέχρι την δεύτερη πρόσκρουση

($K_1\Sigma$+ΣΟ). Πινακοποιούν τα δεδομένα και κατόπιν τα απεικονίζουν σε σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Β (σχήμα2). Με τον τρόπο αυτό αρχίζει να δημιουργείται η εικασία για την ύπαρξη συμμετρίας και η Γεωμετρία συνδέεται με την Άλγεβρα (15λεπτά).



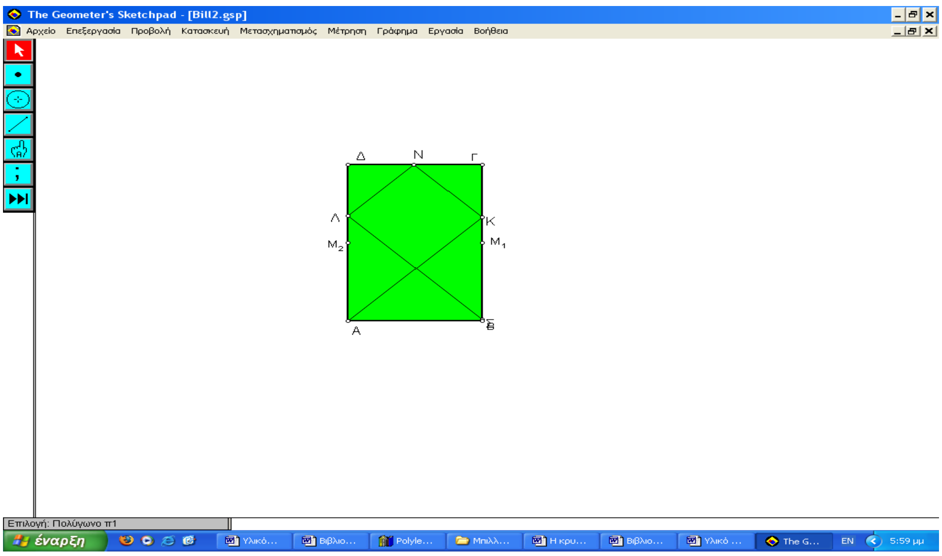
Σχήμα 2

♦ Οι μαθητές πρέπει να επιλύσουν ένα πρόβλημα: Ανοίγουν ένα έτοιμο αρχείο στο Sketchpad, που αποτυπώνει ένα στιγμιότυπο του παιχνιδιού (σχήμα3). Στο πάνω μέρος της οθόνης αναγράφονται οι παραδοχές – απλουστεύσεις που ίσχυσαν για την κατασκευή του μοντέλου. Οι μπίλιες τόσο του μαθητή, όσο και του υποτιθέμενου αντιπάλου έχουν συγκεκριμένες θέσεις και βεβαίως συγκεκριμένες είναι και οι θέσεις που έχουν οι τρύπες που μπορεί να ρίξει ο μαθητής τη μπίλια του. Οι μαθητές πρέπει να αποφασίσουν ποια πορεία θα επιλέξουν για να ρίξουν την μπίλια τους σε τρύπα και να κερδίσουν. Καταγράφουν τα σταθερά και τα μεταβλητά στοιχεία του μοντέλου και μετά τον έλεγχο του dragging ενεργοποιούν εκείνα τα εργαλεία του λογισμικού, που τους βοηθούν να εντοπίσουν το σημείο στο οποίο πρέπει η μπίλια να κάνει σπόντα. Στο κάτω μέρος της οθόνης δίνονται διάφορα κουμπιά – βοήθειες, που αν θέλει ο διδάσκων μπορεί να συστήσει στους μαθητές να χρησιμοποιούν για διαδοχικές βοήθειες (καλό θα ήταν να μην υπάρχουν). Τέλος πρέπει να καταγράψουν τα συμπεράσματά τους και να τα στοιχειοθετήσουν (20λεπτά).

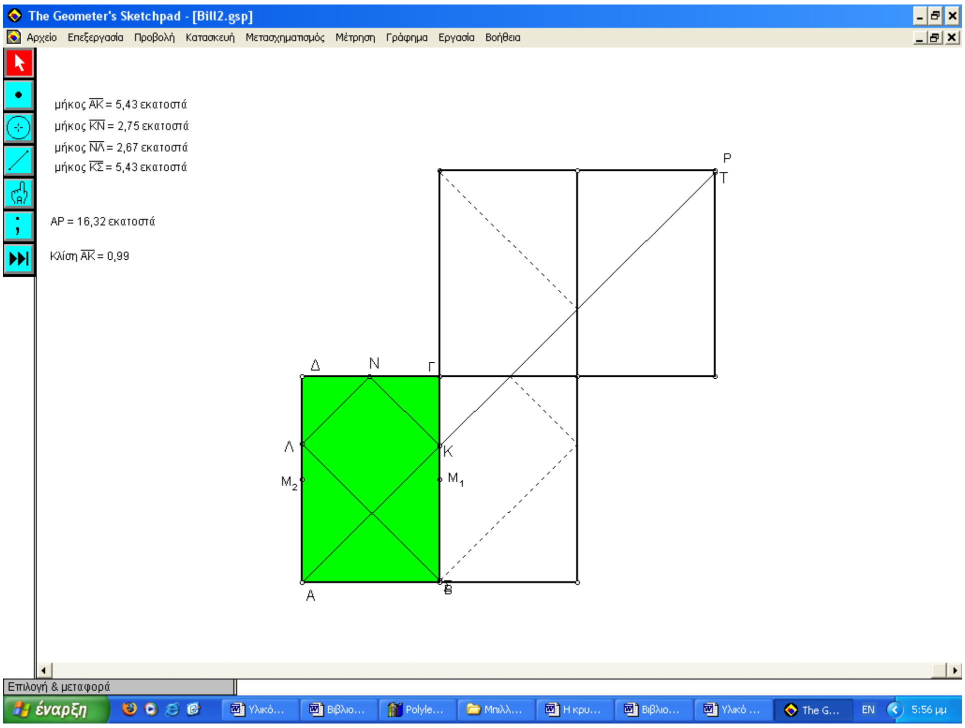


Σχήμα 3

♦ Οι μαθητές πρέπει να επιλύσουν ένα δεύτερο πρόβλημα: Ανοίγουν ένα έτοιμο αρχείο, στο οποίο έχει αποτυπωθεί ενδεικτικά η πορεία μιας μπίλιας μετά από 3 σπόντες (σχήμα4). Αν η αρχική θέση της μπίλιας είναι συγκεκριμένη (θέση Α), ζητάμε από τους μαθητές να εντοπίσουν για ποιο μήκος της διαδρομής της η μπίλια πέφτει στην τρύπα Β, να το διατυπώσουν και να το αποδείξουν (σχήμα5), (20λεπτά).



Σχήμα 4



Σχήμα 5

♦ Οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν ένα δικό τους πρόβλημα: Το αποτυπώνουν στο Sketchpad, το διατυπώνουν, επιλέγουν στρατηγική επίλυσης, πειραματίζονται και καταλήγουν σε συμπεράσματα (1ώρα).

Γ΄ Φάση:

Ανακοίνωση εργασιών ομάδων: Τα μέλη της κάθε ομάδας παρουσιάζουν στις υπόλοιπες την εργασία τους και εκφράζουν τις απόψεις τους (30λεπτά).

Κλείσιμο εργασιών – επέκταση σεναρίου: Ο καθηγητής ζητά από τους μαθητές να περιγράψουν τι καινούριο έμαθαν και αν μπορούν να το επεκτείνουν και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών ή της Φυσικής. (10λεπτά).

3.4 Ρόλος καθηγητή:

Με τη χρήση μοντέλων ο καθηγητής μπορεί να κινητοποιήσει τους μαθητές του, να αλλάξει τη στάση τους απέναντι στα Μαθηματικά, να τους βοηθήσει να υπερβούν συγκεκριμένα διδακτικά εμπόδια και να απαντήσουν στο ερώτημα γιατί διδάσκονται τα Μαθηματικά (Νικολουδάκης, Χουστουλάκης, 2005).

Με τις παιγνιώδεις δραστηριότητες του παρέχεται η δυνατότητα καθιέρωσης στην τάξη κλίματος που ενθαρρύνει τον πειραματισμό και την εικασία, συνεπώς ευνοείται η οριζόντια μαθηματικοποίηση (Κεΐσογλου, 2005β).

Η εστίαση πρέπει να γίνεται στις γνωστικές διαδικασίες και όχι στην ακρίβεια των τελικών αποτελεσμάτων. Η διαδικασία μέσα από την οποία επιτυγχάνονται οι "λανθασμένες" απαντήσεις πρέπει να εκτιμηθεί όσο αυτή που παράγει τις "σωστές". Ο δάσκαλος παίζει σημαντικό ρόλο στην ενθάρρυνση των μαθητών και τους βοηθά να εξηγήσουν τις σκέψεις τους ώστε μέσα από αυτές να αναδυθούν οι μαθηματικές τους ιδέες.

Με τη χρήση του Sketchpad μπορεί να γεφυρώσει την προηγούμενη εμπειρία των μαθητών με την "αποδοτική" χρήση του λογισμικού, χρησιμοποιώντας το ως πλατφόρμα για να προωθήσει μια διαδικασία έρευνας (Santos, Perez, 2002). Πρέπει να είναι έτοιμος να δημιουργήσει και να διαχειριστεί τις ανοικτές καταστάσεις που μετασχηματίζονται συνεχώς και των οποίων δεν μπορεί πάντα να προβλέψει την εξέλιξη. Αυτές οι καταστάσεις είναι ευαίσθητες στις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις που προκύπτουν από την εργασία γύρω από τον υπολογιστή σε ομάδες, από τις τοποθετήσεις των μαθητών, τις αντιδράσεις, τη δυνατότητά τους να υποβάλουν ερωτήσεις, ως εκ τούτου ο δάσκαλος πρέπει να είναι σε θέση να τροποποιήσει τους στόχους του περιεχομένου του μαθήματος, άρα πρέπει να αισθάνεται πολύ ισχυρός σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο της δραστηριότητας (Bonotto, Basso, 2001).

3.5 Δυνατότητες επέκτασης

Αντικαθιστώντας το μπιλιάρδο και τις σπόντες με καθρέπτες, αναδεικνύουμε το φαινόμενο της ανάκλασης στη Φυσική, όπου το ρόλο των συμμετρικών θέσεων της μπίλιας ως προς την σπόντα αναλαμβάνουν τα φανταστικά είδωλα ενός αντικειμένου στο κάτοπτρο (αριθμός και θέση ειδώλων σε επίπεδα κάτοπτρα).

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Δαγδιλέλης, Β., Σατρατζέμη, Μ., (1997), «Το εκπαιδευτικό λογισμικό για τη στήριξη της διδασκαλίας: Η περίπτωση του Project Πυθαγόρας», στο Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα, «Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση», Αθήνα, Πνευματικός, σ.79-82

Δημητρακοπούλου, Α., (2002), «Διαστάσεις διδακτικής διαχείρισης των εκπαιδευτικών εφαρμογών των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας: Προς μια ολοκληρωμένη αξιοποίησή τους στην εκπαίδευση», στο Κυνηγός, Χ., Δημαράκη, Ε., (επιμ.), «Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά μέσα», Αθήνα, Καστανιώτης, σ.74-80

Ε.Μ.Ε., (1999), Πρακτικά 16ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Λάρισα, Ε.Μ.Ε.

Ε.Μ.Ε., (2001), Πρακτικά 18ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ρόδος, Ε.Μ.Ε.

Ε.Μ.Ε., (2003), Πρακτικά 20ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Βέροια, Ε.Μ.Ε.

Ε.Μ.Ε., (2004), Πρακτικά 21ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Τρίκαλα, Ε.Μ.Ε.

Ε.Μ.Ε., (2005), Πρακτικά 22ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Λαμία, Ε.Μ.Ε.

Καζαμίας, Α., Κασσωτάκης, Μ., (1995), «Ελληνική Εκπαίδευση: προοπτικές ανασυγκρότησης και εκσυγχρονισμού», Αθήνα, Σείριος

Καλαβάσης, Φ., Μεϊμάρης, Μ., (επιμ.) (1991), «Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ», Αθήνα, Gutenberg

Καλαβάσης, Φ., (2001), «Μαθηματικός αλφαβητισμός: Η προσπάθεια μαθηματικής συγκρότησης όλου του πληθυσμού και ανάπτυξης ικανοτήτων χρήσης των μαθηματικών από τον κάθε μαθητή – πολίτη», στο Ε.Μ.Ε., Πρακτικά 18ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ρόδος, Ε.Μ.Ε., σ.40

Καλαβάσης, Φ., Ορφανός, Σ., (2004), «Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών και ΤΠΕ στην υπηρεσία του Μαθηματικού Αλφαβητισμού», στο Μπαρκάτσας, Α., «Τα Μαθηματικά στην εποχή των ΤΠΕ», Χαλκίδα, Κωστόγιαννος, σ.96-100

Κεΐσογλου, Σ., (2003), «Η μετάβαση του μαθητή από τη φυσική εμπειρία στην επινόηση μαθηματικών εννοιών με τη χρήση υπολογιστικών εργαλείων», στο

Ε.Μ.Ε., Πρακτικά 20ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Βέροια, Ε.Μ.Ε., σ.168

Κεΐσογλου, Σ., (2005α), «Μαθηματικά Μοντέλα της Οπτικής μας Αντίληψης. Μια Παιδαγωγική Προσέγγιση με τη Χρήση Υπολογιστικών Εργαλείων», στο Ε.Μ.Ε., Πρακτικά 22ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Λαμία, Ε.Μ.Ε., σ.226

Κεΐσογλου, Σ., (2005β), «Ο ρόλος φυσικών και υπολογιστικών εργαλείων σε διαδικασίες μαθηματικοποίησης», στο Κυνηγός, Χ., (επιμ.),, (2005), Πρακτικά 1ου Συνεδρίου Εν.Ε.Δι.Μ., «Η Διδακτική Μαθηματικών ως Πεδίο Έρευνας στην Κοινωνία της Γνώσης», Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα, σ.439-448

Καραγεώργος, Δ., (2000), «Το Πρόβλημα και η επίλυσή του», Αθήνα, Σαββάλας, σ.37,132-135

Κλαουδάτος, Ν., (1991), «Η μοντελοποίηση στη Διδακτική Πράξη» στο Καλαβάσης, Φ., Μεϊμάρης, Μ., (επιμ.) «Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ», Αθήνα, Gutenberg

Κολέζα, Ε., «Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών», Αθήνα, Leader Books, σ.2,38,258,267

Κορρές, Κ., Σεφερλής, Σ., (2005), «Διδασκαλία Μαθηματικών εννοιών με τη χρήση εργαλείων Μοντελοποίησης Συστημάτων», στο Ε.Μ.Ε., Πρακτικά 22ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Λαμία, Ε.Μ.Ε., σ.327-328

Κυνηγός, Χ., (1995), «Η ευκαιρία που δεν πρέπει να χαθεί: Η υπολογιστική τεχνολογία ως εργαλείο έκφρασης και διερεύνησης στη γενική παιδεία», στο Καζαμίας,, Α., Κασσωτάκης, Μ., «Ελληνική Εκπαίδευση: προοπτικές ανασυγκρότησης και εκσυγχρονισμού», Αθήνα, Σείριος, σ.396-416

Κυνηγός, Χ., **Δημαράκη, Ε.,** επιμ. (2002), «Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά μέσα», Αθήνα, Καστανιώτης

Κυνηγός, Χ., **Δημαράκη, Ε.,** (2002), «Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά μέσα: Παιδαγωγικά αξιοποιήσιμες εφαρμογές των νέων τεχνολογιών στη γενική παιδεία» στο Κυνηγός, Χ., Δημαράκη, Ε., επιμ. «Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά μέσα», Αθήνα, Καστανιώτης, σ.18-20

Κυνηγός, Χ., (επιμ.),, (2005), Πρακτικά 1ου Συνεδρίου Εν.Ε.Δι.Μ., «Η Διδακτική Μαθηματικών ως Πεδίο Έρευνας στην Κοινωνία της Γνώσης», Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα

Ματσαγγούρας, Η., (1996), «Η Εξέλιξη της Διδακτικής. Επιστημολογική θεώρηση», Αθήνα, Gutenberg

Ματσαγγούρας, Η., (2002), «Η Διαθεματικότητα στη σχολική γνώση», Αθήνα, Γρηγόρης, σ.25

Μπαρκάτσας, Α., (2003), «Σύγχρονες Διδακτικές και Μεθοδολογικές Προσεγγίσεις στα Μαθηματικά του 21ου αιώνα», Χαλκίδα, Κωστόγιαννος

Μπούφη, Α., (1996), «Επιστημολογία και Διδακτική των Μαθηματικών», στο Ματσαγγούρας, Η., «Η Εξέλιξη της Διδακτικής. Επιστημολογική θεώρηση», Αθήνα, Gutenberg, σ.482

Νικολουδάκης, Ε., Χουστουλάκης, Ε., (2005), «Μοντέλα και Μαθηματικά: Δυο όψεις του ίδιου νομίσματος», στο Ε.Μ.Ε., Πρακτικά 22ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Λαμία, Ε.Μ.Ε., σ.597-606

Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή, (1997), «Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση», Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα, Αθήνα, Πνευματικός

Σκοπέτος, Δ., (1999), «Μαθηματικά μοντέλα και μοντελοποίηση», στο Ε.Μ.Ε., Πρακτικά 16ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Λάρισα, Ε.Μ.Ε., σ.335-342

Τουμάσης, Μ., (2002), «Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών», Αθήνα, Gutenberg, σ.62,340

ΥΠ.Ε.Π.Θ., (1997), «Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών», άρθ.1ο, σ.4-5

Φιλίππου, Γ., Χρίστου, Κ., (2004), «Διδακτική των Μαθηματικών», Αθήνα, Τυπωθήτω, σ.23

Φιλίππου, Γ., Χρίστου, Κ., (2001), «Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών», Αθήνα, Ατραπός

Μεταφρασμένη

Davis, P.J., Hersh, R., (1980), «Η Μαθηματική Εμπειρία», Αθήνα, Τροχαλία, σ.94,358-359

Donaldson, M., (2001), «Η Σκέψη των Παιδιών», Αθήνα, Gutenberg, σ.143

Papert, S., (1991), «Νοητικές θύελλες», Αθήνα, Οδυσσέας, σ.22-40

Ξενόγλωσση

Bonotto, C., Basso, M., (2001), «Is it possible to change the classroom activities in which we delegate the process of connecting mathematics with reality?», International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol.32, no.3, p.385-399

diSessa, A., (2000), «Changing minds: Computers, learning and literacy», Cambridge, MA:MIT Press

Leikin, R., Berman, A., Zaslavsky, O., (2000), «Applications of symmetry to problem solving», International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 31, no.6, p.799–809

Mariotti, M.A., (2000), “Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment», Educational Studies in Mathematics, Netherlands, Kluwer, vol.44, p.27,32,34

Papert, S., (1993), «The children’s machine:Rethinking school in the age of the computer», New York, Basic Books

Santos-Trigo, M., Espinosa-Perez, H., (2002), «Searching and exploring properties of geometric configurations using dynamic software», International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol.33, no.1, p.37-50

Wares, A., (2004), «Conjectures and proofs in a dynamic geometry environment», International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol.35, no.1, p.1–10

Διαδίκτυο

http://europa.eu.int/comm/education/policies/2010/et_2010_en.html

http://www.projects.ex.ac.uk/trol/trol/index.htm

http://www.bbc.co.uk