Datamaskinøving 1

Fag SIE 30AE Kalmanfiltrering og navigasjon

Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Et passende inngangssignal når man skal finne variansen er null. 1000 samples gir en kovariansmatrisene $\mathbf{R} = 1.02$ og $\mathbf{Q} = 0.98$. Med flere samples kommer man stadig nærmere $\mathbf{R} = 1$ og $\mathbf{Q} = 1$ som er de korrekte matrisene.

c) Figurene 1 og 2 viser plott av x_1 og x_2. De teoretiske variansene er

$$\mathrm{var}_{x_1} = \sqrt{2\sigma_{v_1}^3 \sigma_{w_1}} = \sqrt{2} \tag{1}$$

$$\mathrm{var}_{x_2} = \sqrt{2\sigma_{v_1} \sigma_{w_1}^3} = \sqrt{2} \tag{2}$$

De beregnede variansene i stasjonær tilstand kan leses fra figur 3. Begge variansene er $1.414 \approx \sqrt{2}$. Med 1000 samples ble variansene til posisjon og hastighet ble funnet å være ca 1.35 og 1.32. De teoretiske og de beregnede variansene stemmer med hverandre, og det er ikke så rart siden de er henholdsvis analytiske og numeriske løsninger av den samme differensialligningen. Derimot stemmer ikke variansen fra tidsseriene helt med de to andre. Variansene ligger konsekvent under de teoretiske, noe som sannsynligvis kommer av diskretiseringsmetoden.

d) Når prosesstøyen senkes blir hastigheten mest forbedret av dette (fra tidsserier: 1.32 for posisjon og 1.22 for hastighet). Dette er logisk siden hastighet ligger nærmest akselerasjon i integratorkjeden. Dette ser man også fra (1) og (2):

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_{x_1} &= \sqrt{2\sigma_{v_1}^3 \sigma_{w_1}} \approx 1.34 \\ \mathrm{var}_{x_2} &= \sqrt{2\sigma_{v_1} \sigma_{w_1}^3} \approx 1.21 \end{aligned}$$

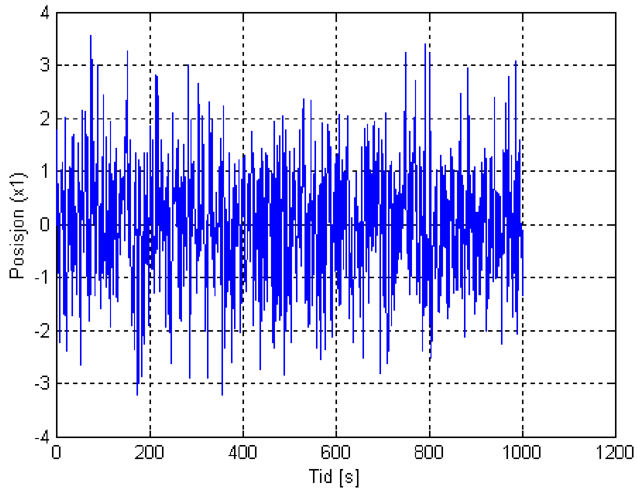


Figure 1: Posisjon (x_1).

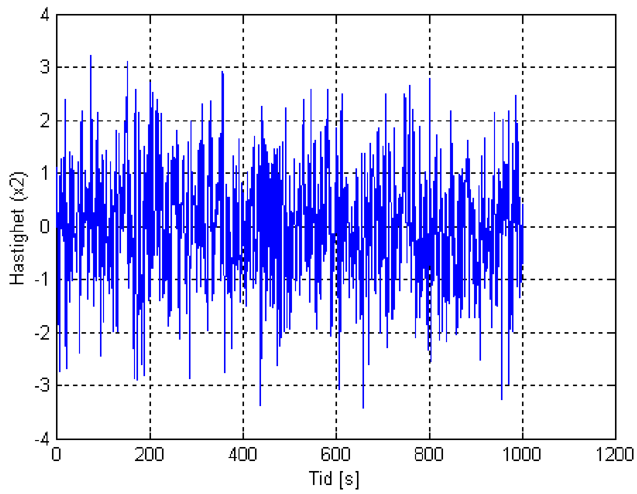


Figure 2: Hastighet (x_2).

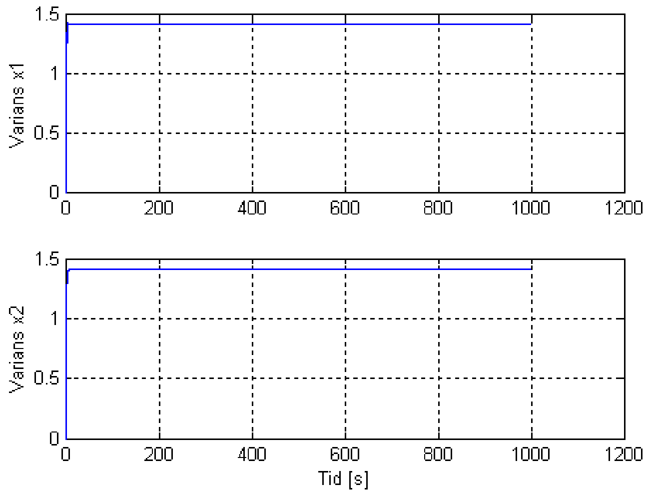
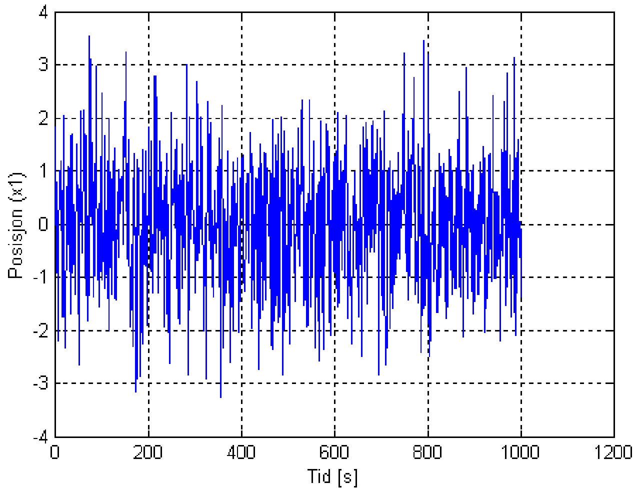


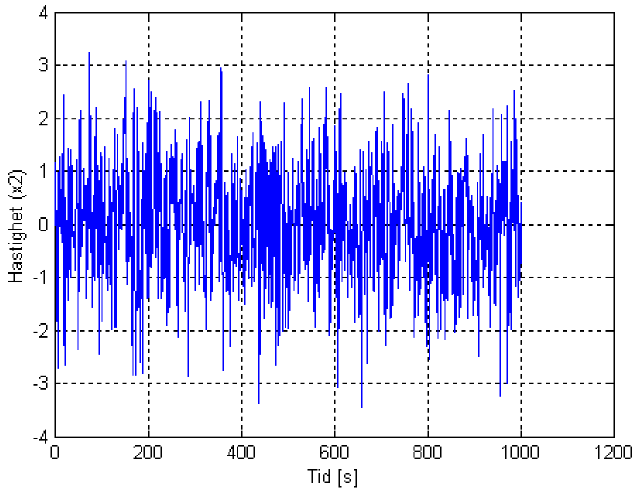
Figure 3: De diagonale elementene til $\mathbf{P}$ matrisen viser variansene til tilstandene x_1 og x_2.

Oppgave 2

a) Variansen til prosesstøyen ble i de resterende simuleringene satt tilbake til 1 (Dette sto dessverre ikke eksplisitt i oppgaven). Variansen til y_2 ble funnet til å være 10.74 med 1000 samples. Med flere samples kom variansen stadig nærmere 10 som er det korrekte svaret. Stasjonær varians lest fra $\mathbf{P}$ matrisen ble nå forbedret for posisjon (1.32) og i mindre grad forbedret for hastighet (1.38). Dette er et eksempel på et viktig poeng når det gjelder Kalmanfilteret: Alle nye målinger, så lenge de er korrekt vektet og ukorrelert med eksisterende målinger, vil gi bedre estimater selv om variansene til disse nye målingene er veldig høye.



Posisjon (x_1).



Hastighet (x_2).

b) Den teoretiske variansen for x_1 er nå

$$\mathrm{var}_{x_1} = \sqrt{\frac{2\sigma_{v_1}^3 \sigma_{v_2}^3 \sigma_{w_1}}{\left(\sigma_{v_1}^2 + \sigma_{v_2}^2\right)^{\frac{3}{2}}}} = 1.32$$

Den målte varians for x_1 ble funnet å være 1.25 (1.30 for x_2), noe som stemmer med at variansen til posisjon senkes, men den målte varians er som før lavere enn den teoretiske.

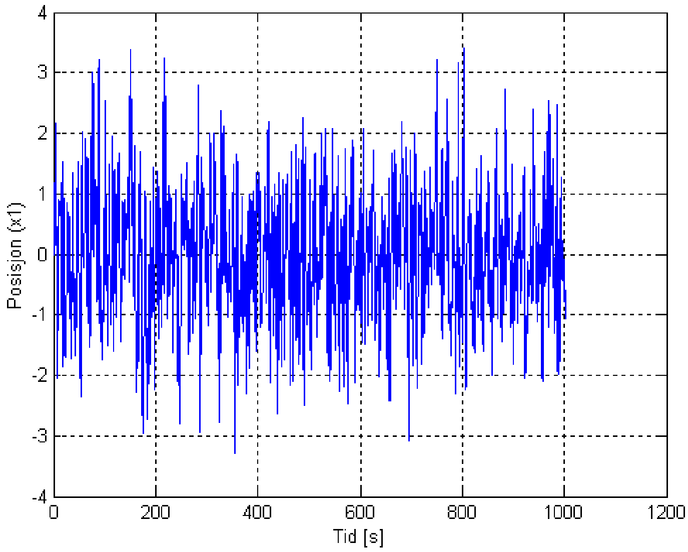


Figure 4: Posisjon (x_1).

c) Variansen til hastighetsmålingen (y_3) ble funnet å være 9.43 med 1000 samples. Igjen konvergerer den mot den korrekte variansen på 10 med flere samples. x_1 og x_2 er plottet i figurene 4 og 5. Variansen for posisjon (1.32 lest fra **P** matrisen) er omtrent den samme som den var med to posisjonsmålinger. Variansen til hastigheten (1.32, lest fra **P** matrisen) ble ikke overraskende bedre enn med to posisjonsmålinger. De målte variansene, 1.25 for posisjon og 1.24 for hastighet, viser det samme.

Oppgave 3

b) Systemmatrisene er nå:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & (\mathbf{HA})^T & (\mathbf{HA}^2)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

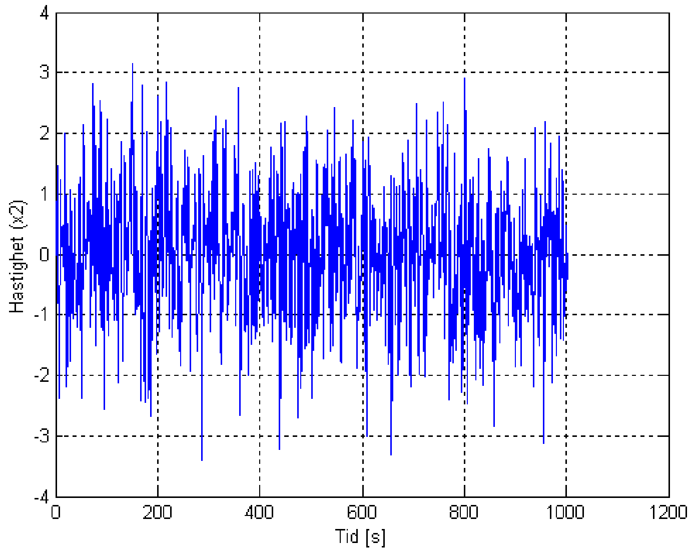


Figure 5: Hastighet (x_2).

har full rang. Systemet er derfor observerbart.

c) Figurene 6 − 8 viser de ulike simulerte variablene.

d) Når man senker variansen σ_b til 0.001, vil variansen til biasen senkes og innsvingningen blir saktere, se figur 9. Dette skjer fordi man legger mer vekt på prediksjonen og dermed vil forsterkningen senkes.

e) Når man setter variansen σ_b til 0, svinger ikke biasen seg ikke inn. Hastigheten får da en biasfeil og posisjonen får en feil som stiger som en rampe. Dette skjer fordi man oppgir at prediksjonen er perfekt, og dermed vil Kalman-filteret ikke oppdatere biasestimatet. Siden vi har en konstant bias er det korrekt å bruke null varians, men vi mangler initiell usikkerhet i biasestimatet. Denne må man sette inn som initialverdi i integratoren til P matrisen.

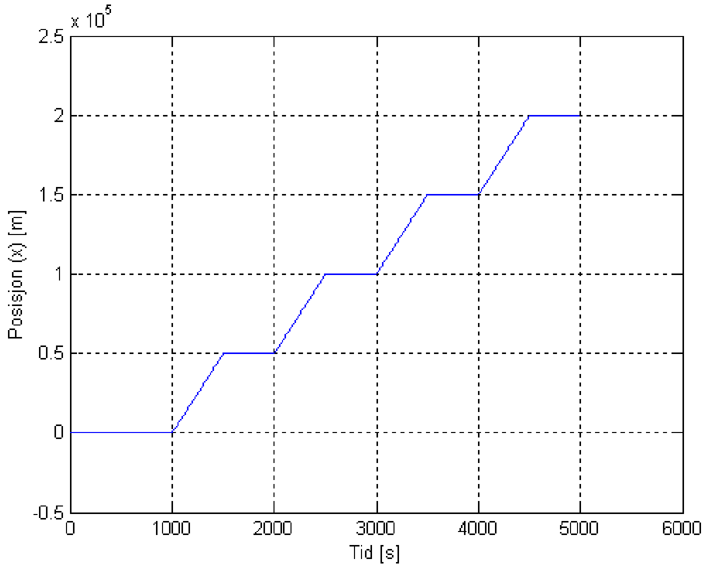


Figure 6: Posisjon (x_1).

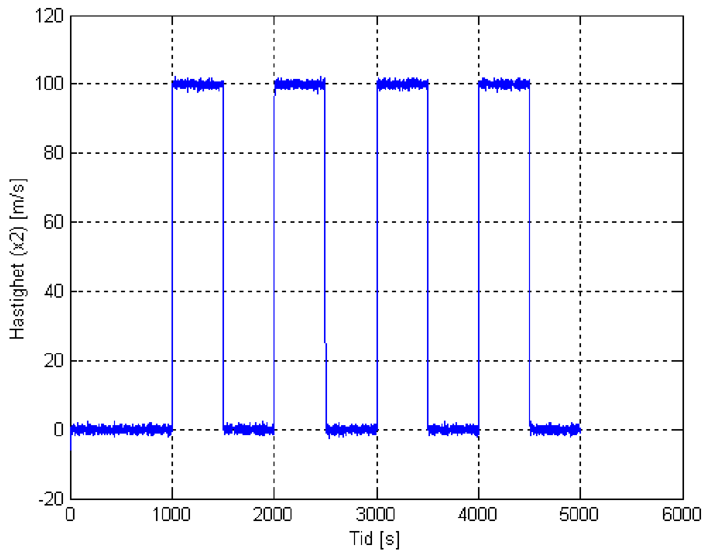


Figure 7: Hastighet (x_2).

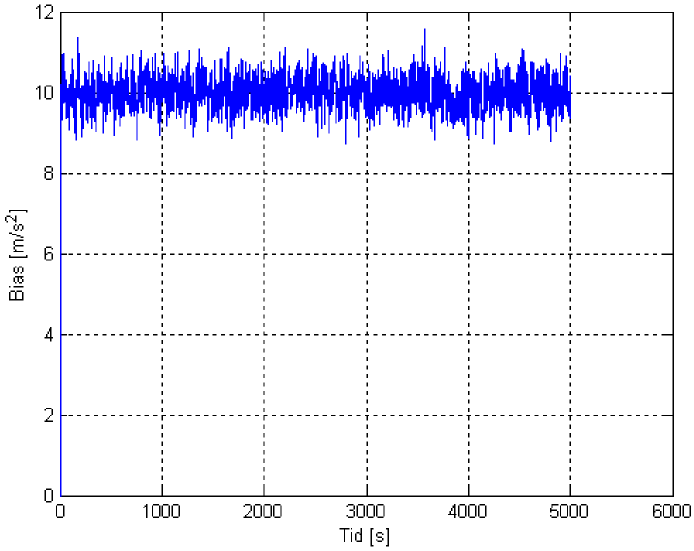


Figure 8: Bias (x_3).

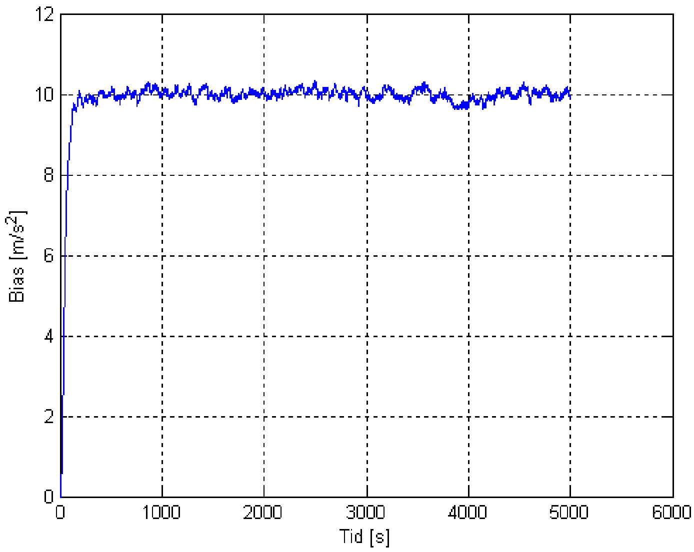


Figure 9: Bias (x_3) når variansen σ_b senkes til 0.001.