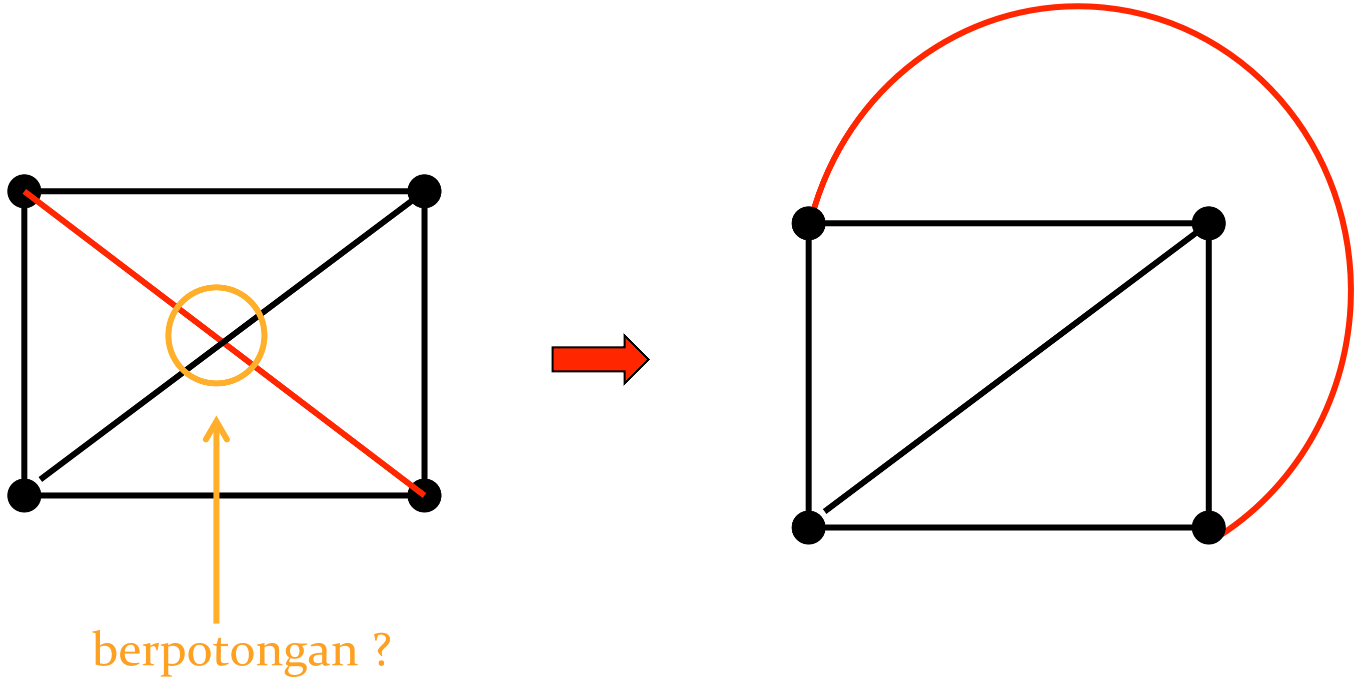
GRAF: BEBERAPA GRAF KHUSUS (2)

KULIAH MATEMATIKA DISKRIT 2

19 MARET 2015

GRAF PLANAR

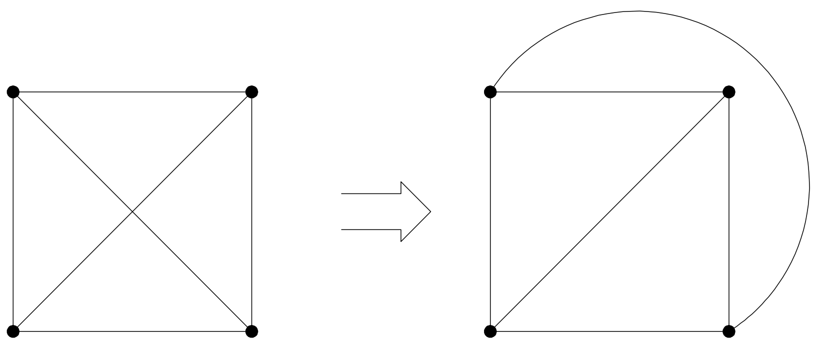
- **Definisi : Sebuah graph G = (V,e) disebut *planar* apabila graf G tersebut dapat digambarkan dalam sebuah bidang datar dengan tidak ada sisi yang saling berpotongan, kecuali perpotongan sisi pada sebuah verteks.**



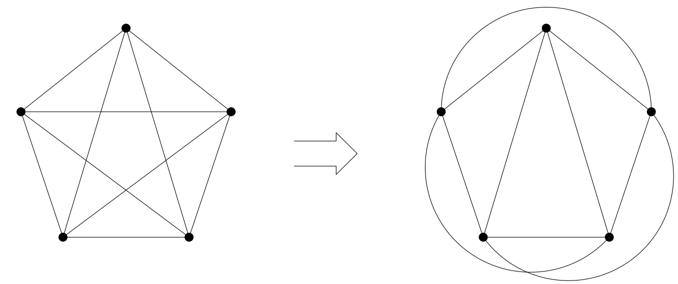
CONTOH

Graph Planar

Graph tidak planar



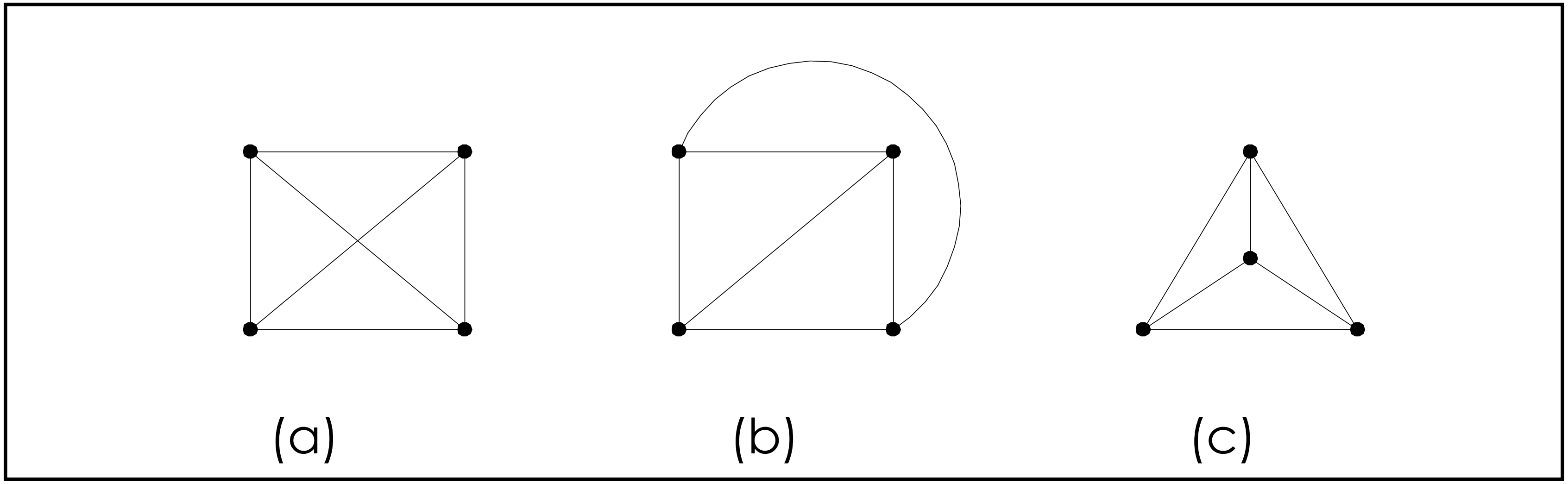
Graph K_4



Graph K_5

GRAF BIDANG

- **Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut graf bidang (*plane graph*).**

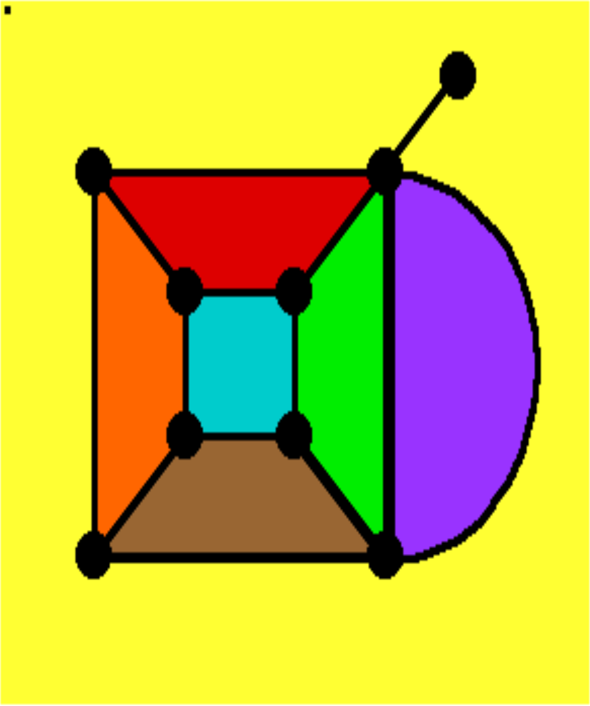


Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang

APLIKASI GRAF PLANAR

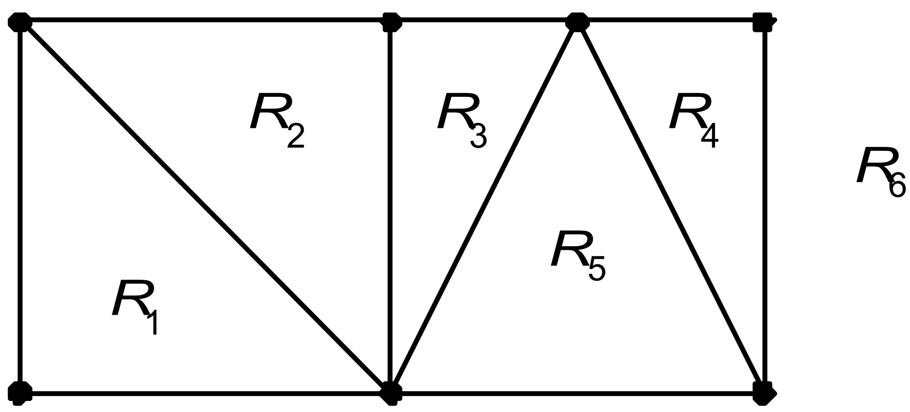
- **Perancangan IC (*Integrated Circuit*)**
  - Tidak boleh ada kawat-kawat di dalam *IC-board* yang saling bersilangan → dapat menimbulkan interferensi arus listrik → *malfunction*
  - Perancangan kawat memenuhi prinsip graf planar

REGION/WILAYAH

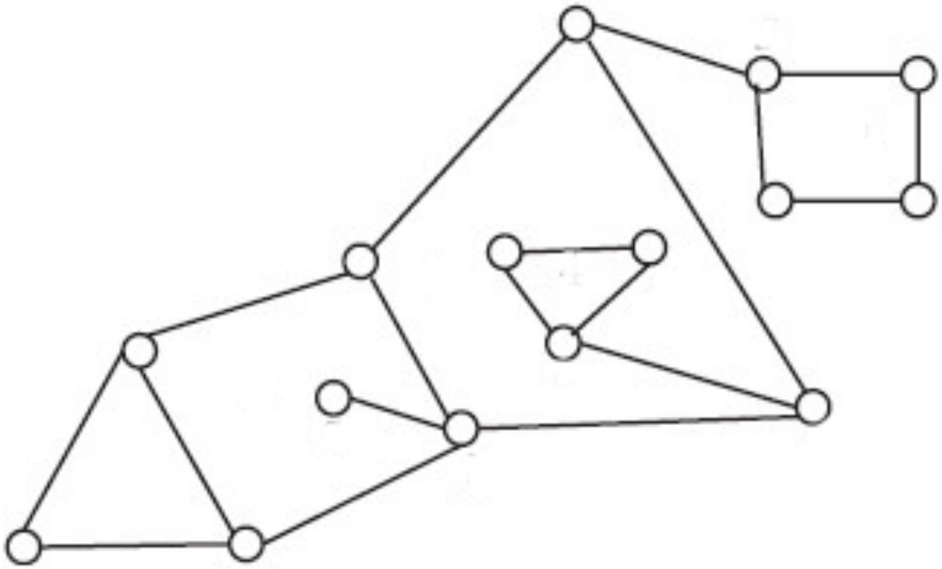


- Adalah daerah pada graf yang dibatasi oleh sisi-sisi graf planar
- Suatu region dikatakan terhingga (finite) jika luasnya terhingga →seperti region yang berwarna selain kuning.
- Suatu region dikatakan tak hingga (infinite) jika luasnya tak terhingga atau tidak mempunyai batas luar →seperti region yang berwarna kuning.

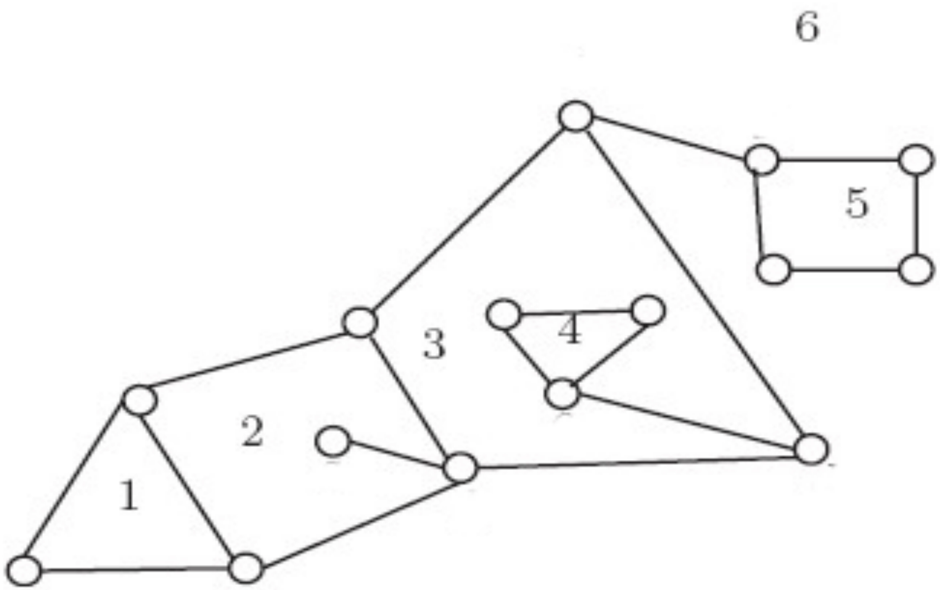
- **Graf bidang pada gambar di bawah initerdiri atas 6 wilayah (termasuk wilayah terluar):**



- **Ada berapa Region yang dimiliki oleh graf planar G di bawah ini ?**



graf G



graf G

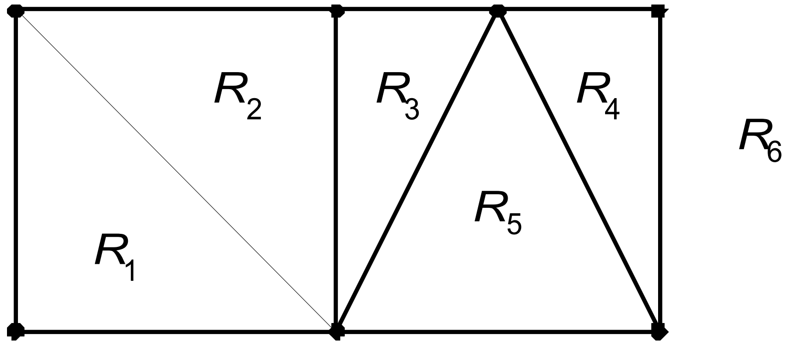
- Terdapat 6 Region pada graf G

FORMULA EULER

- **Teorema umum: Jika v, e, dan r masing-masing adalah banyaknya vertex, edge, dan region, maka untuk sembarang graf planar terhubung, berlaku :**

$$v - e + r = 2$$

- **Pada gambar di bawah, *v* = 11 dan e = 7, *r* = 6, maka jumlah wilayah = 7 – 11 + 6 = 2.**



CONTOH LAIN

- **Berapa jumlah verteks yang harus dimiliki untuk setiap multigragraf planar yang mempunyai :**

  a. 10 rusuk dan 9 region

  b. 12 region dan 28 rusuk

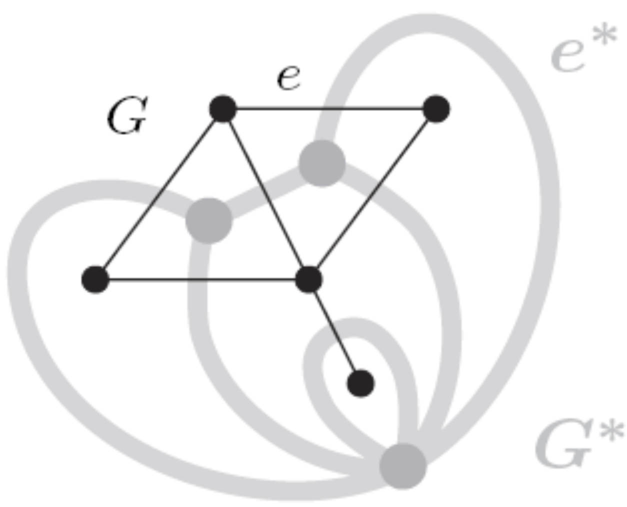
- **Jawab : v = e - r + 2**

  a. v = 10 – 9 + 2 = 3 verteks

  b. v = 28 – 12 + 2 = 18 verteks

DUALITAS GRAF PLANAR

- Misalkan terdapat sebuah graf planar G.
- Kita tempatkan vertex baru pada setiap region pada graf G, kemudian hubungkan vertex-vertex baru tersebut sehingga membentuk planar multigraf G*
- Vertex-vertex baru tersebut hanya bisa dihubungkan dengan vertex region yang bertetangga.



KETIDAKSAMAAN EULER

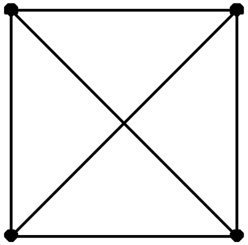
- **Pada graf planar sederhana terhubung dengan *r* buah wilayah, *v* buah simpul, dan e buah sisi (e > 2) selalu berlaku:**

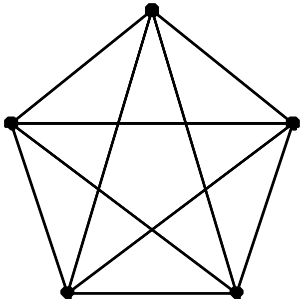
$$e \leq 3v - 6$$

  - Ketidaksamaan ini dinamakan ketidaksamaan Euler,
- **Ketidaksamaan Euler dapat digunakan untuk menunjukkan keplanaran suatu graf sederhana**
  - Jika graf merupakan graf planar, maka ia memenuhi ketidaksamaan Euler.

CONTOH

- **K_4 dengan v = 4, e = 6, merupakan graf planar.**
  - K_4 adalah graf planar sehingga memenuhi ketidaksamaan Euler, yaitu $6 \leq 3(4) - 6$.
- **Pada graf K_5, v = 5 dan e = 10**
  - Jika K_5 adalah graf planar, maka berlaku $e \leq 3v - 6 \rightarrow 10 \leq 3(5) - 6 = 9 \rightarrow$ tidak benar
  - Berarti, K_5 tidak planar



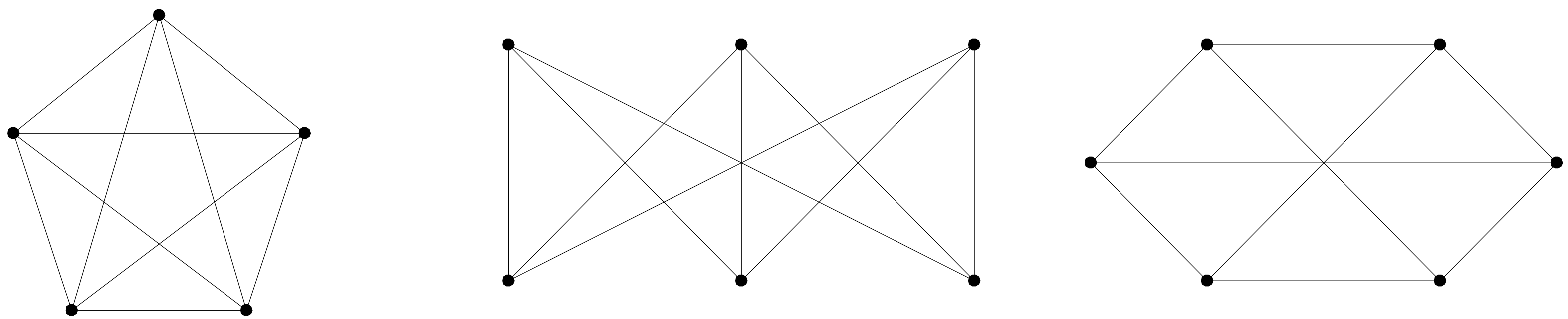


- **Tetapi ketidaksamaan bukan merupakan syarat cukup dan perlu dari graf planar.**
  - Contoh: untuk $K_{3,3}$: e = 9, v = 6

    $9 \leq (3)(6) - 6 = 12$, berarti $e \leq 3v - 6$
  - Padahal graf $K_{3,3}$ bukan graf planar!

GRAF KURATOWSKI

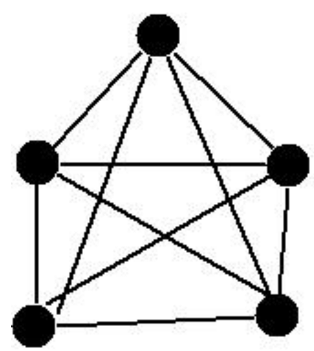
- **Berguna untuk menentukan dengan tegas keplanaran dan ketidakplanaran suatu graf.**



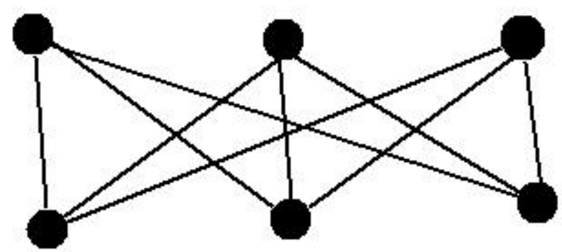
(a) (b) (c)

Gambar (a) Graf Kuratowski pertama (K_5)
(b) Graf Kuratowski kedua ($K_{3,3}$)
(c) Graf yang isomorfik dengan graf Kuratowski kedua

- **Sifat graf Kuratowski adalah:**
  - Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur.
  - Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak-planar
  - Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski menyebabkannya menjadi graf planar.
  - Graf Kuratowski pertama adalah graf tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan graf Kuratowski kedua adalah graf tidak-planar dengan jumlah sisi minimum.



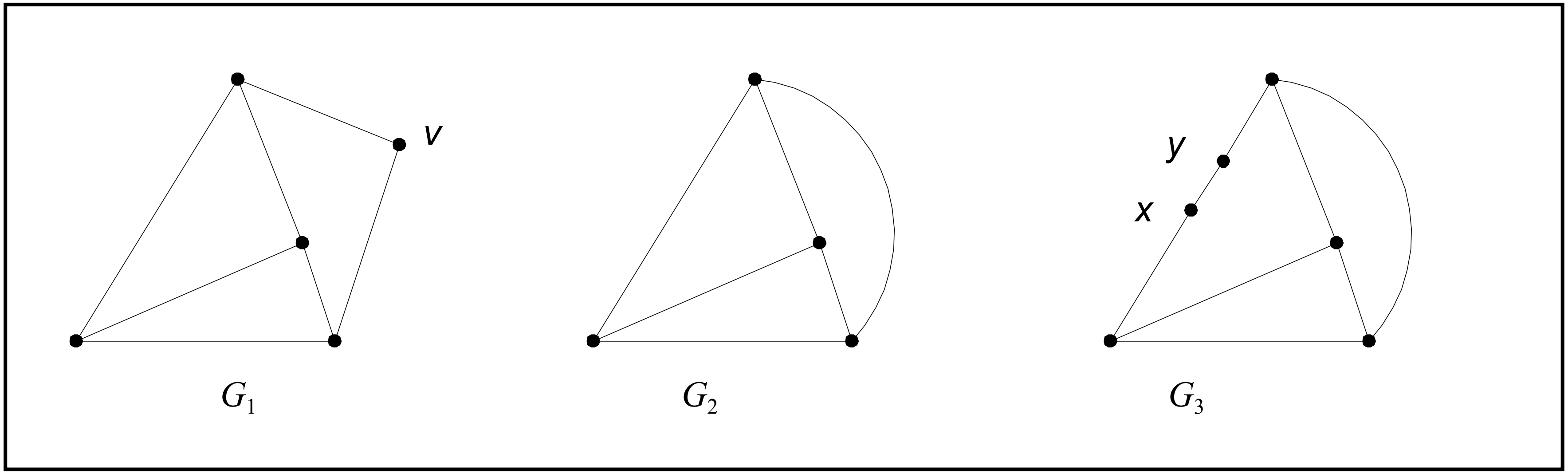
G1



G2

TEOREMA KURATOWSKI

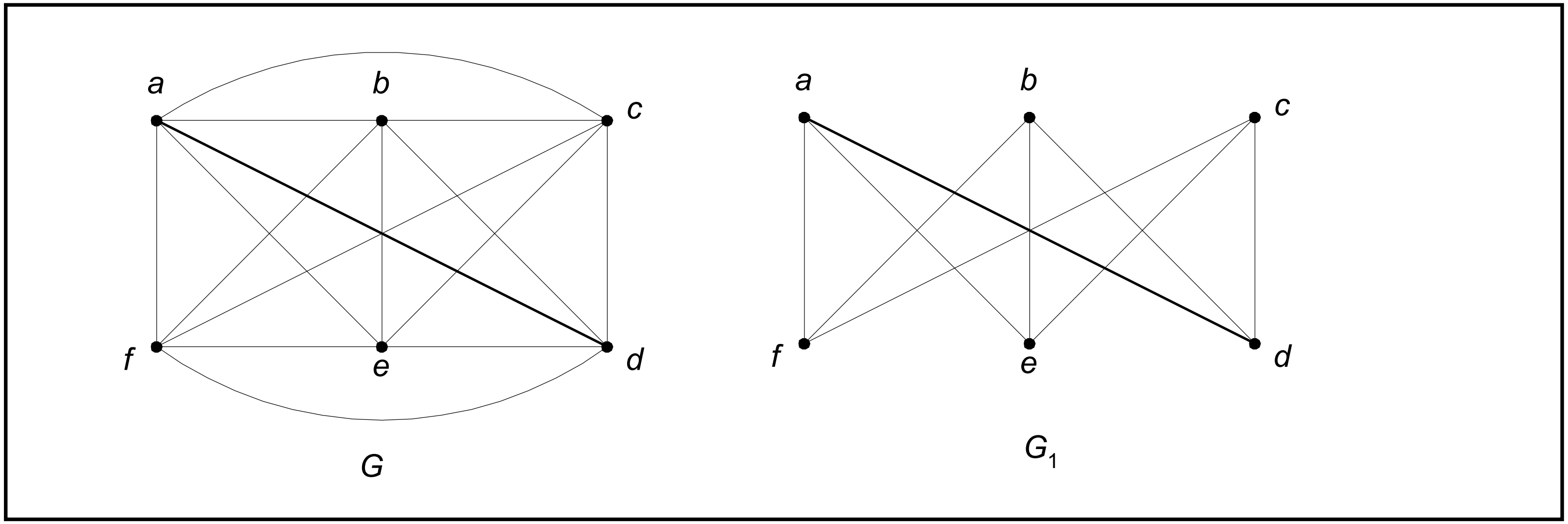
- **Teorema: Graf G bersifat planar jika dan hanya jika ia tidak mengandung upagraf yang isomorfik dengan salah satu graf Kuratowski atau homomorfik (*homeomorphic*) dengan salah satu dari keduanya.**



Tiga buah graf yang homomorfik satu sama lain.

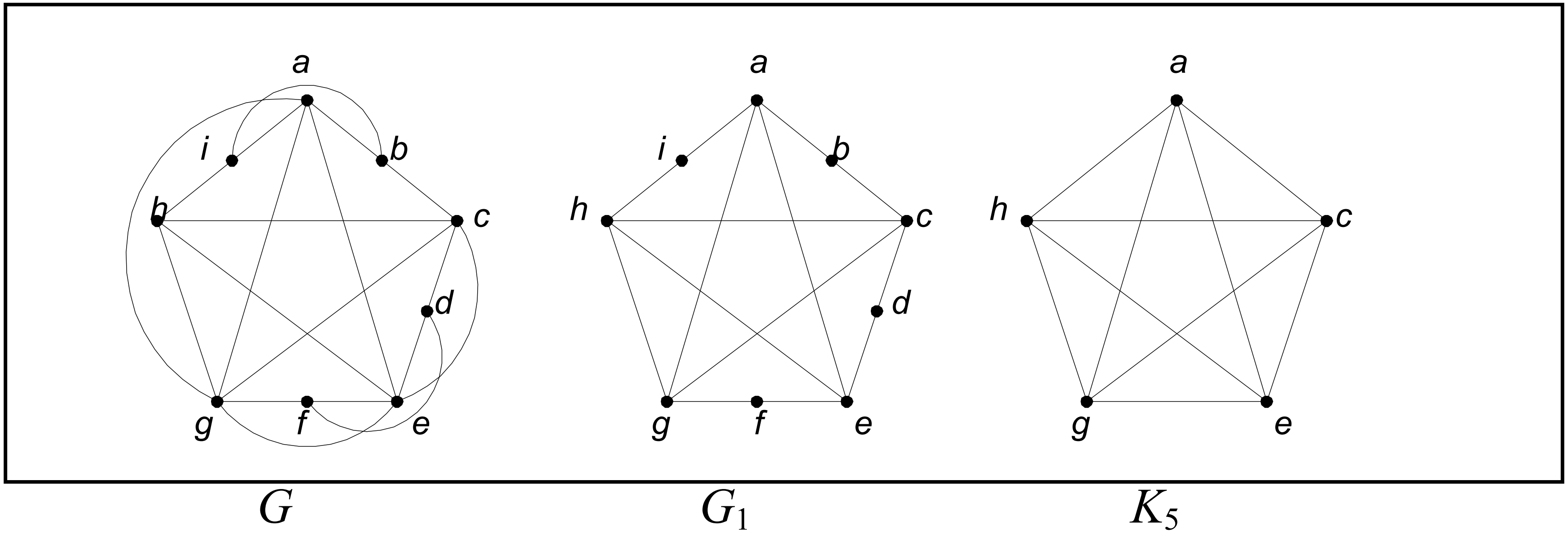
CONTOH

- **Akan digunakan Teorema Kuratowski untuk memeriksa keplanaran graf.**
- **Graf G di bawah ini bukan graf planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang sama dengan $K_{3,3}$.**



Graf G tidak planar karena ia mengandung upagraf yang sama dengan $K_{3,3}$.

- **Graf G tidak planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang homeomorfik dengan K_5 (dengan membuang simpul-simpul yang berderajat 2 dari G_1, diperoleh K_5).**



Gambar Graf G, upagraf G_1 dari G yang homomorfik dengan K_5.