

# GRAF: MASALAH LINTASAN TERPENDEK

KULIAH MATEMATIKA DISKRIT 2

KAMIS, 2 APRIL 2015

# PERSOALAN LINTASAN TERPENDEK

- **Bermacam-macam masalah lintasan terpendek:**
  - Lintasan terpendek antara dua buah simpul tertentu (*a pair shortest path*).
  - Lintasan terpendek antara semua pasangan simpul (*all pairs shortest path*).
  - Lintasan terpendek dari simpul tertentu ke semua simpul yang lain (*single-source shortest path*).
  - Lintasan terpendek antara dua buah simpul yang melalui beberapa simpul tertentu (*intermediate shortest path*).

# ALGORITMA SHORTEST PATH

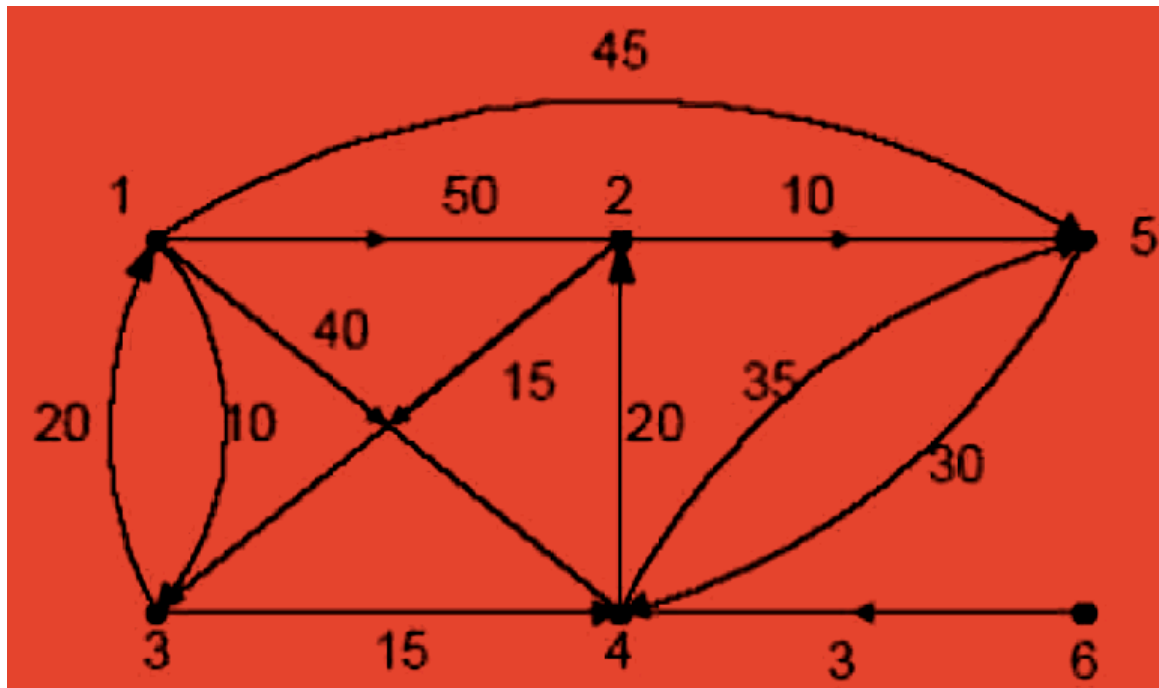
- ***Single-Source Shortest Path***
  - Diberikan graf berbobot  $G = (V, E)$ .
  - Tentukan lintasan terpendek dari sebuah simpul asal  $a$  ke setiap simpul lainnya di  $G$ .
  - Algoritma: Dijkstra
- ***All Pairs Shortest Path***
  - Diberikan graf berbobot  $G = (V, E)$ .
  - Tentukan lintasan terpendek antara semua pasangan simpul di  $G$ .
  - Algoritma: Floyd dan Warshal

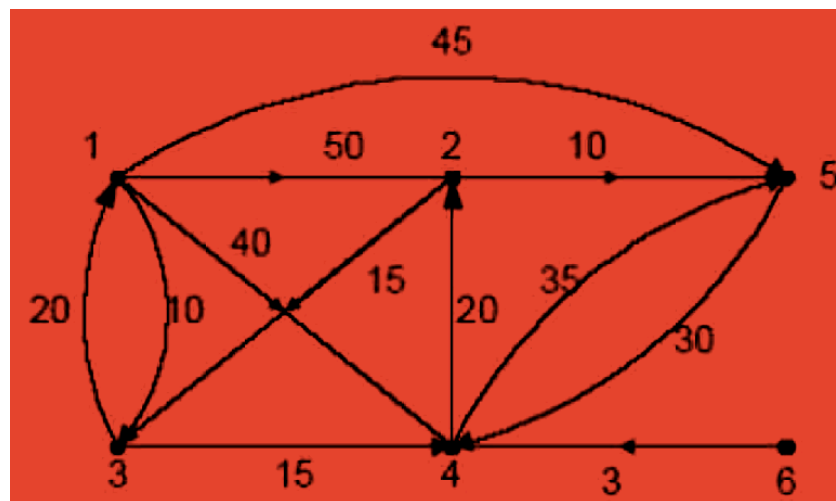
# ALGORITMA DIJKSTRA

- Pada setiap langkah, ambil sisi yang berbobot minimum yang menghubungkan sebuah simpul yang sudah terpilih dengan sebuah simpul lain yang belum terpilih.
- Lintasan dari simpul asal ke simpul yang baru haruslah merupakan lintasan yang terpendek diantara semua lintasannya ke simpul-simpul yang belum terpilih.

# CONTOH PENERAPAN

- Tentukan jarak terpendek dari titik 1 ke tiap titik yang lainnya.





Lelaran	Simpul yang dipilih	Lintasan	S						D					
			1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Inisial	-	-	0	0	0	0	0	0	0	50	10	40	45	$\infty$
									(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	
1	1	1	1	0	0	0	0	0	$\infty$	50	10	40	45	$\infty$
									(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	
2	3	1, 3	1	0	1	0	0	0	$\infty$	50	10	25	45	$\infty$
									(1,2)	(1,3)	(1,3,4)	(1,5)	(1,6)	
3	4	1, 3, 4	1	0	1	1	0	0	$\infty$	45	10	25	45	$\infty$
									(1,3,4,2)	(1,3)	(1,3,4)	(1,5)	(1,6)	
4	2	1, 3, 4, 2	1	1	1	1	0	0	$\infty$	45	10	25	45	$\infty$
									(1,3,4,2)	(1,3)	(1,3,4)	(1,5)	(1,6)	
5	5	1, 5	1	1	1	1	1	0	$\infty$	45	10	25	45	$\infty$

- Berikut ini hasil lintasan terpendek dari titik 1 ke semua titik yang lain dg algoritma Dijkstra

Simpul asal	Simpul tujuan	Lintasan terpendek	Jarak
1	3	$1 \rightarrow 3$	10
1	4	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$	25
1	2	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$	45
1	5	$1 \rightarrow 5$	45
1	6	tidak ada	-

# ALGORITMA WARSHAL

- Digunakan untuk mencari semua hubungan antara setiap simpul dari setiap graph (transitif)
- Input :  $A$ , yaitu matrik tetangga dengan  $n$  simpul
- Output :  $R^{(n)}$ , yaitu matriks keterhubungan antar simpul (transitif)

$$R^{(0)} \leftarrow A$$

*Untuk  $k$  dari 1 sampai  $n$  lakukan*

*Untuk  $i$  dari 1 sampai  $n$  lakukan*

*Untuk  $j$  dari 1 sampai  $n$  lakukan*

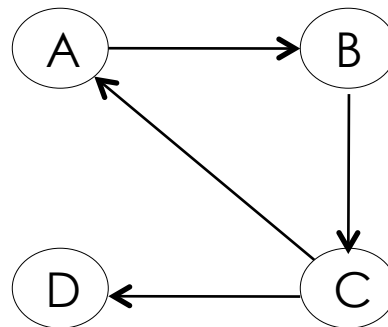
$$R^{(k)}[i,j] \leftarrow R^{(k-1)}[i,j] \text{ or } R^{(k-1)}[i,k] \text{ and } R^{(k-1)}[k,j]$$

*Cetak  $R^{(n)}$*



# CONTOH KASUS

**Tentukan apakah terdapat lintasan antara setiap pasangan simpul pada graf di bawah.**



# CONTOH KASUS

**A = Matriks Tetangga**

	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	0	0	1	0
C	1	0	0	1
D	0	0	0	0

**R<sup>(1)</sup>**

	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	0	0	1	0
C	1	1	0	1
D	0	0	0	0

**R<sup>(2)</sup>**

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	0	0	1	0
C	1	1	1	1
D	0	0	0	0

**R<sup>(3)</sup>**

	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	1	1	1	1
C	1	1	1	1
D	0	0	0	0

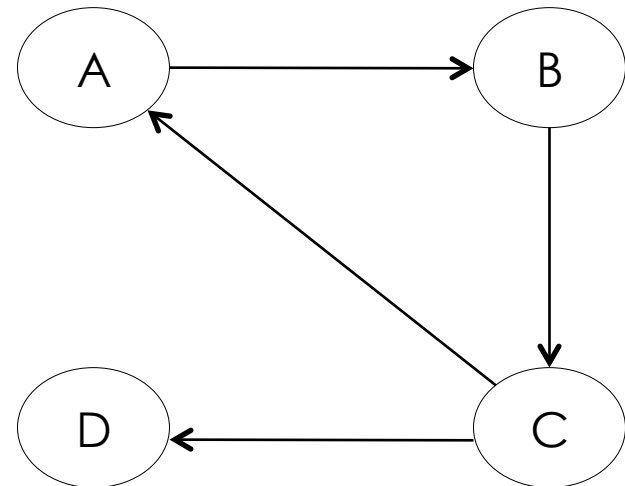
**R<sup>(4)</sup>**

	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	1	1	1	1
C	1	1	1	1
D	0	0	0	0

- **Lintasan-lintasan selain yang langsung:**

- AA: A – B – C – A
- AC: A – B – C
- AD: A – B – C – D
- BA: B – C – A
- BB: B – C – A – B
- BD: B – C – D
- CB: C – A – B
- CC: C – A – B – C

- **Yang tidak ada lintasan: DA, DB, DC, DD**



# ALGORITMA FLOYD

- Untuk mencari jarak terpendek antara semua simpul dalam graf
- Input : Matriks jarak ( $W$ ) dengan  $n$  simpul
- Output : Matriks yang menyatakan hubungan terpendek antar setiap simpul
- $D \leftarrow W$

*Untuk  $k$  dari 1 sampai  $n$  lakukan*

*Untuk  $i$  dari 1 sampai  $n$  lakukan*

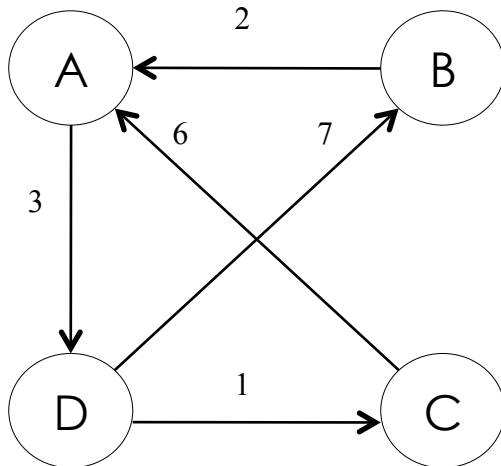
*Untuk  $j$  dari 1 sampai  $n$  lakukan*

$$D^{(k)}[i,j] \leftarrow \min \{ D^{(k-1)}[i,j], D^{(k-1)}[i,k] + D^{(k-1)}[k,j] \}$$

*Cetak nilai  $D$*

# CONTOH KASUS

**Carilah jarak terpendek utk setiap pasangan simpul pd graf di bawah ini dengan algoritma floyd.**



## Matriks jarak W

	A	B	C	D
A	0	$\infty$	$\infty$	3
B	2	0	$\infty$	$\infty$
C	6	$\infty$	0	$\infty$
D	$\infty$	7	1	0

## D<sup>(1)</sup>

	A	B	C	D
A	0	$\infty$	$\infty$	3
B	2	0	$\infty$	5
C	6	$\infty$	0	9
D	$\infty$	7	1	0

## D<sup>(2)</sup>

	A	B	C	D
A	0	$\infty$	$\infty$	3
B	2	0	$\infty$	5
C	6	$\infty$	0	9
D	9	7	1	0

## D<sup>(3)</sup>

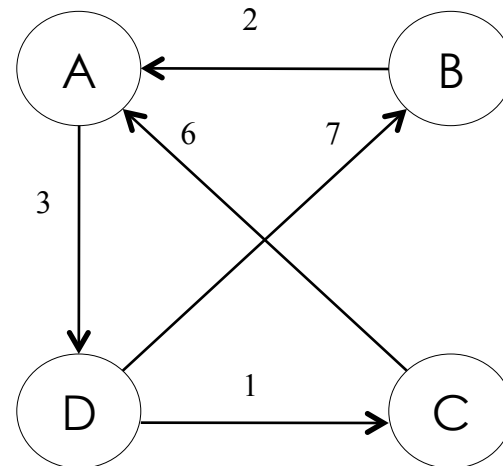
	A	B	C	D
A	0	$\infty$	$\infty$	3
B	2	0	$\infty$	5
C	6	$\infty$	0	9
D	7	7	1	0

## D<sup>(4)</sup>

	A	B	C	D
A	0	10	4	3
B	2	0	6	5
C	6	16	0	9
D	7	7	1	0

- **Lintasan-lintasan selain yang langsung:**

- AB :  $A - D - B = 10$
- AC :  $A - D - C = 4$
- BC :  $B - A - D - C = 6$
- BD :  $B - A - D = 5$
- CB :  $C - A - D - B = 16$
- CD :  $C - A - D = 9$
- DA :  $D - C - A = 7$



# LATIHAN

- Tentukan jarak terpendek dari titik 1 ke tiap titik yang lainnya.
- Tentukan pula jarak terpendek dari setiap pasangan simpul yang ada.

