Задание 3

$$\boxed{\mu} = k^T(y)(K+\sigma^2 I_n)^{-1} t = k^T(y)(\mathbf{1} k(x,x) \mathbf{1} + \sigma^2 I_n)^{-1} t =$$

$$= k^T(y)(\sigma^{-2} I_n - \sigma^{-2} I_n \mathbf{1}(k^{-1}(x,x) + \mathbf{1}^T \sigma^{-2} I_n \cdot \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^T \sigma^{-2}) t =$$

$$= k^T(y)\left(\frac{1}{\sigma^2} I_n - \frac{1}{\sigma^4(k^{-1}(x,x) + n\sigma^{-2})} \mathbf{1}\mathbf{1}^T\right) t =$$

$$= k(x,y)\, \mathbf{1}^T \left(\frac{1}{\sigma^2} I_n - \frac{1}{\sigma^4(k^{-1}(x,x) + n\sigma^{-2})} \mathbf{1}\mathbf{1}^T\right) t =$$

$$\boxed{= \frac{k(x,y) \sum_{i=1}^{n} t_i}{n k(x,x) + \sigma^2}}$$

$$\boxed{Var} = k(y,y) - k(x,y)\, \mathbf{1}^T (K + \sigma^2 I_n)^{-1} \mathbf{1}\, k(x,y) =$$

$$= k(y,y) - k^2(x,y)\, \mathbf{1}^T (K+\sigma^2 I_n)^{-1} \mathbf{1} = \boxed{k(y,y) - \frac{n k^2(x,y)}{\sigma^2 + n k(x,x)}}$$

Если $y = x$: $\mu = \dfrac{k(x,x) \sum_{i=1}^{n} t_i}{n k(x,x) + \sigma^2}$

$$Var = k(x,x) - \frac{n k^2(x,x)}{\sigma^2 + n k(x,x)}$$

Оценка на $f(x)$ не смещ.

Задание 4

$(x,t) = \{(x_i, t_i): x_i, t_i \in \mathbb{R}\}_{i=1}^{n}$

$x_i = x_1 + (i-1)h, h > 0, \quad t_i = f(x_i)$

$k(x', x'') = \alpha \exp\left\{-\frac{|x' - x''|}{\gamma}\right\}$

$\mu_* = k_*^T [K + \sigma^2 I]^{-1} t = k_*^T K^{-1} t$

$$K = \alpha \begin{pmatrix} 1 & e^{-\frac{h}{\gamma}} & e^{-\frac{2h}{\gamma}} & \dots & e^{-\frac{(n-1)h}{\gamma}} \\ e^{-\frac{h}{\gamma}} & 1 & e^{-\frac{h}{\gamma}} & \dots & e^{-\frac{(n-2)h}{\gamma}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ e^{-\frac{(n-1)h}{\gamma}} & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$K^{-1} = \frac{1}{(1 - e^{-\frac{2h}{\gamma}})\alpha} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-\frac{h}{\gamma}} & 0 & \dots & 0 \\ -e^{-\frac{h}{\gamma}} & 1 - e^{-\frac{2h}{\gamma}} & -e^{-\frac{h}{\gamma}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu_* = k_*^T K^{-1} t = e^{-\frac{x_* - x_n}{\gamma}} (0\ 0 \dots 0\ 1) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = e^{-\frac{x_* - x_n}{\gamma}} t_n$$

$$\sigma_*^2 = k_{**} - k_*^T [K + \sigma^2 I]^{-1} k_* = \alpha - k_*^T K^{-1} k_* = \alpha\left(1 - e^{\frac{-2(x_* - x_n)}{\gamma}}\right)$$

Ответ: $\mu_* = e^{-\frac{x_* - x_n}{\gamma}} t_n$

$\sigma_*^2 = \alpha(1 - e^{-\frac{2(x_* - x_n)}{\gamma}}$

Задание 5

Покажем равенство подынтегральных ф-ий.

$$\hat{\sigma}^2(v|X\cup x) = k(v,v) - \left(k^T(v)\ k(v,x)\right)\left(\begin{array}{c|c} K & k(x) \\ \hline k^T(x) & k(x,x)\end{array}\right)^{-1}\begin{pmatrix} k(v) \\ k(v,x)\end{pmatrix} \boxed{=},$$

где $k(v) = \begin{pmatrix} k(v,x_1) \\ \vdots \\ k(v,x_n)\end{pmatrix}$

$$K = \begin{pmatrix} k(x_1,x_1) & \dots & k(x_1,x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ k(x_n,x_1) & \dots & k(x_n,x_n)\end{pmatrix}$$

$$\boxed{=}\ k(v,v) - \left(k^T(v)\ k(v,x)\right)\begin{pmatrix} K^{-1}+K^{-1}k(x)\,t\,k^T(x)K^{-1} & -K^{-1}k(x)\,t \\ -t\,k^T(x)K^{-1} & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k(v) \\ k(v,x)\end{pmatrix}\boxed{=}$$

где $t = \left(k(x,x) - k^T(x)K^{-1}k(x)\right)^{-1} = \hat{\sigma}^{-2}(x|X)$

$$\boxed{=}\ k(v,v) - k^T(v)K^{-1}k(v) - k^T(v)K^{-1}k(x)\,t\,k^T(x)K^{-1}k(v) + k(v,x)\,t\,k^T(x)K^{-1}k(v) + k^T(v)K^{-1}k(x)\,t\,k(v,x) - k(v,x)\,t\,k(v,x)$$

$$\hat{\sigma}^2(v|X) - \hat{\sigma}^2(v|X\cup x) = k(v,v) - k^T(v)K^{-1}k(v) - k(v,v) + k^T(v)K^{-1}k(v) + t\left(k^2(v,x) - 2k(v,x)k^T(v)K^{-1}k(x) + \left(k^T(v)K^{-1}k(x)\right)^2\right) =$$

$$= t\left(k(v,x) - k^T(v)K^{-1}k(x)\right)^2 = \frac{\hat{k}^2(v,x)}{\hat{\sigma}^2(x|X)}$$

ч.т.д.

Задание 6

$$\lambda^* = \underset{\lambda \in \mathbb{R}^r}{\arg\min} \|\hat{x}(\lambda) - x\|_2^2, \text{ т.е. } \|\hat{x}(\lambda) - x\|_2^2 \to \min$$

$$\|\langle X\rangle + U_X \lambda - x\|_2^2 \to \min$$

$$\|U_X \lambda - (x - \langle X\rangle)\|_2^2 \to \min$$

задача лин. регрессии, поэтому

$$\lambda^* = \begin{cases} (U_X^T U_X)^{-1} U_X (x^* - \langle X\rangle), & r \le d \\ U_X^T (U_X U_X^T)^{-1} (x^* - \langle X\rangle), & r > d \end{cases}$$

$$y^* = \begin{cases} \langle Y\rangle + U_Y (U_X^T U_X)^{-1} U_X (x^* - \langle X\rangle), & r \le d \\ \langle Y\rangle + U_Y U_X^T (U_X U_X^T)^{-1} (x^* - \langle X\rangle), & r > d \end{cases}$$