Второе домашнее задание по курсу «Теория вероятностей»

Определение. Напомним, что *порождённым* или *индуцированным* подграфом $H = (V(H), E(H))$ графа $G = (V(G), E(G))$ называется подграф, для которого $V(H) \subseteq V(G)$, а рёбра которого — это все рёбра графа G, которые проведены между вершинами графа H. Таким образом, порожденный подграф однозначно задаётся своим подмножеством вершин.

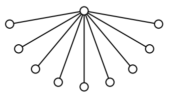
Рис. 1. Граф H.

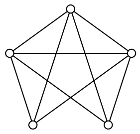
Рис. 2. Граф K.

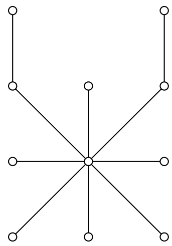
Рис. 3. Граф L.

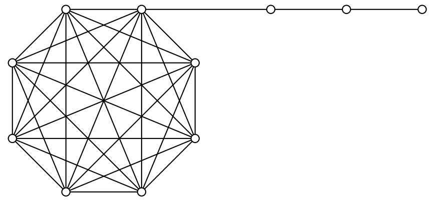
Рис. 4. Граф M.

Задача 1.

а) **(1 балл.)** Используя линейность математического ожидания, вычислите математическое ожидание числа подграфов (не обязательно порождённых) в $G(n,p)$, изоморфных графу H на рисунке 1;

б) **(1 балл.)** Докажите, что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{10}{9}} \to 0$ при $n \to +\infty$ в $G(n,p)$ асимптотически почти наверняка нет подграфов (не обязательно порождённых), изоморфных графу H на рисунке 1;

в) **(1 балл.)** Найдите дисперсию числа подграфов (не обязательно порождённых), изоморфных графу H на рисунке 1

г) **(1 балл.)** Докажите, что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{10}{9}} \to +\infty$ при $n \to +\infty$ в $G(n,p)$ асимптотически почти наверняка существует подграф (не обязательно порождённый), изоморфный графу H на рисунке 1.

Задача 2.

а) **(1 балл.)** Используя линейность математического ожидания, вычислите математическое ожидание числа порождённых подграфов в $G(n,p)$, изоморфных графу K на рисунке 2.

б) **(1 балл.)** Пусть вероятность ребра p такова, что $pn^{\frac{5}{9}} \to 0$ или такую, что $p = 1 - \frac{f(n)}{n^5}$, где $f(n)$ — произвольная функция такая, что $f(n) \to 0$ при $n \to +\infty$. Докажите, что при этой вероятности ребра p в $G(n,p)$ асимптотически почти наверняка нет порождёныых подграфов, изоморфных графу K на рисунке 2;

в) **(2 балла.)** Пусть вероятность ребра $p(n)$ такова, что выполняются одновременно два следующих технических условия:

$$p(n) = \begin{cases} \frac{g(n)}{n^{\frac{4}{5}}}, & \text{если } \frac{g(n)}{n^{\frac{7}{15}}} \to +\infty, \text{ при } n \to +\infty \text{ и существует положительная константа } C > 0 \text{ и} \\ & \text{натуральное число } n_0 > 0 \text{ такое, что } 1 - \frac{g(n)}{n^{\frac{4}{5}}} \geqslant C \text{ для всех } n \geqslant n_0; \\ 1 - \frac{f(n)}{n^5}, & \text{если } f(n) \text{ такова, что } \frac{f(n)}{n^3} \to +\infty \text{ и } \frac{f(n)}{n^5} \to 0 \text{ при } n \to +\infty, \end{cases}$$

Докажите, что при этой вероятности ребра $p(n)$ в $G(n, p(n))$ асимптотически почти наверняка есть порождёныые подграфы, изоморфные графу K на рисунке 2.

Задача 3.

а) **(1 балл.)** Используя линейность математического ожидания, вычислите математическое ожидание числа связных компонент в $G(n,p)$, изоморфных графу L на рисунке 3;

б) **(1 балл.)** Докажите, что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{11}{10}} \to 0$ при $n \to +\infty$ в $G(n,p)$ асимптотически почти наверняка нет связных компонент, изоморфных графу L на рисунке 3;

в) **(2 балла.)** Докажите, что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{11}{10}} \to +\infty$, $11pn - \ln n - 10 \ln \ln n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и $p \leqslant \frac{\ln n}{n}$ в $G(n,p)$ асимптотически почти наверняка нет связных компонент, изоморфных графу L на рисунке 3;

г) **(2 балла.)** Вычислите дисперсию и все факториальные моменты числа связных компонент в $G(n,p)$, изоморфных графу L на рисунке 3 (1 балл - за вычисление *точного* значения дисперсии + 1 балл за вычисление *точного* значения всех факториальных моментов);

д) **(2 балла.)** Вероятность ребра p такова, что $pn^{\frac{11}{10}} \to +\infty$ и $p(n) = \frac{\ln n + 10 \ln\ln n + \omega(n)}{11n}$, где $\omega(n) \to -\infty$ и найдётся действительная константа C такая, что $-1 < C < 0$ и $\omega(n) > C \ln n$ для достаточно больших n. Докажите, что в $G(n,p)$ асимптотически почти наверняка есть компонента связности, изоморфная графу L на рисунке 3;

е) **(1 балл.)** Докажите, что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{11}{10}} \to c$ при $n \to +\infty$ (здесь c — некоторая действительная константа) в $G(n,p)$ число связных компонент, изоморфных графу L на рисунке 3, имеет асимптотическое Пуассоновское распределение с параметром $\frac{c^{10}}{1440}$;

ж) **(2 балла.)** Докажите, что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{11}{10}} \to +\infty$ и $11pn - \ln n - 10 \ln\ln n \to x$ при $n \to +\infty$ (здесь x — некоторая действительная константа) в $G(n,p)$ число связных компонент, изоморфных графу L на рисунке 3, имеет асимптотическое Пуассоновское распределение с параметром $\frac{e^{-x}}{1440 \cdot 11^{10}}$.

Задача 4.

а) **(1 балл.)** Используя линейность математического ожидания, вычислите математическое ожидание числа не обязательно порождённых подграфов в $G(n,p)$, изоморфных графу M на рисунке 4;

б) **(2 балла.)** Докажите, что при вероятности ребра p таком, что $pn^{\frac{2}{7}} \to 0$ при $n \to +\infty$ в $G(n,p)$ асимптотически почти наверняка нет подграфов (не обязательно порождённых), изоморфных графу M на рисунке 4.

Задача 5. Приведите пример несмещенной оценки параметра θ, если выборка $X_1, ..., X_n$ распределена как

а) **(1 балл.)** нормальное распределение с параметрами $\mathcal{N}(0,\theta), \theta > 0$,

б) **(1 балл.)** равномерное распределение на отрезке $[-\theta, \theta], \theta > 0$.

Являются ли найденные вами оценки состоятельными?

Задача 6. (1 балл). Приведите пример состоятельной, но не асимптотически нормальной оценки.

Задача 7. (2 балла). Постройте асимптотически нормальную оценку для $e^{a^2+1}, a > 0$ по выборке из распределения

$$P(X_1 = 1) = 1 - a - a^2, P(X_1 = 2) = a^2, P(X_1 = 3) = a.$$

Найдите асимптотическую дисперсию найденной оценки.

Задача 8. (2 балла). Пусть $X_1, ..., X_n$ – выборка из распределения, имеющего следующую функцию распределения ($\alpha > 0$ известна):

$$F(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln \theta}\right)^{\alpha},\ x \in [1,\theta], \theta \geqslant 2.$$

Найдите оценки параметра θ по методу максимального правдоподобия.

Задача 9. (2 балла). Дана выборка $X_1, ..., X_n$ из распределения Лапласа ($\sigma > 0$):

$$p(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}.$$

Постройте оценку параметра σ^2 с помощью метода моментов.

Задача 10. (2 балла). Пусть $X_1, ..., X_n$ - выборка, $X_i = \xi_i + \eta_i$, ξ_i и η_i независимы ($\theta > 0$), $\xi_i \sim R[-\theta, \theta]$ (равномерное распределение), $\eta_i \sim Pois(\theta)$. Постройте асимптотический доверительный интервал уровня α для параметра θ.

Задача 11. (2 балла). Пусть $X_1, ..., X_n$ – выборка из экспоненциального распределения с параметром $\lambda^2 + 2\lambda, \lambda > 0$. Постройте асимптотический доверительный интервал для λ уровня доверия γ.