Первое домашнее задание по курсу «Теория вероятностей»

Задача 1. (2 балла). Дано произвольное натуральное число $k \geqslant 1$, то есть предполагается, что k — произвольная заданная константа. Вычислите асимптотику полиномиального коэффициента $P(5n, 3n+k, n+k, k) = \frac{(9n+3k)!}{(5n)!(3n+k)!(n+k)!k!}$ при $n \to +\infty$.

Внимание! В задаче требуется найти функцию $f_k(n)$, такую, что $\lim_{n\to+\infty} \frac{f_k(n)}{P(5n,3n+k,n+k,k)} = 1$, а не запись биномиального коэффициента в виде $(\alpha + o(1))^n$. Полный балл будет ставиться только в случае, если ответ досчитан до конца, то есть до формулы, которую нельзя упростить. Ответ должен быть записан в виде формулы, не содержащей введённых в процессе решения вспомогательных функций и параметров. За расписывание ассимптотик констант по формуле Стирлинга будет ставиться 0 баллов - это очень грубая ошибка!

Задача 2. (2 балла). Найдите асимптотику величины $C_{n^{10}+4n^6}^{n^6}$ при $n \to \infty$.

Внимание! В задаче требуется найти функцию $f(n)$, такую, что $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{C_{n^{10}+4n^6}^{n^6}} = 1$, а не запись биномиального коэффициента в виде $(\alpha + o(1))^n$. Полный балл будет ставиться только в случае, если ответ досчитан до конца, то есть до формулы, которую нельзя упростить. Ваш ответ не должен содержать неопределенностей вида $(n^{10} + o(1))^{n^{10}}$ и подобных им - за это Вы получите 0 баллов. Ответ должен быть записан в виде формулы, не содержащей введённых в процессе решения вспомогательных функций и параметров.

Задача 3. (2 балла). Найдите асимптотику для функции $x(n) = \max\left\{x \in \mathbb{N} : x^{(x\ln x)\cdot x!} \leqslant n\right\}$. Ответ необходимо максимально упростить.

Задача 4. (2 балла). Посчитайте число графов множество вершин которых совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, 12\}$ и которые изоморфны графу на рисунке 1.

Внимание! Если Вы используете в решении автоморфизмы, то в Вашем решении обязательно должно содержаться доказательство того, что число автоморфизмов именно такое, какое Вы указали и что других автоморфизмов не существует.

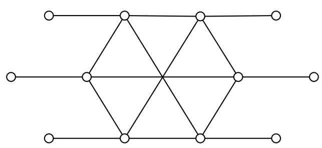

Рис. 1.

Задача 5. (2 балла). Дано множество $R = \{1, 2, \ldots, n\}, n \geqslant 11$. Сколько существует графов, множество вершин которых является подмножеством R и которые являются связными графами на 11 вершинах с простым циклом длины 5, последовательность степеней которых с точностью до перестановки совпадает с последовательностью чисел $4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1$?

Задача 6. (2 балла). Кидаются четыре симметричные шестигранные пронумерованные кости так, что любые наборы очков на костях равновероятны. Есть четыре события:

$$A_1 = \{\text{число очков на первой кости} \leqslant \text{числа очков на второй кости}\};$$
$$A_2 = \{\text{число очков на третьей кости} \leqslant \text{числа очков на четвёртой кости}\};$$
$$A_3 = \{\text{число очков на второй кости} \leqslant \text{числа очков на третьей кости}\};$$
$$A_4 = \{\text{число очков на первой кости} \leqslant \text{числа очков на четвёртой кости}\}.$$

Нарисуйте любой орграф зависимостей событий A_1, A_2, A_3 и A_4 с минимальным числом рёбер.

Внимание! В следующих трёх задачах, если Вы употребляете слово “вероятность”, то до этого нужно чётко и однозначно определить вероятностное пространство, так как формулировки самих задач не вероятностны! Помните: слово “вероятность” не имеет смысла без задания вероятностного пространства!

Задача 7. (2 балла). Дано семейство различных k-элементных подмножеств $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ множества $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Назовём элементы v_i и v_j *соседями*, если они вместе входят хотя бы в одно из множеств A_k. Пусть у каждого из элементов v_j существует не более чем $2k$ соседей (включая сам v_j). Докажите, что элементы $v_1, \ldots, v_n$ при всех достаточно больших k можно раскрасить пятью красками, так, чтобы никакое подмножество из $\mathcal{S}$ не было одноцветным.

Задача 8. (2 балла). Триангуляцией сферы назовем граф, вершины которого лежат на сфере, любая его грань — треугольник, а каждое ребро принадлежит ровно 2 граням. Рассмотрим произвольную триангуляцию сферы с произвольным количеством вершин. Докажите что ребра этой триангуляции можно покрасить в 32 цвета так, чтобы ребра любой грани были разноцветными (то есть все три её ребра имели попарно различные цвета).

Задача 9. (2 балла). Рассмотрим полный двудольный граф с N вершинами в одной доле и N вершинами в другой. Докажите, что если параметр A удовлетворяет условию $\sum_{t=1}^{A} \binom{A}{t}\binom{N-A}{A-t} < \frac{k^{A^2/2}}{2\sqrt{k}}$ $\left(\text{здесь, если } A - t > N - A, \text{ то предполагается, что } \binom{N-A}{A-t} = 0\right)$, то рёбра этого полного двудольного графа можно раскрасить в k цветов так, чтобы никакая клика размера A на A (клика в двудольном графе - полный двудольнй подграф) не состояла из ребер только одного цвета.

Задача 10. (2 балла). Рассмотрим модель случайного графа $G\left(n, \frac{1}{2}\right)$, $n \geqslant 7$. Найдите математическое ожидание (в зависимости от $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 6$) числа неупорядоченных пар *связных компонент* в этом случайном графе, для некоторых $l, m \in \mathbb{N}$ одна из которых является простой цепью с $l \geqslant 2$ вершинами, а вторая — простым циклом на $m \geqslant 3$ вершинах, $l + m = k < n$. (Ответ вполне может быть записан в виде суммы.)

Задача 11. (2 балла). Рассмотрим модель случайного графа $G\left(4, \frac{1}{3}\right)$. Найдите вероятность того, что такой случайный граф не содержит треугольников. Треугольником в графе называется клика размера 3.