①

$$P(5n,3n+k,n+k,k)=\frac{(9n+3k)!}{(5n)!\,(3n+k)!\,(n+k)!\,k!}\underset{\text{Стирлинга}}{\overset{\text{ф-ла}}{\sim}}\frac{\sqrt{2\pi\cdot 3(3n+k)}\left(\frac{9n+3k}{e}\right)^{9n+3k}}{\sqrt{10\pi n}\left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}\sqrt{2\pi(3n+k)}\left(\frac{3n+k}{e}\right)^{3n+k}}$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(n+k)}\left(\frac{n+k}{e}\right)^{n+k}\cdot k!}\quad\boxed{\sim}$$

$$\bullet\ (9n+3k)^{9n+3k}=e^{(9n+3k)\ln(9n+3k)}=e^{(9n+3k)\left[\ln(9n)+\ln\left(1+\frac{k}{3n}\right)\right]}\sim$$

$$\sim e^{(9n+3k)\left[\ln(9n)+\frac{k}{3n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}\sim(9n)^{9n+3k}\cdot e^{3k+\frac{3k^2}{3n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}\sim(9n)^{9n+3k}\cdot e^{3k}$$ при $n\to\infty$

$$\bullet\ (3n+k)^{3n+k}=e^{(3n+k)\ln(3n+k)}=e^{(3n+k)\left[\ln(3n)+\ln\left(1+\frac{k}{3n}\right)\right]}\sim$$

$$\sim(3n)^{3n+k}\cdot e^{(3n+k)\left(\frac{k}{3n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\sim(3n)^{3n+k}e^{k}$$ при $n\to\infty$

$$\boxed{\sim}\ \frac{\sqrt{3}\cdot(9n)^{9n+3k}e^{3k}}{2\pi\sqrt{5n}\,k!\,(5n)^{5n}\cdot(3n)^{3n+k}e^{k}\cdot\underbrace{\sqrt{n+k}}_{\sim\sqrt{n}}\,n^{n+k}e^{k}}\sim\frac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{5}\,k!}\cdot\frac{3^{15n+5k}\cdot n^{k-1}}{5^{5n}}$$

$$\bullet\ (n+k)^{n+k}=e^{(n+k)\ln(n+k)}=e^{(n+k)\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]}=n^{n+k}e^{(n+k)\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}\sim$$

$$\sim n^{n+k}e^{(n+k)\left(\frac{k}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\sim n^{n+k}e^{k}$$ при $n\to\infty$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}\cdot 3^{15n+5k}\cdot n^{k-1}}{2\pi\sqrt{5}\,k!\cdot 5^{5n}}$

② $C^{n^6}_{n^{10}+4n^6} = \dfrac{(n^{10}+4n^6)!}{(n^6)!\,(n^{10}+3n^6)!} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi(n^{10}+4n^6)}\left(\frac{n^{10}+4n^6}{e}\right)^{n^{10}+4n^6}}{\sqrt{2\pi n^6}\left(\frac{n^6}{e}\right)^{n^6}\sqrt{2\pi(n^{10}+3n^6)}\left(\frac{n^{10}+3n^6}{e}\right)^{n^{10}+3n^6}} \sim$

$\sim \dfrac{n^3\sqrt{n^4+4}\,(n^{10}+4n^6)^{n^{10}+4n^6}}{\sqrt{2\pi}\,n^3(n^6)^{n^6}\cdot n^3\sqrt{n^4+3}\cdot(n^{10}+3n^6)^{n^{10}+3n^6}} \sim \dfrac{\cancel{n^3}\cdot\cancel{n^2}(n^{10}+4n^6)^{n^{10}+4n^6}}{\sqrt{2\pi}\,n^3(n^6)^{n^6}\cdot\cancel{n^3}\cdot\cancel{n^2}(n^{10}+3n^6)^{n^{10}+3n^6}}\ \boxed{\sim}$

• $(n^{10}+4n^6)^{n^{10}+4n^6} = e^{(n^{10}+4n^6)\ln(n^{10}+4n^6)} = e^{(n^{10}+4n^6)[\ln n^{10}+\ln(1+\frac{4}{n^4})]} \sim$

$\sim n^{10(n^{10}+4n^6)}\, e^{(n^{10}+4n^6)\left(\frac{4}{n^4}-\frac{4^2}{2n^8}+\frac{4^3}{3n^{12}}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{n^{16}}\right)\right)} \sim$

$\sim n^{10(n^{10}+4n^6)}\, e^{4n^6-\frac{4^2}{2}n^2+\frac{4^3}{3n^2}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{n^{16}}\right)+16n^2-\frac{4^3}{2n^2}+\frac{4^4}{3n^6}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{n^{16}}\right)} \sim$

$\sim n^{10(n^{10}+4n^6)}\, e^{4n^6+8n^2}$ при $n\to\infty$

• $(n^{10}+3n^6)^{(n^{10}+3n^6)} = e^{(n^{10}+3n^6)\ln(n^{10}+3n^6)} = e^{(n^{10}+3n^6)[\ln n^{10}+\ln(1+\frac{3}{n^4})]} \sim$

$\sim n^{10(n^{10}+3n^6)}\, e^{(n^{10}+3n^6)\left(\frac{3}{n^4}-\frac{3^2}{2n^8}+\frac{3^3}{3n^{12}}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{n^{16}}\right)\right)} \sim$

$\sim n^{10(n^{10}+3n^6)}\, e^{3n^6-\frac{3^2}{2}n^2+\frac{3^2}{n^2}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{n^{16}}\right)+9n^2-\frac{3^3}{2n^2}+\frac{3^3}{n^6}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{n^{16}}\right)} \sim$

$\sim n^{10(n^{10}+3n^6)}\, e^{3n^6+4,5n^2}$ при $n\to\infty$

$\boxed{\sim}\ \dfrac{n^{10(n^{10}+4n^6)}\,e^{4n^6+8n^2}}{\sqrt{2\pi}\,n^{3+6n^6}\cdot n^{10(n^{10}+3n^6)}\,e^{3n^6+4,5n^2}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot n^{4n^6-3}\,e^{n^6+3,5n^2}$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,n^{4n^6-3}\,e^{n^6+3,5n^2}$

③ Найдите асимптотику для ф-ции $x(n) = \max\{x \in \mathbb{N} : x^{(x\ln x)x!} \leq n\}$

$$n = x(n)^{x(n)\ln x(n)\,(x(n))!} + r(n),$$ где $r(n)$ - остаток (≥ 0)

$$0 \leq r(n) < (x(n)+1)^{(x(n)+1)\ln(x(n)+1)\,(x(n)+1)!} - x(n)^{x(n)\ln x(n)\,x(n)!} =$$

$$= x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!}\underbrace{\left(\frac{(x(n)+1)^{(x(n)+1)\ln(x(n)+1)(x(n)+1)!}}{x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!}} - 1\right)}_{\substack{\text{монотонно возрастает при } x\geq 1 \\ \text{и больше } 1}} \Rightarrow n \nsim x(n)$$

$$\ln n = \ln\left[x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!} + r(n)\right] =$$

$$= \ln x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!} + \ln\left(1 + \frac{r(n)}{x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!}}\right) =$$

$$= x(n)\ln^2 x(n)(x(n))!\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{r(n)}{x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!}}\right)}{x(n)\ln^2 x(n)(x(n))!}\right)$$

$$1 \leq 1 + \frac{r(n)}{x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!}} \leq \frac{(x(n)+1)^{(x(n)+1)\ln(x(n)+1)(x(n)+1)!}}{x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!}}$$

$$0 \leq \ln\left(1+\frac{r(n)}{x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!}}\right) \leq \underbrace{(x(n)+1)\ln^2(x(n)+1)(x(n)+1)! - x(n)\ln^2 x(n)(x(n))!}_{> x(n)\ln^2 x(n)(x(n))!}$$

$$\ln\ln n = \left(\ln x(n) + \ln\ln^2 x(n) + \ln(x(n))!\right) + \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{r(n)}{x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!}}\right)}{x(n)\ln^2 x(n)(x(n))!}\right) =$$

$$= \Big(\ln x(n) + \ln\ln^2 x(n) + \underbrace{\ln(x(n))!}_{\substack{\sim x(n)\ln x(n) \\ \text{(с семинара)}}}\Big)\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{\ln(1+\ldots)}{\ldots}\right)}{\ln x(n) + \ln\ln^2 x(n) + \ln(x(n))!}\right) \sim$$

$$\sim \underbrace{\ln x(n) + 2\ln\ln x(n) + x(n)\ln x(n)}_{\boxed{\sim}},$$ т.к.

$$1 \leq 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{r(n)}{x(n)^{x(n)\ln x(n)(x(n))!}}\right)}{x(n)\ln^2 x(n)(x(n))!} \leq \frac{(x(n)+1)\ln^2(x(n)+1)(x(n)+1)! - x(n)\ln^2 x(n)(x(n))!}{x(n)\ln^2 x(n)(x(n))!} + 1$$

$$1 \leq 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{r(n)}{\ldots}\right)}{\ldots} \leq \frac{(x(n)+1)\ln^2(x(n)+1)(x(n)+1)!}{x(n)\ln^2 x(n)(x(n))!}$$

$$0 \le \ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{r(n)}{\cdots}\right)}{\cdots}\right) \le \underbrace{\begin{aligned}&\ln(x(n)+1)+\ln\ln^2(x(n)+1)+\ln(x(n)+1)! - \\ &-\ln x(n)-\ln\ln^2 x(n)-\ln(x(n))!\end{aligned}}_{<\ln x(n)+\ln\ln^2 x(n)-\ln(x(n))!},$$

$$\boxed{\sim} \quad x(n)\ln x(n)\left(\frac{1}{x(n)}+\frac{2\ln\ln x(n)}{x(n)\ln x(n)}+1\right)\sim x(n)\ln x(n)$$

$$\Rightarrow \quad \ln\ln n \sim x(n)\ln x(n)$$

$$\ln\ln\ln n \sim \ln x(n)+\ln\ln x(n) \sim \ln x(n) \sim \frac{\ln\ln n}{x(n)}$$

$$\Rightarrow \quad x(n) \sim \frac{\ln\ln n}{\ln\ln\ln n}$$

Ответ: $x(n) \sim \dfrac{\ln\ln n}{\ln\ln\ln n}$

④ Найти число графов мн-во вершин которых совпадает с мн-вом {1,2,..,12} и которые изоморфны графу на рис. 1.

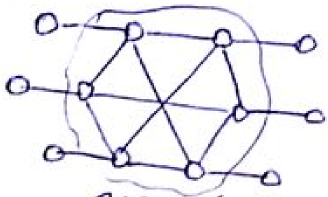


рис. 1

1) Число способов составить $K_{3,3}$ из 12 вершин - $C_{12}^6 \cdot \frac{6!}{3!\cdot 3!\cdot 2}$

т.к.: 1) выбрать 6 вершин из 12 - C_{12}^6

2) Составить полный двудольный граф $K_{n,n}$ - $C_{2n}^n \cdot \frac{1}{2}$. Умнож. на $\frac{1}{2}$, потому что следует учитывать попадание n вершин в разные доли. Например, для $K_{2,2}$:

левая	правая
1,2	3,4
3,4	1,2
...	...

=> поэтому делим на 2

2) Число способов перенумеровать "внешние" (по отнош. к $K_{3,3}$) вершины - 6!

Ответ: $C_{12}^6 \cdot \frac{6!}{2\cdot 3!\cdot 3!} \cdot 6! = \frac{12!}{\cancel{6!\cdot 6!}} \cdot \frac{\cancel{6!\cdot 6!}}{2\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{12!}{72}$

(5) Дано мн-во $R = \{1,2,..,n\}$, $n \geq 11$. Сколько существует графов, мн-во вершин которых явл. подмн. мн-ва R и которые явл. связными графами на 11 вершинах с простым циклом длины 5, последовательность степеней которых с точностью до перестановки совпадает с последоват. чисел 4,3,3,3,2,2,1,1,1,1,1?

1) Выбрать 11 вершин из мн-ва R — C_n^{11} способов

2) Составить цикл на 5 вершинах — $C_{11}^5 \cdot \frac{5!}{2 \cdot 5}$ способов

3) Составим графы на цикле из 5 вершин

~~4~~, ~~3~~, ~~3~~, ~~3~~, ~~2~~, 2, 1, 1, 1, 1, 1

1.

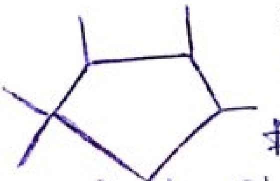


Рис.1

На цикле могут быть вершины со степенями 4(×1), 3(×3), 2(×1)

4(×1) - 1 вершина со степенью 4 и т.д.

$P(1,3,1) = \frac{5!}{1! \cdot 3! \cdot 1!}$ - способов подвесить

а) подвешиваем вершину со степенью 2 к вершине, ~~[illegible]~~ степени 4

$6 \cdot 5!$ способов

Рис.1а

подвешиваем вершину сюда (на одну из) => получаем степень вершины 2

б) подвешиваем вершину со степенью 2 к вершине, ~~[illegible]~~ степени 3

$6 \cdot C_5^2 \cdot 3! \cdot 3 = 3^2 \cdot 5!$

на одну из

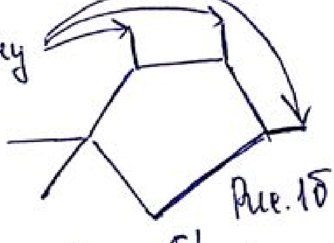


Рис.1б

Для 1: $\frac{5!}{3!}(6 \cdot 5! + 3^2 \cdot 5!) = \underline{\frac{5!}{3!} \cdot 15 \cdot 5!}$

2. На цикле могут быть вершины со степенями $4(\times 1)$, $3(\times 2)$, $2(\times 2)$ $\quad 4, \cancel{3}, \cancel{3}, 3, \cancel{2}, \cancel{2}, 1, 1, 1, 1, 1$

$P(1,2,2) = \frac{5!}{2!\cdot 2!}$ способов

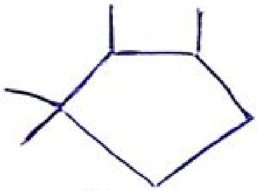


Рис. 2

а) Подвешивая вершину со степенью 3 к вершине со степенью 4 (рис 2а)

$$6\cdot C_5^2\cdot 3! = \frac{6\cdot 5!}{2!\cdot 3!}\cdot 3! = 3\cdot 5!$$

б) Подвешиваем вершину со степенью 3 к вершине со степенью 3 (рис 2б)

$$2\cdot 6\cdot C_5^2\cdot 3 = 2\cdot 6\cdot 3\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 3\cdot 5!$$

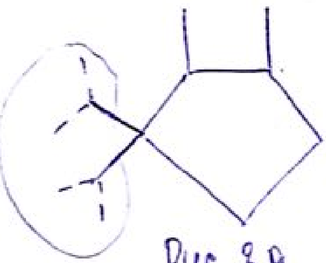


Рис. 2а

На одной из вершин степени 3

Для 2: $\frac{5!}{2!\cdot 2!}\left(3\cdot 5! + 3\cdot 5!\right) = \frac{6\cdot(5!)^2}{4} = \frac{3}{2}(5!)^2$

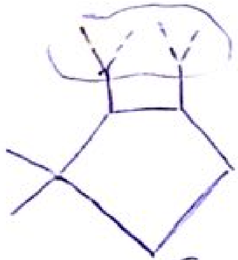


Рис. 2б

3. На цикле могут быть вершины со степенями $3(\times 3)$, $2(\times 2)$ $\quad 4, \cancel{3}, \cancel{3}, \cancel{3}, \cancel{2}, \cancel{2}, 1, 1, 1, 1, 1$ $\quad P(3,2) = \frac{5!}{3!\cdot 2!}$

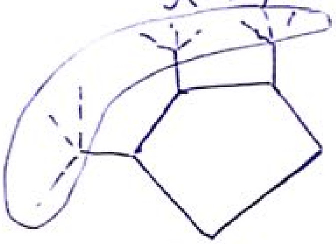


Рис. 3

Вершину со степенью 4 можно подвесить только к вершине со степенью 3. (на цикле)

$$3\cdot 6\cdot C_5^3\cdot 2!$$

Для 3: $\frac{5!}{\cancel{3!\cdot 2!}}\left(3\cdot\cancel{6}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\cancel{2!}\right) = \frac{(5!)^2}{4}$

Итого: $C_n^{11}\cdot C_{11}^5\cdot\frac{5!}{2\cdot 5}\left(\frac{15}{6}(5!)^2 + \frac{3}{2}(5!)^2 + \frac{1}{4}(5!)^2\right) = C_n^{11}\cdot\frac{11!}{\cancel{5!}\cdot 6!}\cdot\frac{\cancel{5!}}{2\cdot 5}\cdot\left(\frac{15}{6}(5!)^2 + \frac{3}{2}(5!)^2 + \frac{1}{4}(5!)^2\right) = C_n^{11}\cdot 11!\cdot 8,5$

⑥ $A_1 = \{$ число очков на первой кости $\leq$ числа очков на второй кости $\}$

$A_2 = \{$ число очков на третьей кости $\leq$ числа очков на четвертой кости $\}$

$A_3 = \{$ число очков на второй кости $\leq$ числа очков на третьей кости $\}$

$A_4 = \{$ число очков на первой кости $\leq$ числа очков на четвертой кости $\}$

Рассмотрим вероятностное пр-во (Ω, F, P):

- Ω - пр-во, кот. представляет собой набор всех возможных рез-тов при подбрасывании 4 шестигранных костей
- F - набор событий
- P - вероятность, кот. присваивает каждому событию $\in F$ вероятность от 0 до 1.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{21 \cdot 6^2}{6^4} = \frac{21}{36}$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{|\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 \leq a_2,\ a_3 \leq a_4\}|}{6^4} = \frac{21 \cdot 21}{36 \cdot 36} = P(A_1)P(A_2) \text{ - } A_1 \text{ и } A_2 \text{ незав}$$

$$P(A_1 A_3) = \frac{56 \cdot 6}{6^4} = \frac{336}{6^4} \neq P(A_1)P(A_3) \Rightarrow A_1 \text{ и } A_3 \text{ зависимы}$$

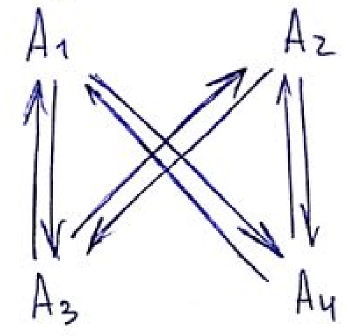
$$P(A_1 A_4) = \frac{91 \cdot 6}{6^4} = \frac{546}{6^4} \neq P(A_1)P(A_4) \Rightarrow A_1 \text{ и } A_4 \text{ зависимы}$$

$$P(A_2 A_3) = \frac{56 \cdot 6}{6^4} = \frac{336}{6^4} \neq P(A_2)P(A_3) \Rightarrow A_2 \text{ и } A_3 \text{ зависимы}$$

$$P(A_2 A_4) = \frac{91 \cdot 6}{6^4} = \frac{546}{6^4} \neq P(A_2)P(A_4) \Rightarrow A_2 \text{ и } A_4 \text{ зависимы}$$

$$P(A_3 A_4) = \frac{21 \cdot 21}{6^4} = P(A_3)P(A_4) \Rightarrow A_3 \text{ и } A_4 \text{ незав.}$$

Орграф зависимостей событий:



(7) $S = \{A_1, \dots, A_m\}$ $|A_i| = k$

A_i - подмн-во мн-ва $\{v_1, \dots, v_n\}$

v_i и v_j - соседи, если они вместе входят в хотя бы в одно из мн-в A_i

Пусть у каждого v_j $\exists$ не более чем $2k$ соседей (включая сам v_j).

Докажите, что $v_1, \dots, v_n$ при $\forall$ достат. больших k можно раскрасить пятью красками, так, чтобы никакое подмн-во из S не было одноцветным.

Док-во:

Рассмотрим события $A_1, \dots, A_n$: A_i - A_i-одноцветно. Будем предполагать, что цвет покраски выбирается равновероятно, тогда $P(A_i) = p = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k = 5^{1-k}$

Найдем оценку для d, означающую $\forall i$ A_i не зависит от всех остальных, кроме $\le d$. Для этого рассмотрим эл-т v_j.

По условию у него имеется $2k$ соседей (включая сам v_j)

Найдем все способы составить другие мн-ва явл подмн-вами соседей v_j. Это можно сделать $k \cdot C_{2k-1}^{k-1}$ способами

(k способами выбрать $v_j \in A_i$ и C_{2k-1}^{k-1} - выбрать его соседей).

Тогда

$$d \le k \cdot C_{2k-1}^{k-1} = \frac{(2k-1)!}{(k-1)!\,k!} \cdot k = \frac{(2k-1)!}{((k-1)!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2k-1)} \cdot \left(\frac{2k-1}{e}\right)^{2k-1}}{\left(\sqrt{2\pi(k-1)}\left(\frac{k-1}{e}\right)^{k-1}\right)^2} \sim$$

$$\sim \frac{\sqrt{2\pi(2k-1)}\,(2k-1)^{2k-1} e^{-1-2k+1}}{\left(\sqrt{2\pi(k-1)}\,(k-1)^{k-1} e^{-1-k+1}\right)^2} \sim \underset{>1}{const} \cdot 4^k$$

По ЛЛЛ: $ep(1+d) \le e\, 5^{1-k}(1+4^k) \le 1$, если $k \geq 2$ $\Rightarrow$

$P(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i) > 0$, т.е. вероятность раскраски элементов таким образом, чтобы никакое подмн-во из S не было одноцветным, > 0.

ч.т.д.

8) Пусть событие $\bar{A}_i$ - ребра грани i разноцветны, тогда

$p = P(A_i) = 1 - P(\bar{A}_i) = 1 - \frac{k(k-1)(k-2)}{k^3}$, где k - кол-во цветов

Оценка на $d = 2$ (по условию)

Тогда $ep(1+d) = e\left(1 - \frac{(k-1)(k-2)}{k^2}\right) \cdot 3 \leq 1$ при $k \geq 32$

По ЛЛЛ $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) > 0$, т.е. при $k \geq 32$ ребра триангуляции можно покрасить так, чтобы ребра любой грани были разноцветными.

ч.т.д.

⑨ Рассмотрим клику размера A на A. Пусть $\bar{A}_i$ - i клика не одноцветна. Тогда $P(A_i) = 1 - P(\bar{A}_i) = 1 - \frac{k}{k^{A^2}}$, k - кол-во цветов.

d - число клик, кот. имеют непуст. подмн. во A_i клики, ребер

тогда $d = \left(\sum_{t=1}^{A} \binom{A}{t}\binom{N-A}{A-t}\right)^2 - 1$

По ЛЛЛ $ep(d+1) \le 1$ =>

$$e \cdot \left(1 - \frac{k}{k^{A^2}}\right)\left(\sum_{t=1}^{A}\binom{A}{t}\binom{N-A}{A-t}\right)^2 \le 1.$$

$$\left(\sum \dots\right)^2 \le \frac{1}{e} \frac{1}{\left(1 - \frac{k}{k^{A^2}}\right)} \le \frac{1}{e} \frac{k^{A^2}}{k^{A^2} - k} < \frac{1}{e} \frac{k^{A^2}}{k}$$

$$\sum \dots < \frac{k^{A^2/2}}{\sqrt{ek}} < \frac{k^{A^2/2}}{2\sqrt{k}}$$

ч.т.д.