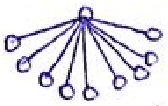
① а) X - число подграфов в $G(n,p)$, изоморфных H



граф H

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{на } i\text{-ом наборе ребер появились нужные ребра} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$EX = EX_1 + \ldots + EX_t = 10 \cdot C_n^{10} p^9, \quad t = C_n^{10} \cdot 10$$

Ответ: $EX = 10 C_n^{10} p^9$

б) $p: \ p n^{10/9} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$P(X \geq 1) = \frac{EX}{1} = 10 C_n^{10} p^9 \sim \frac{n^{10}}{9!} p^9 \sim \frac{(n^{10/9} p)^9}{9!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$ т.е. асимптотически почти наверняка нет подграфов (не обязат. порожд), изоморфных графу H.

в) $$VX = cov(X,X) = cov\left(\sum_{i=1}^{10C_n^{10}} X_i, \sum_{j=1}^{10C_n^{10}} X_j\right) = \sum_{i=1}^{10C_n^{10}} \sum_{j=1}^{10C_n^{10}} cov(X_i, X_j) =$$

$$= 10 C_n^{10}(p^9 - p^{18}) + \sum_{i=1}^{8} 10 C_n^{10} C_9^i C_{n-10}^{9-i} (p^{18-i} - p^{18}) + 10 C_n^{10} C_9^1 C_{n-2}^8 (p^{17} - p^{18})$$

г) $$P(X=0) = P(X \leq 0) = P(-X \geq 0) = P(EX - X \geq EX) \leq P(|X - EX| \geq EX) \leq \frac{VX}{(EX)^2}$$

$$\frac{VX}{(EX)^2} = \frac{10 C_n^{10}(p^9 - p^{18}) + \sum_{i=1}^{8} 10 C_n^{10} C_9^i C_{n-10}^{9-i}(p^{18-i} - p^{18}) + 10 C_n^{10} C_9^1 C_{n-2}^8 (p^{17} - p^{18})}{(10 C_n^{10} p^9)^2} =$$

$$= \frac{p^9 - p^{18} + \sum_{i=1}^{8} C_9^i C_{n-10}^{9-i}(p^{18-i} - p^{18}) + C_9^1 C_{n-2}^8 (p^{17} - p^{18})}{10 C_n^{10} p^9 \cdot p^9} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

1) $$\frac{p^9 - p^{18}}{10 C_n^{10} p^{18}} = \frac{1}{10 C_n^{10} p^9} - \frac{1}{10 C_n^{10}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

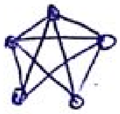
2) $$\frac{C_9^1 C_{n-2}^8 (p^{17} - p^{18})}{10 C_n^{10} p^{18}} \sim \frac{n^8 (p^{17} - p^{18})}{n^{10} p^{18}} \sim \frac{1}{n^2 p} - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \sim \frac{1}{p n^{10/9} \cdot n^{8/9}} \to 0$$

3) $i = 1$ $$\frac{C_9^1 C_{n-10}^8 (p^{17} - p^{18})}{10 C_n^{10} p^9 p^9} \sim \frac{n^8 (p^{17} - p^{18})}{n^{10} p^{18}} \to 0$$

$\forall i = 2, \ldots, 8$ можно аналогично показать их стремление к 0 при $n \to \infty$

Тогда $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \to 1$, т.е. почти наверняка существует подграф (не обязат. порожденный), изоморфный графу H.

② а) X-число порожд. подграфов в $G(n,p)$, изоморфных графу K



$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{на } i\text{-ом наборе ребер появились нужные ребра и не появились ненужные} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

граф K

$EX = EX_1 + \ldots + EX_t, \quad t = 10C_n^5$

$EX = 10C_n^5 \cdot p^9(1-p)$

Ответ: $EX = 10C_n^5 p^9(1-p)$

б) 1) $p: pn^{5/9} \to 0 \quad n\to\infty$

$$P(X \geq 1) = EX = 10C_n^5 p^9(1-p) \sim 10\frac{n^5}{5!}p^9(1-p) \sim \frac{10}{5!}\underbrace{(pn^{5/9})^9}_{\to 0}\underbrace{(1-p)}_{\to 1} \to 0,$$

т.к. $pn^{5/9} \to 0 \Rightarrow p \to 0$

2) $p = 1 - \frac{f(n)}{n^5}$, где $f(n): f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$P(X \geq 1) = 10C_n^5 p^9(1-p) \sim \frac{10}{5!} n^5 p^9(1-p) \sim \cancel{n^5}\underbrace{\left(1 - \frac{f(n)}{n^5}\right)^9}_{\to 1}\frac{\overset{\to 0}{f(n)}}{\cancel{n^5}} \to 0$$

т.е. асимптотически почти наверняка нет порожд. подграфов

в)
$$p(n) = \begin{cases} \frac{g(n)}{n^{4/5}}, & \frac{g(n)}{n^{7/5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ и } \exists\, C>0 \text{ и натур. } n_0>0: 1 - \frac{g(n)}{n^{4/5}} \geq C \ \forall n \geq n_0 \\ 1 - \frac{f(n)}{n^5}, & f(n): \frac{f(n)}{n^3} \to +\infty \text{ и } \frac{f(n)}{n^5} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

1) $p(n) = \frac{g(n)}{n^{4/5}}$

$$EX \sim n^5 p^9(1-p) \sim n^5 \frac{(g(n))^9}{n^{36/5}}\underbrace{\left(1 - \frac{g(n)}{n^{4/5}}\right)}_{\geq C} \sim \left(\frac{g(n)}{n^{7/5}}\right)^{\overset{+\infty}{9}} \cdot \overset{+\infty}{n^{54/5}}\underbrace{\left(1 - \frac{g(n)}{n^{4/5}}\right)}_{\geq C} \to +\infty$$

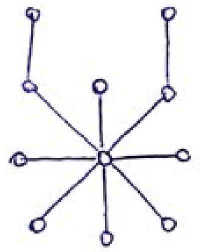
2) $p(n) = 1 - \frac{f(n)}{n^5}$

$$EX \sim n^5 p^9(1-p) \sim \cancel{n^5}\underbrace{\left(1 - \frac{f(n)}{n^5}\right)}_{\to 1} \cdot \frac{f(n)}{\cancel{n^5}} \to +\infty, \text{ т.к. } \frac{f(n)}{n^3} \to +\infty \Rightarrow f(n) \to +\infty$$

В обоих случаях $EX \to +\infty$

$$P(X=0) = P(X \leq 0) = P(-X \geq 0) = P(EX - X \geq EX) \leq P(|X - EX| \geq EX) \leq \frac{VX}{(EX)^2}$$

③ а)



граф L

X – число связных компонент

$$X_i = \begin{cases} 1, & i\text{-набор явл. компонентой связности с нужными ребрами} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$EX = C_n^{11} \cdot 11 \cdot C_{10}^{8} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \underbrace{p^{10}}_{\text{нужные ребра}} \underbrace{(1-p)^{C_{11}^2-10}}_{\text{нет других ребер в компоненте связности}} \cdot \overbrace{(1-p)^{11(n-11)}}^{\text{нет ребер в другие компоненты}} =$$

$$= C_n^{11} \cdot \frac{11!}{6! \cdot 2!} p^{10} (1-p)^{C_{11}^2-10+11(n-11)}$$

б) $p:\ pn^{11/10} \to 0$ при $n \to +\infty$

$$P(X \geq 1) = EX = \frac{11!}{6! \cdot 2!} C_n^{11} p^{10} (1-p)^{C_{11}^2-10} \cdot (1-p)^{11(n-11)} \sim$$

$$\sim \frac{11!}{6! \cdot 2!} \frac{n^{11}}{11!} p^{10} (1-p)^{C_{11}^2-10} (1-p)^{11(n-11)} \sim$$

$$\sim \underbrace{(n^{11/10} p)^{10}}_{\to 0} \underbrace{(1-p)^{C_{11}^2-10+11(n-1)}}_{\to 1} \to 0, \text{ т.к. } p \to 0 \text{ (и } pn^{11/10} \to 0)$$

Т.е. асимптотически почти наверняка нет связных компонент, изоморфных графу L

в) $p:\ pn^{11/10} \to +\infty,\ 11pn - \ln n - 10 \ln\ln n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \iff p = \frac{\ln n + 10 \ln\ln n + \omega(n)}{11n},$

$p \leq \frac{\ln n}{n}$ $\qquad \omega(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$$P(X \geq 1) = EX \sim n^{11} p^{10} (1-p)^{C_{11}^2-10} (1-p)^{11(n-11)} \sim$$

$$\sim \exp\left[11 \ln n + 10 \ln p + (C_{11}^2 - 10 + 11(n-11)) \ln(1-p)\right] \sim$$

$$\sim \exp\left[11 \ln n + 10 \ln\left\{\frac{\ln n + 10 \ln\ln n + \omega(n)}{11n}\right\} + 11n(-p)\right] \sim$$

$$\sim \exp\left[11 \ln n + 10 \ln\{\ln n + 10 \ln\ln n + \omega(n)\} - 10 \ln(11n) - 11np\right] \sim$$

$$\sim \exp\Big[\cancel{11 \ln n} + 10 \cancel{\ln\ln n} + 10 \ln\Big\{\underbrace{1 + \frac{10 \ln\ln n}{\ln n} + \frac{\omega(n)}{\ln n}}_{\leq 12}\Big\} - 10 \cancel{\ln n} -$$

$$- \cancel{\ln n} - 10 \cancel{\ln\ln n} - \omega(n)\Big] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Т.е. асимптотически почти наверняка нет связных компонент, изоморфных графу L г) <u>Факториальные моменты</u>

X - число связных компонент

$$M_f^r X = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_r)\\ \text{ij попарно}\\ \text{различны}}} M X_{i_1}\dots X_{i_r} = C_n^{11} C_{n-11}^{11} \dots C_{n-11(\dots)}^{11} \left(\frac{11!}{6!\cdot 2!}\right)^r p^{10r} \cdot$$

$$\cdot (1-p)^{(C_{11}^2-10)r} \cdot (1-p)^{11(n-11r)r} \cdot (1-p)^{C_r^2 \cdot 11^2} = \frac{n!}{(2\cdot 6!)^r (n-11r)!} p^{10r} (1-p)^{11nr - \frac{121r^2+31r}{2}}$$

p^{10r} - есть ребра внутри компонент

$(1-p)^{(C_{11}^2-10)r}$ - нет ребер внутри компонент

$(1-p)^{11(n-11r)r}$ - сделать связные компоненты относительно тех, что не вошли в $X_{i_1},\dots,X_{i_r}$

$(1-p)^{C_r^2\cdot 11^2}$ - сделать r связных компонент (которые вошли в $X_{i_1},\dots,X_{i_r}$)

<u>Дисперсия</u>

$$VX = EX^2 - (EX)^2 = E(X_1+\dots+X_t)^2 - (EX)^2, \text{ где } t = \frac{11!}{6!\cdot 2!} C_n^{11}$$

$$= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t} E(X_i X_j) + EX - (EX)^2 =$$

$$= \frac{11!}{6!\cdot 2!} C_n^{11} \cdot \frac{11!}{6!\cdot 2!} C_{n-11}^{11} \cdot p^{20} (1-p)^{2(C_{11}^2-10)} (1-p)^{22(n-22)} (1-p)^{121} + EX - (EX)^2$$

Ответ: $M_f^r X = \dfrac{n!}{(2\cdot 6!)^r (n-11r)!} p^{10r} (1-p)^{11nr - \frac{121r^2+31r}{2}}$

$$VX = \left(\frac{11!}{6!\cdot 2!}\right)^2 C_n^{11} C_{n-11}^{11} \cdot p^{20} (1-p)^{2(C_{11}^2-10)} (1-p)^{22(n-22)+121} +$$
$$+ EX - (EX)^2$$

где $EX = C_n^{11} \cdot \dfrac{11!}{6!\cdot 2!} p^{10} (1-p)^{C_{11}^2 - 10 + 11(n-11)}$

g) p: $pn^{11/10} \to +\infty$

$p(n) = \frac{\ln n + 10\ln\ln n + \omega(n)}{11n}$, где $\omega(n) \to -\infty$

$\exists c: -1 < c < 0$ и $\omega(n) > c\ln n$ для достаточно больших n

$$P(X=0) = P(X \le 0) = P(-X \ge 0) = P(EX - X \ge EX) \le P(|X - EX| \ge EX) \le \frac{VX}{(EX)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{11!}{6!\,2!}\right)^2 C_n^{11} C_{n-11}^{11}\, p^{20} (1-p)^{2(C_{11}^2 - 10)} (1-p)^{22(n-22)+121} + EX - (EX)^2}{(EX)^2} \sim$$

$$\sim \frac{n^{11}\cdot n^{11}\, p^{20}\, \cancel{(1-p)^{22n}}^{\to 1}}{\left(n^{11} p^{10} \cancel{(1-p)^{11n}}\right)^2} + \cancel{\frac{1}{EX}}^{\to 0} - 1 \to 0$$

Покажем, что $EX \to +\infty$

$$EX \sim \exp\{11\ln n + 10\ln p + 11n\ln(1-p)\} \sim$$

$$\sim \exp\{11\ln n + 10\ln[\ln n + 10\ln\ln n + \omega(n)] - 10\ln(11n) - 11np\} \sim$$

$$\sim \exp\{\cancel{11\ln n} + 10\ln\ln n + \underbrace{10\ln\left[1 + \frac{10\ln\ln n}{\ln n} + \frac{\omega(n)}{\ln n}\right]}_{\ge 10\ln\left(1 + c + \frac{10\ln\ln n}{\ln n}\right)} - \cancel{10\ln n} -$$

$$- \cancel{\ln n} - \cancel{10\ln\ln n} \underbrace{- \omega(n)}_{\to +\infty}\} \to +\infty$$

т.е. в $G(n,p)$ асимптотически почти наверняка есть компонента связности, изоморфная графу L

е) $p: pn^{11/10} \underset{n\to+\infty}{\to} c$, где c - некоторая действительная константа

$$M_f^r X = \frac{n!}{(2\cdot 6!)^r (n-11r)!} p^{10r} (1-p)^{11nr - \frac{121r^2+31r}{2}} \sim$$

$$\sim \frac{n^{11r}}{(2\cdot 6!)^r} p^{10r} (1-p)^{11nr - \frac{121r^2+31r}{2}} \sim$$

$$\sim \frac{c^{10r}}{(2\cdot 6!)^r} \cdot (1-p)^{11nr - \frac{121r^2+31r}{2}} \sim \left(\frac{c^{10}}{2\cdot 6!}\right)^r, \text{ т.к.:}$$

$$(1-p)^{11nr - \frac{121r^2+31r}{2}} = \exp\left\{\left(11nr - \frac{121r^2+31r}{2}\right)\ln(1-p)\right\} \sim$$

$$\sim \exp\{-11nrp\} \sim \exp\{-11\cdot p\cdot n^{11/10}\cdot n^{-1/10}\} \sim \exp\{-11cn^{-1/10}\} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

По Утв $M_f^r X \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda^r \Rightarrow X \xrightarrow{P} Pois(\lambda)$ получаем, что

X - число связных компонент имеет Пуассоновское распределение с параметром $\frac{c^{10}}{1440}$

ж) $p: pn^{11/10} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ и $11pn - \ln n - 10\ln\ln n \underset{n\to+\infty}{\to} x$, где

x - некоторая действит. константа

$$M_f^r X \sim \frac{n^{11r}}{(2\cdot 6!)^r} p^{10r} (1-p)^{11nr - \frac{121r^2+31r}{2}} =$$

$$= \frac{1}{(1440)^r} \exp\left\{11r\ln n + 10r\ln p + \left(11nr - \frac{121r^2+31r}{2}\right)\ln(1-p)\right\} \sim$$

$$\sim \frac{1}{(1440)^r} \exp\left\{11r\ln n + 10r\ln\frac{x+\ln n+10\ln\ln n}{11n} - 11nrp\right\} \sim$$

$$\sim \frac{1}{(1440)^r} \exp\left\{11r\ln n + 10r\ln\ln n + \underbrace{10r\ln\left[\frac{x}{\ln n} + 1 + \frac{10\ln\ln n}{\ln n}\right]}_{\to 0} - 10r\ln(11n) -\right.$$

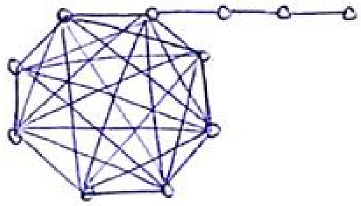
$$\left. - xr - r\ln n - 10r\ln\ln n\right\} \sim \frac{1}{(1440)^r} \exp\left\{\cancel{11r\ln n} + \cancel{10r\ln\ln n} - 10r\ln(11) -\right.$$

$$\left. - 10r\cancel{\ln n} - xr - r\cancel{\ln n} - \cancel{10r\ln\ln n}\right\} = \frac{\exp\{-10r\ln(11) - xr\}}{(1440)^r} =$$

$$= \left[\frac{e^{-x}}{1440\cdot 11^{10}}\right]^r \Rightarrow$$ X имеет Пуассоновское распределение с параметром $\frac{e^{-x}}{1440\cdot 11^{10}}$

④ а) X - число не обязат. порождённых подграфов в $G(n,p)$, изоморфных графу М

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ на } i\text{-ом наборе появились нужные рёбра} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$



Граф М

$$EX = EX_1 + \ldots EX_{C_n^{11} \cdot C_{11}^{8} \cdot 8 \cdot 3!}$$

$$EX = C_n^{11} \cdot C_{11}^{8} \cdot 8 \cdot 3!\, p^{C_8^2 + 3} = C_n^{11} \cdot \frac{11!}{7!}\, p^{C_8^2 + 3}$$

⑤ а) $X_1, \dots, X_n \sim N(0, \theta)$, $\theta > 0$

$$\hat\theta = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar X)^2, \text{ где } \bar X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar X)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar X + (\bar X)^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar X n \bar X + n(\bar X)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\bar X)^2$$

$$E\hat\theta = \frac{n}{n-1} E X_i^2 - \frac{n}{n-1}E(\bar X)^2 = \frac{n}{n-1}\Big[E(X_i - 0)^2 - \underbrace{E(\bar X - 0)^2}_{= E(\bar X - E\bar X)^2 = E(\bar X - \underbrace{EX_i}_{0})^2}\Big] =$$

$$= \frac{n}{n-1}\big[VX_i - V\bar X\big] = \frac{n}{n-1}\Big[\theta - \frac{1}{n}VX_i\Big] =$$

$$= \frac{n}{n-1}\Big[\theta - \frac{1}{n}\theta\Big] = \theta \Rightarrow \text{оценка несмещ.}$$

<u>Состоятельность</u> Пусть $\hat\theta$ - оценка для θ. Тогда, если $E(\hat\theta - \theta)^2 \to 0$ при $n \to \infty$, то оценка состоятельна

Док-во: Оценка состоятельна, если $\hat\theta - \theta \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\hat\theta - \theta| < \varepsilon\} \to 1$.
$$P\{|\hat\theta - \theta| < \varepsilon\} = 1 - P\{|\hat\theta - \theta| \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{E(\hat\theta - \theta)^2}{\varepsilon^2} \to 1$$

ч.т.д.

$$E(\hat\theta - \theta)^2 = V\hat\theta = \underbrace{\frac{n}{(n-1)^2}}_{\to 0} V(X_i - \bar X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$ т.к. VX_i конечна, то дисперсия от преобразования над X_i тоже конечна. $\Rightarrow$ $V(X_i - \bar X)^2$ конечна

Таким образом, $\hat\theta$ несмещ. и состоят. оценка для θ.

б) $X_1, \dots, X_n \sim R[-\theta; \theta]$, $\theta > 0$

$$\hat\theta = 2\frac{\sum |X_i|}{n}$$

$$E\hat\theta = 2E|X_i| = 2\int_{-\theta}^{\theta} |x| \cdot \frac{1}{2\theta}dx = -2\int_{-\theta}^{0} x\frac{1}{2\theta}dx + 2\int_0^\theta x\frac{1}{2\theta}dx = \theta \Rightarrow \text{оценка несмещ.}$$

$$E(\hat\theta - \theta)^2 = V\hat\theta = \frac{4}{n}V|X_i| = \frac{4}{n}\Big(\frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4}\Big) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Таким образом, $\hat\theta$ несмещ. и сост. оценка

⑥ Пусть $X_1,..,X_n \sim R[0,\theta]$

$$p(X_1,..,X_n;\theta)=\begin{cases}\left(\frac{1}{\theta}\right)^n, & X_{(n)}\le\theta,\ X_{(1)}\ge 0\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

По методу макс. правдоподобия максимум $p(x_1,..,x_n;\theta)$ достигается при $\hat\theta = X_{(n)}$

$$F_{\hat\theta}(y)=P\{\max X_i<y\}=\prod_{i=1}^n P\{X_i<y\}=\prod_{i=1}^n F(y)=(F(y))^n=\begin{cases}0, & y<0\\ \left(\frac{y}{\theta}\right)^n, & y\in[0,\theta]\\ 1, & y>\theta\end{cases}$$

$$p_{\hat\theta}(y)=\frac{ny^{n-1}}{\theta^n},\ y\in[0,\theta],\ \text{иначе } 0$$

$$E\hat\theta=\int_0^\theta y\cdot\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{ny^{n+1}}{(n+1)\theta^n}\Big|_0^\theta=\frac{n\theta}{n+1}$$ - оценка смещ.

$$V\hat\theta=\int_0^\theta y^2\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy-(E\hat\theta)^2=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

Сделаем оценку несмещенной: $\theta^*=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

$$V\theta^*=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2V\hat\theta=\frac{\theta^2}{(n+2)n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$ => оценка состоятельна

Рассмотрим $$\frac{\theta^*-E\theta^*}{\sqrt{V\theta^*}}=\frac{\theta^*-\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{(n+2)n}}}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}-\theta\right)\sqrt{n(n+2)}}{\theta}$$

$$P\left\{\frac{\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}-\theta\right)\sqrt{n(n+2)}}{\theta}<0\right\}=P\left\{\frac{n+1}{n}X_{(n)}-\theta<0\right\}=1,$$

тогда как для норм. распред $P\{\frac{n+1}{n}X_{(n)}-\theta<0\}$ должна была быть равна 0.5, но 1 не сходится к 0.5 при $n\to\infty$, следовательно, оценка $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ явл. состоятельной, но не асимптотически нормальной оценкой.

⑦ $P(X_1=1)=1-a-a^2$, $P(X_1=2)=a^2$, $P(X_1=3)=a$

$EX_1=(1-a-a^2)+2a^2+3a = a^2+2a+1=(a+1)^2$

$\overline{X}_1 \to (a+1)^2$ (стремится почти наверняка)

$VX_1=(1-(a+1)^2)^2(1-a-a^2)+(2-(a+1)^2)^2a^2+(3-(a+1)^2)^2a = -a(a^3+4a^2+3a-4)$

Утв Если $\theta^*(x)$ - асимпт. нормальная для θ, то $f(\theta^*(x))$ асимптотич. нормальная для $f(\theta)$, если $f(x)$ - диф. ф-ия на Θ.

Тогда по утв $a \sim \sqrt{\overline{X}_1}-1$.

$e^{a^2+1} \sim e^{\overline{X}_1-2\sqrt{\overline{X}_1}+2}$

$Ve^{\overline{X}_1-2\sqrt{\overline{X}_1}+2} = VX_1\cdot(f'(x))^2 \approx -a(a^3+4a^2+3a-4)\cdot e^{(a^2+1)\cdot 2}\cdot\frac{a^2}{(a+1)^2}$

$f(x)=e^{x-2\sqrt{x}+2}$

$f'(x)=e^{x-2\sqrt{x}+2}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=e^{x-2\sqrt{x}+2}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \sim e^{a^2+1}\cdot\frac{a}{a+1}$

Ответ: $e^{\overline{X}_1-2\sqrt{\overline{X}_1}+2}$ - асимпт. норм. оценка

$-\frac{a^3(a^3+4a^2+3a-4)\,e^{2(a^2+1)}}{(a+1)^2}$ - асимпт. дисперсия данной оценки

⑧ $x_1, \dots, x_n$, $\alpha > 0$ $F(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln \theta}\right)^{\alpha}$, $x \in [1, \theta]$, $\theta \geq 2$

плотность распределения $p(x) = \frac{\alpha(\ln x)^{\alpha-1}}{x(\ln\theta)^{\alpha}}$

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) = \frac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n}(\ln x_i)^{\alpha-1}}{\prod_{i=1}^{n} x_i (\ln\theta)^{n\alpha}} \to \max$$

Максимум достигается при $\hat{\theta} = \max\{x_{(n)}, 2\}$

Ответ: $\hat{\theta} = \max\{x_{(n)}, 2\}$

⑨ $x_1, \dots, x_n$ ~ распред Лапласа ($\sigma > 0$)

$p(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$

Метод моментов

$$\left.\begin{aligned} &E\bar{X} = EX_i = 0 \\ &E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = EX_i^2 = 2\sigma^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}$$

Ответ: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}$

⑩ $X_1, \dots, X_n$, $X_i = \xi_i + \eta_i$

ξ_i и η_i незав. $\xi_i \sim R[-\theta; \theta]$, $\theta > 0$

$\eta_i \sim Pois(\theta)$

$$EX_i = E\xi_i + E\eta_i = 0 + \theta = \theta \Rightarrow E\bar{X} = \theta$$

$$VX_i = V\xi_i + V\eta_i = \frac{(\theta - (-\theta))^2}{12} + \theta = \frac{\theta^2}{3} + \theta \Rightarrow V\bar{X} = \frac{1}{n}\left(\frac{\theta^2}{3} + \theta\right)$$

$$P\left(u_{\frac{1-\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - E\bar{X}}{\sqrt{V\bar{X}}} \leq u_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) \to \alpha, \quad n \to \infty$$

$$u_{\frac{1-\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{(\bar{X})^2}{3} + \bar{X}\right)}} \leq u_{\frac{1+\alpha}{2}}$$

$$-u_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\frac{(\bar{X})^2}{3} + \bar{X}}}{\sqrt{n}} + \bar{X} \leq \theta \leq -u_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{(\bar{X})^2}{3} + \bar{X}}}{\sqrt{n}} + \bar{X}$$ – асимпт. доверит. интервал уровня α для θ

Ответ: $-u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{(\bar{X})^2}{3} + \bar{X}}}{\sqrt{n}} + \bar{X} \leq \theta \leq -u_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{(\bar{X})^2}{3} + \bar{X}}}{\sqrt{n}} + \bar{X}$

(11) $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda^2 + 2\lambda)$, $\lambda > 0$

$$E\bar{X} = EX_i = \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda}$$

$$V\bar{X} = \frac{1}{n} VX_i = \frac{1}{n(\lambda^2 + 2\lambda)^2}$$

$$P\left\{ u_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \frac{\bar{X} - E\bar{X}}{\sqrt{V\bar{X}}} \le u_{\frac{1+\gamma}{2}} \right\} = \gamma$$

$$u_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{n(\lambda^2+2\lambda)^2}}} \le u_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

$$u_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \left(\bar{X} - \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda}\right)\sqrt{n}(\lambda^2 + 2\lambda) \le u_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

$$u_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \bar{X}\sqrt{n}(\lambda^2 + 2\lambda) - \sqrt{n} \le u_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

$$(u_{\frac{1-\gamma}{2}} + \sqrt{n})/(\bar{X}\sqrt{n}) \le \lambda^2 + 2\lambda \le (u_{\frac{1+\gamma}{2}} + \sqrt{n})/(\bar{X}\sqrt{n})$$

$$\frac{u_{\frac{1-\gamma}{2}} + \sqrt{n}}{\bar{X}\sqrt{n}} + 1 \le (\lambda + 1)^2 \le \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}} + \sqrt{n}}{\bar{X}\sqrt{n}} + 1$$

$$\sqrt{\frac{u_{\frac{1-\gamma}{2}} + \sqrt{n}}{\bar{X}\sqrt{n}} + 1} - 1 \le \lambda \le \sqrt{\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}} + \sqrt{n}}{\bar{X}\sqrt{n}} + 1} - 1$$

Ответ: $\lambda \in \left[\sqrt{\frac{u_{\frac{1-\gamma}{2}} + \sqrt{n}}{\bar{X}\sqrt{n}} + 1} - 1 ; \sqrt{\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}} + \sqrt{n}}{\bar{X}\sqrt{n}} + 1} - 1 \right]$