

Практикум 5. Построение и анализ консервативных разностных схем (напоминание)

Теория

Необходимые теоретические сведения и примеры решения задач:

сайт – Лекции 4-6, **жизнь – §3, литература и §1.**

Задачи

МР для подгрупп: каждый решает как минимум одну из задач №1-3 и №9-10, одну из задач №4-7, одну из задач №11-14. Задачи №8, №15 – одно решение от подгруппы.

Постановки задач отличаются наличием и расположением точек разрыва, типом граничных условий (ГУ), способом аппроксимации ГУ, способом вычисления коэффициентов схемы, трудоемкостью доказательства сходимости и т.д.

В задаче №8 исследуется схема, отличная от схем, полученных методом баланса.

В задаче №15 предложено проверить вычислительную погрешность метода.

Задача №1

С целью численного решения задачи

$$\begin{cases} (k(x) u'(x))' - q(x) u(x) = -f(x), x \in [0,1] \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 5 \end{cases}$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$k(x) = \begin{cases} 3, x \in (0, \xi) \\ 0.5, x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 3, x \in (0, \xi) \\ 1, x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, x \in (0, \xi) \\ 100, x \in (\xi, 1) \end{cases}$$

и условиями сопряжения $u_+ = u_-$, $w_+ = w_-$, поставленными в точке разрыва $\xi = 0.3$,

запишите разностную схему, построенную методом баланса. Схему будем применять на равномерных сетках, для которых точка разрыва попадает в узел.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость.

Определите порядок сходимости.

Задача №2

С целью численного решения задачи

$$\begin{cases} (k(x) u'(x))' - q(x) u(x) = -f(x), x \in [0,1] \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 5 \end{cases}$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$k(x) = \begin{cases} 3, x \in (0, \xi) \\ 0.5, x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 3, x \in (0, \xi) \\ 1, x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, x \in (0, \xi) \\ 100, x \in (\xi, 1) \end{cases}$$

и условиями сопряжения $u_+ = u_-$, $w_+ = w_-$, поставленными в точке разрыва $\xi = 5/7$,

запишите разностную схему, построенную методом баланса. Схему будем применять на равномерных сетках, для которых точка разрыва не попадает в узел.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость.

Определите порядок сходимости.

Задача №3

С целью численного решения задачи

$$\begin{cases} (k(x) u'(x))' - q(x) u(x) = -f(x), x \in [0,1] \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 5 \end{cases}$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$k(x) = \begin{cases} 3, x \in (0, \xi) \\ 0.5, x \in (\xi, \zeta) \\ 100, x \in (\zeta, 1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 3, x \in (0, \xi) \\ 0, x \in (\xi, \zeta) \\ 1, x \in (\zeta, 1) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, x \in (0, \xi) \\ 0, x \in (\xi, \zeta) \\ 100, x \in (\zeta, 1) \end{cases}$$

запишите все необходимые условия сопряжения. Укажите их физический смысл.

Запишите разностную схему, построенную методом баланса. Схему будем применять на равномерных сетках, для которых точка разрыва $\xi = 0.3$ является узлом, а $\zeta = 5/7$ не попадает в узел.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость.

Определите порядок сходимости.

Задача №8

Для решения стационарного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} (k(x) u'(x))' - q(x) u(x) = -f(x), x \in [0,1] \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 5 \end{cases}$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$k(x) = \begin{cases} 3, x \in (0, \xi) \\ 0.5, x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 3, x \in (0, \xi) \\ 1, x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, x \in (0, \xi) \\ 100, x \in (\xi, 1) \end{cases}$$

и условиями сопряжения $u_+ = u_-$, $w_+ = w_-$, поставленными в точке разрыва $\xi = 0.3$, предложена разностная схема

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ 3 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 3v_i = 0, x_{i+1} \leq \xi, i = 1, \dots, n-1 \\ 3 \cdot \frac{v_i - v_{i-1}}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{i+1} - v_i}{h}, x_i = \xi \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - v_i = -100, x_{i-1} \geq \xi, i = 1, \dots, n-1 \\ v_n = 5 \end{cases}.$$

Такую схему применяют на равномерных сетках, где точка разрыва – узел.

Объясните, как в этой схеме смоделировано каждое из условий сопряжения.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость.

Определите порядок сходимости.

Исследуйте (аналитически или численно) **дисбаланс схемы.**

Укажите, является ли схема **консервативной**.

Можно ли улучшить **сходимость** схемы и как?

Задача №9

Для решения задачи

$$\begin{cases} (k u'(x))' - q u(x) = -f, x \in [0,1] \\ k u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1 \\ -k u'(1) = \beta_2 u(1) - \mu_2 \end{cases}$$

где $k > 0, q \geq 0, \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0$, запишите разностную схему, построенную методом баланса. Аппроксимация граничных условий – типовая.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость. Определите порядок сходимости.

Коэффициенты уравнения k, q, f и параметры ГУ $\mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2$ есть постоянные величины. Можно использовать конкретные ненулевые значения.

Задача №10

Для решения задачи

$$\begin{cases} (k u'(x))' - q u(x) = -f, x \in [0,1] \\ k u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1 \\ -k u'(1) = \beta_2 u(1) - \mu_2 \end{cases}$$

где $k > 0, q \geq 0, \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0$, запишите разностную схему, построенную методом баланса. Аппроксимация граничных условий – улучшенная.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость. Определите порядок сходимости.

Коэффициенты уравнения k, q, f и параметры ГУ $\mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2$ есть постоянные величины. Можно использовать конкретные ненулевые значения.

Задача №15

Для проверки накопления **вычислительной погрешности** при решении задач вида

$$\begin{cases} (k(x) u'(x))' - q(x) u(x) = -f(x), x \in [0,1] \\ u(0) = \mu_1 \\ u(1) = \mu_2 \\ k(x) \geq C > 0, q(x) \geq 0 \end{cases}$$

постройте **тестовый пример**, для которого **точное решение разностной схемы совпадает с точным решением дифференциальной задачи во всех узлах любой равномерной сетки**.

Подготовьте программу и решите пример численно прогонкой на сетках от $n = 10$ до $n = 1\,000\,000$ (например, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000).

По результатам расчетов постройте таблицу, в которой для каждого n указано:

- 1) число действий прогонки;
- 2) общая погрешность решения (в норме $\| \cdot \|_{\infty}$);
- 3) вычислительная погрешность решения (в норме $\| \cdot \|_{\infty}$).
- 4) для каждого n можно указать время счета.

В текст отчета (презентации) включите:

- а) постановку дифференциальной задачи;
- б) запись разностной схемы;
- в) идею проверки;
- г) таблицу с результатами расчетов;
- д) наблюдения и выводы.

Какие изменения исходного уравнения могут способствовать росту (снижению) накопленной вычислительной погрешности?

Подтвердите результатами расчетов.