Тестовое задание
Уравнение теплопроводности

Июль 2024

1 Постановка задачи

Имеется дифференциальное уравнение в частных производных

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0, \tag{1}$$

где ρ — плотность породы, C — удельная теплоёмкость, k — коэффициент теплопроводности, $t \in [0,\ t_{max}]$ — время, $x \in [0,\ l]$ — пространственная координата, $T(t, x)$ — температура. Искомая функция T также должна удовлетворять граничным условиям

$$T\big|_{x=0} = T_1 \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \tag{2}$$

и начальному условию

$$T\big|_{t=0} = T_0. \tag{3}$$

Для коэффициента теплопроводности предлагается рассмотреть два случая:

1. Случай постоянного коэффициента теплопроводности

$$k = k_0 = \text{const}.$$

2. Случай коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры как

$$k = k(T) = \frac{k_0}{1 + B(T - T_0)}.$$

2 Задание

- Предложите численную схему для решения уравнения (1) с начальным условием (3) и граничными условиями (2) для случая постоянного коэффициента теплопроводности и для случай коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры.
- Есть ли ограничения на устойчивость численной схемы?
- Опишите численный алгоритм, по которому вычислитель будет производить расчёт (например, в виде блок-схемы).

- Реализуйте сформулированный алгоритм на выбранном вами языке программирования (C, C++, Java, Python и др.), но предпочтительнее на Python. Снабдите код необходимыми комментариями.

- Предложите способ верификации численной схемы: как убедиться, что алгоритм считает правильно?

Значения упомянутых параметров можно принять как $\rho = 2700\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $C = 1200\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{K}}$, $k_0 = 1.9\,\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{K}}$, $B = 2\cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$, $T_0 = 0\,°C$, $T_1 = 400\,°C$, $t_{max} = 7$ сут., $l = 2$ м.