Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и физики

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №1

Выполнил:

Студент: Крылова Екатерина
Группа: 5030102/10201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2025 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть дана ИСЛАУ

$$Ax = b,\ x = (x_1, x_2)$$

И дана вещественная матрица

$$\mathrm{mid}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Рассмотрим матрицу радиусов:

$$\mathrm{rad}A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Построим интервальную матрицу следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} [a_{11} - \alpha \cdot A_i^{(1,1)}, a_{11} + \alpha \cdot A_i^{(1,1)}] & [a_{12} - \alpha \cdot A_i^{(1,2)}, a_{12} + \alpha \cdot A_i^{(1,2)}] \\ [a_{21} - \alpha \cdot A_i^{(2,1)}, a_{21} + \alpha \cdot A_i^{(2,1)}] & [a_{22} - \alpha \cdot A_i^{(2,2)}, a_{22} + \alpha \cdot A_i^{(2,2)}] \end{pmatrix} \tag{3}$$

$i = \overline{1,2}$

Требуется:

- Найти диапазон значений α, при которых $0 \in \det A$;
- Для минимального значения радиуса матричных элементов $\min \alpha$ найти точечную матрицу A':

$$\det A' = 0.$$

В целях конкретизации и возможности проверки решения будем использовать следующую матрицу

$$\mathrm{mid}A = \begin{pmatrix} 1.05 & 0.95 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

2 Теория

Интервалом $[a, b]$ вещественной оси $\mathbb{R}$ называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами a и b, включая их самих, т. е.

$$[a, b] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}. \tag{5}$$

Основные арифметические операции для интервалов:

1. **Сложение**
$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \tag{6}$$
2. **Вычитание**
$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c] \tag{7}$$
3. **Умножение**
$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \tag{8}$$
4. **Деление**
$$\frac{[a, b]}{[c, d]} = [\min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right)] \tag{9}$$

Характеристики интервалов:

1. **Средняя точка**
$$\mathrm{mid}[a, b] = \frac{1}{2}(a + b) \tag{10}$$
2. **Ширина**
$$\mathrm{wid}[a, b] = (b - a) \tag{11}$$
3. **Радиус**
$$\mathrm{rad}[a, b] = \frac{1}{2}(b - a) \tag{12}$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы была использована библиотека `numpy`.

3.1 Описание алгоритма

Для нахождения минимального значения α использовался итеративный метод с экспоненциальным увеличением шага:

1. **Экспонециальный поиск**
   - Инициализация: $k = 0$, $\alpha_0 = e^0$.
   - На каждой итерации значение α_k обновляется по формуле:
   $$\alpha_k = e^k, \quad k_{i+1} = k_i + 1.$$
   - Процесс продолжается, пока $0 \notin \det A(\alpha_k)$, где $A(\alpha_k)$ - матрица с заданным интервалом.
   - Найденное значение α_k используется в качестве верхней границы b_0 для следующего этапа.
2. **Уточнение методом бисекции**
   - Устанавливаются начальные границы: $a_0 = 0$, $b_0 = \alpha_k$
   - На каждой итерации вычисляется:
   $$\alpha_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}.$$
   - Если $0 \in \det A(\alpha_{k+1})$, то:
   $$b_{k+1} = \alpha_{k+1},$$
   иначе:
   $$a_{k+1} = \alpha_{k+1}.$$
   - Процесс продолжается, пока разница $b - a > \varepsilon$, где ε — заданная точность.
   - После завершения возвращается значение:
   $$\alpha^* = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

3.2 Ссылка на репозиторий

https://github.com/ekaterinakrylovao/interval-analysis/tree/master/lab1

4 Результат

4.1 Результаты вычислений параметра регуляризации

В процессе итеративного вычисления значения α_k и детерминанта матрицы A_k для каждой итерации k рассчитывались промежуточные значения, которые приведены в таблице ниже.

На каждой итерации значение α_k уточняется с помощью метода бинарного поиска, а детерминант матрицы A_k вычисляется с использованием соответствующих интервалов.

k	α_k	$\det(A_k)$
0	0.500000	$[-1.900000, 2.100000]$
1	0.250000	$[-0.900000, 1.100000]$
2	0.125000	$[-0.400000, 0.600000]$
3	0.062500	$[-0.150000, 0.350000]$
4	0.031250	$[-0.025000, 0.225000]$
5	0.015625	$[0.037500, 0.162500]$
6	0.023438	$[0.006250, 0.193750]$
7	0.027344	$[-0.009375, 0.209375]$
8	0.025391	$[-0.001563, 0.201563]$
9	0.024414	$[0.002344, 0.197656]$
10	0.024902	$[0.000391, 0.199609]$
11	0.025146	$[-0.000586, 0.200586]$
12	0.025024	$[-0.000098, 0.200098]$
13	0.024963	$[0.000146, 0.199854]$
14	0.024994	$[0.000024, 0.199976]$
15	0.025009	$[-0.000037, 0.200037]$
...	...	...

Таблица 1: Результаты вычислений для α_k и $\det(A_k)$

На 12-ой итерации было найдено значение $\alpha_{min} \approx 0.025$ при заданной точности $\varepsilon = 10^{-5}$

4.2 Итоговые результаты

Минимальное значение параметра регуляризации:

$$\alpha_{min} = 0.025$$

Интервальная матрица имеет такой вид:

$$A = \begin{bmatrix} [1.025,\ 1.075] & [0.925,\ 0.975] \\ [0.975,\ 1.025] & [0.975,\ 1.025] \end{bmatrix}$$

Определитель этой матрицы имеет вид:

$$det(A) = [0.0,\ 0.2]$$

Диапазон значений параметра регуляризации, при котором определитель интервальной матрицы A включает ноль:

$$\alpha \in [0.025,\ +\infty)$$

4.3 Точечная матрица A'

Для найденного минимального значения α_{min} была определена точечная матрица A', принадлежащая интервальной матрице A, такая, что $\det A' = 0$.

Точечная матрица A':

$$A' = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.975 \\ 1.025 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Строки матрицы являются линейно зависимыми, значит, её определитель равен нулю и матрица является вырожденной.

5 Обсуждение

1. **Физическая интерпретация**
   Матрица A' формируется при минимизации радиуса матричных элементов δ, что приводит к потере обратимости матрицы A, когда её определитель становится равным нулю ($\det A' = 0$). Это означает, что система уравнений становится вырожденной, а её решение перестает быть однозначным, приводя к бесконечному множеству возможных решений. С физической точки зрения это говорит о том, что недостаточность данных, полученных с двух ракурсов, не позволяет точно реконструировать объект. Отсутствует необходимая информация для однозначного решения задачи, что ведет к неопределённости в процессе реконструкции.

2. **Чувствительность при минимальном радиусе**
   Когда радиус матричных элементов минимален, возникает точечная матрица A', которая представляет собой границу множества возможных матриц A, определяющих интервал неопределённости. В этом случае система становится чрезвычайно чувствительной к малейшим изменениям исходных данных. Любое небольшое искажение или шум в данных может привести к значительным изменениям в результате реконструкции, что значительно усложняет решение задачи томографии при работе с реальными данными, содержащими шум. Это подчёркивает важность учёта погрешностей данных при выполнении реконструкции.

3. **Практические соображения**
   В реальной практике томографии для повышения точности и стабильности решения часто используется большее количество ракурсов, чем два, что позволяет улучшить условия задачи и избежать ситуации, когда $\det A' = 0$. При ограниченном числе ракурсов возникает высокая вероятность вырождения матрицы, что делает задачу плохо обусловленной. В таких случаях необходимо применять специальные методы, учитывающие неопределённость данных и решающие проблему вырождения, например, методы регуляризации или подходы, основанные на статистическом анализе, которые помогают находить устойчивые решения, несмотря на недостаточность информации.

6 Выводы

В ходе лабораторной работы была построена интервальная матрица A размером 2×2 следующего вида:

$$A = \begin{bmatrix} [1.05 - \alpha, 1.05 + \alpha] & [0.95 - \alpha, 0.95 + \alpha] \\ [1 - \alpha, 1 + \alpha] & [1 - \alpha, 1 + \alpha] \end{bmatrix}$$

Для данной матрицы был вычислен диапазон значений α, при которых определитель интервальной матрицы включает ноль, что соответствует состоянию вырождения матрицы. Минимальное значение $\alpha = 0.025$ было установлено с использованием итерационного алгоритма с переменным шагом.

При этом было установлено, что при значении $\alpha = 0.025$ интервальный определитель матрицы принимает значения в интервале $[0.0, 0.2]$, что включает ноль. Следовательно, это значение α является минимальным, при котором матрица A становится вырожденной.

Для минимального значения α была найдена точечная матрица A', принадлежащая интервальной матрице A, такая, что:

$$A' = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.975 \\ 1.025 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Эта матрица является вырожденной, поскольку её строки линейно зависимы, и её определитель равен нулю.

В общем случае, если матрица A представляет собой матрицу линейной регрессии, она может иметь размерность $2 \times N$ (где $N \geq 2$) и не быть квадратной. В таких случаях для анализа необходимо рассматривать всевозможные квадратные подматрицы и для каждой подбирать своё значение α, при котором эти матрицы будут неособенными (невырожденными). Затем, пересечение всех найденных матриц позволяет получить итоговую регуляризованную матрицу, которая удовлетворяет условиям задачи и может быть использована для дальнейшего анализа или вычислений.