

## Seminarul 3

1. Un patron deține 3 magazine,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , care au 50, 75, respectiv 100, de angajați, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul  $m_3$ , știind că acesta este bărbat?

$$R: P(\text{"angajatul ales lucrează la } m_3" | \text{"angajatul ales este bărbat"}) = \frac{\frac{30}{225}}{\frac{25}{225} + \frac{30}{225} + \frac{30}{225}} = \frac{30}{85} = \frac{6}{17}.$$

2. O persoană are în buzunar 2 zaruri roșii și 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales un zar roșu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales un zar albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculați probabilitatea ca suma punctelor obținute în urma aruncărilor să fie 10.

$$R: \text{Fie } A: \text{"zarul ales este albastru"}, R: \text{"zarul ales este roșu"} \text{ și } S: \text{"suma punctelor obținute în urma aruncărilor este 10"}. \text{ Formula probabilității totale implică } P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|R)P(R) = \frac{3}{6^2} \cdot \left( \frac{3}{5} + \frac{27}{6^3} \right) \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

3. Se aruncă un zar. Fie  $N$  numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de  $N$  ori. Care este probabilitatea ca  $N=3$ , știind că:

a) numerele obținute în urma celor  $N$  aruncări sunt diferite?

b) numerele obținute în urma celor  $N$  aruncări sunt egale?

R: Fie  $D$ : "numerele obținute în urma celor  $N$  aruncări sunt diferite" și  $E$ : "numerele obținute în urma celor  $N$  aruncări sunt egale". În continuare, considerăm  $P(D|N=1) = 0$ ,  $P(E|N=1) = 1$ . Formula lui

$$\text{Bayes implică: a) } P(N=3|D) = \frac{P(D|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^6 P(D|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{A_6^3}{6^4}}{\sum_{i=1}^6 \frac{A_6^i}{6^{i+1}}}; \text{ b) } P(N=3|E) = \frac{P(E|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^6 P(E|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{1}{6^3}}{\sum_{i=1}^6 \frac{1}{6^i}}.$$

• **Modelul binomial:** În cadrul unui experiment pot să apară evenimentele  $A$  (*succes*) sau  $\bar{A}$  (*insucces*). Un succes are loc cu  $P(A) = p$ , un insucces are loc cu  $P(\bar{A}) = 1 - p$ . Probabilitatea de a obține  $k$  succese în  $n$  repetări independente ale experimentului este

$$b(k; n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

▷ Acest model corespunde distribuției binomiale.

4. Probabilitatea ca un cip, de un anumit tip, să fie defect este 0,06. O componentă pentru calculator are instalate 12 astfel de cipuri. Componenta este funcțională dacă cel puțin 11 sunt operaționale.

1) Calculați probabilitatea ca

1a) 12 astfel de cipuri să fie funcționale;

1b) componenta să fie funcțională.

2) Dacă un calculator are instalate 4 astfel de componente, care este probabilitatea  $p$  ca cel puțin 3 dintre ele să fie funcționale?

3) Dacă un calculator are instalate 3 astfel de componente, care este probabilitatea ca în total mai mult de 30 de cipuri să fie funcționale?

$$R: 1) 1a) (0.94)^{12}; 1b) p = C_{12}^{11} (0.94)^{11} 0.06 + (0.94)^{12}. 2) C_4^3 p^3 (1-p) + p^4. 3) \sum_{i=31}^{36} C_{36}^i (0.94)^i (0.06)^{36-i}.$$

• **Modelul urnei cu  $r$  culori și bilă returnată:**

$$\begin{aligned} b(k_1, \dots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obține } k_i \text{ bile cu culoarea } i, i = \overline{1, r}, \\ &\quad \text{din } n \text{ extrageri cu returnarea bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

unde  $p_i$  = probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea  $i$ ,  $i = \overline{1, r}$ .

▷ Cazul  $r = 2$  corespunde distribuției binomiale.

5. O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obțină cuvântul *abracadabra*?

R:  $\frac{11!}{5!2!1!1!2!} \cdot \frac{1}{26^{11}}$ .

6. Un zar este aruncat de cinci ori. Calculați probabilitățile următoarelor evenimente:

a) A: “exact două numere sunt pare.”

b) B: “1 apare de două ori, 3 apare o dată și 6 apare de două ori.”

c) C: “exact două numere sunt prime, un număr este egal cu 1, iar celelalte două sunt egale cu 4”.

R: a)  $C_5^2 \frac{1}{2^5}$ ; b)  $\frac{5!}{2!1!2!} \cdot \frac{1}{6^5}$ ; c)  $\frac{5!}{2!1!2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6^2}$ .

7. O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:

a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?

b) ziua următoare să fie ploioasă, știind că persoana ajunge la timp la serviciu?

R: Fie  $I$ : “persoana întârzie la serviciu într-o zi” și  $S$ : “ziua e senină”. a) Formula probabilității totale implică  $P(\bar{I}) = P(\bar{I}|S)P(S) + P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8 = 0,82$ ; b) Formula lui Bayes implică

$$P(\bar{S}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S})}{P(\bar{I})} = \frac{0,8 \cdot 0,8}{0,82} = \frac{32}{41}.$$

8. O pereche de zaruri - unul alb și unul roșu - se aruncă o dată și apoi încă o dată. Calculați probabilitatea ca numerele apărute la cea de-a doua aruncare să fie aceleași ca la prima aruncare. (Exemplu de caz favorabil: la prima aruncare zarul alb indică 2 și zarul roșu indică 4, iar la a doua aruncare zarul alb indică 2 și zarul roșu indică 4.)

R: Considerăm variabilele aleatoare:

▷  $A_1$  indică numărul apărut la prima aruncare pe zarul alb.

▷  $A_2$  indică numărul apărut la prima aruncare pe zarul alb.

▷  $R_1$  indică numărul apărut la prima aruncare pe zarul roșu

▷  $R_2$  indică numărul apărut la prima aruncare pe zarul roșu.

Probabilitatea cerută este

$$p = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 P(\{A_1 = i\} \cap \{R_1 = j\} \cap \{A_2 = i\} \cap \{R_2 = j\}) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{1}{6^4} = \frac{6^2}{6^4} = \frac{1}{36},$$

unde s-a folosit faptul că evenimentele  $\{A_1 = i\}, \{R_1 = j\}, \{A_2 = i\}, \{R_2 = j\}$  sunt independente  $\forall i, j \in \{1, \dots, 6\}$ .

Soluție alternativă, folosind formula probabilității totale:

$$p = \sum_{i,j=1}^6 P(\{A_2 = i\} \cap \{R_2 = j\} | \{A_1 = i\} \cap \{R_1 = j\}) P(\{A_1 = i\} \cap \{R_1 = j\}) = \sum_{i,j=1}^6 \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}.$$