

Seminarul 5

1. O variabilă aleatoare continuă X are funcția de densitate $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ cxe^{-x}, & x > 0. \end{cases}$

Determinați $c \in \mathbb{R}$ și apoi calculați:

- a) valoarea medie a lui X ;
- b) funcția de repartiție a lui X ;
- c) probabilitatea evenimentului $\{|X - 3| > 2\}$;
- d) probabilitatea evenimentului $\{X < 3\}$, știind că are loc evenimentul $\{X > 1\}$.

$$R: 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c \int_0^{\infty} xe^{-x} dx = c \implies c = 1.$$

$$a) E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2 \text{ (integrare prin părți).}$$

$$b) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x te^{-t} dt = 1 - (x+1)e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$c) P(|X - 3| > 2) = P((X - 3 < -2) \cup (X - 3 > 2)) = P((X < 1) \cup (X > 5)) = F(1) + (1 - F(5)) = 1 - 2e^{-1} + 6e^{-5} \approx 0.3.$$

$$d) P(X < 3 | X > 1) = \frac{P(1 < X < 3)}{P(X > 1)} = \frac{F(3) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{1 - 4e^{-3} - 1 + 2e^{-1}}{2e^{-1}} = 1 - 2e^{-2} \approx 0.73.$$

2. Funcția de repartiție $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a unei variabile aleatoare continue X are expresia:

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \leq x < 2 \\ d, & x < 0 \\ e, & x \geq 2. \end{cases}$$

Determinați $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, dacă: i) $P(1 < X < 2) = \frac{1}{2}$; ii) $E(X) = 1$.

$$R: 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = d, 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = e. c = F(0) = \lim_{x \nearrow 0} F(x) = d = 0, 1 = e = F(2) = \lim_{x \nearrow 2} F(x) = 4a + 2b + c = 4a + 2b.$$

$$i) P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = e - a - b - c = 1 - a - b = \frac{1}{2}. \text{ Deci } a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0, e = 1.$$

$$ii) \text{ Funcția de densitate este } f(x) = \begin{cases} 2ax + b, & x \in (0, 2) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}. \text{ Avem: } 1 = E(X) = \int_0^2 2ax^2 + bx dx =$$

$$\frac{16}{3}a + 2b. \text{ Deci } a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0, e = 1.$$

3. Un circuit are trei condensatoare, care funcționează independent unele de altele. Timpul de funcționare a fiecărui condensator are distribuția exponențială cu valoarea medie de 3 minute. Știind că cele trei condensatoare sunt grupate în circuit așa cum indică

a) figura A (în paralel),

b) figura B (în serie),

determinați valoarea medie a timpului de funcționare a circuitului.

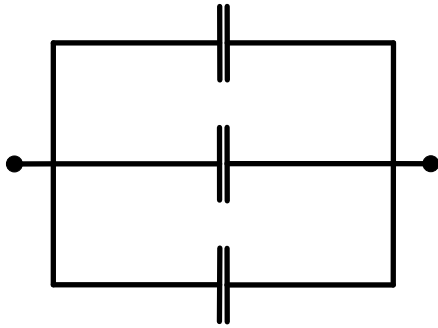


Figura A

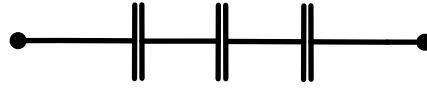


Figura B

R: O v.a. X care are **distribuția exponențială** cu parametrul $\lambda > 0$ are funcția de densitate

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Deducem că:

$$\text{i) } F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}, \text{ unde } F_X \text{ este funcția de repartiție a lui } X.$$

$$\text{ii) } P(X > x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{iii) } E(X) = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \text{ (folosind integrarea prin părți).}$$

Fie T timpul de funcționare a circuitului și fie T_i v.a. care indică timpul de funcționare a condensatorului i , $i = 1, 2, 3$. Fiecare T_i urmează legea exponențială cu parametrul $\frac{1}{3}$. Aceste variabile aleatoare sunt independente.

$$\text{a) } F_T(t) = P(\max\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = P(\bigcap_{i=1}^3 (T_i \leq t)) = \prod_{i=1}^3 P(T_i \leq t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ (1 - e^{-\frac{t}{3}})^3, & t > 0 \end{cases}$$

$$\text{unde am folosit i). Deci } f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ (1 - e^{-\frac{t}{3}})^2 e^{-\frac{t}{3}}, & t > 0 \end{cases} \text{ și } E(T) = \int_0^{\infty} t e^{-\frac{1}{3}t} - 2t e^{-\frac{2}{3}t} + t e^{-t} dt =$$

$$9 - \frac{9}{2} + 1 = 5,5 \text{ minute, unde am folosit iii).}$$

$$\text{b) } F_T(t) = P(\min\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = 1 - P(\min\{T_1, T_2, T_3\} > t) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^3 (T_i > t)) = 1 - \prod_{i=1}^3 P(T_i > t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t}, & t > 0 \end{cases}, \text{ unde am folosit ii). Deci } f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases} \text{ deci}$$

$T \sim \text{Exp}(1)$ și $E(T) = 1$ minut.

4. Ce probabilitate estimează programul de mai jos? Calculați probabilitatea teoretică corespunzătoare.

```
pkg load statistics
clear all
N=10000;
u=unidrnd(10,1,N)-1;
y=unifrnd(0,3,1,N).*(u<=3)+unifrnd(3,9,1,N).*(u>3);
p=mean((y>=2)&(y<=5))
```

Observație: Dacă într-un program Octave/Matlab se generează valori aleatoare, în acest caz `unidrnd(10,1,N)`, `unifrnd(0,3,1,N)`, `unifrnd(3,9,1,N)`, atunci acestea pot fi considerate ca fiind valorile unor variabile aleatoare independente.

R: ► Fie $Z \sim Unid(10)$, $U = Z - 1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \dots & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$, $X_1 \sim Unif[0, 3]$, $X_2 \sim Unif[3, 9]$; v.a. U , X_1 , X_2 le considerăm a fi independente (dacă într-un program Octave se generează valori aleatoare, în acest caz `unidrnd(10,1,N)`, `unifrnd(0,3,1,N)`, `unifrnd(3,9,1,N)`, atunci acestea pot fi considerate ca fiind valorile unor variabile aleatoare independente).

► Dacă $U \leq 3$ atunci $Y = X_1$, dacă $U > 3$ atunci $Y = X_2$; p estimează următoarea probabilitate teoretică

$$\begin{aligned} P(2 \leq Y \leq 5) &= P(2 \leq Y \leq 5 | U \leq 3)P(U \leq 3) + P(2 \leq Y \leq 5 | U > 3)P(U > 3) \\ &= P(2 \leq X_1 \leq 5 | U \leq 3)P(U \leq 3) + P(2 \leq X_2 \leq 5 | U > 3)P(U > 3) \\ &= P(2 \leq X_1 \leq 5)P(U \leq 3) + P(2 \leq X_2 \leq 5)P(U > 3) \\ &= \frac{4}{10} \cdot \int_2^3 \frac{1}{3-0} dt + \frac{6}{10} \cdot \int_3^5 \frac{1}{9-3} dt = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Am folosit formula probabilităților totale și independența v.a. U , X_1 , X_2 .

Se poate calcula și astfel

$$\begin{aligned} P(2 \leq Y \leq 5) &= P(\{2 \leq Y \leq 5\} \cap \{U \leq 3\}) + P(\{2 \leq Y \leq 5\} \cap \{U > 3\}) \\ &= P(\{2 \leq X_1 \leq 5\} \cap \{U \leq 3\}) + P(\{2 \leq X_2 \leq 5\} \cap \{U > 3\}) \\ &= P(2 \leq X_1 \leq 5)P(U \leq 3) + P(2 \leq X_2 \leq 5)P(U > 3) \\ &= \frac{4}{10} \cdot \int_2^3 \frac{1}{3-0} dt + \frac{6}{10} \cdot \int_3^5 \frac{1}{9-3} dt = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Am folosit independența v.a. U , X_1 , X_2 .

5. Fie vectorul aleator continuu (X, Y) cu funcția de densitate $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Determinați:

- funcția de repartiție a vectorului aleator (X, Y) ;
- funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare X și Y ;
- funcții de densitate ale variabilelor aleatoare X și Y ;
- valorile medii ale variabilelor aleatoare X și Y ;
- dacă variabilele aleatoare X și Y sunt independente sau dependente.

$$\begin{aligned} \text{R: a) } F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \begin{cases} 0, & (x, y) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \\ \int_0^x \int_0^y 2e^{-u}e^{-2v} du dv, & (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & (x, y) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \\ (1 - e^{-x})(1 - e^{-2y}), & (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{b) } F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \end{cases} \text{ și } F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 1 - e^{-2y}, & y > 0 \end{cases}.$$

$$\text{c) } f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases} \text{ și } f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 2e^{-2y}, & y > 0 \end{cases}.$$

$$\text{d) } E(X) = \int_0^{\infty} xe^{-x} dx = 1. \quad E(Y) = \int_0^{\infty} 2ye^{-2y} dy = \frac{1}{2}.$$

e) X și Y sunt independente, pentru că $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.