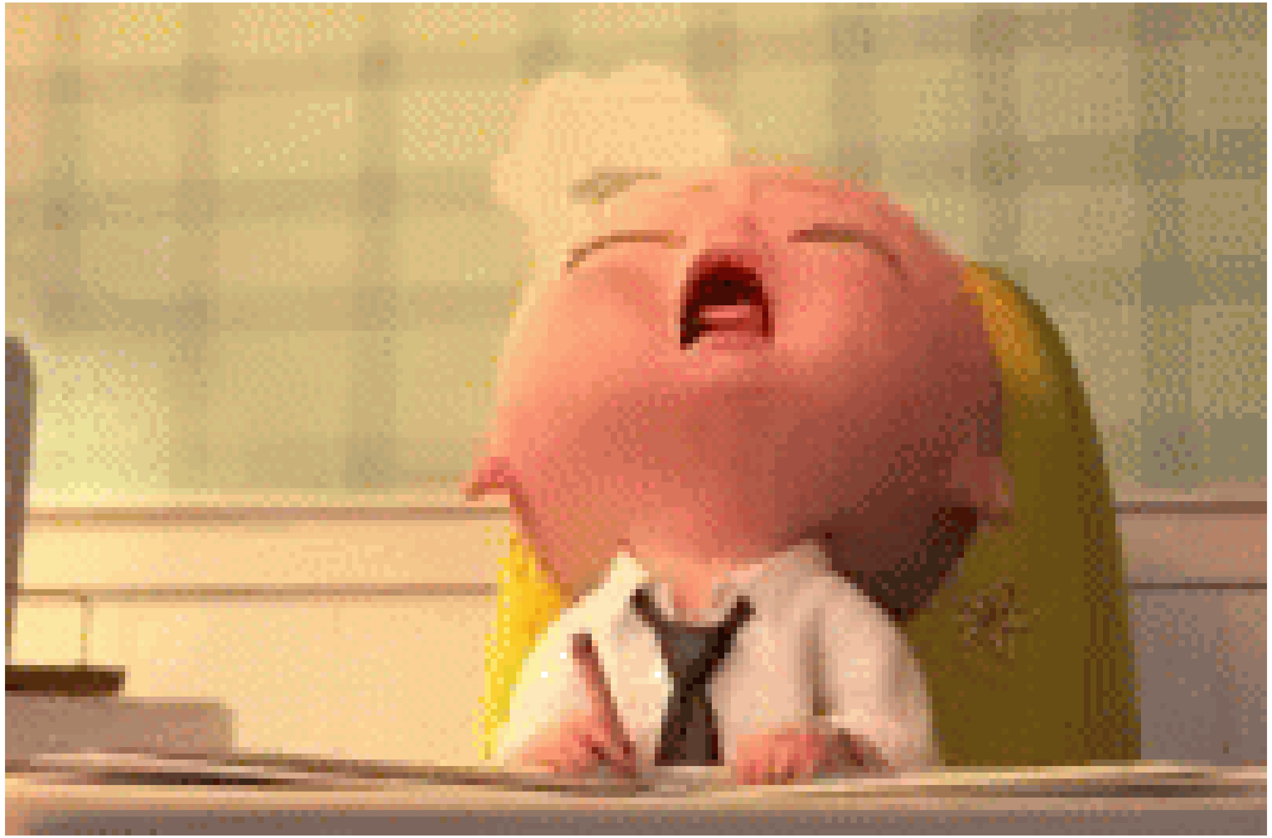
⚔️ 벡터의 외적

김수환

https://www.soohwan.kim

복습



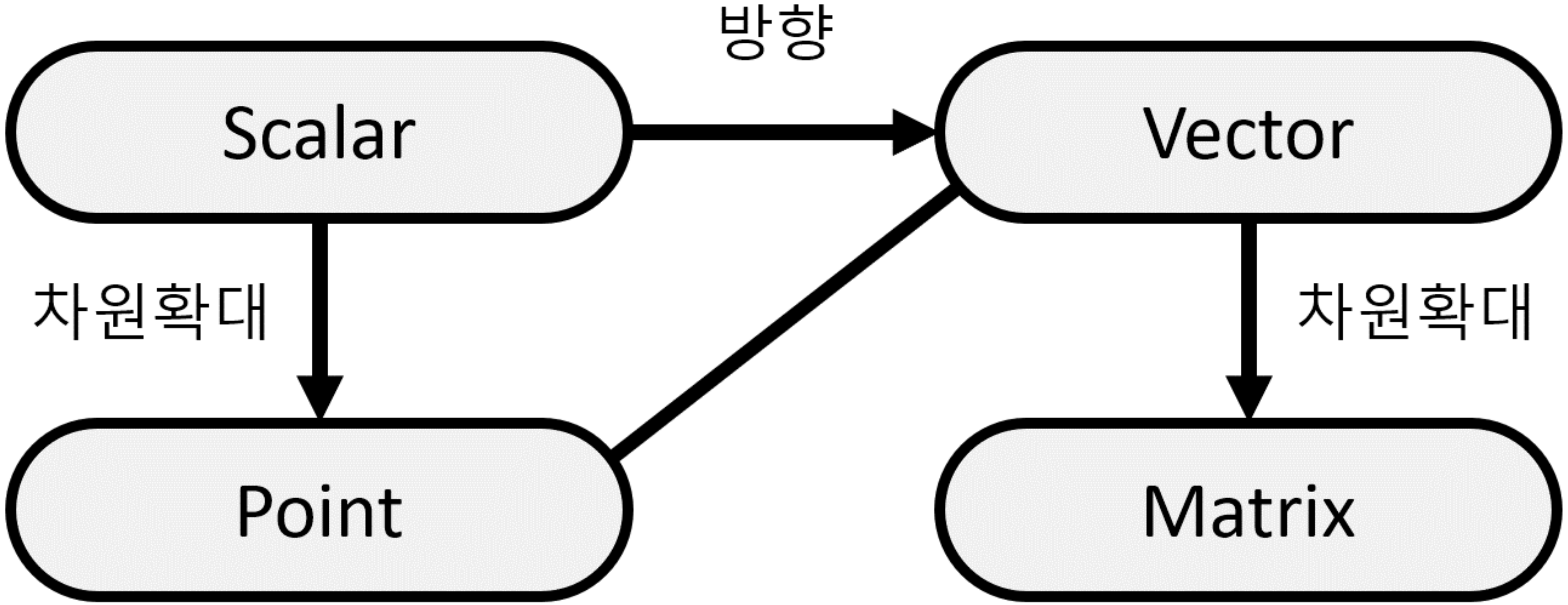
https://giphy.com/gifs/bored-sleepy-boring-LTYT5GTIiAMBa

스칼라(Scalars) vs. 벡터(Vectors)

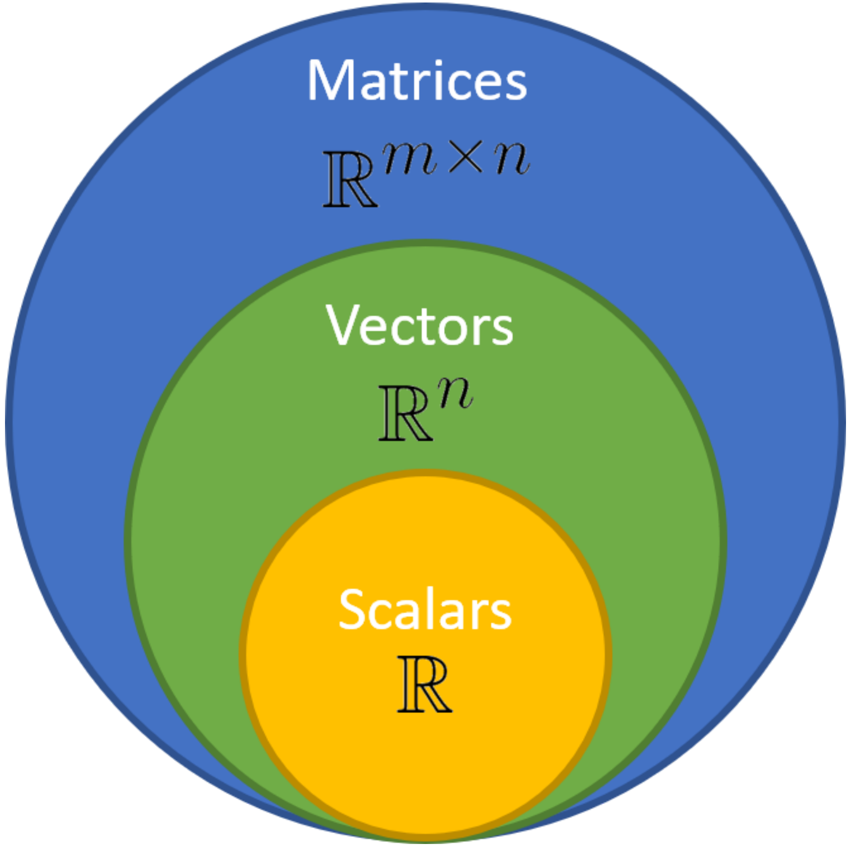
- Scalars
  - 물리학: 방향은 없고 크기만 있는 물리량
  - 수학: 1차원 공간의 한 점

- Vectors
  - 물리학: 크기와 방향이 있는 물리량
  - 수학: n차원 공간의 한 점 ($n = 1, 2, \ldots$)
  - 자유벡터 (Free Vectors)
  - 위치벡터 (Position/Fixed Vectors)

스칼라(Scalars) vs. 벡터(Vectors)



스칼라(Scalars) vs. 벡터(Vectors)



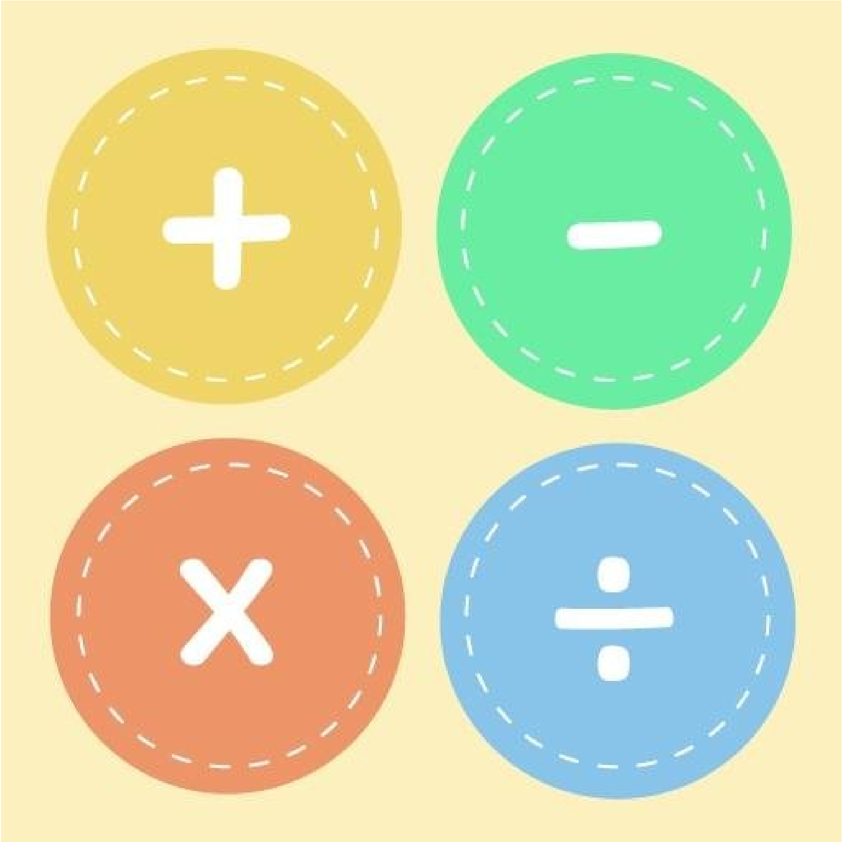
벡터의 연산

- 벡터의 덧셈
  - 수식 계산: 스칼라 덧셈의 확장
    - Element-wise
    - 교환법칙 O, 결합법칙 O
  - 기하학적 의미
    - 평행사변형의 대각선
    - 끝점과 시작점을 잇기
- 벡터의 뺄셈
  - 수식 계산: 스칼라 뺄셈의 확장
    - Element-wise
    - 교환법칙 X, 결합법칙 X
  - 기하학적 의미
    - 평행사변형의 짧은 대각선
    - 뒷벡터에서 시작해서 앞벡터에서 끝
- 벡터의 스칼라배
  - 수식 계산: 스칼라 곱의 확장
    - Element-wise
    - 교환법칙 O, 결합법칙 O, 분배법칙 O
  - 기하학적 의미
    - 방향은 같고 크기만 확대/축소
    - 음수배는 방향이 반대

벡터의 크기와 단위 벡터

- 벡터의 크기
  - 수식 계산: 피타고라스 정리의 확장
  - 기하학적 의미
    - 시작점에서 끝점까지의 거리/길이
- 벡터의 방향: 단위벡터
  - 수식 계산: 자신의 크기로 나눈 벡터
  - 기하학적 의미
    - 방향은 같고 크기가 1인 벡터
    - 단위원 위의 모든 점에 대응

벡터의 사칙연산



https://steemit.com/kr/@styner/social-talk-elementary-arithmetics

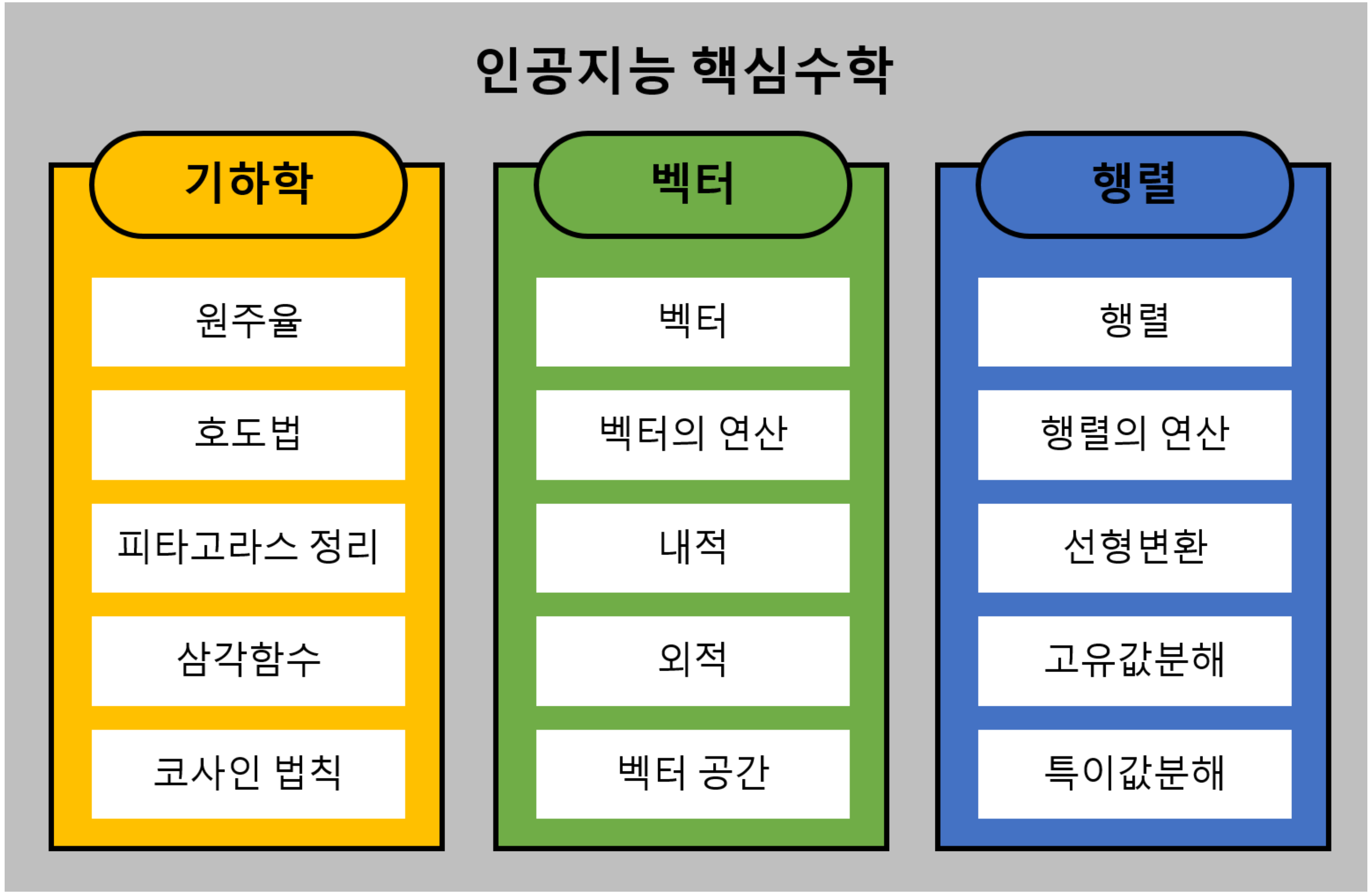
벡터의 내적 (Dot/Inner Products)

- 정의
  - n차원
  - 결과는 스칼라
- 성질
  - 교환법칙
  - 분배법칙
  - 자기자신
- 기하학적 의미
  - 스칼라곱의 확장
  - 직교성
  - 정사영
  - 유사도

벡터의 곱

<table>
<tr><td rowspan="2">내적</td><td>Dot Product</td><td>Inner Product</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">외적</td><td>Cross Product</td><td>Outer Product</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$</td><td>$\mathbf{a}\mathbf{b}^\top$</td></tr>
</table>

Big Picture


인공지능 핵심수학
기하학
원주율
호도법
피타고라스 정리
삼각함수
코사인 법칙
벡터
벡터
벡터의 연산
내적
외적
벡터 공간
행렬
행렬
행렬의 연산
선형변환
고유값분해
특이값분해

🎯 학습목표

학습목표

- 벡터의 외적
  - Cross Product
  - Outer Product
- 정의
- 대수학적 성질
- 기하학적 의미

학습목표

- 벡터의 외적
  - **Cross Product**
  - Outer Product

- **정의**
- **대수학적 성질**
- 기하학적 의미

벡터의 외적

Cross Products

벡터의 외적 (Cross Products): 정의와 성질

- Definition

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\Rightarrow\; \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Properties	Formula
Scalar Multiplication	$(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b}) = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
Anti-Commutative	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
Distributive	$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
Not Associative	$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
On Itself	$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

벡터의 외적 (Cross Products): 정의와 성질

- Definition

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\Rightarrow\; \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Properties	Formula
Scalar Multiplication	$(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b}) = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
Anti-Commutative	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
Distributive	$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
Not Associative	$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
On Itself	$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

벡터의 외적(Cross Products)은 오직 3차원 공간에서만 정의된다!

벡터의 외적 (Cross Products): 정의와 성질

- Definition

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \Rightarrow \ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Properties	Formula
Scalar Multiplication	$(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b}) = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
Anti-Commutative	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
Distributive	$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
Not Associative	$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
On Itself	$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

벡터의 외적(Cross Products)은 오직 3차원 공간에서만 정의된다!

벡터 외적(Cross Products)의 결과는 벡터다!

벡터의 외적 (Cross Products): 쉽게 기억하는 방법

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
&= (a_y b_z - a_z b_y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (a_z b_x - a_x b_z) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (a_x b_y - a_y b_x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

벡터의 내적 vs 외적 (Dot Product vs. Cross Product)

- 내적(Dot Product): Interaction between same dimensions
- 외적(Cross Product): Interaction between different dimensions

	b_x	b_y	b_z
a_x	a_xb_x	a_xb_y	a_xb_z
a_y	a_yb_x	a_yb_y	a_yb_z
a_z	a_zb_x	a_zb_y	a_zb_z

https://betterexplained.com/articles/cross-product/

다음 두 벡터의 외적(Cross Product)을 구하라

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

다음 두 벡터의 외적(Cross Product)을 구하라

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
&= (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 0)\mathbf{i} - (1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1)\mathbf{j} + (1 \cdot 0 - 2 \cdot 1)\mathbf{k} \\
&= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

다음에 답하라

- 벡터 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$과 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$는 평행임을 보여라

다음에 답하라

- 벡터 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$과 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$는 평행임을 보여라

1. 스칼라 배

$$\mathbf{b} = -2\mathbf{a}$$

2. 외적 (Cross Product)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

학습목표

- 벡터의 외적
  - **Cross Product**
  - Outer Product
- 정의
- 대수학적 성질
- **기하학적 의미**

📦 외적(Cross Products)의 기하학적 의미

외적(Cross Products)의 크기

- 내적과 외적 크기 제곱의 합

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\ \|\mathbf{b}\|^2$$

$$\begin{aligned}
\because (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 &= (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\
&= {a_x}^2{b_x}^2 + {a_y}^2{b_y}^2 + {a_z}^2{b_z}^2 + 2(a_x a_y b_x b_y + a_y a_z b_y b_z + a_z a_x b_z b_x) \\
\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\
&= {a_y}^2{b_z}^2 + {a_z}^2{b_y}^2 + {a_z}^2{b_x}^2 + {a_x}^2{b_z}^2 + {a_x}^2{b_y}^2 + {a_y}^2{b_x}^2 \\
&- 2(a_y a_z b_y b_z + a_z a_x b_z b_x + a_x a_y b_x b_y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 &= {a_x}^2{b_x}^2 + {a_y}^2{b_y}^2 + {a_z}^2{b_z}^2 \\
&+ {a_y}^2{b_z}^2 + {a_z}^2{b_y}^2 + {a_z}^2{b_x}^2 + {a_x}^2{b_z}^2 + {a_x}^2{b_y}^2 + {a_y}^2{b_x}^2 \\
&= ({a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2)({b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2) \\
&= \|\mathbf{a}\|^2\ \|\mathbf{b}\|^2
\end{aligned}$$

외적(Cross Products)의 크기

- 내적과 외적 크기 제곱의 합

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\ \|\mathbf{b}\|^2$$

- 외적의 크기

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\||\sin\theta|$$

$$\begin{aligned}\because \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\ \|\mathbf{b}\|^2\cos^2\theta \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1-\cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

- 내적 : 코사인 = 외적 : 사인

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\ \|\mathbf{b}\|^2 \\ &\Rightarrow\ \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\cos^2\theta + \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin^2\theta = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \\ &\Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\end{aligned}$$

외적(Cross Products)의 방향

- 외적의 방향

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = a_x a_y b_z - a_x a_z b_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\perp\mathbf{a} \\ + a_y a_z b_x - a_y a_x b_z & \\ + a_z a_x b_y - a_z a_y b_x & \end{aligned}$$

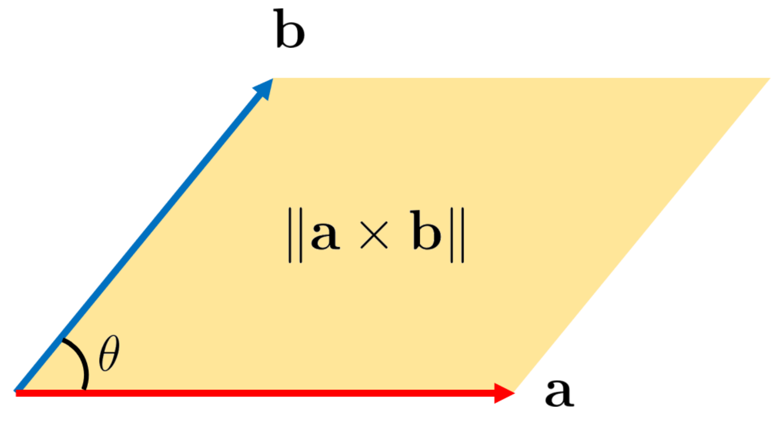
$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b} = a_y b_x b_z - a_z b_x b_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\perp\mathbf{b} \\ + a_z b_y b_x - a_x b_y b_z & \\ + a_x b_z b_y - a_y b_z b_x & \end{aligned}$$

두 벡터의 외적벡터는 두 벡터와 모두 수직이다!

외적(Cross Products)의 기하학적 의미

1. 외적의 크기

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\||\sin\theta|$$



외적(Cross Products)의 기하학적 의미

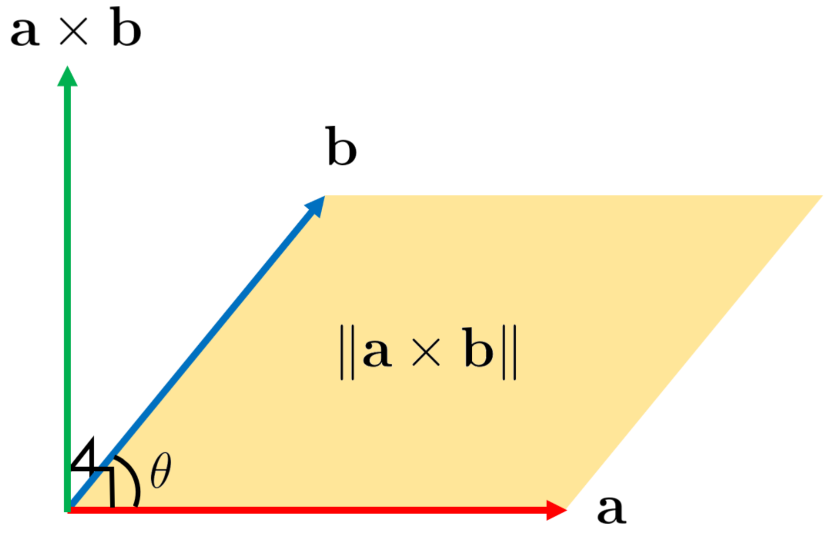
1. 외적의 크기

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\||\sin\theta|$$

2. 외적의 방향 (오른손 법칙)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$$



두 벡터의 외적(Cross Product)은 길이(크기)가 평행사변형의 넓이와 같고, 두 벡터와 수직한 벡터이다.

스칼라 삼중곱 (Scalar Triple Product)

- Scalar Triple Product

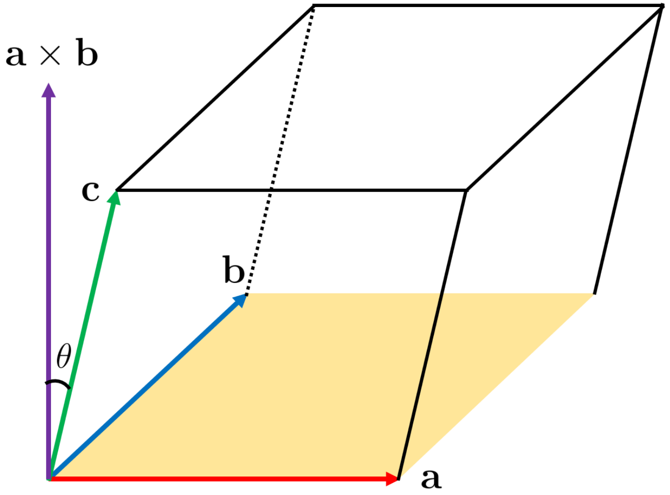
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

- Even Permutation

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

- 기하학적 의미

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \\ &= \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\cos\theta \end{aligned}$$



학습목표

- 벡터의 외적
  - Cross Product
  - **Outer Product**

- **정의**
- **대수학적 성질**
- **기하학적 의미**

벡터의 외적

Outer Products

벡터의 외적 (Outer Products)

- Definition

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \cdots & a_m b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- 벡터의 내적(Inner Product) vs. 외적(Outer Product)

$$\mathbf{a}^\top\mathbf{b} \ \text{ vs. } \ \mathbf{a}\mathbf{b}^\top, \qquad \mathbf{a}^\top\mathbf{b} = \mathrm{Trace}(\mathbf{a}\mathbf{b}^\top)$$

벡터의 외적 (Outer Products)

- Definition

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \cdots & a_m b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- 벡터의 내적(Inner Product) vs. 외적(Outer Product)

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{b} \ \text{ vs. } \ \mathbf{a}\mathbf{b}^\top, \qquad \mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \mathrm{Trace}(\mathbf{a}\mathbf{b}^\top)$$

벡터의 외적(Outer Products)은 두 벡터의 크기가 달라도 구할 수 있다!

벡터의 외적 (Outer Products)

- Definition

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \cdots & a_m b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- 벡터의 내적(Inner Product) vs. 외적(Outer Product)

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{b} \ \text{ vs. } \ \mathbf{a}\mathbf{b}^\top, \qquad \mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \mathrm{Trace}(\mathbf{a}\mathbf{b}^\top)$$

벡터의 외적(Outer Products)은 두 벡터의 크기가 달라도 구할 수 있다!

벡터 외적(Outer Products)의 결과는 행렬이다!

벡터의 외적 (Outer Products)

Properties	Formula
Scalar Multiplication	$(c\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes (c\mathbf{b}) = c(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$
Not Commutative	$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^\top$
Distributive	$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}$
Rank	$\text{Rank}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 1$

[미리보기] 벡터의 외적 (Outer Products)

- Outer product of a unit vector with itself = Projection Matrix

$$\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}^\top = \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^\top}{\mathbf{b}^\top\mathbf{b}}$$

[미리보기] 사영행렬 (Projection Matrix)

- 벡터의 합

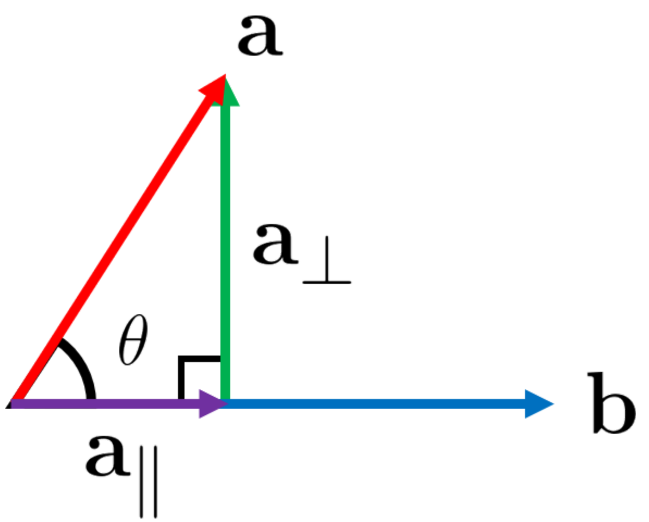
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$$

- 부분공간으로 정사영 (Projection onto Subspaces)

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \mathrm{Proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}) = \mathbf{a}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}$$

- 사영행렬 (Projection Matrix) $\mathbf{P}$

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\right)\mathbf{b} = \mathbf{b}\left(\frac{\mathbf{b}^\top\mathbf{a}}{\mathbf{b}^\top\mathbf{b}}\right) = \left(\frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^\top}{\mathbf{b}^\top\mathbf{b}}\right)\mathbf{a} = \hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}^\top = \mathbf{P}\mathbf{a}$$



- Projection Matrix $\mathbf{P}$는 Subspace의 단위 벡터의 외적(Outer Product)이다
- Projection Matrix $\mathbf{P}$의 Rank는 1이다

[미리보기] Outer Product와 Covariance Matrix

- Random Variables

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

- Expected Values (Means)

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{y}] = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}$$

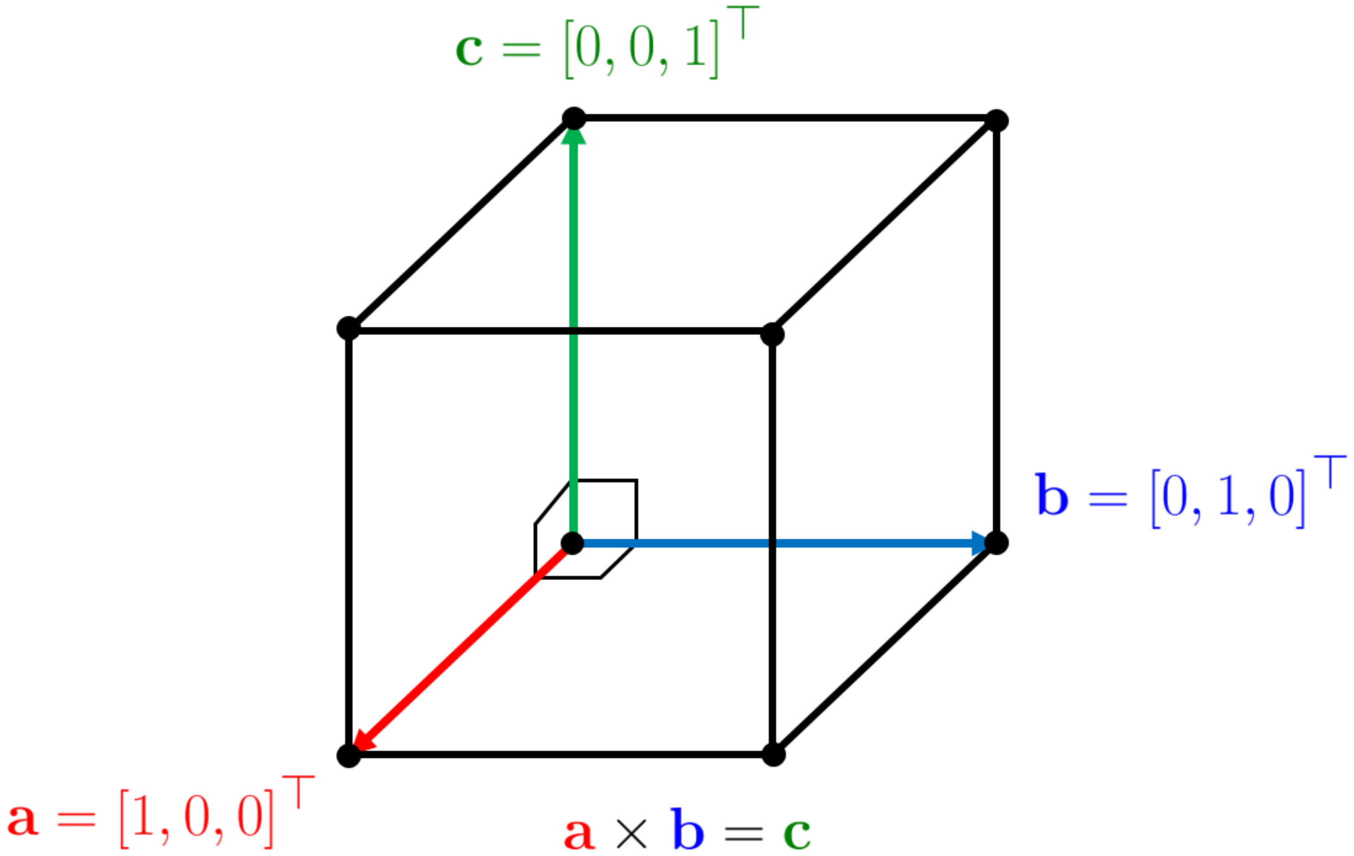
- Covariance

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{E}\left[(\mathbf{x} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{y} - \mathbb{E}[\mathbf{y}])^\top\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^\top\right] - \mathbb{E}[\mathbf{y}]\mathbb{E}[\mathbf{y}]^\top = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xy}}$$

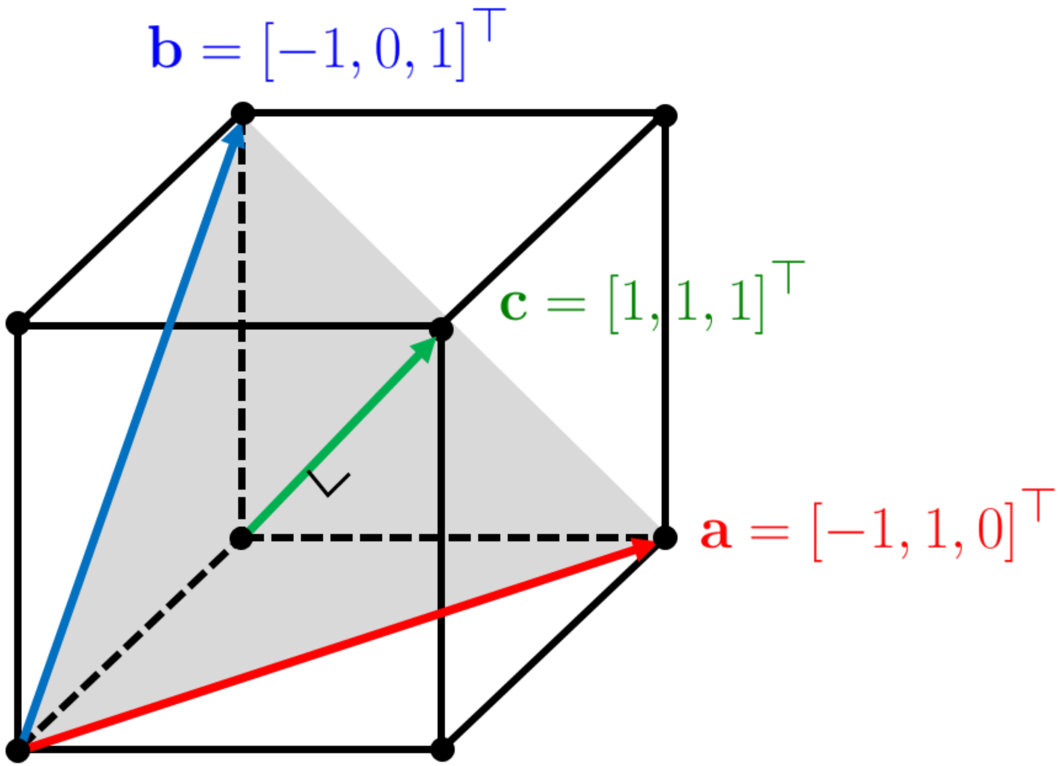
$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbb{E}\left[(\mathbf{x} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])^\top\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^\top\right] - \mathbb{E}[\mathbf{x}]\mathbb{E}[\mathbf{x}]^\top = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}}$$

The Unit Cube

외적의 정의와 기하학적 의미

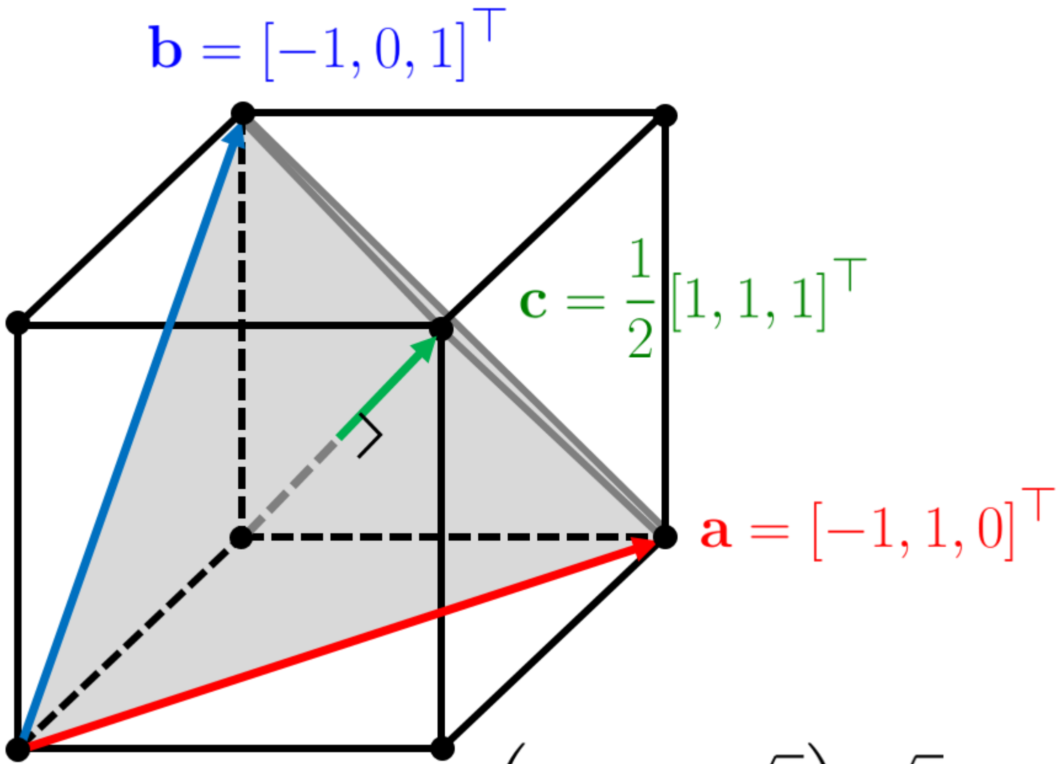


외적의 정의와 기하학적 의미



$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$

벡터의 삼중곱



$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

📝 요약

요약

내적	Dot Product	Inner Product
	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}^\top\mathbf{b}$	
외적	Cross Product	Outer Product
	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	$\mathbf{a}\mathbf{b}^\top$

요약

- 벡터의 내적 (Dot/Inner Products)
  - 정의
    - n차원
    - 결과는 스칼라
  - 성질
    - 교환법칙
    - 분배법칙
    - 자기자신
  - 기하학적 의미
    - 스칼라곱의 확장
    - 직교성
    - 정사영
    - 유사도
- 벡터의 외적 (Cross Products)
  - 정의
    - 3차원
    - 결과는 벡터
  - 성질
    - 교환법칙 X (Anti-Commutative)
    - 분배법칙 (Distributive)
    - 결합법칙 X (Not Associative)
  - 기하학적 의미
    - 두 벡터에 수직인 벡터(오른손 법칙)
    - 내적 : 코사인 = 외적 : 사인
- 벡터의 외적 (Outer Products)
  - 정의
    - n차원
    - 결과는 행렬

학습목표

<table>
<tr><td rowspan="2">내적</td><td>Dot Product</td><td>Inner Product</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">외적</td><td>Cross Product</td><td>Outer Product</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$</td><td>$\mathbf{a}\mathbf{b}^\top$</td></tr>
</table>

🍒 References

References

- 칸아카데미 - 벡터란?