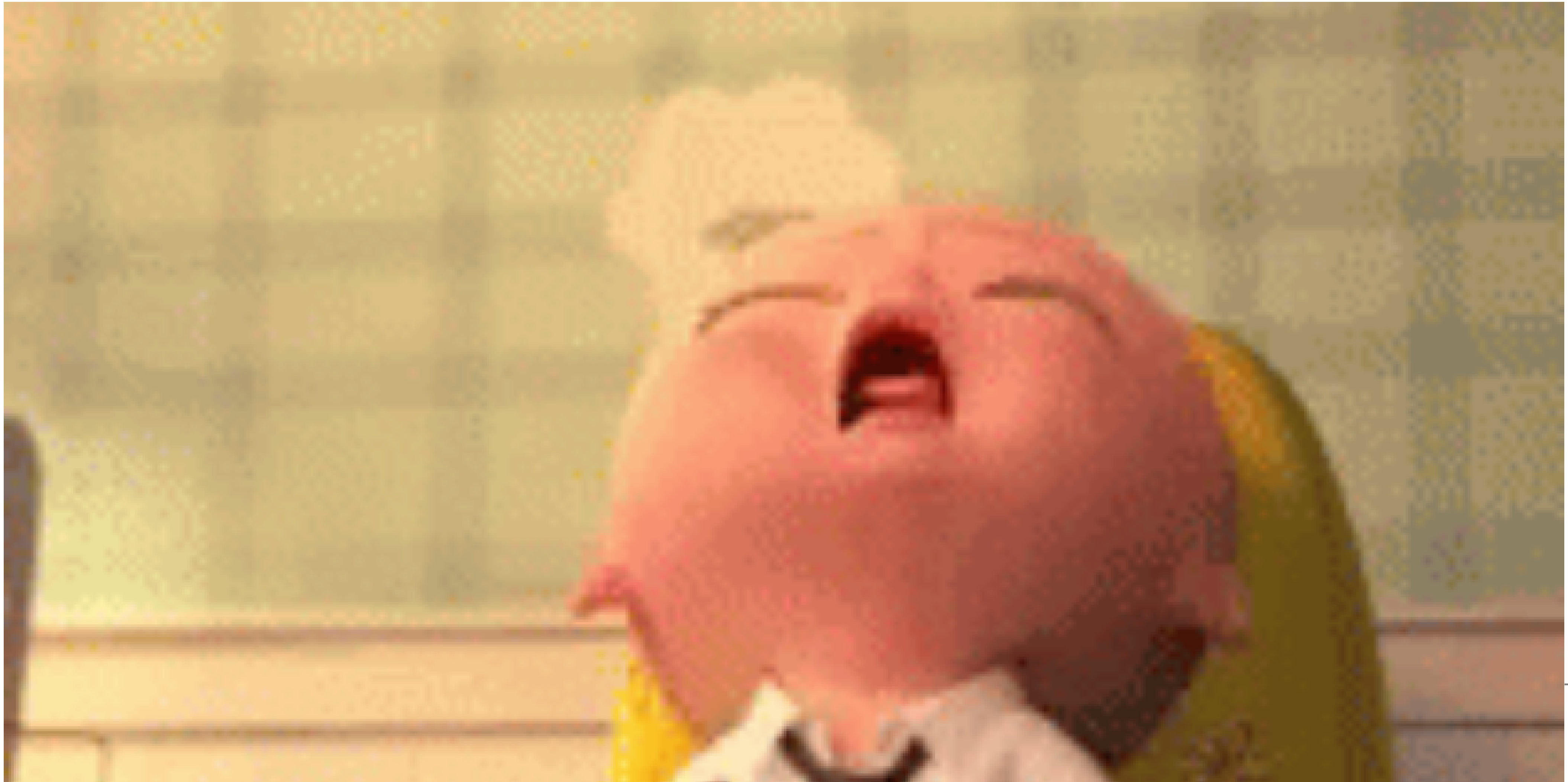
🚀 벡터공간

김수환

https://www.soohwan.kim

복습



벡터의 정의

- 크기와 방향이 있는 물리량 (평행이동해도 같음)
- 시작점이 원점이 되도록 평행이동하면 끝점으로 표현 가능
- n차원 공간의 점 = n차원 공간의 벡터

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

벡터의 연산

- 두 벡터

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- 정의: 두 벡터의 덧셈

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- 벡터와 스칼라

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}$$

- 정의: 벡터의 스칼라배

$$c\mathbf{a} = c \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

벡터 연산의 대수적 성질

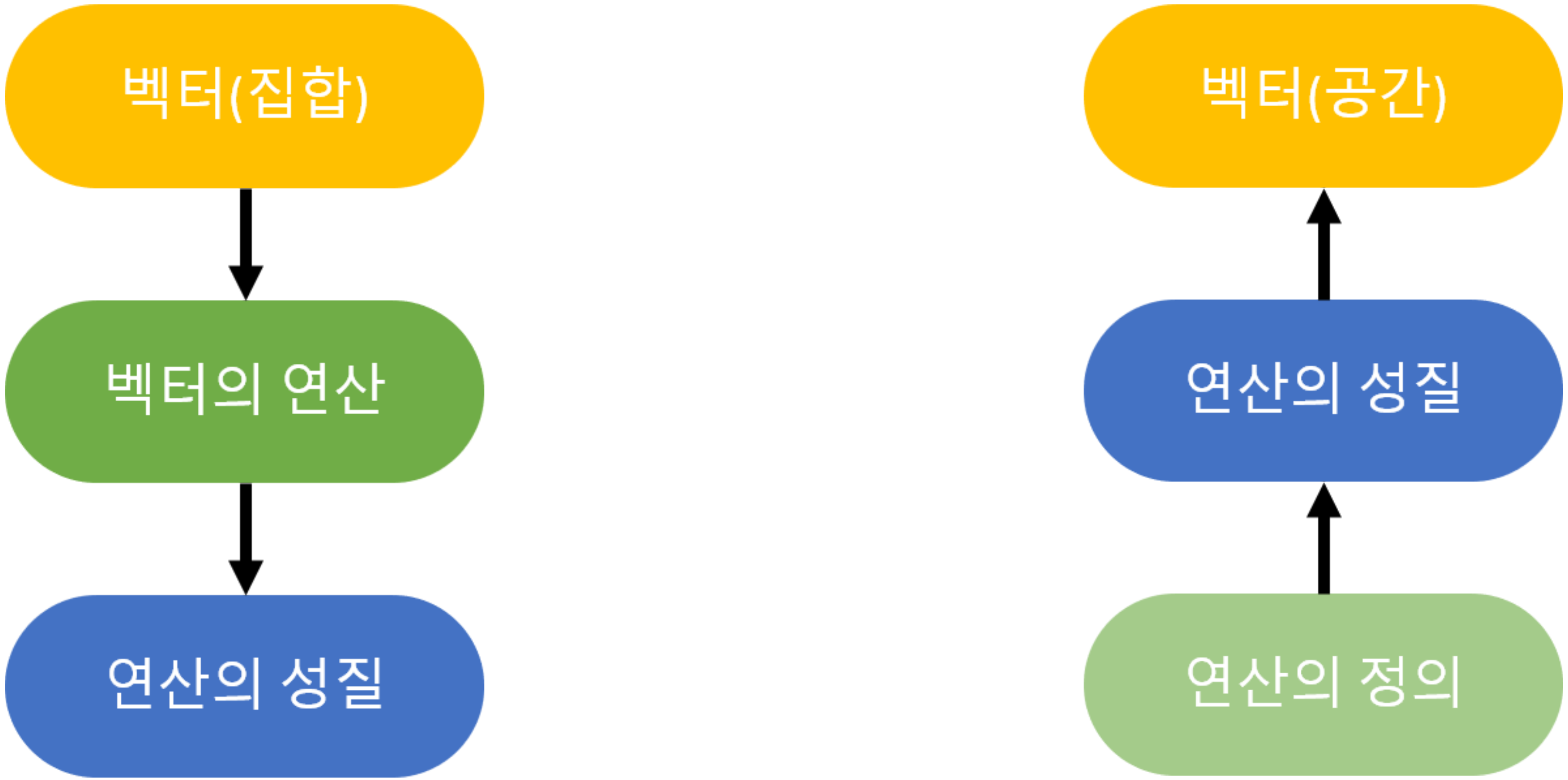
- 두 벡터의 합

Properties	Formulas
① 교환법칙	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
② 결합법칙	$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$
③ 항등원	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$
④ 역원	$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

- 벡터의 스칼라배

Properties	Formulas
① 분배법칙	$c(\mathbf{a}+\mathbf{b})=c\mathbf{a}+c\mathbf{b}$
② 분배법칙	$(c_1+c_2)\mathbf{a}=c_1\mathbf{a}+c_2\mathbf{a}$
③ 결합법칙	$c_1(c_2\mathbf{a})=(c_1c_2)\mathbf{a}$
④ 항등원	$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

벡터를 정의하는 두 가지 방법



The Big Picture

AI ⊃ Machine Learning ⊃ Deep Learning

함수	선형대수	미분	확률과 분포
1차 함수	벡터	미분	경우의 수
2차 함수	행렬	편미분	확률
지수함수	선형변환	Gradient, Jacobian	Gaussian
로그함수	고유값분해	Hessian	Bayes' Rule
삼각함수	특이값분해	Matrix Calculus	MLE, MAP

지금까지의 벡터와 행렬은 잠시 잊자

nX0Ppn2

벡터공간

Vector Spaces

집합(Set) vs. 공간(Space)

- 수학에서 공간(Space)이란 집합(Set)에 어떠한 연산 혹은 구조를 부여한 것을 말한다

집합 + 연산/구조 = 공간

- 수학의 모든 연산의 정의가 특정한 공간 위에서 이루어지고,
  한 공간에서 성립하는 정의가 다른 공간에서는 성립하지 않는 경우가 많기 때문에,
  지금 내가 다루고 있는 대상이 속해있는 공간을 우선적으로 파악하는 것이 중요하다

- 실수 ⇒ 실수 연산의 정의 ⇒ 실수 연산의 대수적 성질 ⇒ 실수 연산의 기하학적 의미
- 복소수 ⇒ 복소수 연산의 정의 ⇒ 복소수 연산의 대수적 성질 ⇒ 연산의 기하학적 의미

- 벡터 ⇒ 벡터 연산의 정의 ⇒ 벡터 연산의 대수적 성질 ⇒ 벡터 연산의 기하학적 의미
- 행렬 ⇒ 실수 연산의 정의 ⇒ 행렬 연산의 대수적 성질 ⇒ 행렬 연산의 기하학적 의미

https://jjycjnmath.tistory.com/5?category=738759

벡터공간 (Vector Space)

- 공집합이 아닌 집합 V에 두 연산이 정의되어 있다고 하자.
  1. 두 벡터의 합: $+$
  2. 벡터의 스칼라배: $\cdot$
- 다음 조건을 만족하면 집합 V를 **벡터공간**(Vector Space)이라 한다
  1. 기본 법칙 2개를 만족
  2. 연산 법칙 8개를 만족
- 벡터공간 V의 원소를 **벡터**(Vector)라 한다.

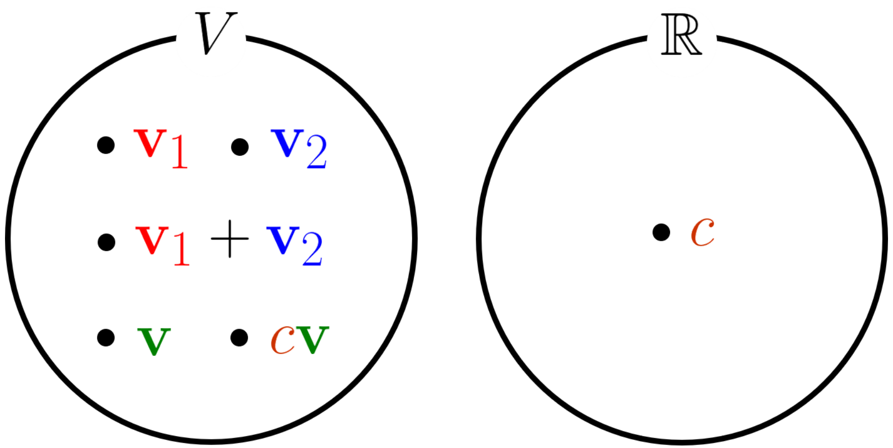
벡터공간: 기본 법칙

1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \ \Rightarrow \ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$$

2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다

$$c \in \mathbb{R}, \ \mathbf{v} \in V \ \Rightarrow \ c\mathbf{v} \in V$$



벡터공간: 연산 법칙

- 임의의 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$와 임의의 스칼라 $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$에 대하여 다음을 만족

1. 벡터 합에 대한 교환법칙

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$$

2. 벡터 합에 대한 결합법칙

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$$

3. 벡터 합에 대한 항등원 존재

$$^{\forall}\mathbf{v} \in V, \quad ^{\exists}\mathbf{0} \in V \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

4. 벡터 합에 대한 역원 존재

$$^{\forall}\mathbf{v} \in V, \quad ^{\exists} -\mathbf{v} \in V \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

1. 스칼라배에 대한 분배법칙

$$c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = c\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2$$

2. 스칼라배에 대한 분배법칙

$$(c_1 + c_2)\mathbf{v} = c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{v}$$

3. 스칼라배에 대한 결합법칙

$$c_1(c_2\mathbf{v}) = (c_1c_2)\mathbf{v}$$

4. 스칼라배에 대한 항등원 존재

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

기존의 벡터 합, 스칼라배로 정의하면 연산법칙은 자동으로 만족하므로 걱정할 필요가 없다.

벡터공간의 예

- $\mathbb{R}$ 공간

$$\mathbb{R} = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

- 기본 법칙

1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다
2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다

- 연산 법칙

1. 벡터 합에 대한 교환법칙
2. 벡터 합에 대한 결합법칙
3. 벡터 합에 대한 항등원 존재
4. 벡터 합에 대한 역원 존재
5. 스칼라배에 대한 분배법칙
6. 스칼라배에 대한 분배법칙
7. 스칼라배에 대한 결합법칙
8. 스칼라배에 대한 항등원 존재

벡터공간의 예

- $\mathbb{R}^2$ 공간

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

- 기본 법칙

1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다
2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다

- 연산 법칙

1. 벡터 합에 대한 교환법칙
2. 벡터 합에 대한 결합법칙
3. 벡터 합에 대한 항등원 존재
4. 벡터 합에 대한 역원 존재
5. 스칼라배에 대한 분배법칙
6. 스칼라배에 대한 분배법칙
7. 스칼라배에 대한 결합법칙
8. 스칼라배에 대한 항등원 존재

벡터공간의 예

- $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 공간

$$\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

- 기본 법칙

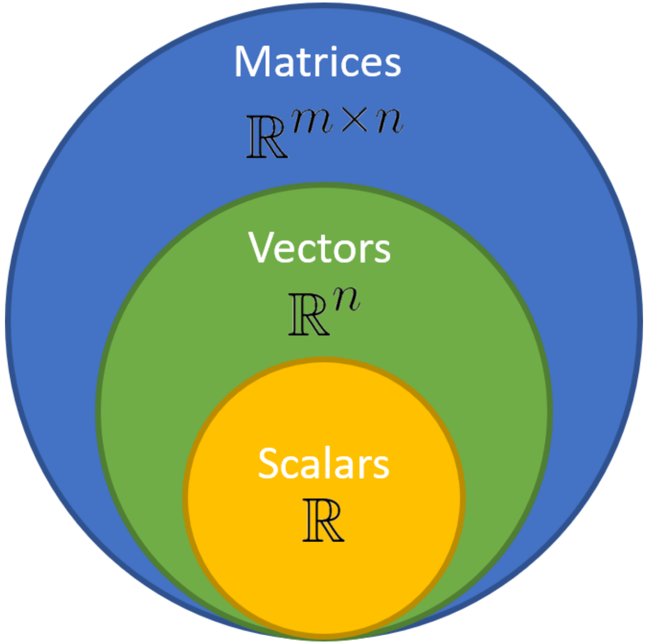
1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다
2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다

- 연산 법칙

1. 벡터 합에 대한 교환법칙
2. 벡터 합에 대한 결합법칙
3. 벡터 합에 대한 항등원 존재
4. 벡터 합에 대한 역원 존재
5. 스칼라배에 대한 분배법칙
6. 스칼라배에 대한 분배법칙
7. 스칼라배에 대한 결합법칙
8. 스칼라배에 대한 항등원 존재

벡터공간의 예

- 1차원 실수의 집합과 기존 $+, \cdot$ 연산 = $\mathbb{R}$ 공간
- 2차원 벡터의 집합과 기존 $+, \cdot$ 연산 = $\mathbb{R}^2$ 공간
- 3차원 벡터의 집합과 기존 $+, \cdot$ 연산 = $\mathbb{R}^3$ 공간
- n차원 벡터의 집합과 기존 $+, \cdot$ 연산 = $\mathbb{R}^n$ 공간
- $m \times n$ 행렬의 집합과 기존 $+, \cdot$ 연산 = $\mathbb{R}^{m \times n}$ 공간
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m \times n}$은 벡터공간이다
- 실수, 벡터, 행렬은 벡터(점)이다
- 벡터의 확장: (기존) 벡터로 표현 가능하면 벡터다
- 하고 싶은 말
  - 벡터공간 = 집합 + 연산
  - 부분공간 = 부분집합



벡터공간의 예

- n차 이하의 다항식의 집합

$$V = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \cdots, n\}$$

- 기본 법칙

1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다
2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다

- 연산 법칙

1. 벡터 합에 대한 교환법칙
2. 벡터 합에 대한 결합법칙
3. 벡터 합에 대한 항등원 존재
4. 벡터 합에 대한 역원 존재
5. 스칼라배에 대한 분배법칙
6. 스칼라배에 대한 분배법칙
7. 스칼라배에 대한 결합법칙
8. 스칼라배에 대한 항등원 존재

영벡터공간 (Zero Vector Space)

- 영벡터 0 하나로만 구성된 벡터공간

$$V = \{0\}$$

  - 기본 법칙

1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다
2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다

- 연산 법칙

1. 벡터 합에 대한 교환법칙
2. 벡터 합에 대한 결합법칙
3. 벡터 합에 대한 항등원 존재
4. 벡터 합에 대한 역원 존재
5. 스칼라배에 대한 분배법칙
6. 스칼라배에 대한 분배법칙
7. 스칼라배에 대한 결합법칙
8. 스칼라배에 대한 항등원 존재

🌏 부분공간

Subspaces

부분공간

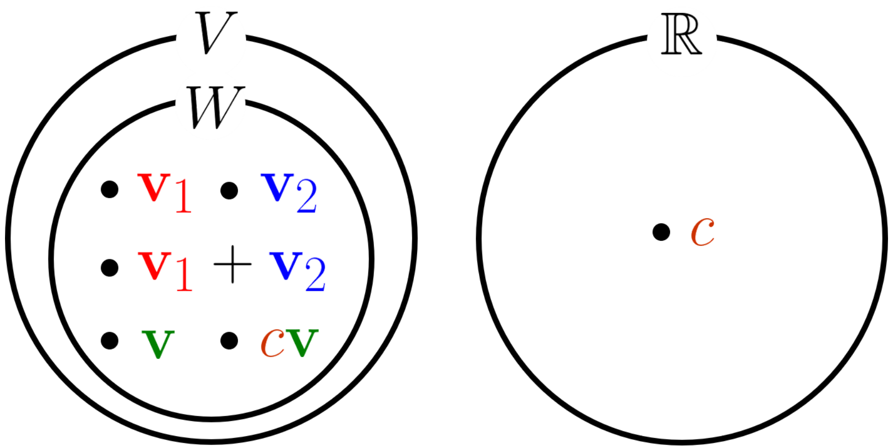
- 벡터공간 V의 부분집합 W가 또한 벡터공간이 될 때, W를 V의 부분공간이라 한다.
- 벡터공간 V의 부분집합 W가 벡터공간이기 위한 필요충분조건
  (기본 법칙 2개, ~~연산법칙 8개는 부분집합이므로 당연히 만족~~)

1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W$$

2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다

$$c \in \mathbb{R}, \ \mathbf{v} \in W \quad \Rightarrow \quad c\mathbf{v} \in W$$



- 벡터 합에 대한 항등원 존재

$$\mathbf{0} \in W$$

부분공간과 부분공간이 아닌 예

- 원점을 지나는 직선: $\mathbb{R}^2$의 부분공간 O

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

- 기본 법칙
  1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다
  2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다
  - 벡터 합에 대한 항등원 존재

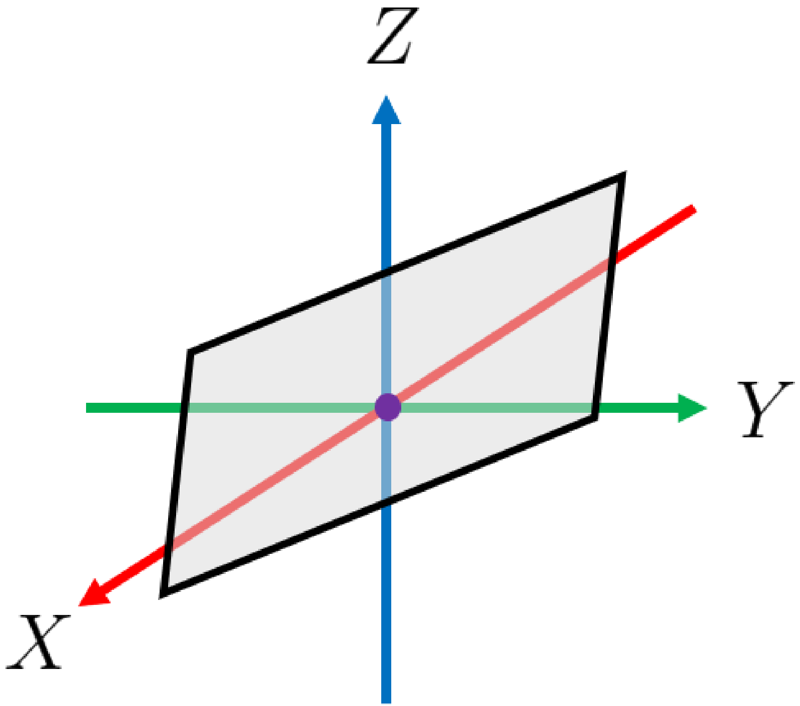
- 원점을 지나지 않는 직선: $\mathbb{R}^2$의 부분공간 X

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y + 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

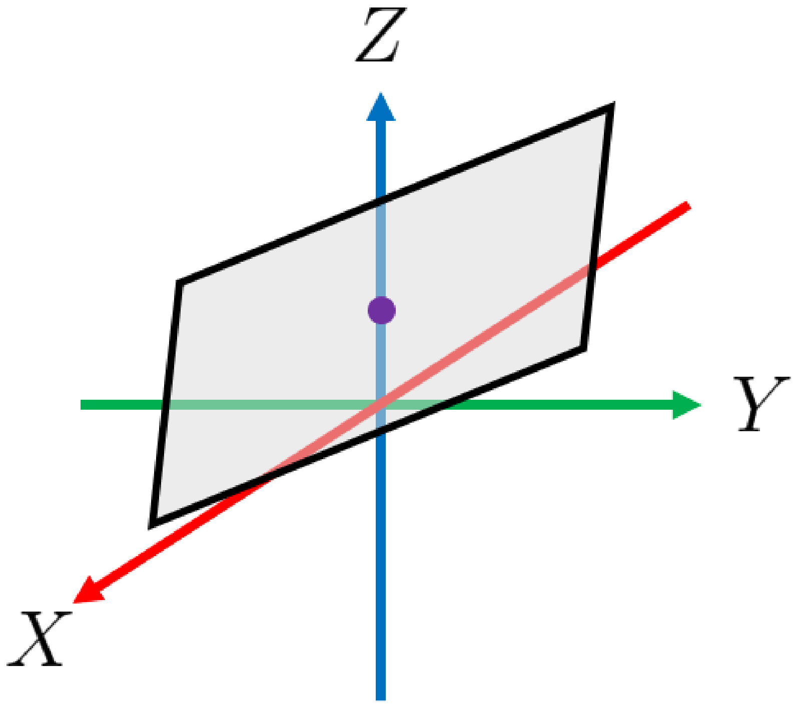
- 기본 법칙
  1. ~~벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다~~
  2. ~~벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다~~
  - ~~벡터 합에 대한 항등원 존재~~

부분공간과 부분공간이 아닌 예

- $\mathbb{R}^3$의 부분공간 O



- $\mathbb{R}^3$의 부분공간 X



부분공간과 부분공간이 아닌 예

- $\mathbb{R}^{2\times2}$의 부분공간 O

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times2}$$

- 기본 법칙
  1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다
  2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다
  - 벡터 합에 대한 항등원 존재

- $\mathbb{R}^{2\times2}$의 부분공간 X

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times2}$$

- 기본 법칙
  1. ~~벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다~~
  2. ~~벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다~~
  - ~~벡터 합에 대한 항등원 존재~~

부분공간의 예

- x값과 y값이 같은 3차원 벡터의 집합은 $\mathbb{R}^3$의 부분공간 O

$$W = \{(x, x, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

- 2×2 대각행렬의 집합은 $\mathbb{R}^{2\times 2}$의 부분공간 O

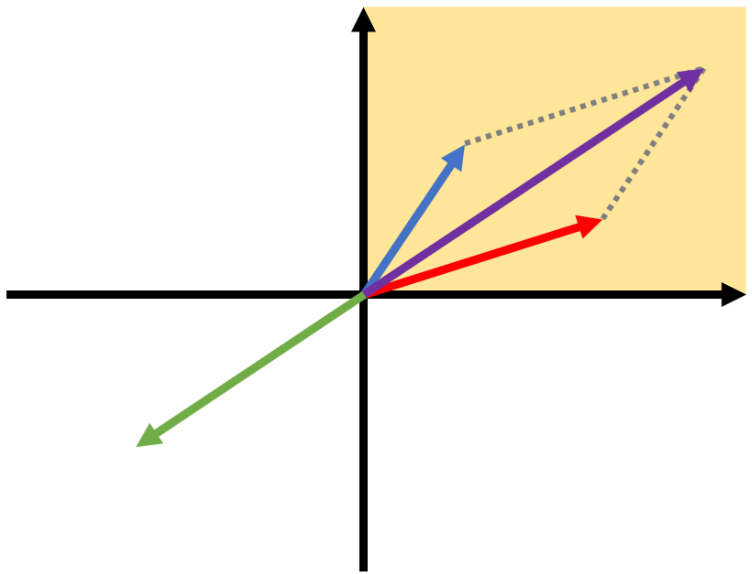
$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$$

부분공간이 아닌 예

- $\mathbb{R}^2$에서 제1사분면: $\mathbb{R}^2$의 부분공간 X

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

  - 기본 법칙
    1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다
    2. ~~벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다~~
    - 벡터 합에 대한 항등원 존재



https://twlab.tistory.com/15

합집합/교집합과 부분공간

- 벡터공간 V의 부분공간 S, T

1. 합집합 $S \cup T$는 V의 부분공간 X
2. 교집합 $S \cap T$는 V의 부분공간 O

1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S \cap T \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in S \cap T$$

2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다

$$c \in \mathbb{R},\; \mathbf{v} \in S \cap T \;\Rightarrow\; c\mathbf{v} \in S \cap T$$

- 벡터 합에 대한 항등원 존재

$$\mathbf{0} \in S \cap T$$

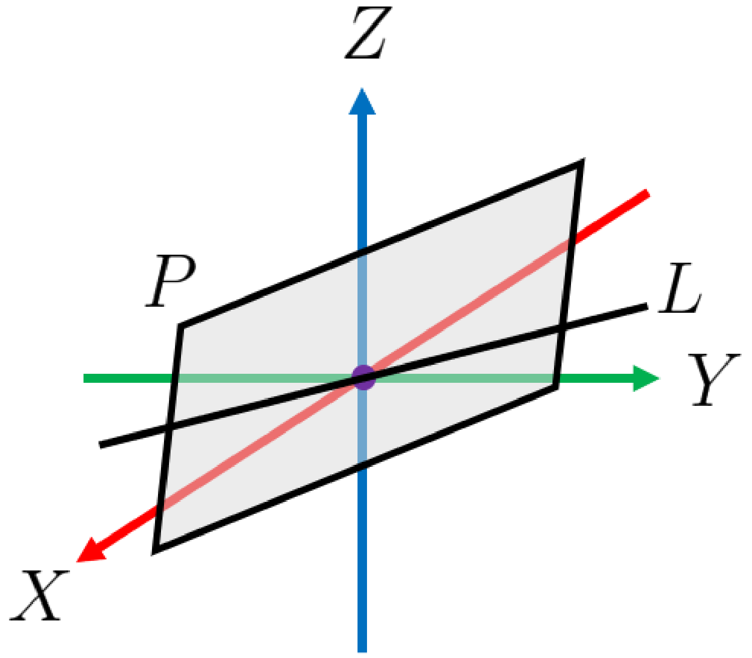
합집합/교집합과 부분공간

- 벡터공간 V의 부분공간 S, T

1. 합집합 $S \cup T$는 V의 부분공간 X
2. 교집합 $S \cap T$는 V의 부분공간 O

- 예: $\mathbb{R}^3$의 부분공간 P, L

1. 합집합 $P \cup L$는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간 X
2. 교집합 $P \cap L$는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간 O



🌏 선형결합과 생성공간

Linear Combinations and Spans

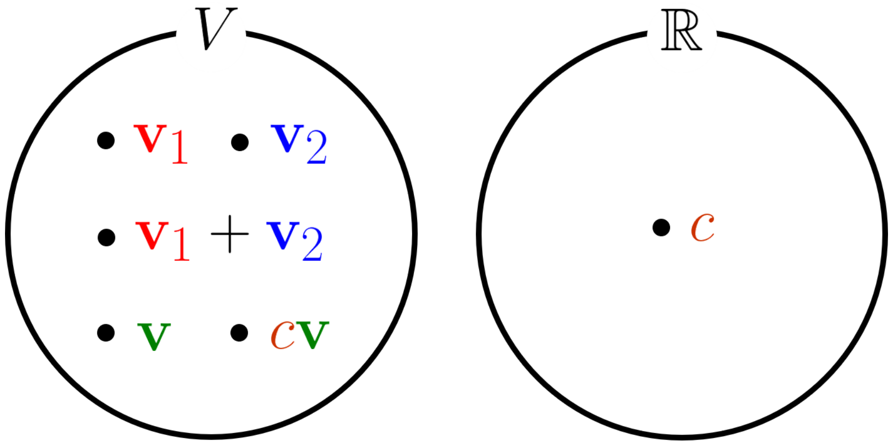
[돌아보기] 벡터공간: 기본 법칙

1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$$

2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다

$$c \in \mathbb{R},\; \mathbf{v} \in V \;\Rightarrow\; c\mathbf{v} \in V$$



- 벡터의 선형결합(Linear Combination)에 닫혀있다

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R},\; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \;\Rightarrow\; c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \in V$$

선형결합 (Linear Combinations)

- 벡터공간 V의 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$와 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$에 대해서 벡터의 스칼라배의 합을 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$의 선형결합(Linear Combination) 또는 일차결합이라 한다.

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k \in V$$

[다시보기] 행렬과 벡터의 곱

- (열벡터의) 행벡터와 열벡터의 곱 (Dot Product, Inner Product)

$$\mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

- 행렬과 벡터의 곱은 열벡터들의 선형결합(linear combination)이다!

다음에 답하시오

- 벡터 $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$를 벡터 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$의 선형결합으로 나타내시오.

$$
\begin{aligned}
c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} &= \mathbf{w} \\
\Rightarrow \ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

생성공간 (Span)

- 벡터공간 V의 벡터의 집합 $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$에 대하여 S의 가능한 모든 원소들의 일차결합으로 만들어진 부분공간을 S의 생성공간(Span)이라 하고 $\mathrm{span}(S)$로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \mathrm{span}(S) &= \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k) \\ &= \{c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

생성공간은 부분공간이다

- n차원 벡터의 집합 $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$의 선형결합은 $\mathbb{R}^n$의 부분공간

$$\mathrm{span}(S) = \{c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

1. 벡터의 합 연산에 대해 닫혀있다

$$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathrm{span}(S) \;\Rightarrow\; \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in \mathrm{span}(S)$$

2. 벡터의 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다

$$\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in \mathrm{span}(S) \;\Rightarrow\; \alpha\mathbf{y} \in \mathrm{span}(S)$$

- 벡터 합에 대한 항등원 존재

$$\mathbf{0} \in \mathrm{span}(S)$$

🧱 일차종속과 일차독립

Linearly Dependent/Independent

일차종속 (Linearly Dependent)

- 벡터공간 V의 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in V$와 적어도 하나는 0이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$에 대해서 다음 식이 성립하면 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$는 일차종속 또는 선형종속(Linearly Dependent)이라 한다.

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

- 즉, 한 벡터를 다른 벡터들의 선형결합으로 표현할 수 있으면 이들 벡터는 일차종속이다.
- 즉, 다른 벡터들로 생성한 생성공간에 그 벡터가 포함된다.

일차독립 (Linearly Independent)

- 벡터공간 V의 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in V$와 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$에 대해서 다음 식을 만족하는 스칼라가 $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$뿐이라면 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$는 일차독립 또는 선형독립(Linearly Independent)라고 한다.

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

- 즉, 한 벡터를 다른 벡터들의 선형결합으로 표현할 수 없으면 이들 벡터는 일차독립이다.
- 즉, 다른 벡터들로 생성한 생성공간에 그 벡터가 포함되지 않는다.
- 즉, 그 벡터까지 포함하하여 공간을 생성하면 새로운 생성공간이 된다.

- [미리보기] 일차독립인 벡터들은 생성공간의 기저벡터가 된다. (빼게 없다)

[다시보기] 다음 물음에 답하시오

- 벡터 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$은 일차종속/일차독립인가?

- 선형결합 O $\Rightarrow$ 일차종속

$$\mathbf{w} = 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- 행렬식 $= 0 \Rightarrow$ 일차종속

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

다음 물음에 답하시오

- 벡터 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$은 일차종속/일차독립인가?

- 선형결합 X $\Rightarrow$ 일차독립

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \; c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \; \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 행렬식 $\neq 0 \Rightarrow$ 일차독립

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

다음 물음에 답하시오

- 다음에 주어진 $\mathbb{R}^3$의 부분집합 S는 $\mathbb{R}^3$을 생성하는가?

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

- 행렬식 $\neq 0 \Rightarrow$ 일차독립 $\Rightarrow$ 생성한다

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

- $\mathbb{R}^3$의 기저벡터(Basis)

기저와 차원

Basis and Dimensions

기저(Basis)와 차원(Dimensions)

- 벡터공간 V에 속한 벡터집합 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$이 다음 두 조건을 만족하면, 이를 벡터공간 V의 기저(Basis)라고 한다

1. S는 일차독립이다
2. S는 V를 생성한다

- 벡터공간의 기저는 여러 조합일 수 있다.
- 이때 기저가 되는 벡터들의 수 n을 이 벡터공간의 차원(Dimension)이라 한다

$$\dim(V) = n$$

[다시보기] 다음 물음에 답하시오

- 벡터 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$로 구성된 집합은 $\mathbb{R}^2$ 공간의 기저임을 보이시오

1. 일차독립 (다시보기)
2. $\mathbb{R}^2$ 공간을 생성: 임의의 벡터를 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$로 표현가능

$$^{\forall}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore c_1 = x, c_2 = y - x$$

- $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- 참고: 벡터 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$로 구성된 집합도 $\mathbb{R}^2$ 공간의 기저이다 (표준기저)

표준기저 (Standard Basis)

- $\mathbb{R}^n$에서 하나의 성분만 1이고 나머지는 모두 0인 벡터를 표준단위벡터라한다.

$$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

- 표준단위벡터의 집합은 $\mathbb{R}^n$의 기저가 되고 이를 표준기저(Standard Basis)라고 한다
  1. 표준단위벡터는 서로 일차독립이다
  2. 표준단위벡터는 $\mathbb{R}^n$을 생성한다

다음 물음에 답하라

- $\mathbb{R}^4$의 표준기저를 구하라
- 표준단위벡터

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

좌표 (Coordinates)

- 벡터공간 V의 기저 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$에 대하여 V에 있는 임의의 벡터 $\mathbf{v}$를 기저 벡터의 선형결합으로 표현하는 방법은 유일하다.

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \in V$$

- 이때 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$를 벡터 $\mathbf{v}$의 좌표(Coordinates)라고 한다.
- 증명: 다른 두 가지 방법이 있다면 모순!

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \\ \mathbf{v} &= d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n \\ \Rightarrow\ \ \mathbf{0} &= (c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n \\ \Rightarrow\ \ c_1 &= d_1,\ c_2 = d_2,\ \ldots,\ c_n = d_n \end{aligned}$$

[다시보기] 행렬과 벡터의 곱

- 벡터는 표준기저벡터(Standard Basis Vector)의 선형결합
- 벡터의 각 원소는 선형결합의 계수

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$

[다시보기] 다음 물음에 답하시오

- $\mathbb{R}^2$에서 기저를 벡터 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$로 구성된 집합이라 할때,
  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$의 좌표를 구하고 $\mathbf{u}$와 비교하시오
- 선형결합

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore c_1 = 2, c_2 = -5$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \neq [\mathbf{u}]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

다음 물음에 답하시오

- 다음 벡터집합이 기저인지 보이고 차원을 구하시오

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\},\ \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right\},\ \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix}\right\}$$

- (a) 일차종속, $\mathbb{R}^2$의 기저 X
- (b) 일차독립, $\mathbb{R}^3$의 기저 X
- (c) 일차독립(행렬식=1), $\mathbb{R}^3$의 기저, $\mathbf{dim}(V) = \mathbf{3}$

기저의 성질

- $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$이 벡터공간 V의 기저라고 하자.
  이때 V의 벡터집합 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_l\}$이 $l > n$이면 항상 일차종속이다.
  한편 일차독립이면 $l \leq n$이다.

일차종속 vs. 일차독립의 개념

- 재료 (벡터)
  - `된장, 고추장, 쌈장, 고추가루, 소금, 설탕`에서 대체할 수 있는 재료가 있나?
- 있다 (일차종속)
  - `쌈장 = 된장1 + 고추장1`
  - `고추장 = 고추가루3, 소금2, 설탕1`
- 양념을 만들 수 있는 기본 재료 (기저벡터)
  - `된장, 고추가루, 소금, 설탕`
- 기본 재료로 모든 양념을 만들 수 있다 (생성공간)
  - 기본 재료의 조합 (선형결합)
  - 모든 양념은 4차원의 벡터공간

📐 직교공간

Orthogonal Subspaces

[돌아보기] 직교벡터 vs. 정규직교벡터

- 직교벡터 (Orthogonal Vectors)
  : 수직인 두 벡터

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

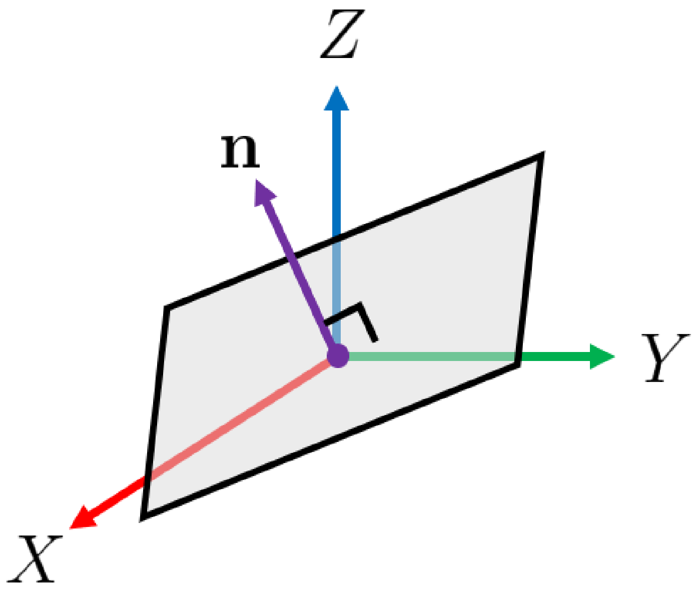
- 정규직교벡터 (Orthonormal Vectors)
  : 수직인 두 단위벡터 $\|\hat{\mathbf{a}}\| = \|\hat{\mathbf{b}}\| = 1$

$$\hat{\mathbf{a}} \perp \hat{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$$

직교공간 (Orthogonal Subspaces)

- 벡터공간 V의 부분공간 S의 모든 벡터가 부분공간 T의 모든 벡터와 수직일때 두 부분공간 S, T는 직교한다고 한다.

$$S \perp T \;\; \Leftrightarrow \;\; {}^{\forall}\mathbf{s} \in S,\; {}^{\forall}\mathbf{t} \in T,\; \mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = 0$$



⚔️ 직교행렬

Orthogonal Matrix

[돌아보기] 직교벡터 vs. 정규직교벡터

- 직교벡터 (Orthogonal Vectors)
  : 수직인 두 벡터

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \ \Leftrightarrow \ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

- 정규직교벡터 (Orthonormal Vectors)
  : 수직인 두 단위벡터 $\|\hat{\mathbf{a}}\| = \|\hat{\mathbf{b}}\| = 1$

$$\hat{\mathbf{a}} \perp \hat{\mathbf{b}} \ \Leftrightarrow \ \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$$

직교행렬

- 행렬과 전치행렬의 곱이 단위행렬인 행렬

$$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n} \;\Rightarrow\; \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}^\top\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{u}_1^\top & - \\ - & \mathbf{u}_2^\top & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{u}_n^\top & - \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \begin{bmatrix} - & \mathbf{u}_1^\top & - \\ - & \mathbf{u}_2^\top & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{u}_n^\top & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\top\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^\top\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1^\top\mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2^\top\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^\top\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2^\top\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n^\top\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n^\top\mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

직교행렬

- 행렬의 행벡터 혹은 열벡터가 모두 정규직교벡터인 행렬

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{u}_1^\top & - \\ - & \mathbf{u}_2^\top & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{u}_n^\top & - \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; \mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- 성질

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}^\top\mathbf{Q} = \mathbf{I} \;\Rightarrow\; \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$$

직교행렬의 행렬식

- 직교행렬의 행렬식은 1 혹은 -1이다

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I} \\ \Rightarrow & \det\left(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top\right) = \det\left(\mathbf{I}\right) = 1 \\ \Rightarrow & \det\left(\mathbf{Q}\right)\det\left(\mathbf{Q}^\top\right) = 1 \\ \Rightarrow & \det\left(\mathbf{Q}\right)\det\left(\mathbf{Q}\right) = 1 \\ \Rightarrow & \det\left(\mathbf{Q}\right)^2 = 1 \\ \Rightarrow & \det\left(\mathbf{Q}\right) = \pm 1 \end{aligned}$$

[미리보기] 직교행렬의 예

- 회전행렬

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- 성질

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{R}^\top\mathbf{R} = \mathbf{I} \;\Rightarrow\; \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top$$

$$\det(\mathbf{R}) = 1$$

👥 정사영행렬

Orthogonal Projection Matrix

사영행렬

- 사영행렬/투영행렬 (Projection Matrix): $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$$

- 정사영행렬 (Orthogonal Projection Matrix)

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}$$

- 경사투영행렬 (Oblique Projection Matrix)

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^\top \neq \mathbf{P}$$

사영행렬의 예

- 정사영행렬 (Orthogonal Projection Matrix)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top$$

- 경사투영행렬 (Oblique Projection Matrix)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \neq \mathbf{P}^\top$$

[돌아보기] Project a Vector onto a Unit Vector

- Projection Vector: (Signed) 크기 (Scalar Projection)

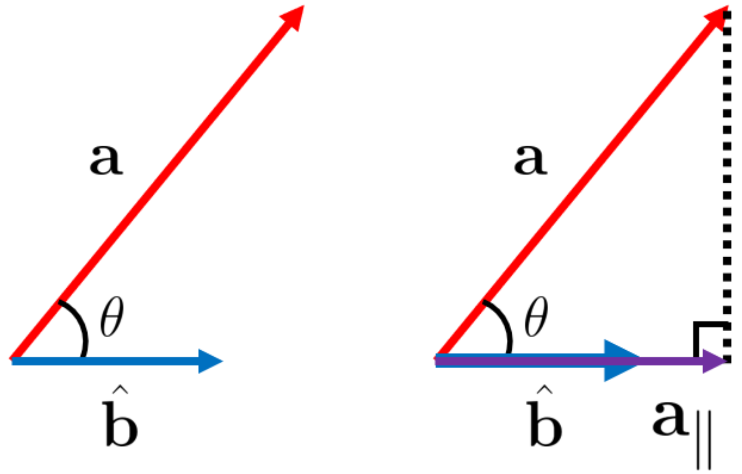
$$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{b}} = \|\mathbf{a}\| \|\hat{\mathbf{b}}\| \cos\theta = \|\mathbf{a}\| \cos\theta$$
$$\Rightarrow \ \|\mathbf{a}_{\|}\| = \|\mathbf{a}\| \cos\theta = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{b}}$$

- Projection Vector: 방향

$$\hat{\mathbf{a}}_{\|} = \hat{\mathbf{b}}$$

- Projection Vector

$$\therefore \mathbf{a}_{\|} = \|\mathbf{a}_{\|}\| \, \hat{\mathbf{a}}_{\|} = (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{b}}) \, \hat{\mathbf{b}}$$



벡터와 단위 벡터의 내적은 벡터를 단위 벡터 방향으로 projection 시킨 프로젝션 벡터의 크기와 같다.

[돌아보기] Project a Vector onto a Vector

- Projection Vector: (Signed) 크기 (Scalar Projection)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta = (\|\mathbf{a}\| \cos\theta) \|\mathbf{b}\|$$

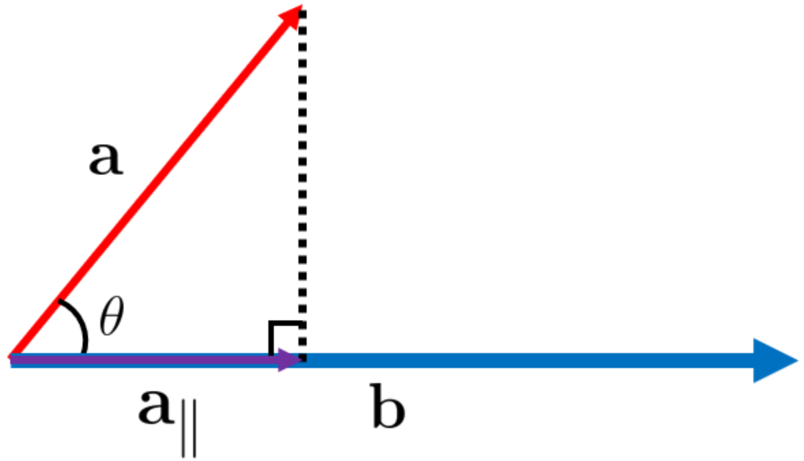
$$\Rightarrow \quad \|\mathbf{a}_{\|}\| = \|\mathbf{a}\| \cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{b}}$$

- Projection Vector: 방향

$$\hat{\mathbf{a}}_{\|} = \hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$$

- Projection Vector

$$\therefore \mathbf{a}_{\|} = \|\mathbf{a}_{\|}\| \, \hat{\mathbf{a}}_{\|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b}$$



두 벡터의 내적은 한 벡터를 다른 벡터의 방향으로 projection 시켜서 일직선에 놓이게 한 다음 두 벡터의 크기를 곱한 것과 같다.

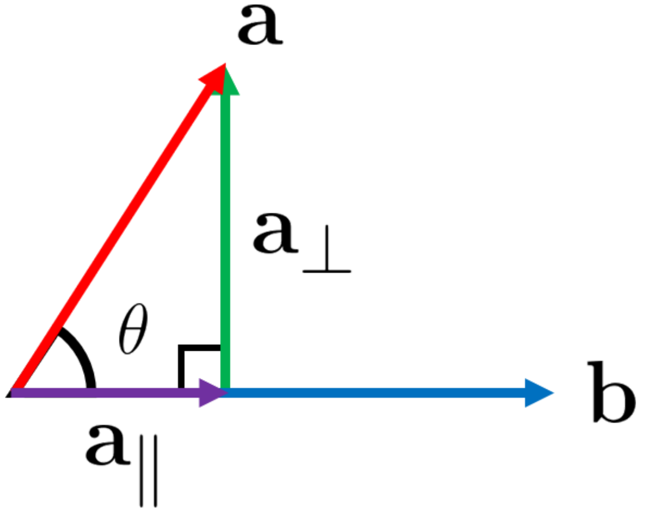
[돌아보기] 정사영행렬의 예: Projection onto a Line

- 벡터의 합

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$$

- Projection onto Subspaces

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \mathrm{Proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}) = \mathbf{a}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}$$



- Projection Matrix $\mathbf{P}$

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\right)\mathbf{b} = \mathbf{b}\left(\frac{\mathbf{b}^{\top}\mathbf{a}}{\mathbf{b}^{\top}\mathbf{b}}\right) = \left(\frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^{\top}}{\mathbf{b}^{\top}\mathbf{b}}\right)\mathbf{a} = \hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}^{\top} = \mathbf{P}\mathbf{a}$$

$$\mathrm{rank}(\mathbf{P}) = 1$$
$$\mathbf{P}^{\top} = \mathbf{P}$$
$$\mathbf{P}^{2} = \mathbf{P}$$

- Projection Matrix $\mathbf{P}$는 Subspace의 단위 벡터의 외적(Outer Product)이다
- Projection Matrix $\mathbf{P}$의 Rank는 1이다

정사영의 예

1. Orthogonal Projection onto a Line (Unit Vector)
2. Orthogonal Projection onto a Line (Vector)
3. Orthogonal Projection onto a Subspace (Orthonormal Basis)
4. Orthogonal Projection onto a Subspace (Basis)

① Orthogonal Projection onto a Line (Unit Vector)

1. Line: Unit Vector

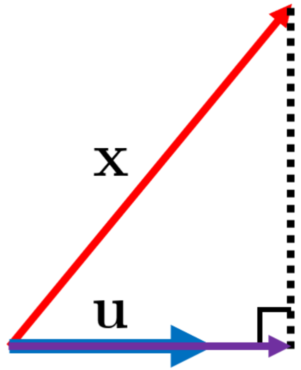
$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\mathbf{u}\| = 1$$

2. Ortogonal Projection Matrix onto the Line

$$\mathbf{P}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}\mathbf{u}^\top$$

3. Arbitrary Vector

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$$



$$\mathbf{x}_{\parallel} = \left(\mathbf{u}^\top \mathbf{x}\right) \mathbf{u}$$

4. Projection onto the Line

$$\mathbf{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{x} = \left(\mathbf{u}\mathbf{u}^\top\right)\mathbf{x} = \mathbf{u}\left(\mathbf{u}^\top\mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{u}^\top\mathbf{x}\right)\mathbf{u} = \mathbf{x}_{\parallel}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Projection_(linear_algebra)

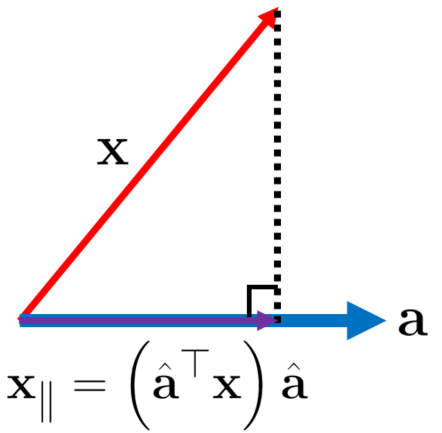
② Orthogonal Projection onto a Line (Vector)

1. Line: Vector

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

2. Orthogonal Projection Matrix onto the Line

$$\mathbf{P_a} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^\top}{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}} = \mathbf{a}\left(\mathbf{a}^\top\mathbf{a}\right)^{-1}\mathbf{a}^\top = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^\top}{\|\mathbf{a}\|^2} = \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^\top$$



3. Arbitrary Vector

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp$$

4. Projection onto the Line

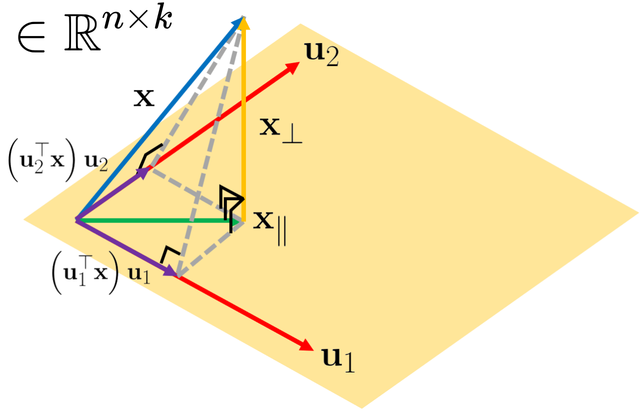
$$\mathbf{P_a}\mathbf{x} = \left(\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^\top\right)\mathbf{x} = \hat{\mathbf{a}}\left(\hat{\mathbf{a}}^\top\mathbf{x}\right) = \left(\hat{\mathbf{a}}^\top\mathbf{x}\right)\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{x}_\parallel$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Projection_(linear_algebra)

③ Orthogonal Projection onto a Subspace (Orthonormal Basis)

1. Orthonormal Basis of a Subspace

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = \delta_{ij} \ \Rightarrow \ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$



2. Projection Matrix onto the Subspace

$$\mathbf{P}_\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\top = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}_{\mathbf{u}_i}$$

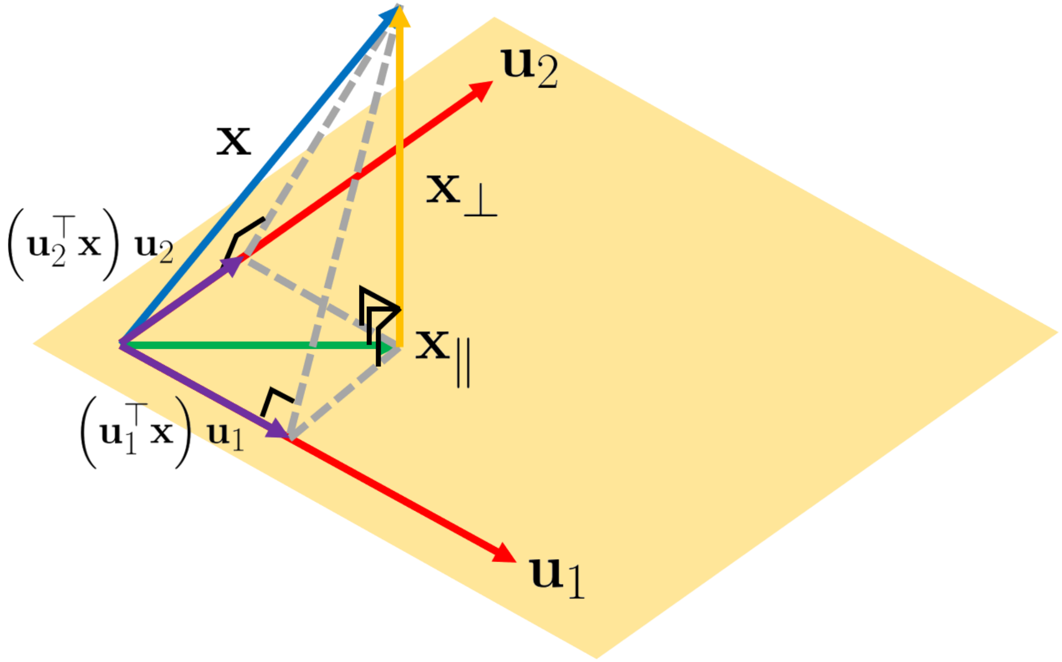
3. Arbitrary Vector

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

4. Projection onto the Subspace

$$\mathbf{P}_\mathbf{U}\mathbf{x} = \left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top \right) \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i \left(\mathbf{u}_i^\top \mathbf{x} \right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\mathbf{u}_i^\top \mathbf{x} \right) \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{x}_{\mathbf{u}_{i\parallel}}$$

③ Orthogonal Projection onto a Subspace (Orthonormal Basis)



$$\mathbf{P}_\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top\right) \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i \left(\mathbf{u}_i^\top \mathbf{x}\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\mathbf{u}_i^\top \mathbf{x}\right) \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{x}_{\mathbf{u}_{i\parallel}}$$

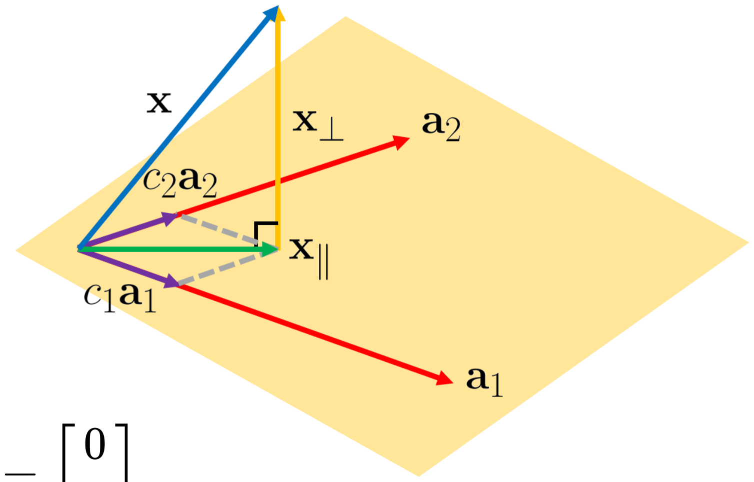
④ Orthogonal Projection onto a Subspace (Basis)

- Arbitrary Vector

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\perp} + \mathbf{b}_{\parallel}$$

- Projection Vector

$$\mathbf{b}_{\parallel} = \mathbf{P}\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$



- Sanity Check (Projection)

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \perp \mathbf{b}_{\perp} & \Rightarrow \mathbf{a}_1^{\top}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{a}_2 \perp \mathbf{b}_{\perp} & \Rightarrow \mathbf{a}_2^{\top}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} - & \mathbf{a}_1^{\top} & - \\ - & \mathbf{a}_2^{\top} & - \end{bmatrix} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{\top}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\top}\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\mathbf{b}$$

- Projection Vector

$$\mathbf{b}_{\parallel} = \mathbf{P}\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\mathbf{b}$$

④ Orthogonal Projection onto a Subspace (Basis)

1. Basis of a Subspace

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

2. Orthogonal Projection Matrix onto the Subspace

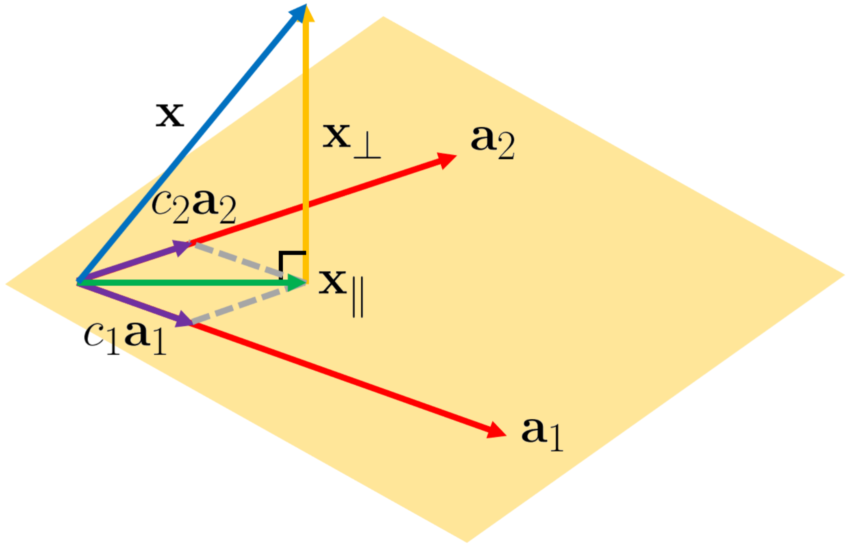
$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^\top$$

3. Arbitrary Vector

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

4. Projection onto the Subspace

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathbf{A}_\parallel}$$



📝 요약

벡터공간

- 벡터공간과 부분공간
- 선형결합과 생성공간
- 일차종속과 일차독립
- 기저와 차원
- 4개의 주요 부분공간

직교행렬과 정사영행렬

- 직교행렬

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}^\top\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

- 직교행렬의 행렬식

$$|\mathbf{Q}| = \pm 1$$

정사영행렬

1. Orthogonal Projection onto a Line (Unit Vector)

$$\mathbf{P}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\top}$$

2. Orthogonal Projection onto a Line (Vector)

$$\mathbf{P}_{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^{\top}}{\mathbf{a}^{\top}\mathbf{a}} = \mathbf{a}\left(\mathbf{a}^{\top}\mathbf{a}\right)^{-1}\mathbf{a}^{\top}$$

3. Orthogonal Projection onto a Subspace (Orthonormal Basis)

$$\mathbf{P}_{\mathbf{U}} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{\top}$$

4. Orthogonal Projection onto a Subspace (Basis)

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\top}$$

References

- 칸아카데미 - 벡터란?