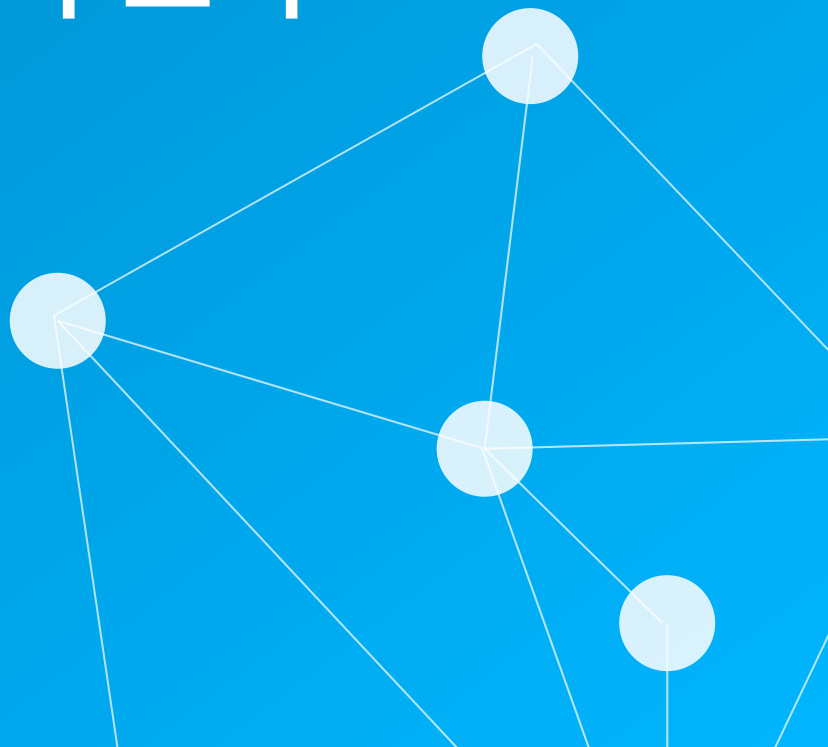
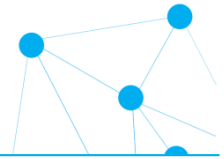
파이썬
자료구조

09 CHAPTER

탐색 트리

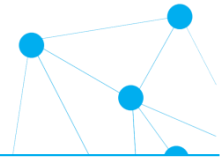


9장. 학습 목표



- 이진탐색트리의 개념과 연산들을 이해한다.
- 이진탐색트리의 효율성을 이해한다.
- 이진탐색트리 균형화의 의미를 이해한다.
- AVL 트리의 원리를 이해한다.
- 탐색트리를 이용한 맵의 구현을 이해한다.

9.1 탐색트리란?



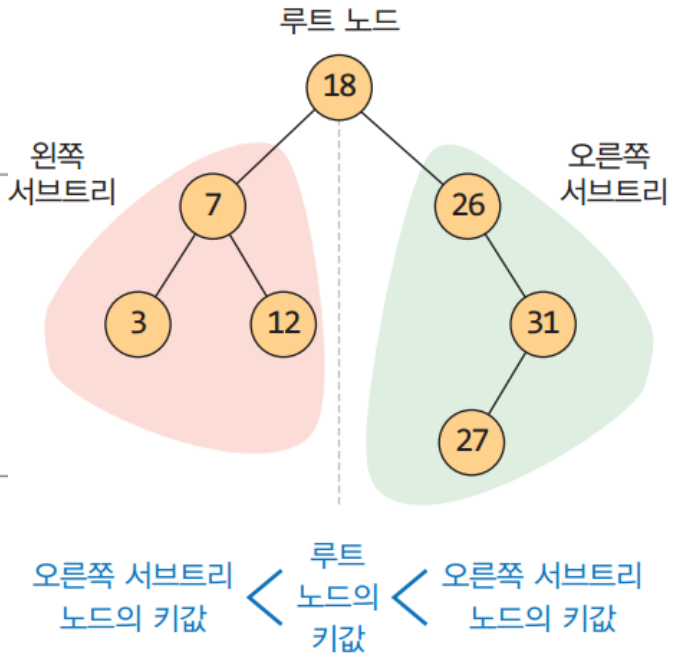
- 탐색트리는 탐색을 위한 트리 기반의 자료구조이다.

탐색트리란?

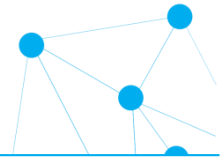
- 탐색을 위한 트리 기반의 자료구조이다.
- 이진탐색트리
  - 효율적인 탐색을 위한 이진트리 기반의 자료구조
  - 삽입, 삭제, 탐색: $O(logn)$

정의 9.1 이진탐색트리

- 모든 노드는 유일한 키를 갖는다.
- 왼쪽 서브트리의 키들은 루트의 키보다 작다.
- 오른쪽 서브트리의 키들은 루트의 키보다 크다.
- 왼쪽과 오른쪽 서브트리도 이진탐색트리이다.

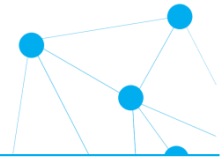


9.2 이진탐색트리의 연산



- 이진탐색트리: 노드 구조
- 탐색연산
- 삽입연산
- 삭제연산
- 이진 탐색 트리의 성능 분석

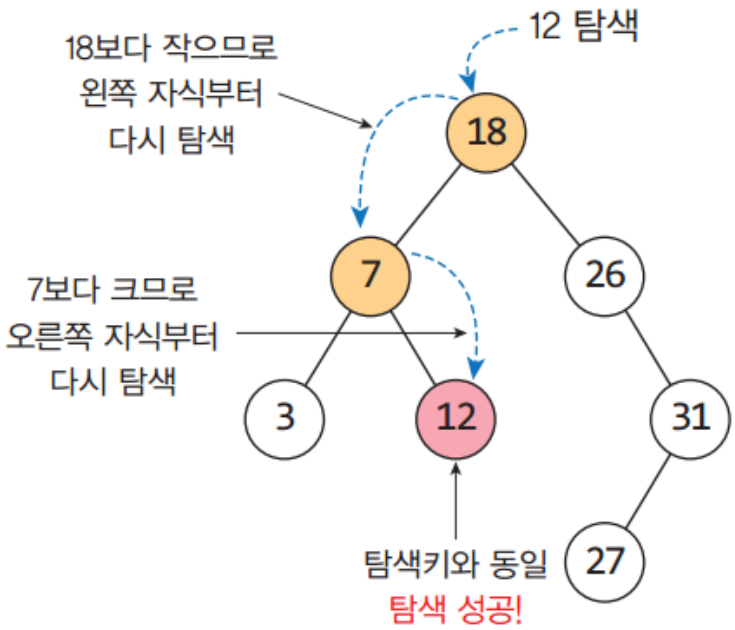
이진탐색트리: 노드 구조

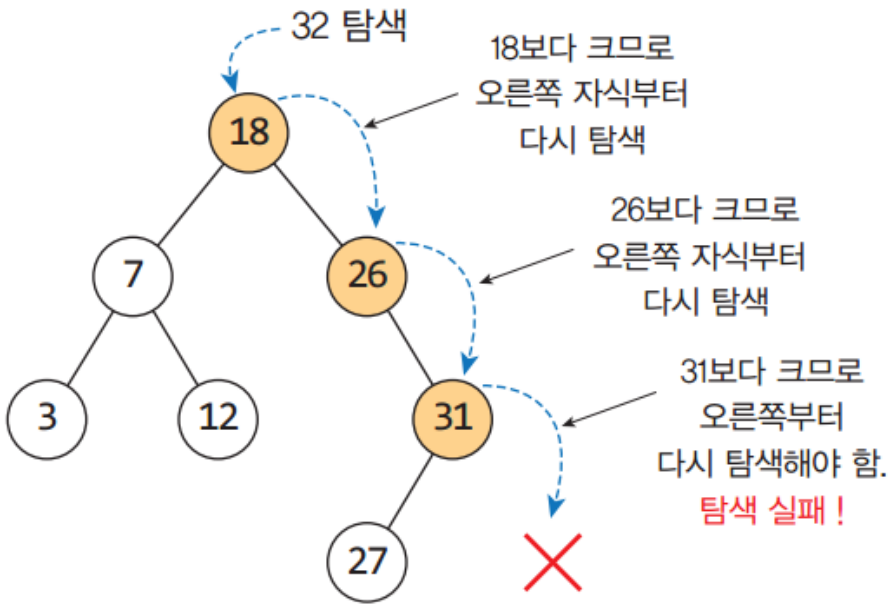


- 노드의 구조
  - (탐색키, 키에 대한 값)의 형태

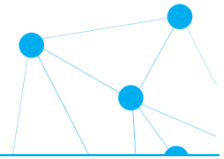
```
class BSTNode:                          # 이진탐색트리를 위한 노드 클래스
    def __init__ (self, key, value):    # 생성자: 키와 값을 받음
        self.key = key                  # 키 (key)
        self.value = value              # 값 (value)
        self.left = None                # 왼쪽 자식에 대한 링크
        self.right = None               # 오른쪽 자식에 대한 링크
```

탐색 연산: 키를 이용한 탐색





탐색 연산: 순환과 반복



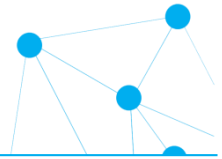
- 순환 구조와 반복 구조로 구현할 수 있음

```
# 이진탐색트리 탐색연산(순환 함수)
def search_bst(n, key) :
    if n == None :
        return None
    elif key == n.key:
        return n
    elif key < n.key:
        return search_bst(n.left, key)
    else:
        return search_bst(n.right, key)
```

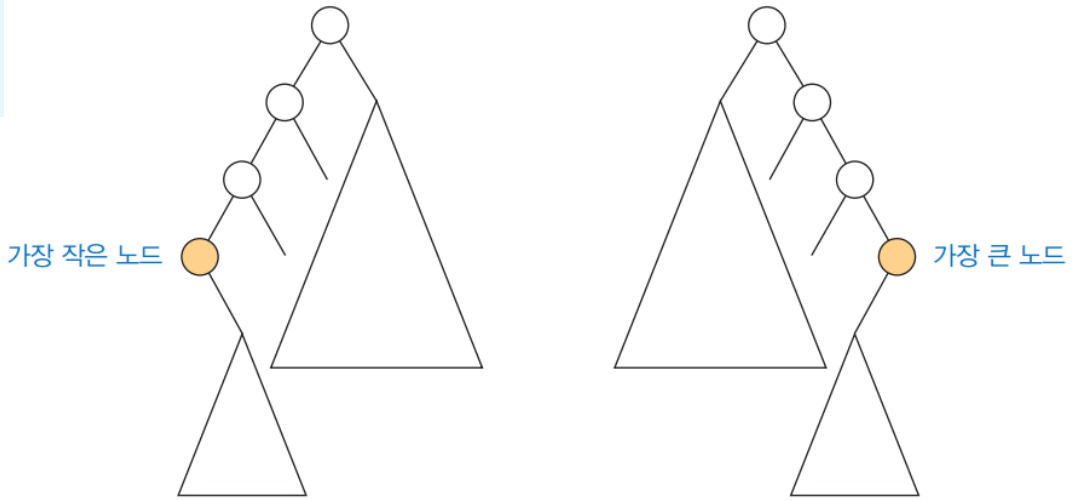
```
# 이진탐색트리 탐색연산(반복 함수)
def search_bst_iter(n, key) :
    while n != None :
        if key == n.key:
            return n
        elif key < n.key:
            n = n.left
        else:
            n = n.right
    return None
```

- 값을 이용한 탐색은?
  - 모든 노드를 검사해야 함

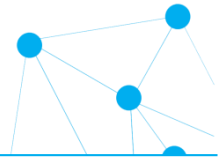
탐색 연산: 최대와 최소 노드



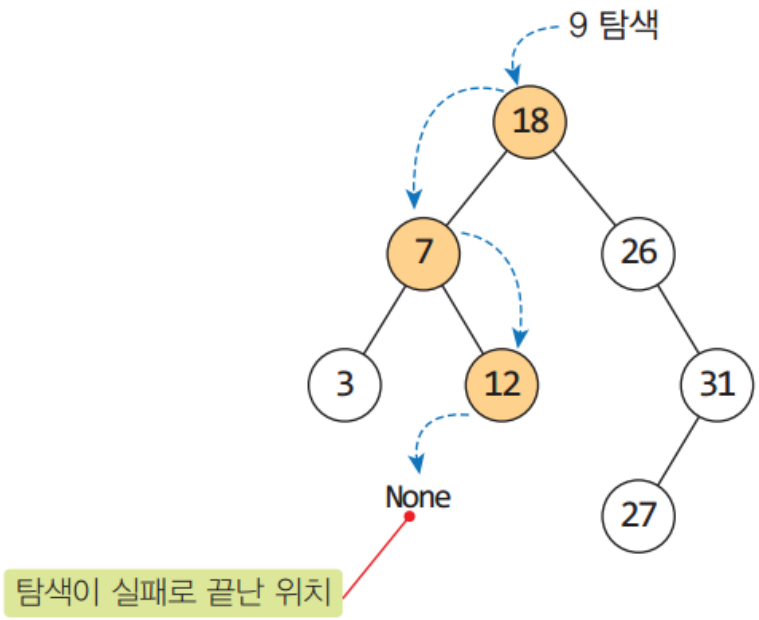
```
def search_max_bst(n) :                    # 최대 값의 노드 탐색
    while n != None and n.right != None:
        n = n.right
    return n

def search_min_bst(n) :                    # 최소 값의 노드 탐색
    while n != None and n.left != None:
        n = n.left
    return n
```

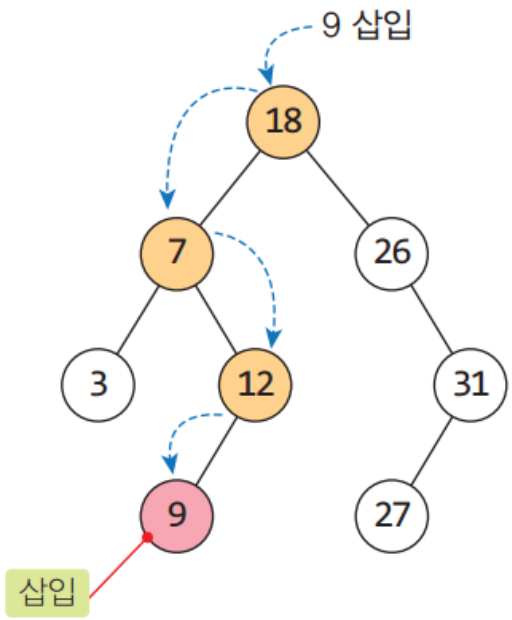


삽입 연산

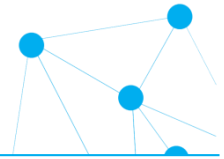


- 탐 색에 실패한 위치 ➔ 노드를 삽입해야 하는 위치



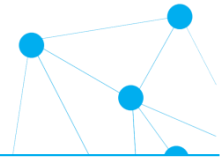


삽입 연산 알고리즘



```
# 이진탐색트리 삽입연산 (노드를 삽입함): 순환구조 이용
def insert_bst(r, n) :
    if n.key < r.key:                    # 삽입할 노드의 키가 루트보다 작으면
        if r.left is None :              # 루트의 왼쪽 자식이 없으면
            r.left = n                   # n은 루트의 왼쪽 자식이 됨.
            return True
        else :                           # 루트의 왼쪽 자식이 있으면
            return insert_bst(r.left, n) # 왼쪽 자식에게 삽입하도록 함
    elif n.key > r.key :                 # 삽입할 노드의 키가 루트보다 크면
        if r.right is None :             # 루트의 오른쪽 자식이 없으면
            r.right = n                  # n은 루트의 오른쪽 자식이 됨.
            return True
        else :                           # 루트의 오른쪽 자식이 있으면
            return insert_bst(r.right, n) # 오른쪽 자식에게 삽입하도록 함
    else :                               # 키가 중복되면
        return False                     # 삽입하지 않음
```

삭제 연산



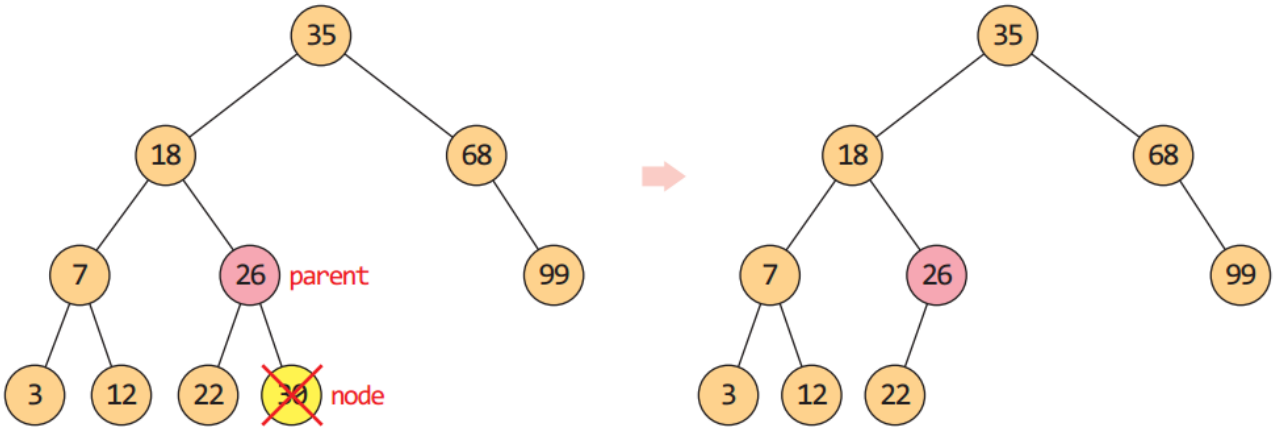
- 노드 삭제의 3가지 경우

  1. 삭제하려는 노드가 단말 노드일 경우

  2. 삭제하려는 노드가 하나의 왼쪽이나 오른쪽 서브 트리중 하나만 가지고 있는 경우

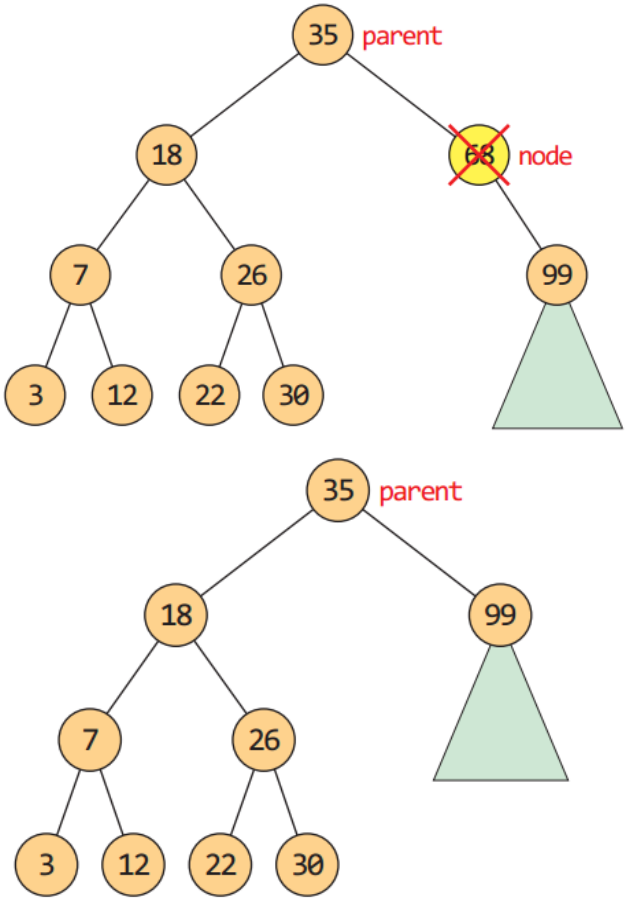
  3. 삭제하려는 노드가 두개의 서브 트리 모두 가지고 있는 경우

Case 1: 단말 노드 삭제




```
def delete_bst_case1 (parent, node, root) :
    if parent is None:                  # 삭제할 단말 노드가 루트이면
        root = None                     # 공백 트리가 됨
    else :
        if parent.left == node :        # 삭제할 노드가 부모의 왼쪽 자식이면
            parent.left = None          # 부모의 왼쪽 링크를 None
        else :                          # 오른쪽 자식이면
            parent.right = None         # 부모의 오른쪽 링크를 None

    return root                         # root가 변경될 수도 있으므로 반환
```

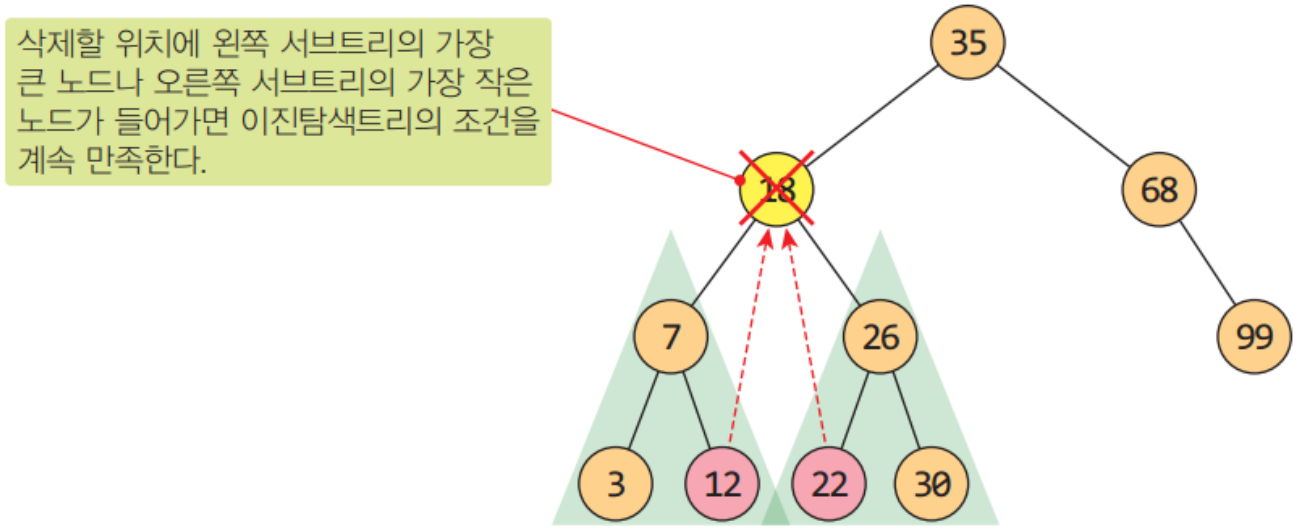
Case2: 자식이 하나인 노드의 삭제



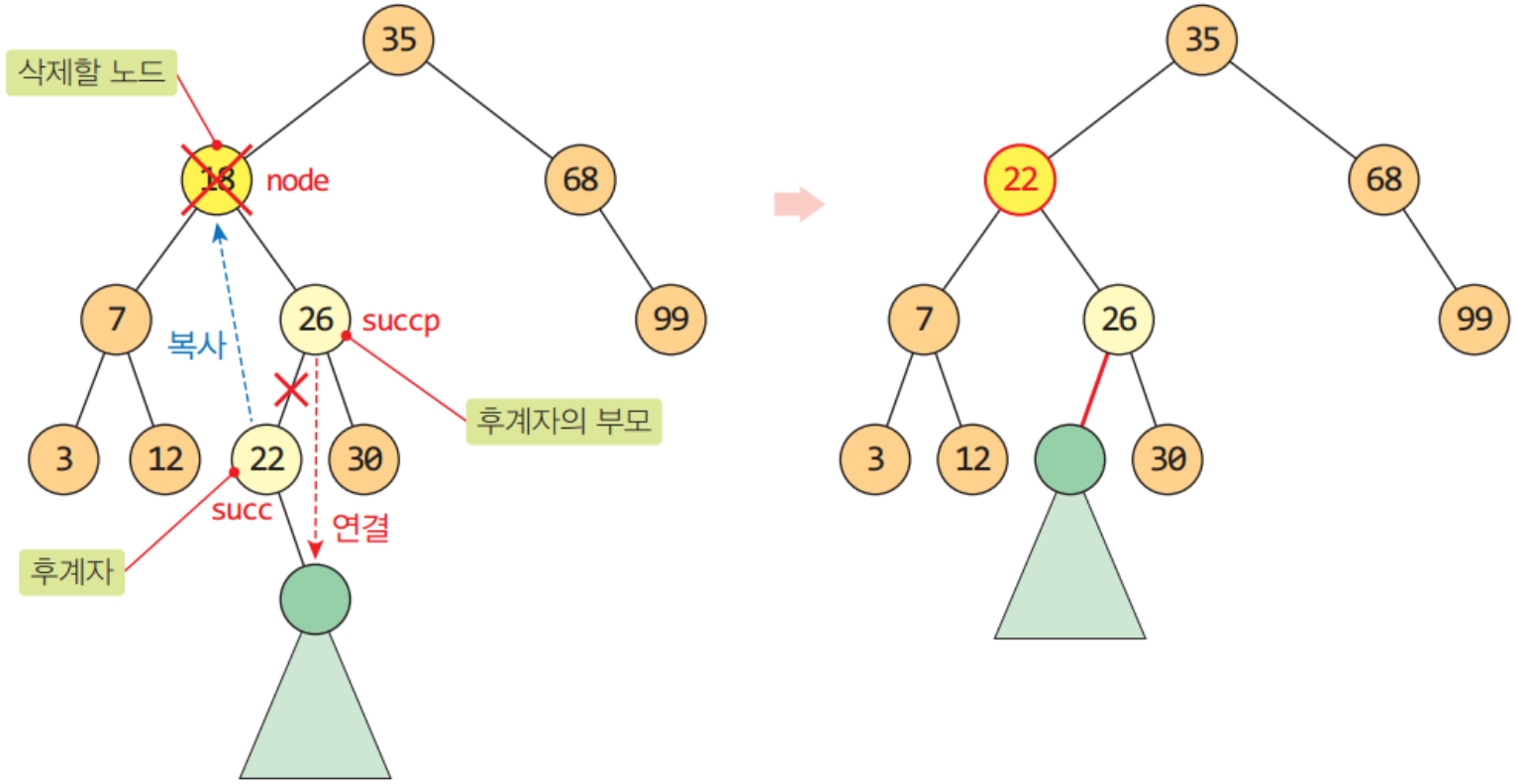

```
def delete_bst_case2 (parent, node, root) :
    if node.left is not None :              # 삭제할 노드가
        child = node.left                   # child는 왼쪽 
    else :                                  # 삭제할 노드가
        child = node.right                  # child는 오른쪽

    if node == root :                       # 없애려는 노드
        root = child                        # 이제 child가 
    else :
        if node is parent.left :            # 삭제할 노드가
            parent.left = child             # 부모의 왼쪽 링
        else :                              # 삭제할 노드가
            parent.right = child            # 부모의 오른쪽

    return root                             # root가 변경될
```

Case 3: 두 개의 자식을 가진 노드 삭제

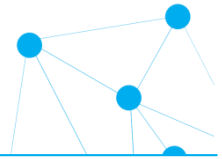
- 가장 비슷한 값을 가진 노드를 삭제 위치로 가져옴
- 후계 노드의 선택



예) 노드 18 삭제

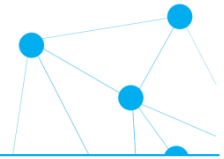

삭제할 노드
35
18
node
68
7
복사
26
succp
99
3
12
22
30
succ
후계자의 부모
후계자
연결
35
22
68
7
26
99
3
12
30

Case 3: 삭제 알고리즘



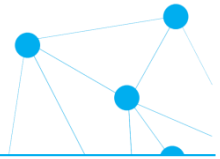
```
def delete_bst_case3 (parent, node, root) :
    succp = node                        # 후계자의 부모 노드
    succ = node.right                   # 후계자 노드
    while (succ.left != None) :         # 후계자와 부모노드 탐색
        succp = succ
        succ = succ.left

    if (succp.left == succ) :           # 후계자가 왼쪽 자식이면
        succp.left = succ.right         # 후계자의 오른쪽 자식 연결
    else :                              # 후계자가 오른쪽 자식이면
        succp.right = succ.right        # 후계자의 왼쪽 자식 연결
    node.key = succ.key                 # 후계자의 키와 값을
    node.value= succ.value              # 삭제할 노드에 복사
    node = succ;                        # 실제로 삭제하는 것은 후계자 노드

    return root                         # 일관성을 위해 root반환
```

삭제 연산: 전체 코드

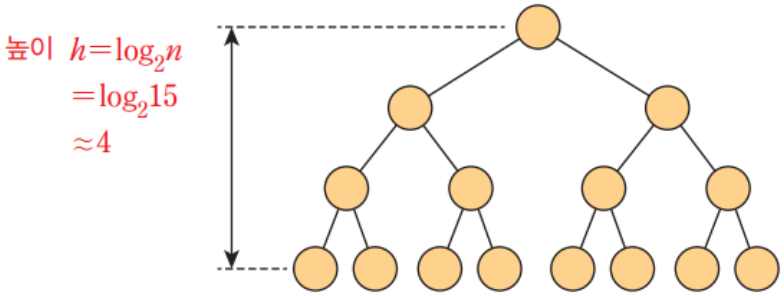


```
# 이진탐색트리 삭제연산 (노드를 삭제함)
def delete_bst (root, key) :
    if root == None : return None                          # 공백 트리

    parent = None                                          # 삭제할 노드의 부모 탐색
    node = root                                            # 삭제할 노드 탐색
    while node != None and node.key != key :               # parent 탐색
        parent = node
        if key < node.key : node = node.left
        else : node = node.right;

    if node == None : return None                          # 삭제할 노드가 없음
    if node.left == None and node.right == None:           # case 1: 단말 노드
       root = delete_bst_case1 (parent, node, root)
    elif node.left==None or node.right==None :             # case 2: 유일한 자식
       root = delete_bst_case2 (parent, node, root)
    else :                                                 # case 3: 두 개의 자식
       root = delete_bst_case3 (parent, node, root)
    return root                                            # 변경된 루트 노드를 반환
```

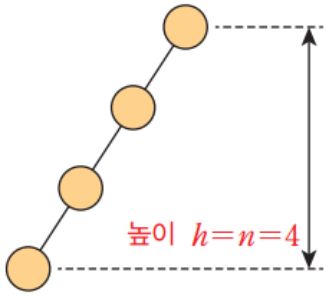
이진탐색트리의 성능



- 탐색, 삽입, 삭제 연산의 시간 트리의 높이에 비례함



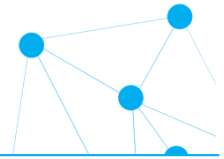
균형 잡힌 이진트리(포화이진트리)



경사 이진트리

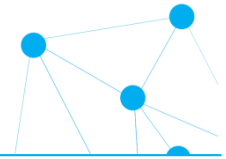
연산	함수	최선의 경우 (균형트리)	최악의 경우 (경사트리)
키를 이용한 탐색	`search_bst()` `search_bst_iter()`	$O(\log_2 n)$	$O(n)$
값을 이용한 탐색	`search_value_bst()`	$O(n)$	$O(n)$
최대/최소 노드 탐색	`search_max_bst()` `search_min_bst()`	$O(\log_2 n)$	$O(n)$
삽입	`insert_bst()`	$O(\log_2 n)$	$O(n)$
삭제	`delete_bst()`	$O(\log_2 n)$	$O(n)$

9.3 이진탐색트리를 이용한 맵



- 이진탐색트리를 이용한 맵 클래스
- 테스트 프로그램

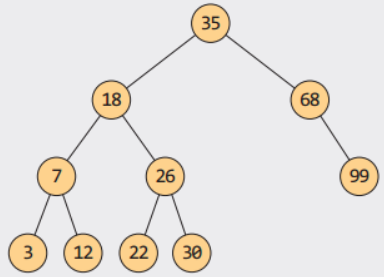
이진탐색트리를 이용한 맵 클래스



```
class BSTMap():                          # 이진탐색트리를 이용한 맵
    def __init__ (self):                 # 생성자
        self.root = None                 # 트리의 루트 노드

    def isEmpty (self): return self.root == None      # 맵 공백검사
    def clear(self): self.root = None                 # 맵 초기화
    def size(self): return count_node(self.root)      # 레코드(노드) 수 계산

    def search(self, key): return search_bst(self.root, key)
    def searchValue(self, key): return search_value_bst(self.root, key)
    def findMax(self): return search_max_bst(self.root)
    def findMin(self): return search_min_bst(self.root)

    def insert(self, key, value=None):    # 삽입 연산
        n = BSTNode(key, value)           # 키와 값으로 새로운 노드 생성
        if self.isEmpty() :               # 공백이면
            self.root = n                 # 루트노드로 삽입
        else :                            # 공백이 아니면
            insert_bst(self.root, n)      # insert_bst() 호출

    def delete(self, key):                            # 삭제 연산
        self.root = delete_bst (self.root, key)       # delete_bst() 호출
```

테스트 프로그램

```
map = BSTMap()
data = [35, 18,  7, 26, 12,  3, 68, 22, 30, 99]

print("[삽입 연산] : ", data)
for key in data :
    map.insert(key)                  # 삽입 연산 테스트
map.display("[중위 순회] : ")          # 삽입 결과 출력: 중위 순회
```




```
if map.search(26) != None : print('[탐색  26 ] : 성공')     # 탐색연산 테스트
else : print('[탐색  26 ] : 실패')
if map.search(25) != None : print('[탐색  25 ] : 성공')     # 탐색연산 테스트
else : print('[탐색  25 ] : 실패')

map.delete(3);       map.display("[  3 삭제] : ")        # 삭제연산 테스트
map.delete(68);      map.display("[ 68 삭제] : ")        # 삭제연산 테스트
map.delete(18);      map.display("[ 18 삭제] : ")        # 삭제연산 테스트
map.delete(35);      map.display("[ 35 삭제] : ")        # 삭제연산 테스트
```

```
[삽입 연산] :  [35, 18, 7, 26, 12, 3, 68, 22, 30, 99]
[중위 순회] : 3 7 12 18 22 26 30 35 68 99
[탐색  26 ] : 성공
[탐색  25 ] : 실패
[  3 삭제] : 7 12 18 22 26 30 35 68 99
[ 68 삭제] : 7 12 18 22 26 30 35 99
[ 18 삭제] : 7 12 22 26 30 35 99
[ 35 삭제] : 7 12 22 26 30 99
```

삽입 후의 이진탐색트리

26은 트리에 있고 25는 없음

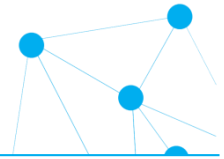
삭제 Case1: 단말 노드(3) 삭제

삭제 Case2: 자식이 하나인 노드(68) 삭제

삭제 Case3: 자식이 둘인 노드(18) 삭제

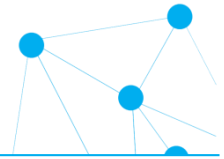
삭제 Case3: 자식이 둘인 노드(루트) 삭제

9.4 심화 학습: 균형이진탐색트리



- AVL 트리란?
- AVL 트리의 삽입 연산
- AVL 트리를 이용한 맵

AVL 트리란?

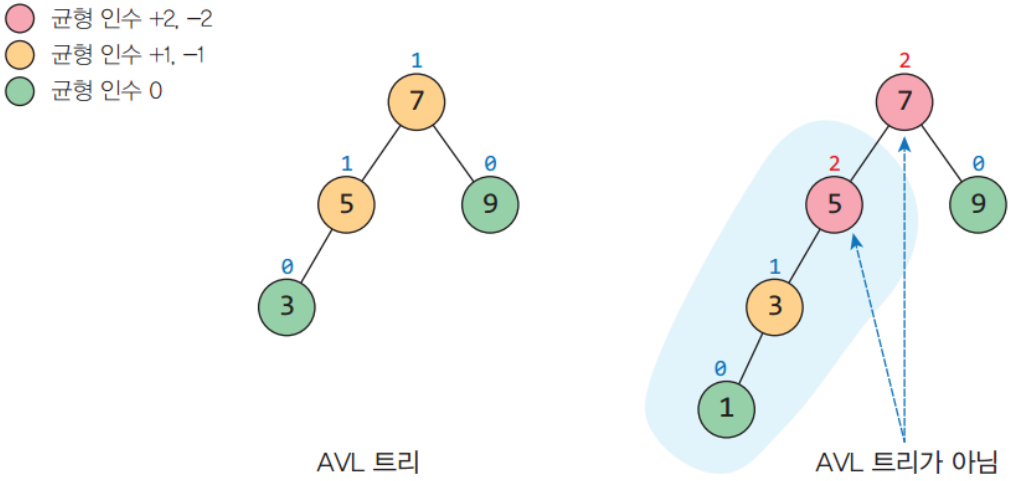


정의 9.2 AVL 트리

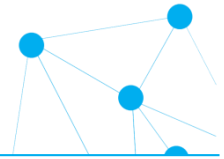
> AVL 트리는 모든 노드에서 왼쪽 서브트리와 오른쪽 서브트리의 높이 차가 1을 넘지 않는 이진탐색 트리이다. 즉 모든 노드의 균형 인수는 0 이나 ± 1 이 되어야 한다.

- Adelson-Velskii와 Landis에 의해 1962년에 제안된 트리
- 평균, 최선, 최악 시간복잡도: $O(logn)$ 보장

- 균형 인수 : 왼쪽서브트리 높이 - 오른쪽서브트리 높이

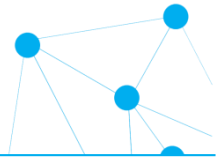


AVL 트리의 연산

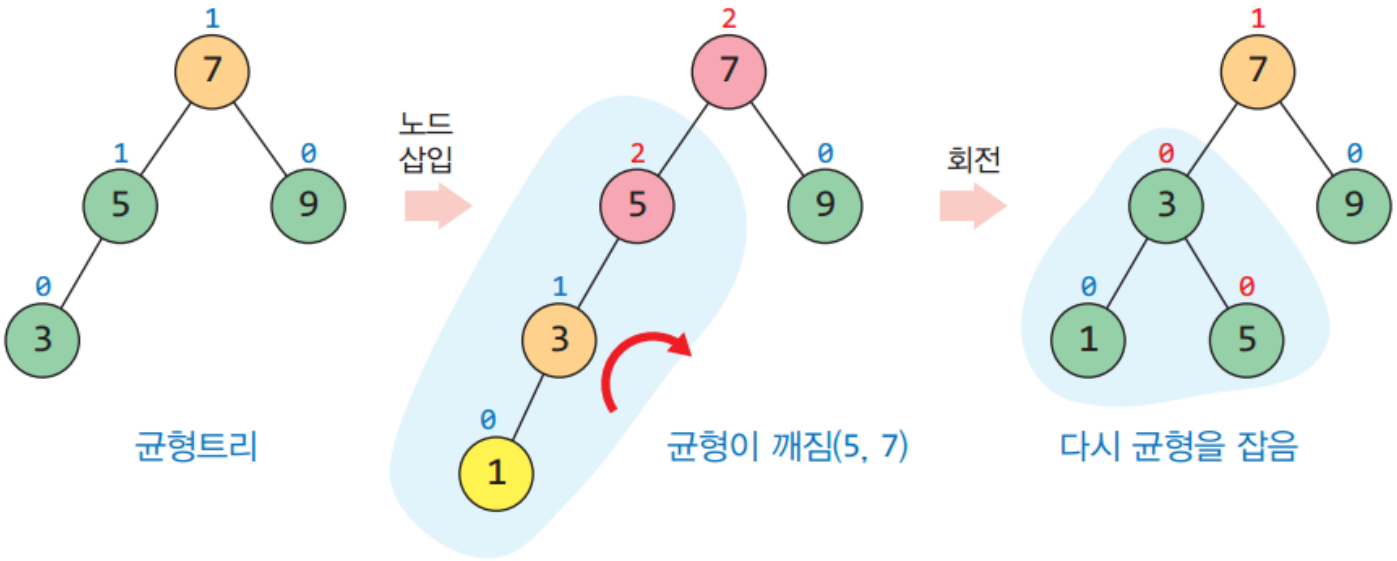


- 탐색연산: 이진탐색트리와 동일
- 삽입과 삭제 시 균형 상태가 깨질 수 있음
- 삽입 연산
  - 삽입 위치에서 루트까지의 경로에 있는 조상 노드들의 균형 인수에 영향을 미침
  - 삽입 후에 불균형 상태로 변한 가장 가까운 조상 노드(균형 인수가 ±2가 된 가장 가까운 조상 노드)의 서브 트리들에 대하여 다시 재균형
  - 삽입 노드부터 균형 인수가 ±2가 된 가장 가까운 조상 노드까지 회전

AVL 트리의 삽입연산

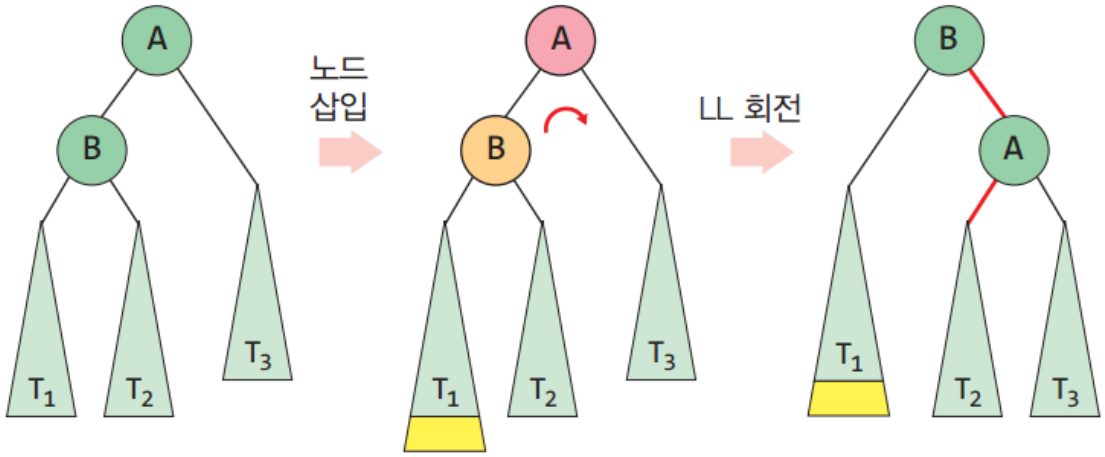


- 노드 1을 트리에 추가 → 균형이 깨짐



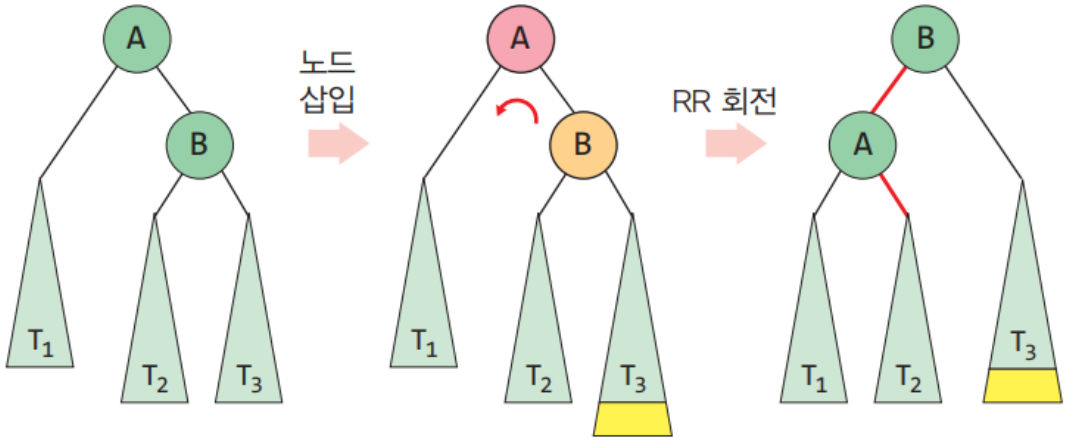
- 균형이 깨지는 4가지 경우
  - LL, LR, RL, RR 타입

LL 회전 방법



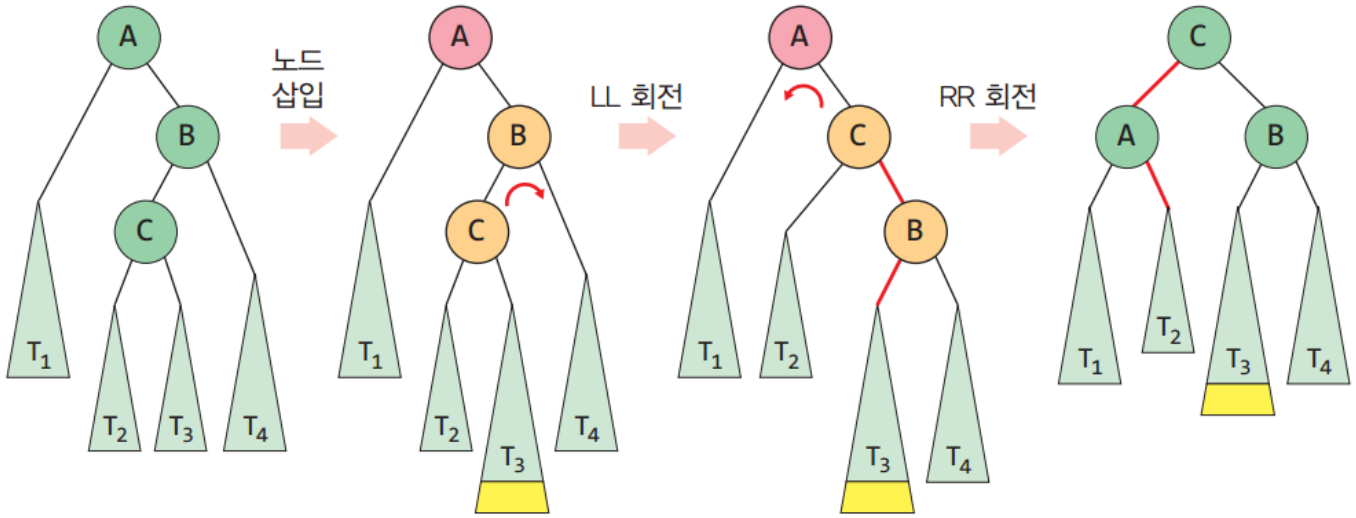

```
def rotateLL(A) :
    B = A.left                  # 시계방향 회전
    A.left = B.right
    B.right = A
    return B                    # 새로운 루트 B를 반환
```

RR 회전 방법



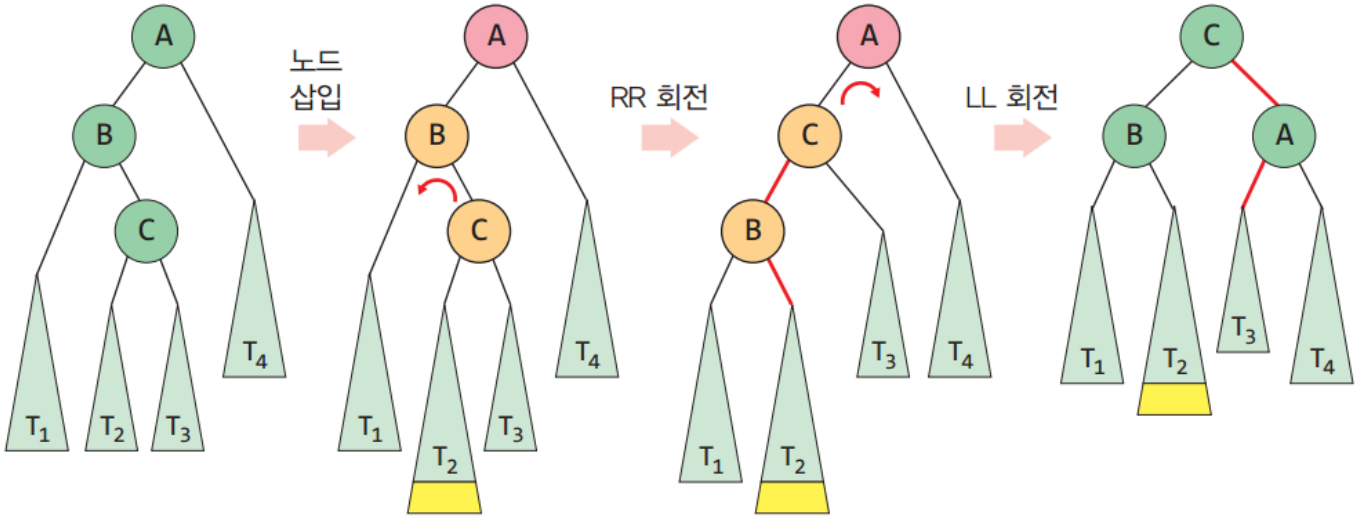

```
def rotateRR(A) :
    B = A.right                 # 반 시계방향 회전
    A.right = B.left
    B.left = A
    return B                    # 새로운 루트 B를 반환
```

RL 회전 방법



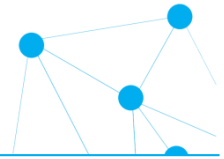

```
def rotateRL(A) :
    B = A.right
    A.right = rotateLL(B)      # LL회전
    return rotateRR(A)         # RR회전
```

LR 회전 방법



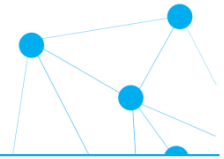

```
def rotateLR(A) :
    B = A.left
    A.left = rotateRR(B)          # RR회전
    return rotateLL(A)            # LL회전
```

재균형 함수



```
def reBalance (parent) :
    hDiff = calc_height_diff(parent)

    if hDiff > 1 :
        if calc_height_diff( parent.left ) > 0 :
            parent = rotateLL( parent )
        else :
            parent = rotateLR( parent )
    elif hDiff < -1 :
        if calc_height_diff( parent.right ) < 0 :
            parent = rotateRR( parent )
        else :
            parent = rotateRL( parent )
    return parent
```

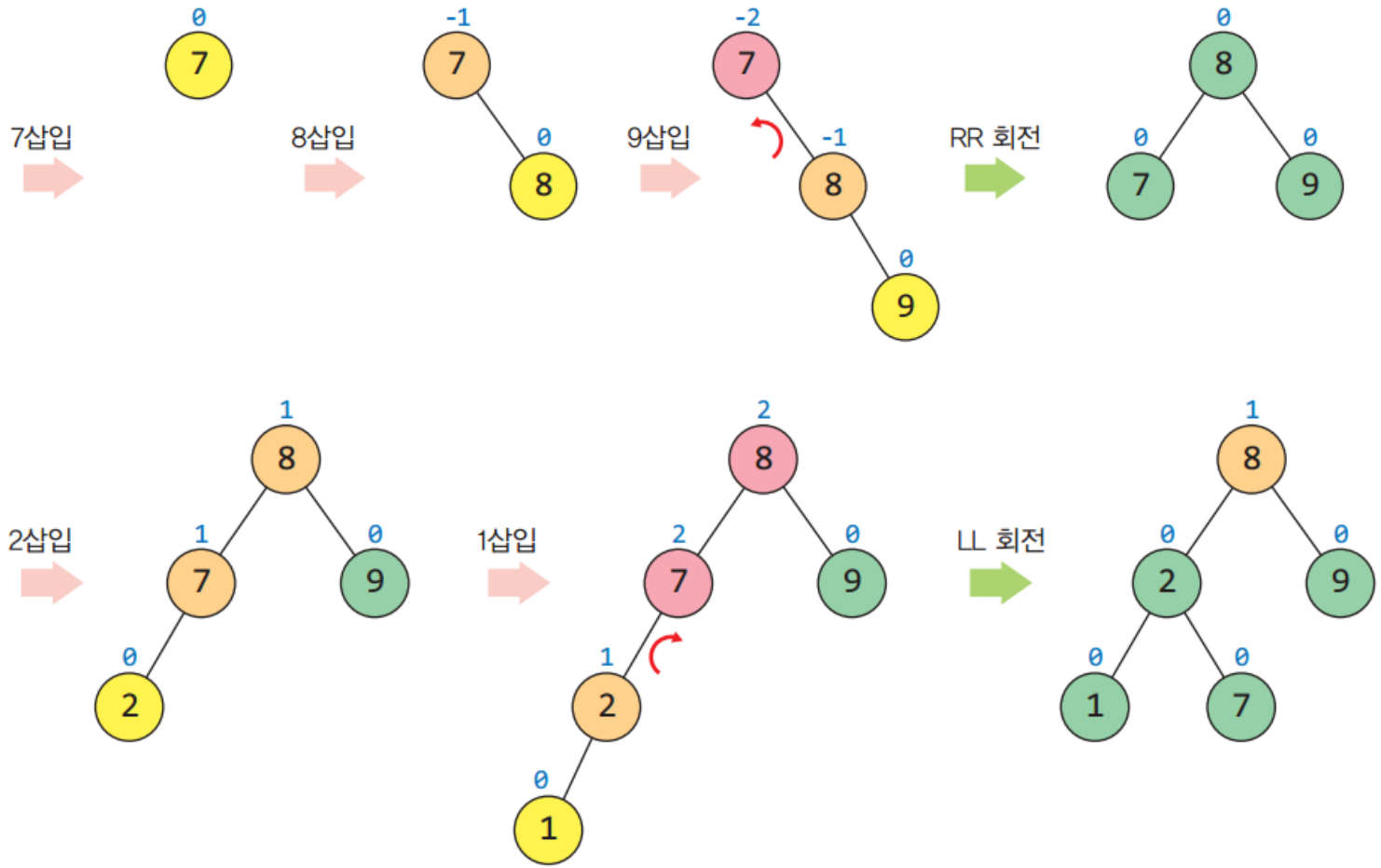
AVL 트리의 삽입함수



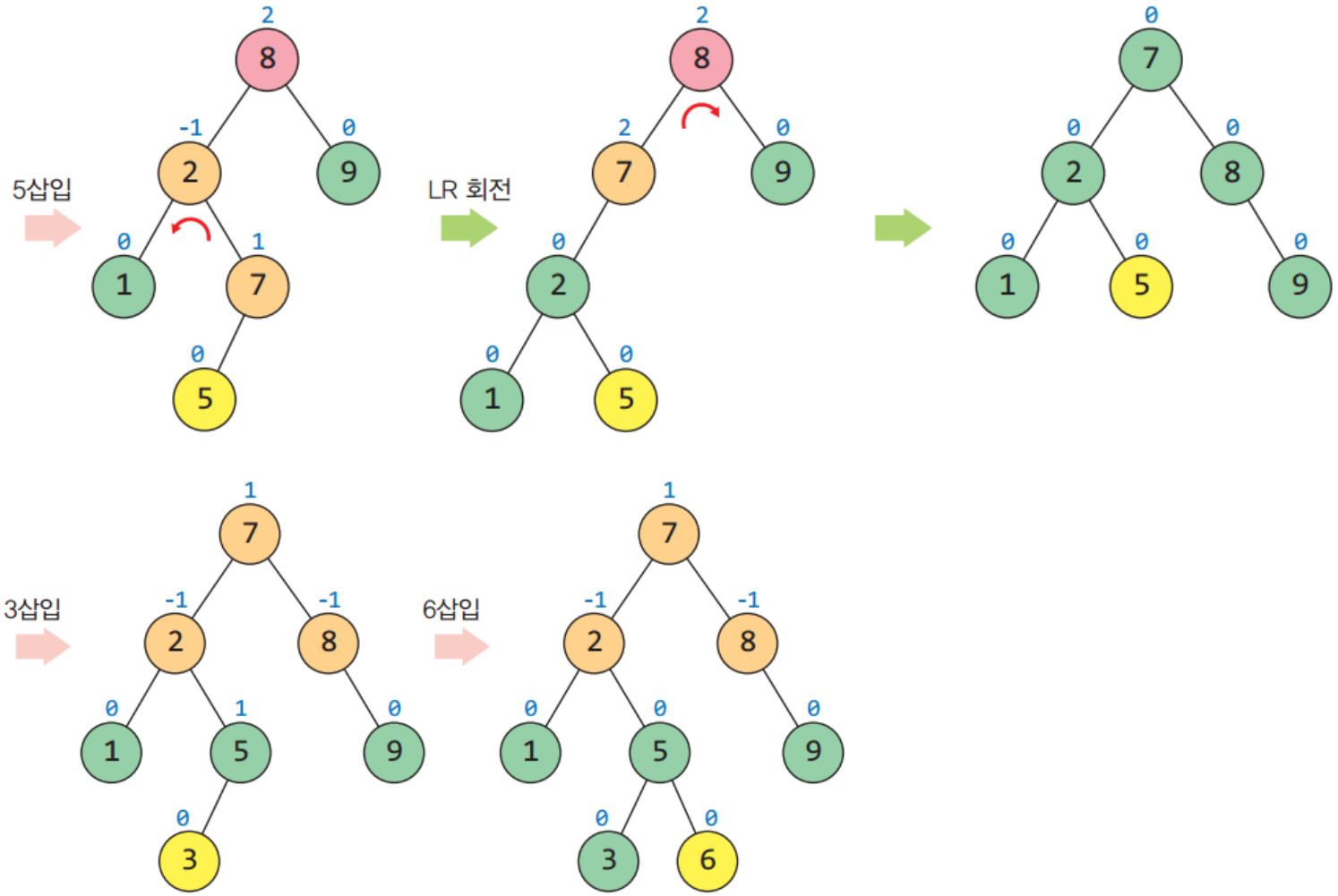
```
def insert_avl(parent, node) :
    if node.key < parent.key :
        if parent.left != None :
            parent.left = insert_avl(parent.left, node)
        else :
            parent.left = node
        return reBalance(parent)

    elif node.key > parent.key :
        if parent.right != None :
            parent.right = insert_avl(parent.right, node)
        else :
            parent.right = node
        return reBalance(parent)
    else :
        print("중복된 키 에러")
```

AVL트리 구축의 예

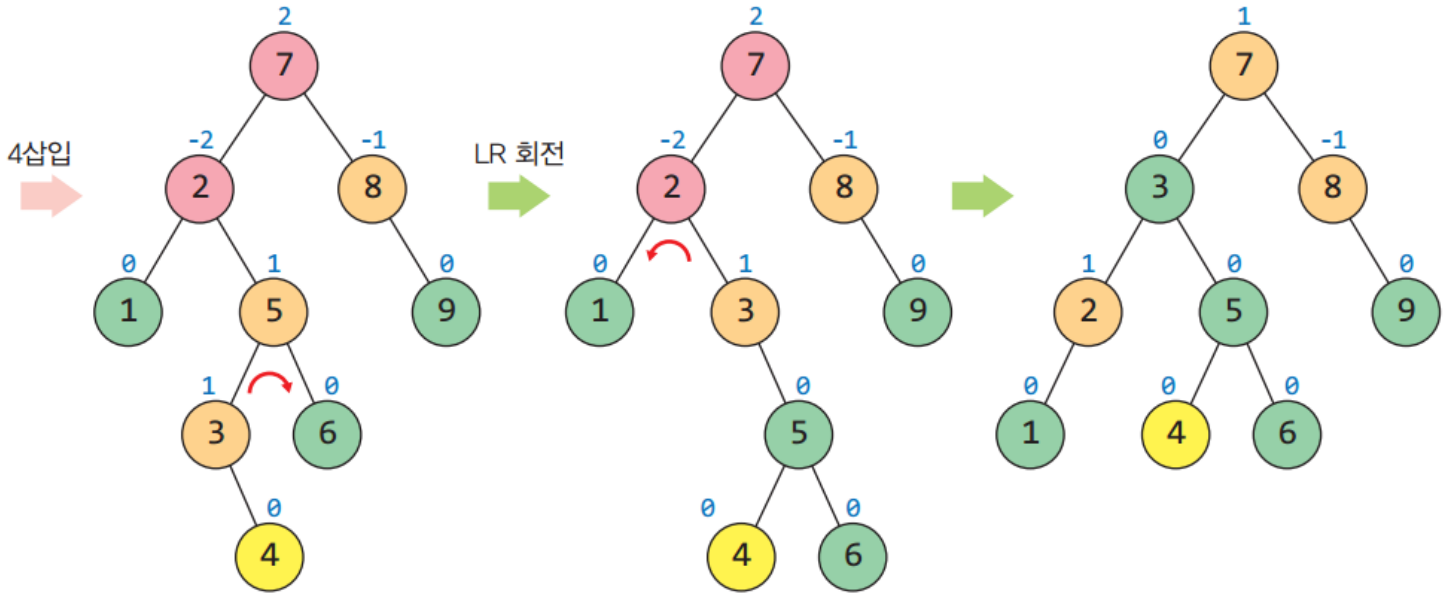
[7, 8, 9, 2, 1, 5, 3, 6, 4]



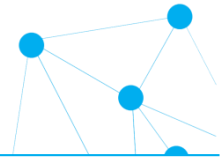
AVL트리 구축의 예(계속)



AVL트리 구축의 예(계속)



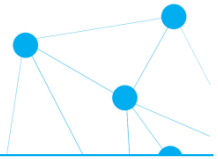
AVL 트리를 이용한 맵



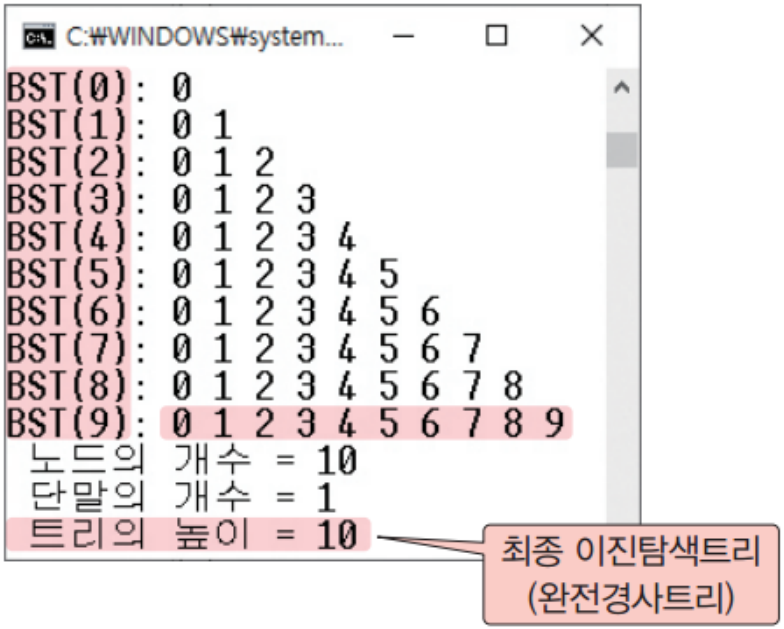
```
node = [7,8,9,2,1,5,3,6,4]          # node = [1,2,3,4,5,6,7,8,9]
map = AVLMap()

for i in node :
    map.insert(i)
    map.display("AVL(%d): "%i)

print(" 노드의 개수 = %d" % count_node( map.root ))
print(" 단말의 개수 = %d" % count_leaf( map.root ))
print(" 트리의 높이 = %d" % calc_height( map.root ))
```

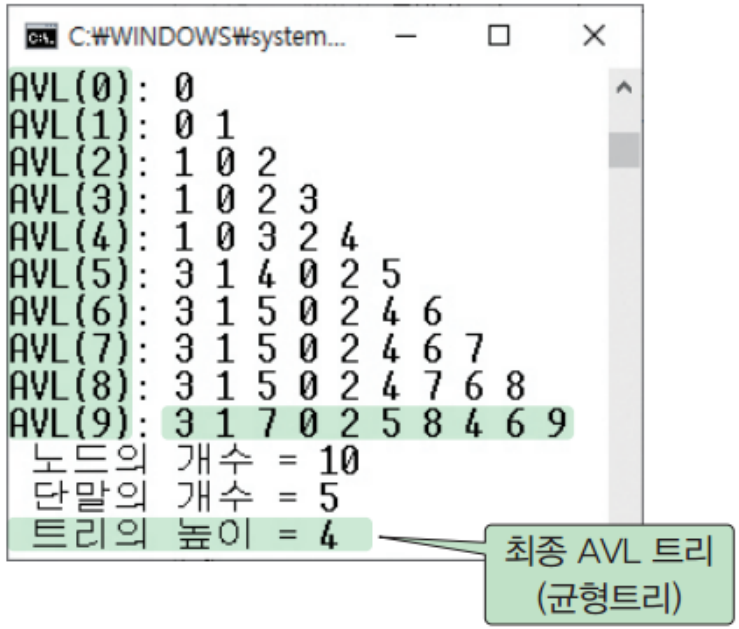
```
C:₩WINDOWS₩system32₩cmd.exe
AVL(7): 7
AVL(8): 7 8
AVL(9): 8 7 9
AVL(2): 8 7 9 2
AVL(1): 8 2 9 1 7
AVL(5): 7 2 8 1 5 9
AVL(3): 7 2 8 1 5 9 3
AVL(6): 7 2 8 1 5 9 3 6
AVL(4): 7 3 8 2 5 9 1 4 6
 노드의 개수 = 9
 단말의 개수 = 4
 트리의 높이 = 4
```

이진탐색트리와 AVL트리 비교

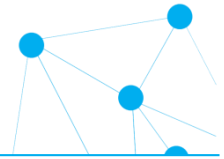


- [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] 입력





9장 연습문제, 실습문제



감사합니다!