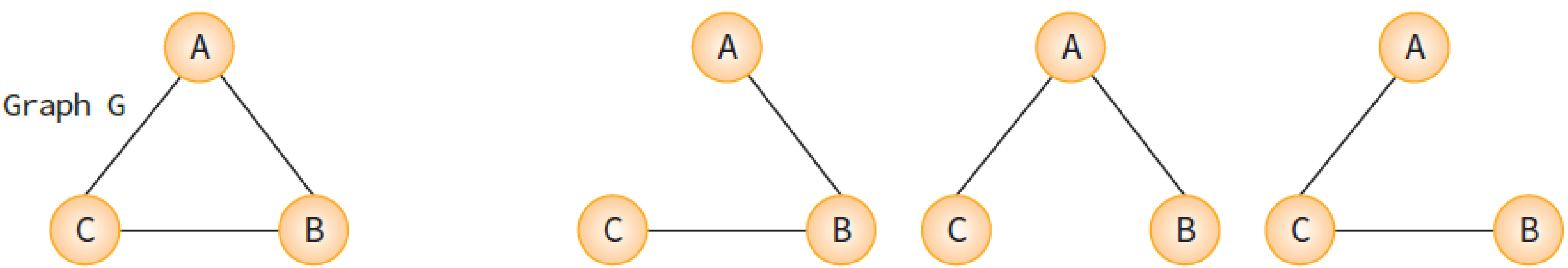

# 11장 그래프II

최소비용신장트리, 최단경로, 위상정렬 알고리즘

# 11.1 최소 비용 신장 트리



- 신장 트리(spanning tree)
  - 그래프내의 모든 정점을 포함하는 트리
  - n개의 정점을 가지는 그래프의 신장 트리는 n-1개의 간선을 가짐




(a) 연결 그래프

(b) 신장 트리

# 신장 트리 알고리즘



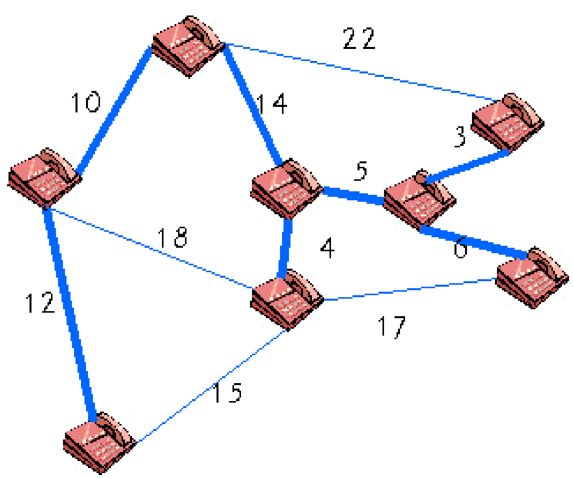
- 신장 트리를 생성하는 알고리즘
  - 10장의 DFS, BFS 알고리즘을 적용하면 쉽게 신장 트리를 구할 수 있다.
  - DFS 알고리즘으로 신장 트리 중 하나를 생성하는 알고리즘

```
depth_first_search(v):

v를 방문되었다고 표시;
for all u ∈ (v에 인접한 정점) do
    if (u가 아직 방문되지 않았으면) then
        (v, u)를 신장 트리 간선이라고 표시;
        depth_first_search(u)
```

# 최소비용 신장트리(minimum spanning tree)

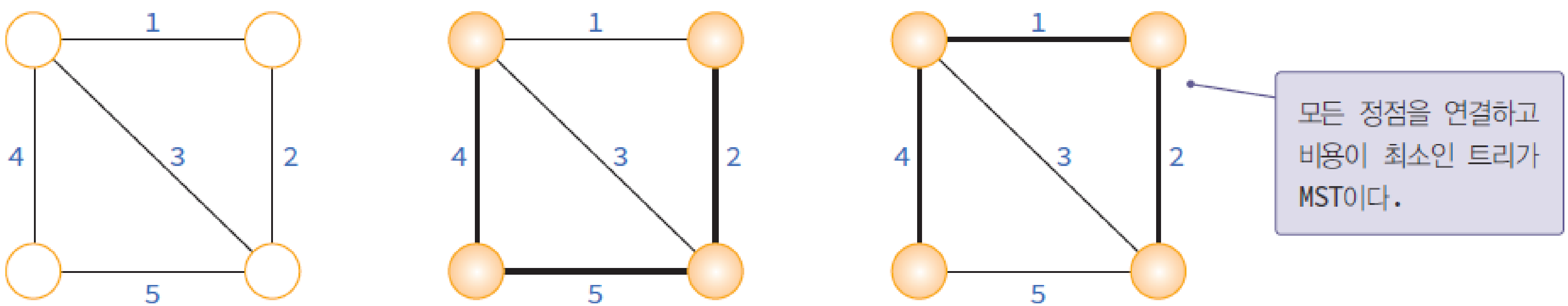


- 네트워크에 있는 모든 정점들을 가장 적은 수의 간선과 비용으로 연결
- MST의 응용
  - 도로 건설 - 도시들을 모두 연결하면서 도로의 길이를 최소가 되도록 하는 문제
  - 전기 회로 - 단자들을 모두 연결하면서 전선의 길이를 가장 최소로 하는 문제
  - 통신망 – 전화선(회선)의 길이가 최소가 되도록 전화 케이블 망을 구성하는 문제 또는 회선의 사이클 경로 생성 방지
  - 배관 - 파이프를 모두 연결하면서 파이프의 총 길이를 최소로 하는 문제




# MST의 예






그래프

신장 트리
전체 비용=4+5+2=11

최소 비용 신장 트리
전체 비용=4+1+2=7

# 11.2 Kruskal의 MST 알고리즘



- 탐욕적인 방법(greedy method)
  - 주요 알고리즘 설계 기법 중 하나
  - 각 단계에서 최선의 답을 선택하는 과정을 반복함으로써 최종적인 해답에 도달
  - 탐욕적인 방법은 항상 최적의 해답을 주는지 검증 필요한데, Kruskal MST 알고리즘은 최적의 해답 임이 증명됨

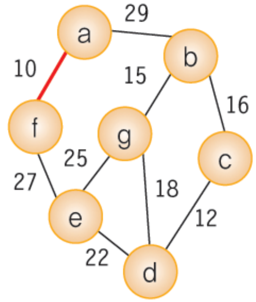
# Kruskal의 MST 알고리즘



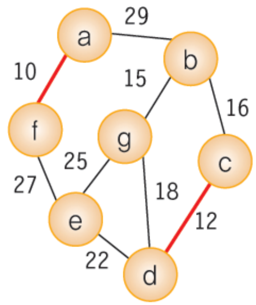
// 최소비용 스패닝트리를 구하는 Kruskal의 알고리즘
// 입력: 가중치 그래프 $G=(V, E)$, $n$은 노드의 개수
// 출력: $E_T$, 최소비용 신장 트리를 이루는 간선들의 집합
kruskal(G)

$E$를 $w(e_1) \leq \cdots \leq w(e_e)$ 가 되도록 정렬한다.
$E_T \leftarrow \Phi$; $ecounter \leftarrow 0$
$k \leftarrow 0$
while $ecounter < (n-1)$ do
    $k \leftarrow k+1$
    if $E_T \cup \{e_k\}$ 가 사이클을 포함하지 않으면
        then $E_T \leftarrow E_T \cup \{e_k\}$; $ecounter \leftarrow ecounter + 1$
return $E_T$

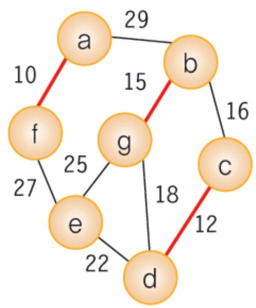
| **af** | cd | bg | bc | dg | de | eg | ef | ab |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 22 | 25 | 27 | 29 |



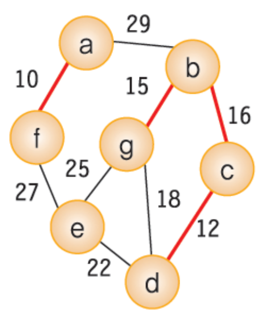

| af | **cd** | bg | bc | dg | de | eg | ef | ab |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 22 | 25 | 27 | 29 |



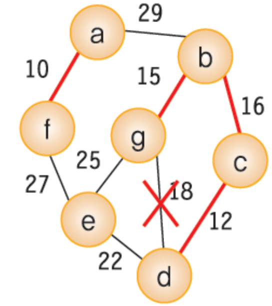

| af | cd | **bg** | bc | dg | de | eg | ef | ab |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 22 | 25 | 27 | 29 |



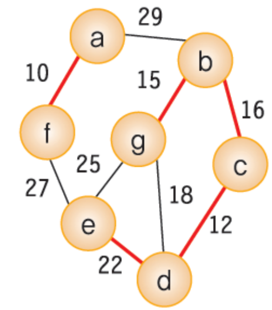

| af | cd | bg | **bc** | dg | de | eg | ef | ab |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 22 | 25 | 27 | 29 |



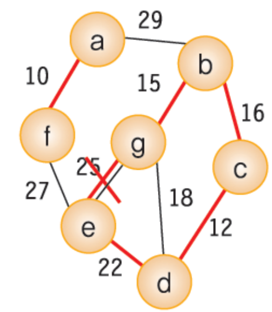

| af | cd | bg | bc | **dg** | de | eg | ef | ab |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 22 | 25 | 27 | 29 |



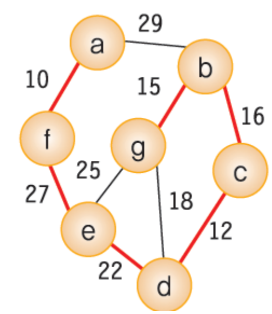

| af | cd | bg | bc | dg | **de** | eg | ef | ab |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 22 | 25 | 27 | 29 |




| af | cd | bg | bc | dg | de | **eg** | ef | ab |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 22 | 25 | 27 | 29 |



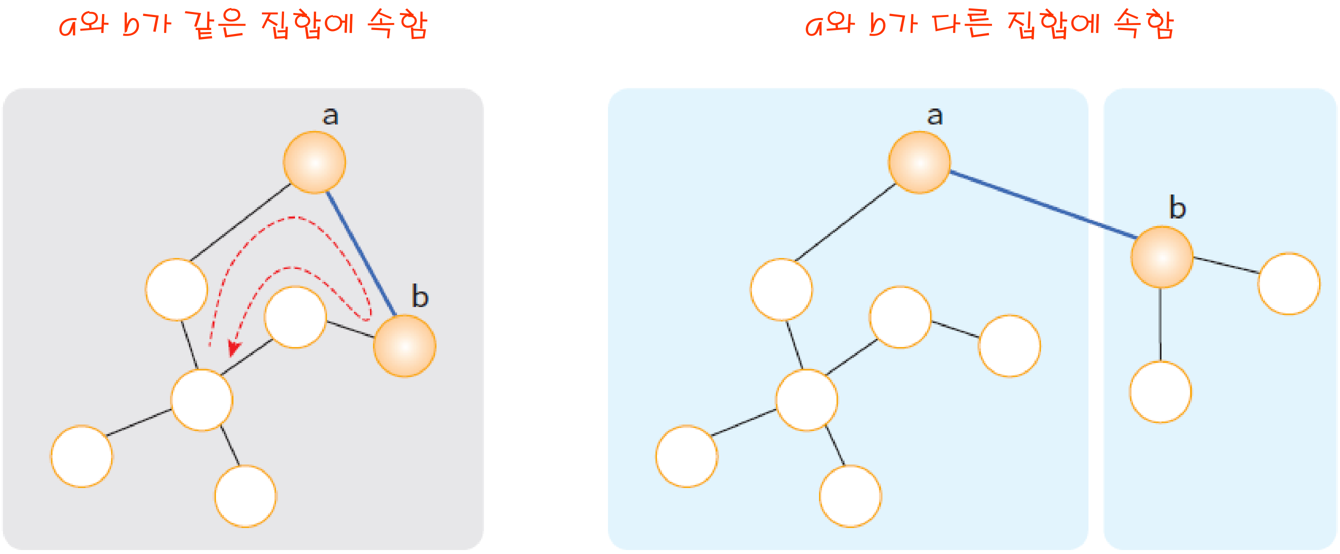

| af | cd | bg | bc | dg | de | eg | **ef** | ab |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 22 | 25 | 27 | 29 |



# Kruskal의 MST 알고리즘



- union-find 알고리즘
  - 원소가 어떤 집합에 속하는지 알아냄
  - Kruskal의 MST 알고리즘에서 사이클 검사에 사용

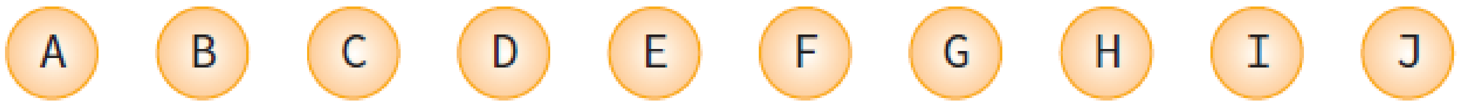



(a) 사이클 형성

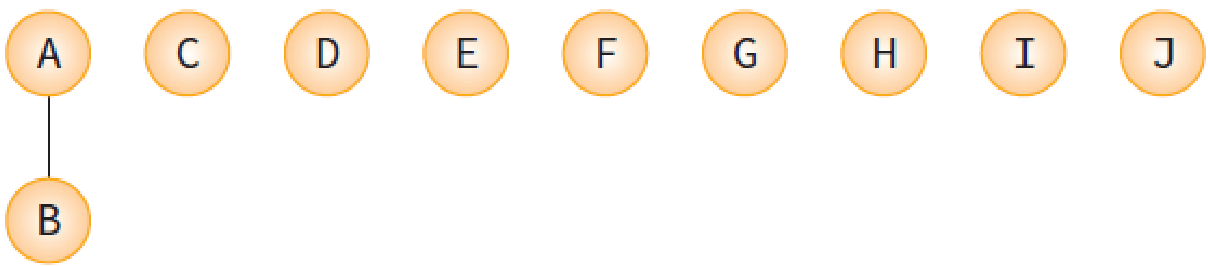
(b) 사이클 형성되지 않음

# union-find 연산 적용 예 (1/2)





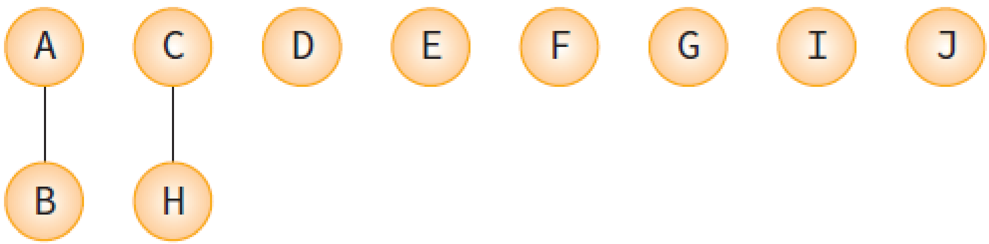

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |




| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

# union-find 연산 적용 예 (1/2)






| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 2 | -1 | -1 |



# union-find 알고리즘



```
UNION(a, b):
    root1 = FIND(a);          // 노드 a의 루트를 찾는다.
    root2 = FIND(b);          // 노드 b의 루트를 찾는다.
    if root1 ≠ root2          // 합한다.
        parent[root1] = root2;

FIND(curr):                   // curr의 루트를 찾는다.
    if (parent[curr] == -1)
        return curr;          // 본인이 루트
    while (parent[curr] != -1)
        curr = parent[curr];
    return curr;
```

# Kruskal MST 프로그램(kruskal.c) (1/5)



```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define TRUE 1
#define FALSE 0
#define MAX_VERTICES 100
#define INF 1000

int parent[MAX_VERTICES];        // 부모 노드

// 초기화
void set_init(int n)
{
    int i;
    for (i=0; i<n; i++)
        parent[i] = -1;
}

// curr가 속하는 집합을 반환한다.
int set_find(int curr)
{
    if (parent[curr] == -1)
        return curr;             // 루트
    while (parent[curr] != -1) curr = parent[curr];
    return curr;
}
```

# Kruskal MST 프로그램(kruskal.c)  (2/5)



```c
// 두개의 원소가 속한 집합을 합친다.
void set_union(int a, int b)
{
    int root1 = set_find(a);    // 노드 a의 루트를 찾는다.
    int root2 = set_find(b);    // 노드 b의 루트를 찾는다.
    if (root1 != root2)         // 합한다.
        parent[root1] = root2;
}

struct Edge {             // 간선을 나타내는 구조체
    int start, end, weight;
};

typedef struct GraphType {
    int n;          // 간선의 개수
    int nvertex;    // 정점의 개수
    struct Edge edges[2 * MAX_VERTICES];
} GraphType;
```

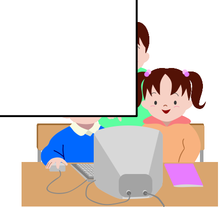
# Kruskal MST 프로그램(kruskal.c) (3/5)

```c
// 그래프 초기화
void graph_init(GraphType* g)
{
    int i;
    g->n = g->nvertex = 0;
    for (i=0; i < 2 * MAX_VERTICES; i++) {
        g->edges[i].start = 0;
        g->edges[i].end = 0;
        g->edges[i].weight = INF;
    }
}

// 간선 삽입 연산
void insert_edge(GraphType* g, int start, int end, int w)
{
    g->edges[g->n].start = start;
    g->edges[g->n].end = end;
    g->edges[g->n].weight = w;
    g->n++;
}

// qsort()에 사용되는 함수
int compare(const void* a, const void* b)
{
    struct Edge* x = (struct Edge*)a;
    struct Edge* y = (struct Edge*)b;
    return (x->weight - y->weight);
}
```

# Kruskal MST 프로그램(kruskal.c)  (4/5)



```c
// kruskal의 최소 비용 신장 트리 프로그램
void kruskal(GraphType *g)
{
	int edge_accepted = 0;	// 현재까지 선택된 간선의 수
	int uset, vset;			// 정점 u와 정점 v의 집합 번호
	struct Edge e;
	int i = 0;

	set_init(g->nvertex);				// 집합 초기화
	qsort(g->edges, g->n, sizeof(struct Edge), compare);

	printf("크루스칼 최소 신장 트리 알고리즘 \n");
	while (edge_accepted < (g->nvertex-1))	// 간선의 수 < (n-1)
	{
		e = g->edges[i];
		uset = set_find(e.start);		// 정점 u의 집합 번호 
		vset = set_find(e.end);		// 정점 v의 집합 번호
		if (uset != vset) {			// 서로 속한 집합이 다르면
			printf("간선 (%d,%d) %d 선택\n", e.start, e.end, e.weight);
			edge_accepted++;
			set_union(uset, vset);	// 두개의 집합을 합친다.
		}
		i++;
	}
}
```

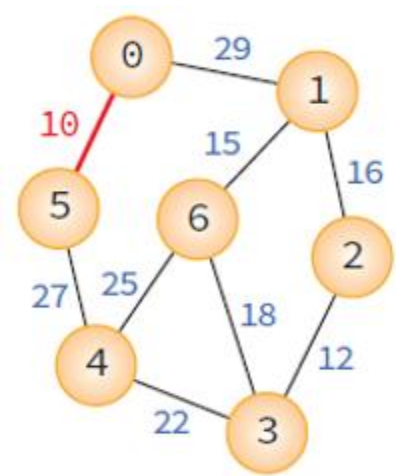


# Kruskal MST 프로그램(kruskal.c) (5/5)



```c
int main(void)
{
    GraphType *g;
    g = (GraphType *)malloc(sizeof(GraphType));
    graph_init(g);

    g->nvertex = 7; // 노드의 개수
    insert_edge(g, 0, 1, 29);
    insert_edge(g, 1, 2, 16);
    insert_edge(g, 2, 3, 12);
    insert_edge(g, 3, 4, 22);
    insert_edge(g, 4, 5, 27);
    insert_edge(g, 5, 0, 10);
    insert_edge(g, 6, 1, 15);
    insert_edge(g, 6, 3, 18);
    insert_edge(g, 6, 4, 25);

    kruskal(g);
    free(g);
    return 0;
}
```

```
크루스칼 최소 신장 트리 알고리즘
간선 (5,0) 10 선택
간선 (2,3) 12 선택
간선 (6,1) 15 선택
간선 (1,2) 16 선택
간선 (3,4) 22 선택
간선 (4,5) 27 선택

-----------------------------------
Process exited after 1.072 seconds with return value 0
계속하려면 아무 키나 누르십시오 . . .
```




# Kruskal의 MST 알고리즘 복잡도



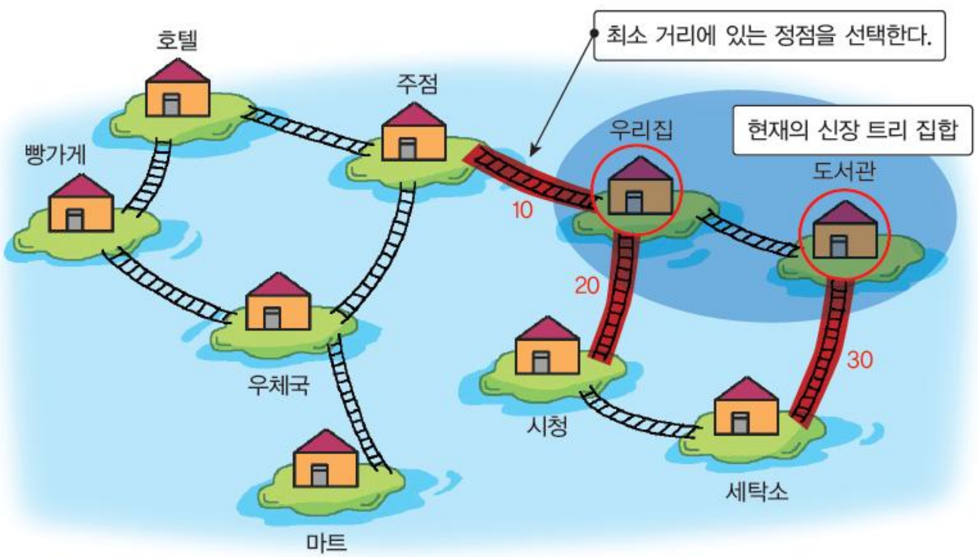
- Kruskal 알고리즘은 대부분 간선들을 정렬하는 시간에 좌우됨
  - 사이클 테스트 등의 작업은 정렬에 비해 매우 신속하게 수행됨

- 네트워크의 간선 *e개를 퀵정렬과 같은 효율적인 알고리즘으로 정렬* 한다면 Kruskal 알고리즘의 시간 복잡도는 *O(e*log(e))가 된다*

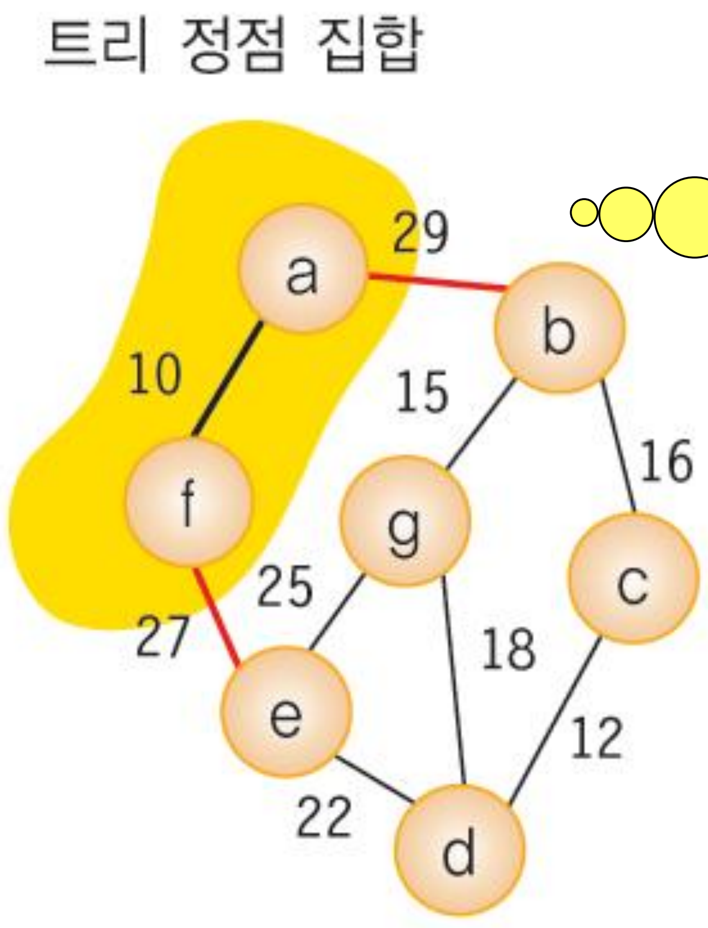
# 11.3 Prim의 MST 알고리즘



- 시작 정점에서부터 출발하여 신장 트리 집합을 단계적으로 확장해 나감
- 신장 트리 집합에 인접한 정점 중에서 최저 간선으로 연결된 정점 선택하여 신장 트리 집합에 추가함



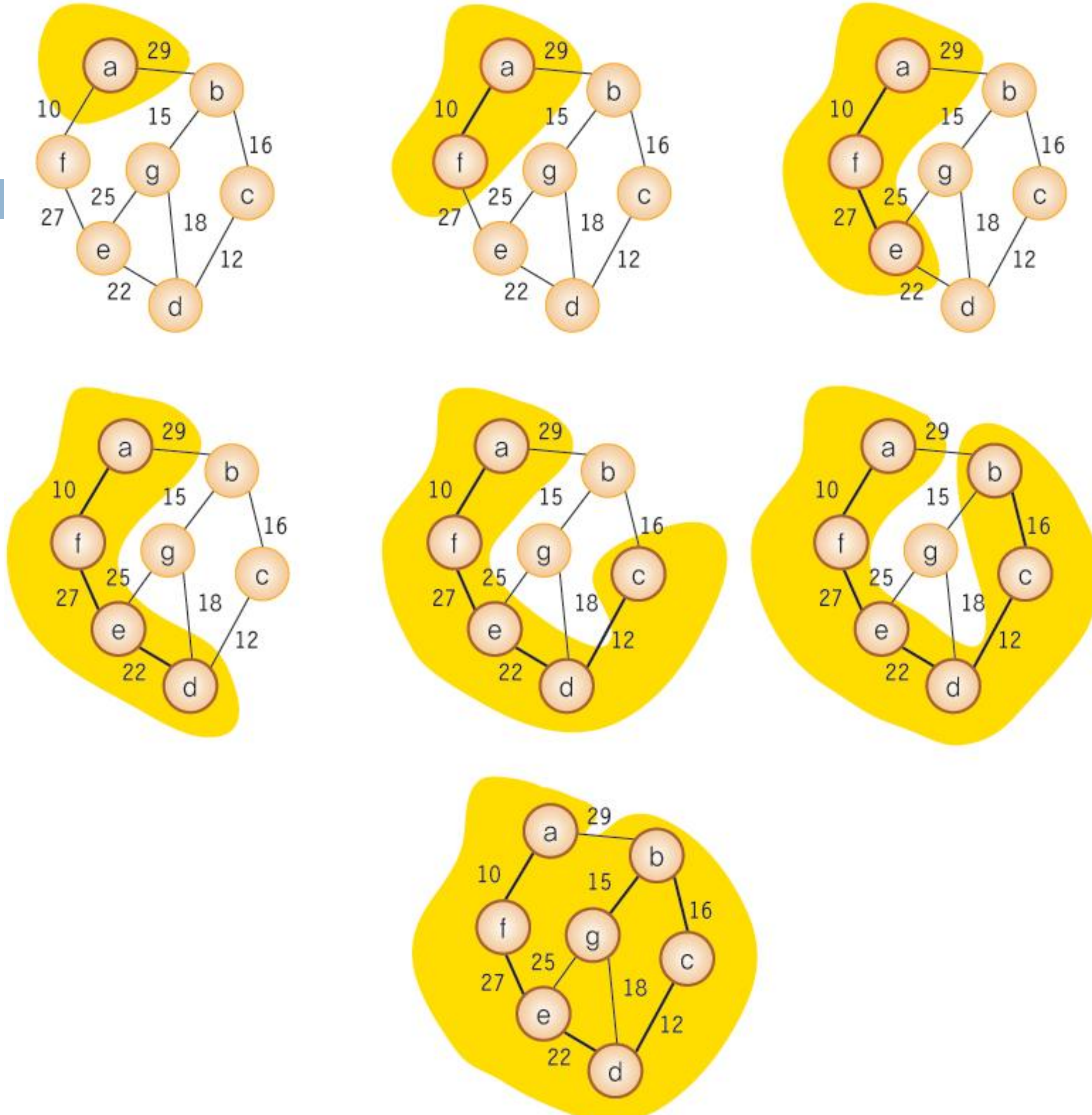
# Prim의 MST 알고리즘




간선 (a, b)=29
간선 (f, e)=27

간선 (f, e) 선택

정점 e가 신장 트리 집합에 추가됨


a b c d e f g
29 10 15 16 25 27 18 12 22
a b c d e f g
29 10 15 16 25 27 18 12 22
a b c d e f g
29 10 15 16 25 27 18 12 22
a b c d e f g
29 10 15 16 25 27 18 12 22
a b c d e f g
29 10 15 16 25 27 18 12 22
a b c d e f g
29 10 15 16 25 27 18 12 22
a b c d e f g
29 10 15 16 25 27 18 12 22

# Prim의 MST 알고리즘

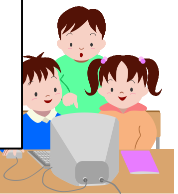


```
// 최소 비용 신장 트리를 구하는 Prim의 알고리즘
// 입력: 네트워크 G=(V, E), s는 시작 정점
// 출력: 최소 비용 신장 트리를 이루는 정점들의 집합
Prim(G, s)

    for each u∈V do
        dist[u] ← ∞
    dist[s] ← 0
    우선 순위큐 Q에 모든 정점을 삽입(우선순위는 dist[])
    for i ← 0 to n-1 do
        u ← delete_min(Q)
        화면에 u를 출력
        for each v∈(u의 인접 정점)
            if( v∈Q and weight[u][v]<dist[v] )
                then dist[v] ← weight[u][v]
```

# Prim의 MST 프로그램 (prim.c) (1/3)



```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define TRUE 1
#define FALSE 0
#define MAX_VERTICES 100
#define INF 1000L

typedef struct GraphType {
	int n;	// 정점의 개수
	int weight[MAX_VERTICES][MAX_VERTICES];
} GraphType;

int selected[MAX_VERTICES];
int distance[MAX_VERTICES];

// 최소 dist[v] 값을 갖는 정점을 반환
int get_min_vertex(int n)
{
	int v, i;
	for (i = 0; i <n; i++)		// 첫번째 비교 대상 선정
		if (!selected[i]) {
			v = i;
			break;
		}
	for (i = 0; i < n; i++)
		if (!selected[i] && (distance[i] < distance[v]))
			v = i;
	return (v);
}
```



# Prim의 MST 프로그램 (prim.c) (2/3)

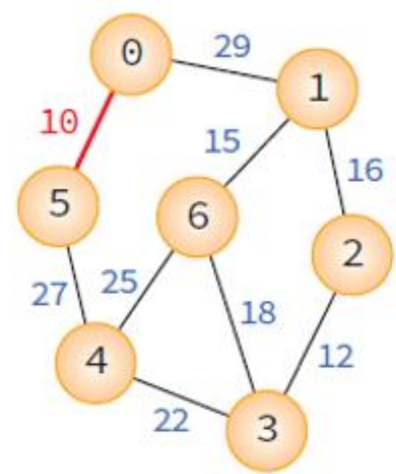


```c
//
void prim(GraphType* g, int s)
{
	int i, u, v;

	for (u = 0; u<g->n; u++)
		distance[u] = INF;
	distance[s] = 0;
	for (i = 0; i<g->n; i++) {
		u = get_min_vertex(g->n);
		selected[u] = TRUE;
		if (distance[u] == INF) return;
		printf("정점 %d 추가 \n", u);
		for (v = 0; v<g->n; v++)
			if (g->weight[u][v] != INF)
				if (!selected[v] && g->weight[u][v]< distance[v])
					distance[v] = g->weight[u][v];
	}
}
```

# Prim의 MST 프로그램 (prim.c) (3/3)



```c
int main(void)
{
    GraphType g = { 7,
    {{ 0, 29, INF, INF, INF, 10, INF },
    { 29,  0, 16, INF, INF, INF, 15 },
    { INF, 16, 0, 12, INF, INF, INF },
    { INF, INF, 12, 0, 22, INF, 18 },
    { INF, INF, INF, 22, 0, 27, 25 },
    { 10, INF, INF, INF, 27, 0, INF },
    { INF, 15, INF, 18, 25, INF, 0 } }
    };
    prim(&g, 0);
    return 0;
}
```




```
정점 0 추가
정점 5 추가
정점 4 추가
정점 3 추가
정점 2 추가
정점 1 추가
정점 6 추가

--------------------------------
Process exited after 1.428 seconds with return value 0
계속하려면 아무 키나 누르십시오 . . .
```

# Prim의 MST 알고리즘 복잡도



- 주 반복문이 정점의 수 *n만큼 반복하고, 내부 반복문이 n번 반복하므*로 Prim의 알고리즘은 ***O($n^2$)*** *의 복잡도를 가진다.*

- 희박한 그래프
  - *O(e*log(e))* 인 Kruskal의 알고리즘이 유리
- 밀집한 그래프
  - ***O($n^2$)*** 인 Prim의 알고리즘이 유리
  - e의 최대 값은 n(n-1)/2

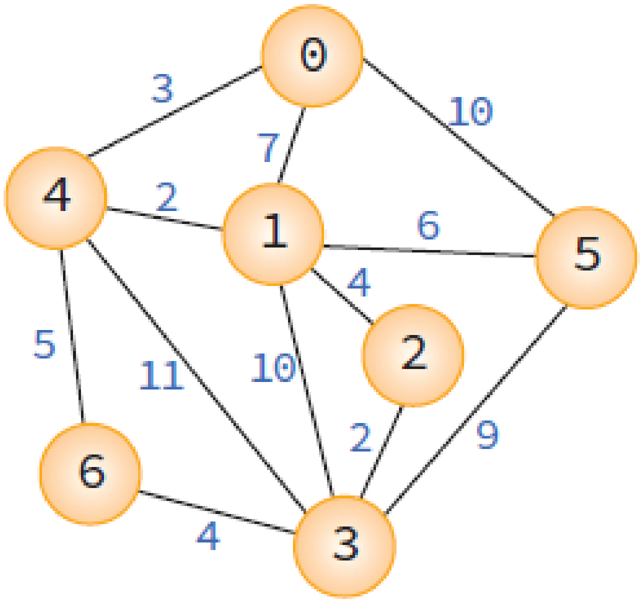
# 11.4 최단 경로(shortest path)



- 네트워크에서 정점 u와 정점 v를 연결하는 경로 중에서 간선들의 가중치 합이 최소가 되는 경로
- 간선의 가중치는 비용, 거리, 시간 등


# 가중치 인접 행렬






| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 7 | ∞ | ∞ | 3 | 10 | ∞ |
| 1 | 7 | 0 | 4 | 10 | 2 | 6 | ∞ |
| 2 | ∞ | 4 | 0 | 2 | ∞ | ∞ | ∞ |
| 3 | ∞ | 10 | 2 | 0 | 11 | 9 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | ∞ | 11 | 0 | ∞ | 5 |
| 5 | 10 | 6 | ∞ | 9 | ∞ | 0 | ∞ |
| 6 | ∞ | ∞ | ∞ | 4 | 5 | ∞ | 0 |

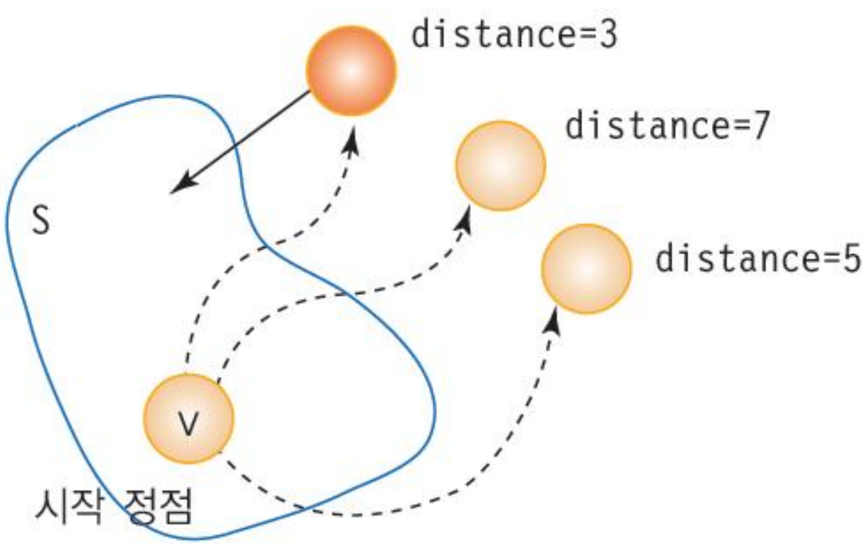
# 최단경로 알고리즘 용도

- Dijkstra 알고리즘: 하나의 시작 정점에서 다른 정점까지의 최단경로 계산
- Floyd 알고리즘은 모든 정점에서 다른 모든 정점까지의 최단 경로를 계산

# 11.5 Dijkstra의 최단경로 알고리즘



- 하나의 시작 정점으로부터 모든 다른 정점까지의 최단 경로 찾음
- 집합 S: 시작 정점 v로부터의 최단경로가 이미 발견된 정점들의 집합
- distance 배열: 최단경로가 알려진 정점들만을 이용한 다른 정점들까지의 최단경로 길이
- 매 단계에서 가장 distance 값이 작은 정점을 S에 추가

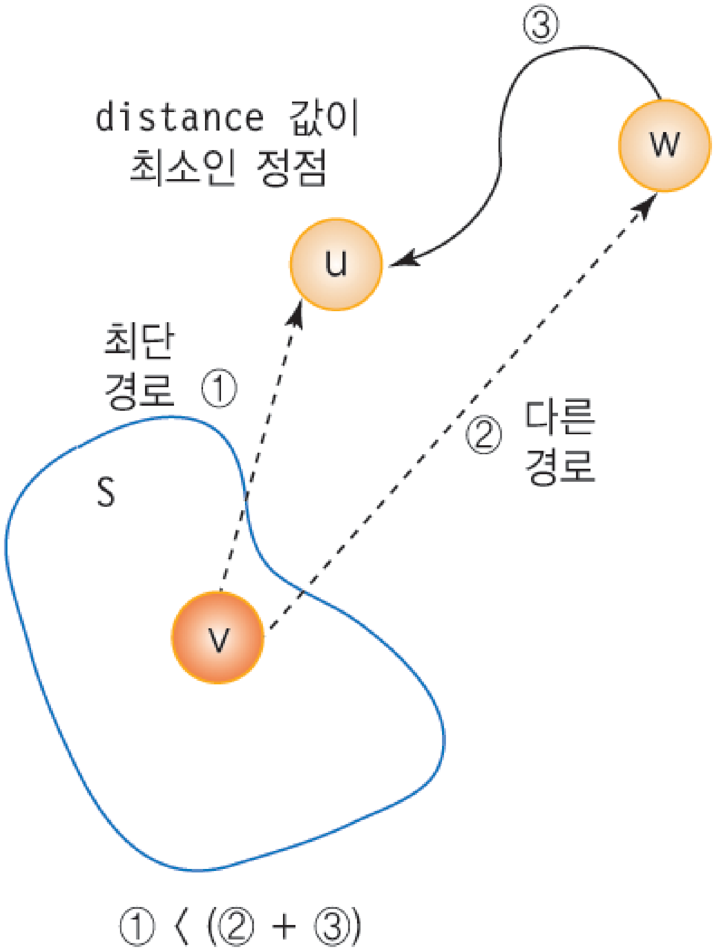


# Dijkstra의 최단경로 선택



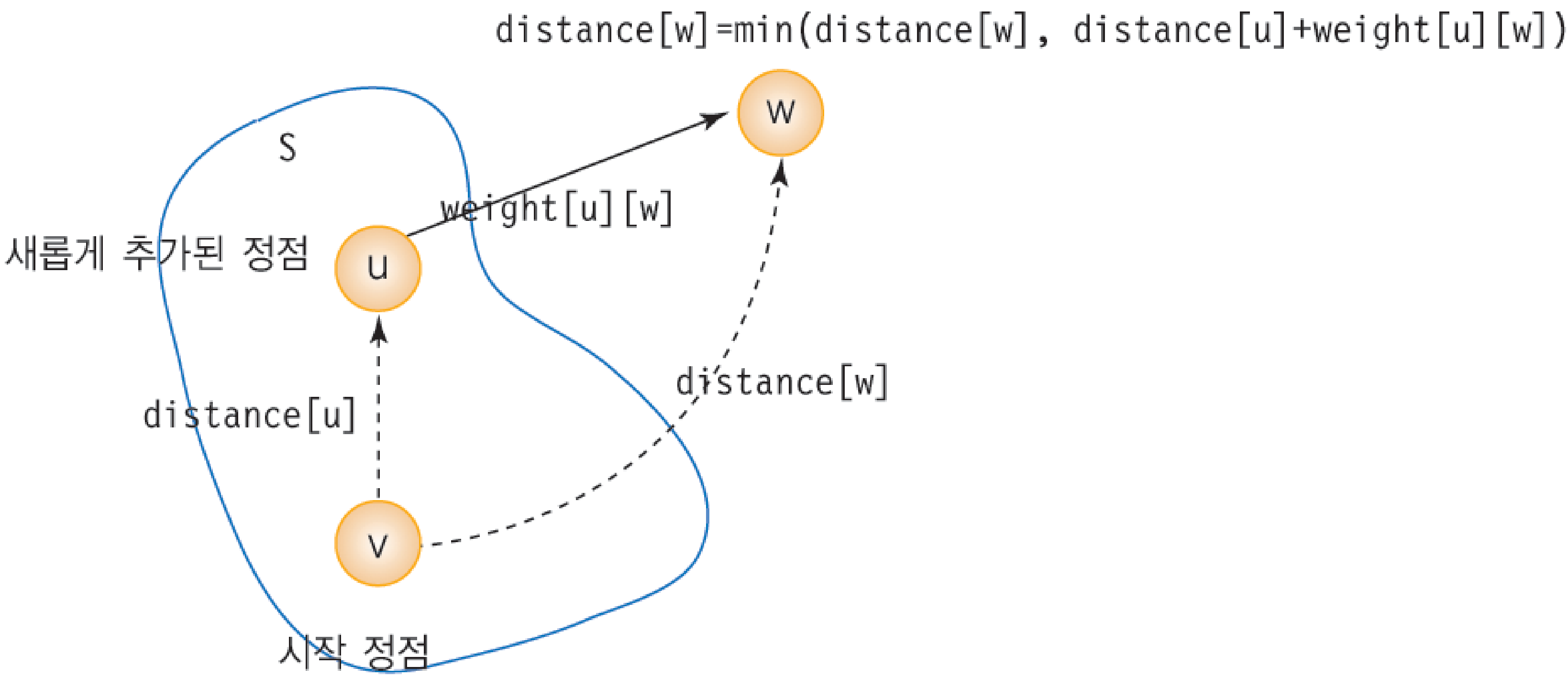
- 각 단계에서 S안에 있지 않은 정점 중에서 가장 distance값이 작은 정점을 S에 추가한다.
- 정점 w를 거쳐서 정점 u로 가는 가상적인 더 짧은 경로가 있다고 가정해보자,

  그러면 정점 v에서 정점 u까지의 거리는 정점 v에서 정점 w까지의 거리 ②와 정점 w에서 정점 u로 가는 거리 ③을 합한 값이 된다.
- 그러나 경로 ②는 경로 ①보다 항상 길 수 밖에 없다. 왜냐하면 현재 distance 값이 가장 작은 정점은 u이기 때문이다.



# Dijkstra의 최단경로 선택

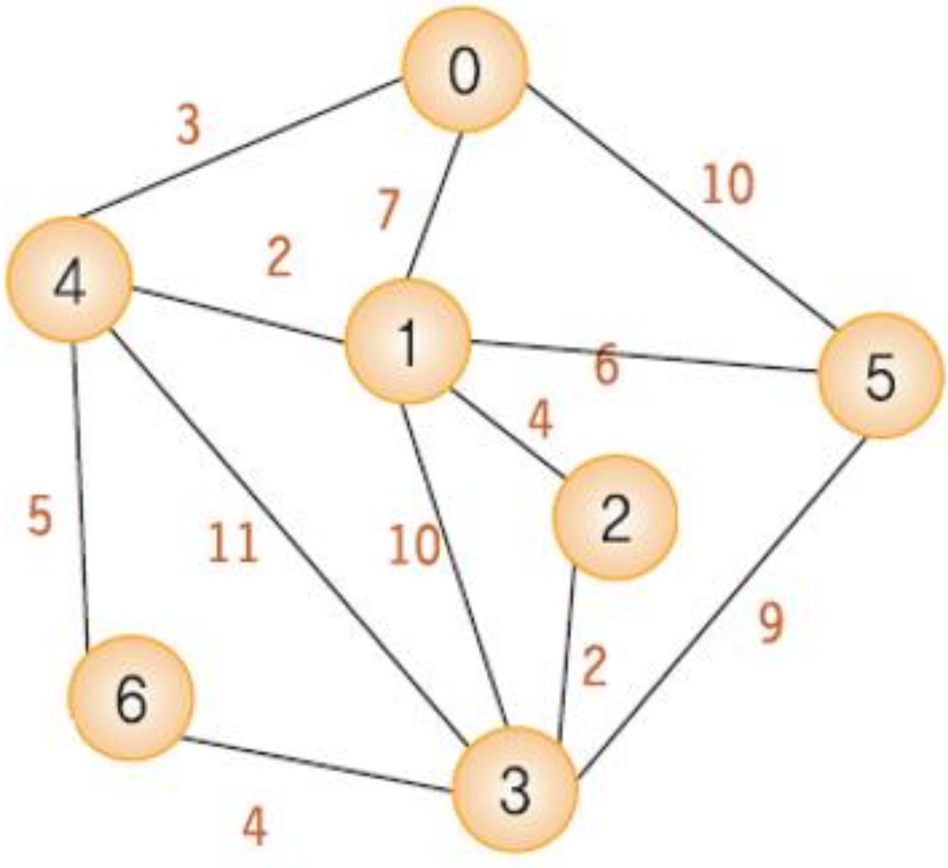
- 새로운 정점이 S에 추가되면 distance값 갱신






# Dijkstra의 최단경로 선택 예







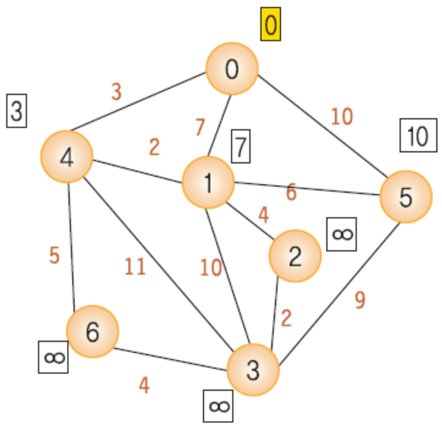

# Dijkstra의 최단경로 알고리즘



```
// 입력: 가중치 그래프 G, 가중치는 음수가 아님.
// 출력: distance 배열, distance[u]는 v에서 u까지의 최단 거리이다.
shortest_path(G, v)

S←{v}
for 각 정점 w∈G do
        distance[w]←weight[v][w];
while 모든 정점이 S에 포함되지 않으면 do
        u←집합 S에 속하지 않는 정점 중에서 최소 distance 정점;
        S←S∪{u}
        for u에 인접하고 S에 있는 각 정점 z do
                if distance[u]+weight[u][z] < distance[z] then
                        distance[z]←distance[u]+weight[u][z];
```

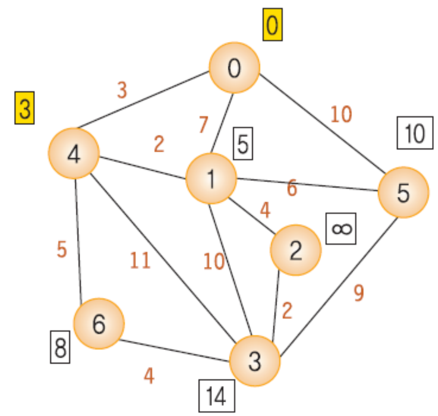
# Dijkstra의 최단경로 알고리즘 동작 예 (1/2)





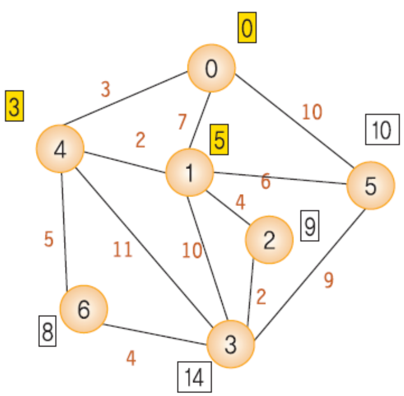

S={0}

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| distance[]= | 0 | 7 | ∞ | ∞ | 3 | 10 | ∞ |



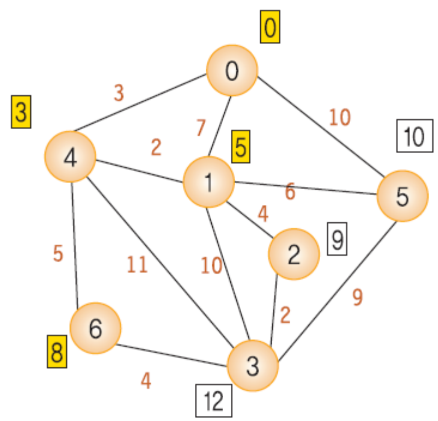

S={0, 4}

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| distance[]= | 0 | 5 | ∞ | 14 | 3 | 10 | 8 |




S={0, 4, 1}

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| distance[]= | 0 | 5 | 9 | 14 | 3 | 10 | 8 |

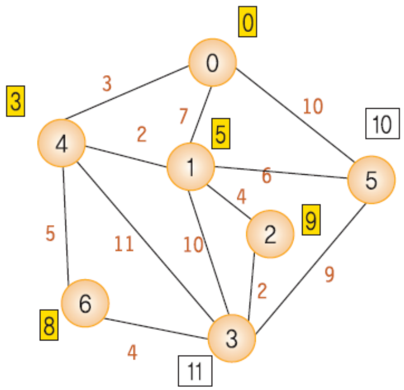



S={0, 4, 1, 6}

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| distance[]= | 0 | 5 | 9 | 12 | 3 | 10 | 8 |

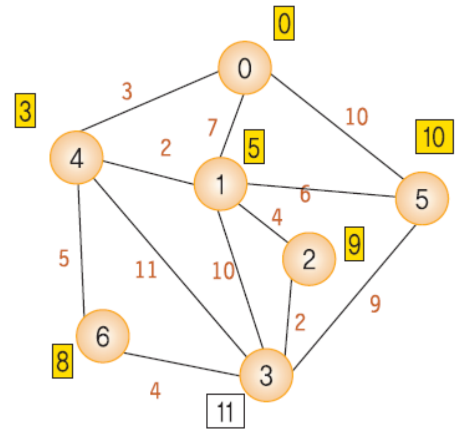
# Dijkstra의 최단경로 알고리즘 동작 예 (2/2)





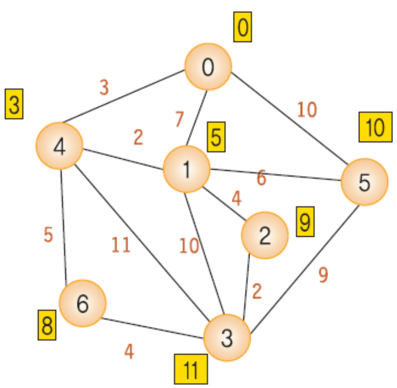
S={0, 4, 1, 6, 2}

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| distance[] = | 0 | 5 | 9 | 11 | 3 | 10 | 8 |



S={0, 4, 1, 6, 2, 5}

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| distance[] = | 0 | 5 | 9 | 11 | 3 | 10 | 8 |



S={0, 4, 1, 6, 2, 5, 3}

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| distance[] = | 0 | 5 | 9 | 11 | 3 | 10 | 8 |



# Dijkstra의 최단경로 (dijkstra.c) (1/4)



```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <limits.h>

#define TRUE 1
#define FALSE 0
#define MAX_VERTICES    100
#define INF 1000000     // 무한대 (연결이 없는 경우)

typedef struct GraphType {
    int n;  // 정점의 개수
    int weight[MAX_VERTICES][MAX_VERTICES];
} GraphType;

int distance[MAX_VERTICES]; /* 시작정점으로부터의 최단경로 거리 */
int found[MAX_VERTICES];    /* 방문한 정점 표시 */

int choose(int distance[], int n, int found[])
{
    int i, min, minpos;
    min = INT_MAX;
    minpos = -1;
    for (i = 0; i<n; i++)
        if (distance[i]< min && !found[i]) {
            min = distance[i];
            minpos = i;
        }
    return minpos;
}
```

# Dijkstra의 최단경로 (dijkstra.c) (2/4)



```c
void print_status(GraphType* g)
{
    static int step=1;
    int i;

    printf("STEP %d: ", step++);
    printf("distance: ");
    for (i=0; i < g->n; i++) {
        if (distance[i] == INF)
            printf(" * ");
        else
            printf("%2d ", distance[i]);
    }
    printf("\n");
    printf("        found:    ");
    for (i=0; i<g->n; i++)
        printf("%2d ", found[i]);
    printf("\n\n");
}
```

# Dijkstra의 최단경로 (dijkstra.c) (3/4)



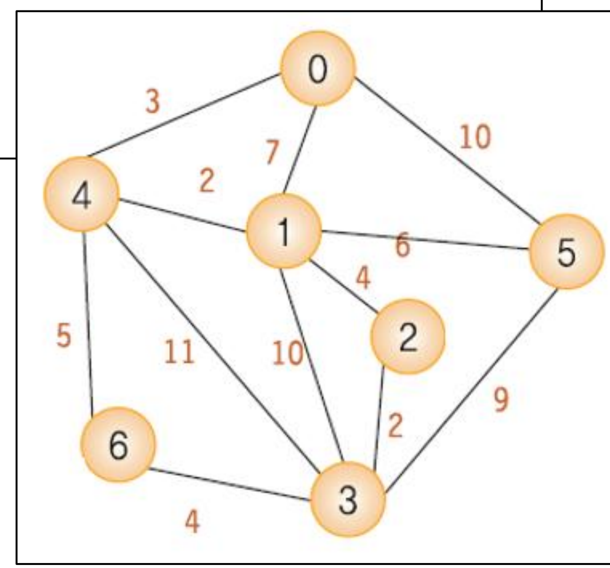
```c
void shortest_path(GraphType* g, int start)
{
	int i, u, w;
	for (i = 0; i<g->n; i++) /* 초기화 */
	{
		distance[i] = g->weight[start][i];
		found[i] = FALSE;
	}
	found[start] = TRUE;    /* 시작 정점 방문 표시 */
	distance[start] = 0;
	for (i = 0; i<g->n-1; i++) {
		print_status(g);
		u = choose(distance, g->n, found);
		found[u] = TRUE;
		for (w = 0; w<g->n; w++)
			if (!found[w])
				if (distance[u] + g->weight[u][w]<distance[w])
					distance[w] = distance[u] + g->weight[u][w];
	}
}
```

# Dijkstra의 최단경로 (dijkstra.c) (4/4)



```c
int main(void)
{
	GraphType g = { 7,
	{{ 0,   7,  INF, INF,   3,  10, INF },
	{ 7,  0,    4,  10,   2,   6, INF },
	{ INF,  4,    0,   2, INF, INF, INF },
	{ INF, 10,    2,   0,  11,   9,   4 },
	{ 3,  2,  INF,  11,   0, INF,   5 },
	{ 10,  6,  INF,   9, INF,   0, INF },
	{ INF, INF, INF,   4,   5, INF,   0 } }
	};
	shortest_path(&g, 0);
	return 0;
}
```

```
STEP 1: distance:   0  7  *  *  3 10  *
        found:      1  0  0  0  0  0  0

STEP 2: distance:   0  5  * 14  3 10  8
        found:      1  0  0  0  1  0  0

STEP 3: distance:   0  5  9 14  3 10  8
        found:      1  1  0  0  1  0  0

STEP 4: distance:   0  5  9 12  3 10  8
        found:      1  1  0  0  1  0  1

STEP 5: distance:   0  5  9 11  3 10  8
        found:      1  1  1  0  1  0  1

STEP 6: distance:   0  5  9 11  3 10  8
        found:      1  1  1  0  1  1  1
```




# Dijkstra의 최단경로 알고리즘 복잡도



- 주반복문을 n번 반복하고, 내부 반복문을 2n번 반복하므로 $O(n^2)$의 복잡도를가진다.

# 11.6 Floyd 알고리즘



```
floyd(G):

for k ← 0 to n - 1
    for i ← 0 to  n - 1
        for j ← 0 to n - 1
            A[i][j] = min(A[i][j], A[i][k] + A[k][j])
```

# Floyd의 최단경로 알고리즘

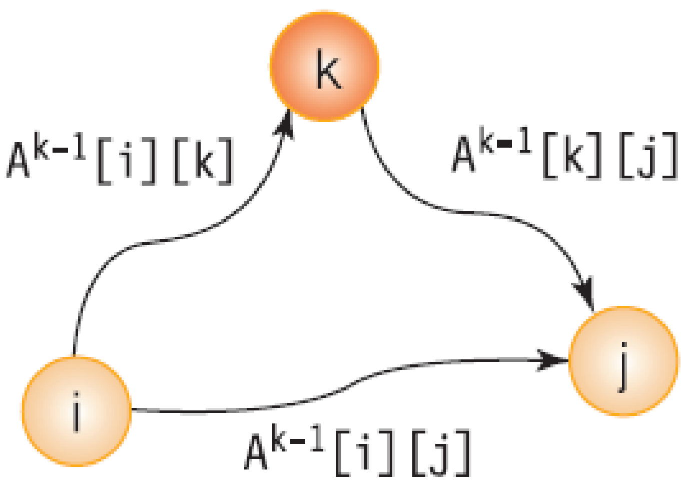


- 모든 정점 사이의 최단경로를 찾음
- 2차원 배열 A를 이용하여 3중 반복을 하는 루프로 구성

# Floyd의 최단경로 알고리즘



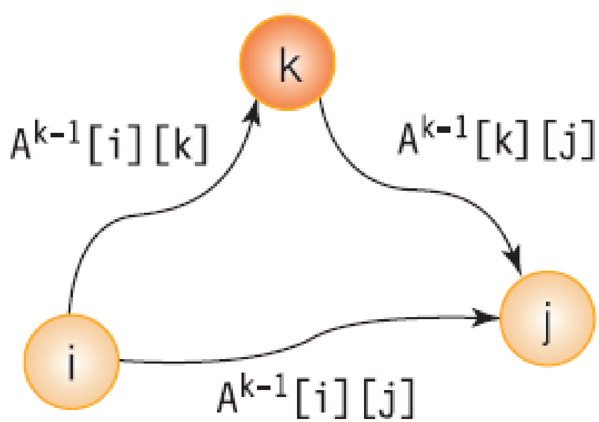
- $A^k[i][j]$
  - 0부터 k까지의 정점만을 이용한 정점 i에서 j까지의 최단 경로 길이
- $A^{-1} \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \ldots \rightarrow A^{n-1}$순으로 최단 경로 구해감
- $A^{k-1}$까지 구해진 상태에서 k번째 정점이 추가로 고려되는 상황을 생각하자




# Floyd의 최단경로 알고리즘



- 0부터 k까지의 정점만을 사용하여 정점 i에서 정점 j로 가는 최단 경로는 다음의 2가지의 경우로 나뉘어진다.
- 정점 k를 거치지 않는 경우:
  - $A^k[i][j]$ 는 k보다 큰 정점은 통과하지 않으므로 최단거리는 여전히 $A^{k-1}[i][j]$임
- 정점 k를 거치는 경우:
  - i에서 k까지의 최단거리 $A^{k-1}[i][k]$에 k에서 j까지의 최단거리 $A^{k-1}[k][j]$를 더한 값

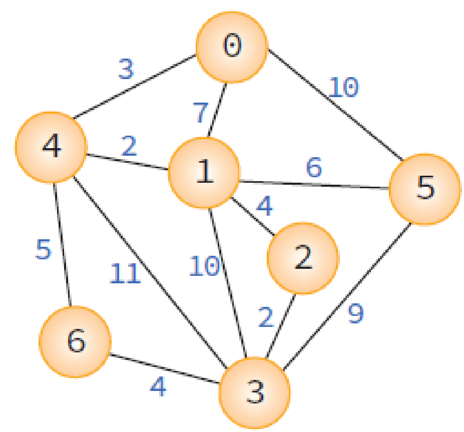



# Floyd의 최단경로 알고리즘 적용 예



(1) 그래프의 가중치 행렬로 배열 A를 초기화한다.

```
===============================
    0    7    *    *    3   10    *
    7    0    4   10    2    6    *
    *    4    0    2    *    *    *
    *   10    2    0   11    9    4
    3    2    *   11    0    *    5
   10    6    *    9    *    0    *
    *    *    *    4    5    *    0
===============================
```




(2) 정점 0을 거쳐서 가는 경로와 비교하여 최단 경로를 수정한다.

```
===============================
    0    7    *    *    3   10    *
    7    0    4   10    2    6    *
    *    4    0    2    *    *    *
    *   10    2    0   11    9    4
    3    2    *   11    0   13    5
   10    6    *    9   13    0    *
    *    *    *    4    5    *    0
===============================
```

$A^0[i][j] = \min(A^{-1}[i][j], A^{-1}[i][0]+A^{-1}[0][j])$

# Floyd의 최단경로 알고리즘 적용 예



(3) 정점 1을 거쳐서 가는 경로와 비교하여 최단 경로를 수정한다.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 11 | 17 | 3 | 10 | * |
| 7 | 0 | 4 | 10 | 2 | 6 | * |
| 11 | 4 | 0 | 2 | 6 | 10 | * |
| 17 | 10 | 2 | 0 | 11 | 9 | 4 |
| 3 | 2 | 6 | 11 | 0 | 8 | 5 |
| 10 | 6 | 10 | 9 | 8 | 0 | * |
| * | * | * | 4 | 5 | * | 0 |

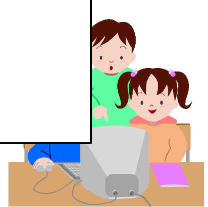
$$A^1[i][j] = \min(A^0[i][j], A^0[i][1]+A^0[1][j])$$



# Floyd의 최단경로 프로그램 (floyd.c) (1/2)



```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define TRUE 1
#define FALSE 0
#define MAX_VERTICES    100
#define INF 1000000 /* 무한대 (연결이 없는 경우) */

typedef struct GraphType {
    int n;  // 정점의 개수
    int weight[MAX_VERTICES][MAX_VERTICES];
} GraphType;

int A[MAX_VERTICES][MAX_VERTICES];

void printA(GraphType *g)
{
    int i, j;
    printf("===============================\n");
    for (i = 0; i<g->n; i++) {
        for (j = 0; j<g->n; j++) {
            if (A[i][j] == INF)
                printf("  * ");
            else printf("%3d ", A[i][j]);
        }
        printf("\n");
    }
    printf("===============================\n");
}
```



# Floyd의 최단경로 프로그램 (floyd.c) (2/2)



```
void floyd(GraphType* g)
{

    int i, j, k;
    for (i = 0; i<g->n; i++)
        for (j = 0; j<g->n; j++)
            A[i][j] = g->weight[i][j];
    printA(g);

    for (k = 0; k<g->n; k++) {
        for (i = 0; i<g->n; i++)
            for (j = 0; j<g->n; j++)
                if (A[i][k] + A[k][j] < A[i][j])
                    A[i][j] = A[i][k] + A[k][j];
        printA(g);
    }
}

int main(void)
{
    GraphType g = { 7,
    {{ 0,  7,  INF, INF,   3,  10, INF },
    { 7,  0,    4,  10,   2,   6, INF },
    { INF,  4,    0,   2, INF, INF, INF },
    { INF, 10,    2,   0,  11,   9,   4 },
    { 3,  2,  INF,  11,   0, INF,   5 },
    { 10,  6,  INF,   9, INF,   0, INF },
    { INF, INF, INF,   4,   5, INF,   0 } }
    };
    floyd(&g);
    return 0;
}
```

# Floyd의 최단경로 프로그램 결과

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 7 | INF | INF | 3 | 10 | INF |
| 1 | 7 | 0 | 4 | 10 | 2 | 6 | INF |
| 2 | INF | 4 | 0 | 2 | INF | INF | INF |
| 3 | INF | 10 | 2 | 0 | 11 | 9 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | INF | 11 | 0 | 13 | 5 |
| 5 | 10 | 6 | INF | 9 | 13 | 0 | INF |
| 6 | INF | INF | INF | 4 | 5 | INF | 0 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 7 | 11 | 17 | 3 | 10 | INF |
| 1 | 7 | 0 | 4 | 10 | 2 | 6 | INF |
| 2 | 11 | 4 | 0 | 2 | 6 | 10 | INF |
| 3 | 17 | 10 | 2 | 0 | 11 | 9 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 6 | 11 | 0 | 8 | 5 |
| 5 | 10 | 6 | 10 | 9 | 8 | 0 | INF |
| 6 | INF | INF | INF | 4 | 5 | INF | 0 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 7 | 11 | 13 | 3 | 10 | INF |
| 1 | 7 | 0 | 4 | 6 | 2 | 6 | INF |
| 2 | 11 | 4 | 0 | 2 | 6 | 10 | INF |
| 3 | 13 | 6 | 2 | 0 | 8 | 9 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 6 | 8 | 0 | 8 | 5 |
| 5 | 10 | 6 | 10 | 9 | 8 | 0 | INF |
| 6 | INF | INF | INF | 4 | 5 | INF | 0 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 7 | 11 | 13 | 3 | 10 | 17 |
| 1 | 7 | 0 | 4 | 6 | 2 | 6 | 10 |
| 2 | 11 | 4 | 0 | 2 | 6 | 10 | 6 |
| 3 | 13 | 6 | 2 | 0 | 8 | 9 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 6 | 8 | 0 | 8 | 5 |
| 5 | 10 | 6 | 10 | 9 | 8 | 0 | 3 |
| 6 | 17 | 10 | 6 | 4 | 5 | 13 | 0 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 9 | 11 | 3 | 10 | 8 |
| 1 | 5 | 0 | 4 | 6 | 2 | 6 | 7 |
| 2 | 9 | 4 | 0 | 2 | 6 | 10 | 6 |
| 3 | 11 | 6 | 2 | 0 | 8 | 9 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 6 | 8 | 0 | 8 | 5 |
| 5 | 10 | 6 | 10 | 9 | 8 | 0 | 13 |
| 6 | 8 | 7 | 6 | 4 | 5 | 13 | 0 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 9 | 11 | 3 | 10 | 8 |
| 1 | 5 | 0 | 4 | 6 | 2 | 6 | 7 |
| 2 | 9 | 4 | 0 | 2 | 6 | 10 | 6 |
| 3 | 11 | 6 | 2 | 0 | 8 | 9 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 6 | 8 | 0 | 8 | 5 |
| 5 | 10 | 6 | 10 | 9 | 8 | 0 | 13 |
| 6 | 8 | 7 | 6 | 4 | 5 | 13 | 10 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 9 | 11 | 3 | 10 | 8 |
| 1 | 5 | 0 | 4 | 6 | 2 | 6 | 7 |
| 2 | 9 | 4 | 0 | 2 | 6 | 10 | 6 |
| 3 | 11 | 6 | 2 | 0 | 8 | 9 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 6 | 8 | 0 | 8 | 5 |
| 5 | 10 | 6 | 10 | 9 | 8 | 0 | 13 |
| 6 | 8 | 7 | 6 | 4 | 5 | 13 | 0 |

# Floyd의 최단경로 알고리즘 복잡도

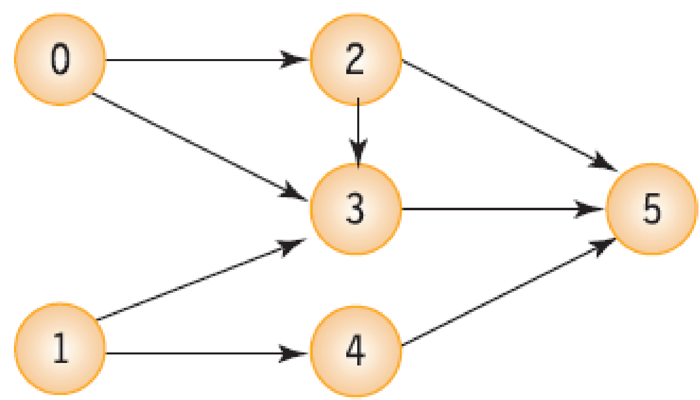


- 네트워크에 n개의 정점이 있다면, Floyd의 최단경로 알고리즘은 3중 반복문을 실행되므로 시간 복잡도는 $O(n^3)$ 이 된다
- 모든 정점상의 최단경로를 구하려면 Dijkstra의 알고리즘 *O(n2)*을 *n*번 반복해도 되며, 이 경우 전체 복잡도는 $O(n^3)$ 이 된다

# 11.7 위상정렬(topological sort)

- 방향 그래프에서 간선 <u, v>가 있다면 정점 u는 정점 v를 선행함
- 방향 그래프 정점들의 선행 순서를 위배하지 않으면서 모든 정점을 나열
- 선수 과목은 과목들의 선행 관계 표현함

| 과목번호 | 과목명 | 선수과목 |
|---|---|---|
| 0 | 컴퓨터개론 | 없음 |
| 1 | 이산수학 | 없음 |
| 2 | C언어 | 0 |
| 3 | 자료구조 | 0, 1, 2 |
| 4 | 확률 | 1 |
| 5 | 알고리즘 | 2, 3, 4 |

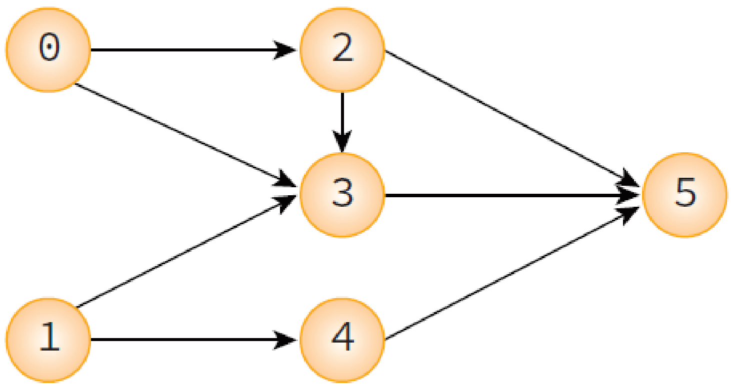



- 위상 순서(topological order)
  - (0,1,2,3,4,5) , (1,0,2,3,4,5)
- (2,0,1,3,4,5)는 위상 순서가 아님
  - 왜냐하면 2번 정점이 0번 정점 앞에 오기 때문

# 위상 정렬 적용 예



| 과목번호 | 과목명 | 선수과목 |
|---|---|---|
| 0 | 컴퓨터 개론 | 없음 |
| 1 | 이산수학 | 없음 |
| 2 | C언어 | 0 |
| 3 | 자료구조 | 0, 1, 2 |
| 4 | 확률 | 1 |
| 5 | 알고리즘 | 2, 3, 4 |



# 위상정렬 알고리즘

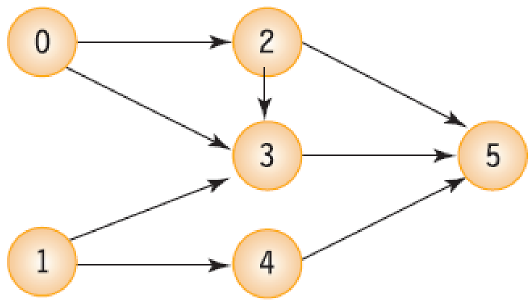


```
// Input: 그래프 G=(V,E)
// Output: 위상 정렬 순서

topo_sort(G)

for i←0 to n-1 do
    if( 모든 정점이 선행 정점을 가지면 )
        then 사이클이 존재하고 위상 정렬 불가;
    선행 정점을 가지지 않는 정점 v 선택;
    v를 출력;
    v와 v에서 나온 모든 간선들을 그래프에서 삭제;
```

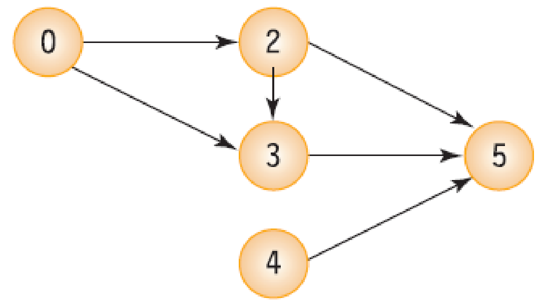


# 위상정렬의 예

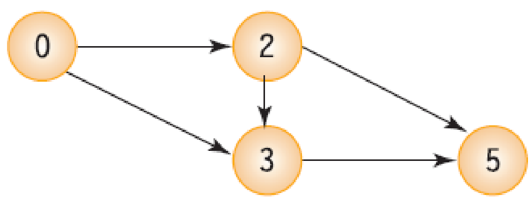




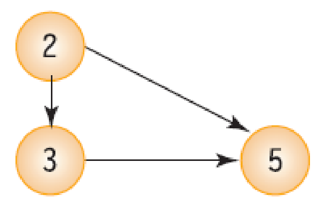

(a) 초기 상태



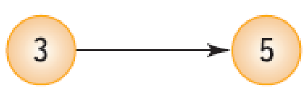

(b) 1 제거




(c) 4 제거




(d) 0 제거




(e) 2 제거


(f) 3 제거



# 위상정렬 프로그램 (topo_sort.c) (1/3)



```c
// 위상정렬을 수행한다.
int topo_sort(GraphType *g)
{
    int i;
    StackType s;
    GraphNode *node;

    // 모든 정점의 진입 차수를 계산
    int *in_degree = (int *)malloc(g->n * sizeof(int));
    for (i = 0; i < g->n; i++)          // 초기화
        in_degree[i] = 0;
    for (i = 0; i < g->n; i++) {
        GraphNode *node = g->adj_list[i];//정점 i에서 나오는 간선들
        while (node != NULL) {
            in_degree[node->vertex]++;
            node = node->link;
        }
    }
    // 진입 차수가 0인 정점을 스택에 삽입
    init(&s);
    for (i = 0; i < g->n; i++) {
        if (in_degree[i] == 0) push(&s, i);
    }
```

# 위상정렬 프로그램 (topo_sort.c) (2/3)

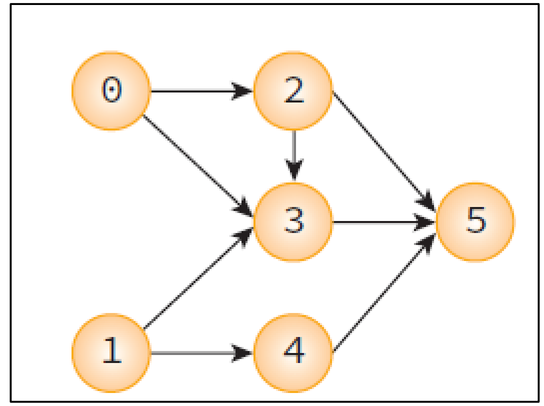


```c
	// 위상 순서를 생성
	while (!is_empty(&s)) {
		int w;
		w = pop(&s);
		printf("정점 %d ->", w);		//정점 출력
		node = g->adj_list[w];	//각 정점의 진입 차수를 변경
		while (node != NULL) {
			int u = node->vertex;
			in_degree[u]--;			//진입 차수를 감소!
			if (in_degree[u] == 0) push(&s, u);
			node = node->link;   // 다음 정점
		}
	}
	free(in_degree);
	printf("\n");
	return (i == g->n); // 반환값이 1이면 성공, 0이면 실패
}
```

# 위상정렬 프로그램 (topo_sort.c) (3/3)



```c
int main(void)
{
	GraphType g;

	graph_init(&g);
	insert_vertex(&g, 0);
	insert_vertex(&g, 1);
	insert_vertex(&g, 2);
	insert_vertex(&g, 3);
	insert_vertex(&g, 4);
	insert_vertex(&g, 5);

	//정점 0의 인접 리스트 생성
	insert_edge(&g, 0, 2);
	insert_edge(&g, 0, 3);
	//정점 1의 인접 리스트 생성
	insert_edge(&g, 1, 3);
	insert_edge(&g, 1, 4);
	//정점 2의 인접 리스트 생성
	insert_edge(&g, 2, 3);
	insert_edge(&g, 2, 5);
	//정점 3의 인접 리스트 생성
	insert_edge(&g, 3, 5);
	//정점 4의 인접 리스트 생성
	insert_edge(&g, 4, 5);
	//위상 정렬
	topo_sort(&g);
	// 동적 메모리 반환 코드 생략
	return 0;
}
```




```
정점 1 ->정점 4 ->정점 0 ->정점 2 ->정점 3 ->정점 5 ->

--------------------------------
Process exited after 0.04756 seconds with return value 0
계속하려면 아무 키나 누르십시오 . . .
```