Комбинаторные объекты

Очень велика вероятность, что над решаемой вами алгоритмической задачей уже работали другие, хотя, возможно, и в совсем иных контекстах. Но не надейтесь узнать, что известно о вашей конкретной «задаче оптимизации процесса», поискав в книге словосочетание «процесс *А*». Вам нужно сформулировать задачу оптимизации вашего процесса в терминах вычислительных свойств стандартных структур, таких как:

♦ *перестановка*— упорядоченное множество элементов. Например, {1, 4, 3, 2} и {4. 3. 2, 1} являются двумя разными перестановками одного множества целых чисел. Мы уже видели перестановки в задачах оптимизации маршрута манипулятора и календарного планирования. Перестановки будут вероятным исследуемым объектом в задаче поиска «размещения», «маршрута», «границ» или «последовательности»;

♦ *подмножество*— выборка из множества элементов. Например, множества {1, 3, 4} и {2} являются двумя разными подмножествами множества первых четырех целых чисел. В отличие от перестановок, порядок элементов подмножества не имеет значения, поэтому подмножества {1. 3, 4} и {4, 3. 1} являются одинаковыми. В проблеме календарного планирования нам пришлось иметь дело с подмножествами. Подмножества будут вероятным исследуемым объектом в задаче поиска «кластера», «коллекции», «комитета», «группы», «пакета» или «выборки»;

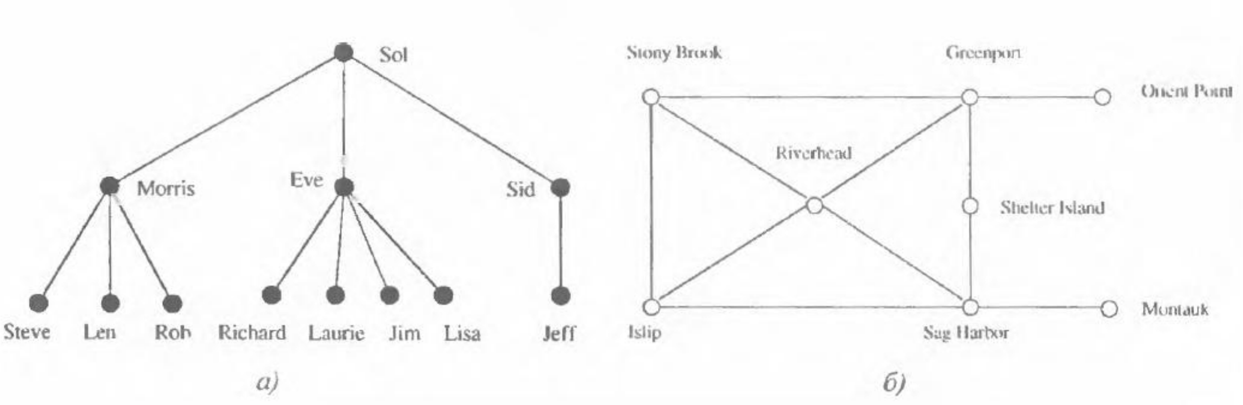

Рис. 1.1. Моделирование реальных структур с помощью деревьев и графов

дерево— иерархическое представление взаимосвязей между объектами. Реальное применение деревьев показано на примере родословного древа семейства Скиена на рис. 1.1, *а*. Деревья будут вероятным исследуемым объектом в задаче поиска «иерархии», «отношений доминирования», «отношений предок/потомок»;

♦ *граф*— представление взаимоотношений между произвольными парами объектов. На рис. 1.1, *б* показана модель дорожной сети в виде графа, где вершины представляют населенные пункты, а ребра— дороги, соединяющие населенные пункты. Граф будет вероятным исследуемым объектом в задаче поиска «сети», «схемы», «инфраструктуры» или «взаимоотношений»;

♦ *точка*— представление места в некотором геометрическом пространстве. Например, расположение автобусных остановок можно описать точками на карте (плоскости). Точка будет вероятным исследуемым объектом в задаче поиска "местонахождения", "позиции", "записи данных" или "расположения"; *многоугольник*— представление области геометрического пространства. Например, с помощью полигона можно описать границы страны на карте. Многоугольники и многогранники будут вероятными исследуемыми объектами в задаче поиска "формы", "региона", "очертания" или "границы";
♦ *строка*— последовательность символов или шаблонов. Например, имена студентов можно представить в виде строк. Строка будет вероятным исследуемым объектом при работе с "текстом", "символами", "шаблонами" или "метками".

Рекурсивные объекты

Перечислим возможные рекурсивные объекты.
♦ *Перестановки.* Удалив первый элемент перестановки {1..n},.мы получим перестановку остающихся *n*-1 элементов.
♦ *Подмножества.* Каждое множество элементов {1,...,n} содержит подмножество {1,...,n - 1}, являющееся результатом удаления элемента *n,* если такой имеется.
♦ *Деревья.* Что мы получим, удалив корень дерева? Правильно, коллекцию меньших деревьев. А что мы получим, удалив какой-либо лист дерева? Немного меньшее дерево.
♦ *Графы.* Удалите любую вершину графа, и вы получите меньший граф. Теперь разобьем вершины графа на две группы, правую и левую. Разрезав все ребра, соединяющие эти группы, мы получим два меньших графа и набор разорванных ребер.

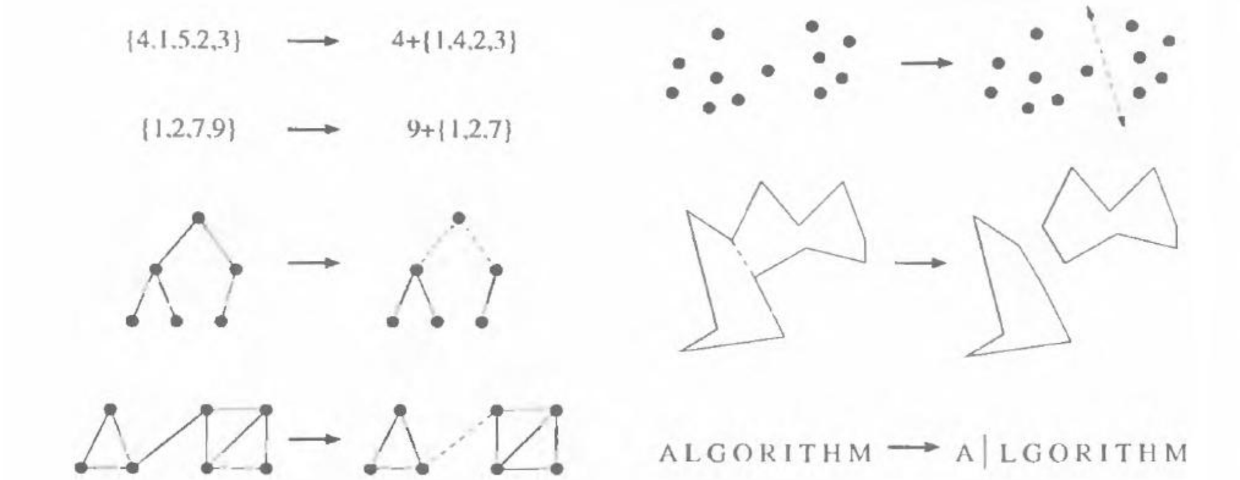

Рис. 1.2. Рекурсивное разложение комбинаторных объекгоп: перестановки, подмножества, деревья, графы, множества точек, многоугольники и строки

Точки. Возьмем облако точек и разобьем его линией на две группы. Теперь у нас есть два меньших облака точек.

♦ *Многоугольники.* Соединив хордой две несмежные вершины простого многоугольника с *n* вершинами, мы получим два меньших многоугольника.

♦ *Строки.* Что мы получим, удалив первый символ строки? Другую, более короткую строку.

Для рекурсивного описания объектов требуются как правила разложения, так и базовые объекты, а именно спецификация простейшего объекта, далее которого разложение не идет. Такие базовые объекты обычно легко определить. Перестановки и подмножества нулевого количества объектов обозначаются как {}. Наименьшее дерево или граф состоят из одной вершины, а наименьшее облако точек состоит из одной точки. С многоугольниками немного посложнее; наименьшим многоугольником является треугольник. Наконец, пустая строка содержит нулевое количество знаков. Решение о том, содержит ли базовый объект нулевое количество элементов или один элемент, является, скорее, вопросом вкуса и удобства, нежели какого-либо фундаментального принципа.

ЗАДАЧА. Докажите методом индукции, что $\sum_{i=1}^{n} i \times i! = (n+1)! - 1$.

Решение. Индукционная парадигма прямолинейна: сначала подтверждаем базовый случай (здесь мы принимаем $n = 1$, хотя случай $n = 0$ был бы еще более общим):

$$\sum_{i=1}^{1} i \times i! = 1 = (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$$

Теперь допускаем, что данное утверждение верно для всех чисел вплоть до n. Для доказательства общего случая $n + 1$ видим, что если мы вынесем наибольший член из-под знака суммы

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \times i! = (n+1) \times (n+1)! + \sum_{i=1}^{n} i \times i!$$

то получим левую часть нашего индуктивного допущения. Заменяя правую часть, получаем:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i \times i! &= (n+1) \times (n+1)! + (n+1)! - 1 \\ &= (n+1)! \times ((n+1)+1) - 1 \\ &= (n+2)! - 1\end{aligned}$$

Этот общий прием выделения наибольшего члена суммы для выявления экземпляра индуктивного допущения лежит в основе всех таких доказательств. ■

Упражнения

1. Начертите сеть дорог с двумя точками *a и b*, такими, что маршрут между ними, преодолеваемый за кратчайшее время, не является самым коротким.

2. Начертите сеть дорог с двумя точками *a* и b, самый короткий маршрут между которыми не является маршрутом с наименьшим количеством поворотов.

Математическая индукция

Для доказательства пользуйтесь методом математической индукции.

1. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ для $n \geq 0$.
2. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4$ для $n \geq 0$.
3. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$.
4. Докажите, что $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ для $n \geq 1$, $a \neq 1$.
5. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ для $n \geq 0$.
6. Докажите, что сумма кубов первых *n* положительных целых чисел равна квадрату суммы этих целых чисел, т. е.,
   $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$$