
Travaux dirigés n° 4 : Convexification du risque

Stéphan Clémençon <stephan.clemencon@telecom-paristech.fr>

Ekhine Irurozki <irurozki@telecom-paris.fr>

Exercice 1. On se place dans le cadre de la classification binaire : on considère un descripteur aléatoire X de loi $\mathbf{P}_X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) muni de sa tribu des Boréliens, et un label aléatoire Y valant -1 ou 1.

La fonction de régression (probabilité a posteriori) est notée $\eta : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = x) \in [0,1]$. On suppose que $0 < \eta(X) < 1$ presque-sûrement.

Soit $\mathcal{G} := \left\{ g : \mathbb{R} \to \{-1,1\} \right\}$ l'ensemble des classifieurs adaptés à ce contexte. L'erreur de classification est définie comme l'application $L : g \in \mathcal{G} \mapsto \mathbb{P}\left(Y \neq g(X)\right) \in [0,1]$ et on note $L^* := \inf_{g \in \mathcal{G}} L(g)$.

On pose $\mathcal{F} := \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \right\}$ puis $\operatorname{sgn} : a \in \mathbb{R} \mapsto 2\,\mathbb{1}_{\{a \geq 0\}} - 1 \in \{-1,1\}$. Dans cet exercice on s'intéresse spécifiquement à l'ensemble de classifieurs $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} := \left\{ \operatorname{sgn} \circ f : f \in \mathcal{F} \right\}$.

Soit enfin $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable, strictement convexe, croissante, satisfaisant $\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$ et $\phi(0) = 1$. Pour tout $f \in \mathcal{F}$ (et donc tout classifieur de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$) on considère la version convexifiée du risque de classification :

$$A(f) := \mathbb{E}\left[\phi\left(-Y f(X) \right) \right].$$

1) Pour tout $u \in [0,1]$ on définit $h_u : a \in \mathbb{R} \mapsto u\,\phi(-a) + (1-u)\,\phi(a)$. Montrer que $\min_{f \in \mathcal{F}} A(f)$ est atteint en
$$f^* : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \arg\min_{a \in \mathbb{R}} h_{\eta(x)}(a). \tag{1}$$
Cette fonction est-elle bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$?

2) Dériver la fonction $h_{\eta(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque, puis vérifier que $\operatorname{sgn} \circ f^*$ coïncide avec classifieur de Bayes.

3) (Lemme de Zhang) On pose $\mathrm{H} : u \in]0,1[\mapsto \min_{a \in \mathbb{R}} h_u(a)$ et on suppose qu'il existe des constantes $s > 1$ et $c > 0$ telles que

$$\forall u \in]0,1[, \quad \left|\frac{1}{2} - u\right|^s \leq c^s(1 - \mathrm{H}(u)). \tag{2}$$

a) Soit $f \in \mathcal{F}$. Montrer que $\mathrm{L}(\mathrm{sgn} \circ f) - \mathrm{L}^* \leq 2 \left(\mathbb{E}\left[|\eta(\mathrm{X}) - 1/2|^s \, \mathbb{1}_{\{(2\eta(\mathrm{X})-1) f(\mathrm{X}) < 0\}}\right]\right)^{1/s}$.

b) On pose $\mathrm{A}^* := \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{A}(f)$. Déduire de la question précédente que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$,

$$\mathrm{L}(\mathrm{sgn} \circ f) - \mathrm{L}^* \leq 2\, c \; (\mathrm{A}(f) - \mathrm{A}^*)^{1/s}. \tag{3}$$

c) Que vaut H dans le cas où $\phi = \exp$? Pour quelles constantes s et c la condition (2) est-elle vérifiée ?

Solution.

1) Soit $f \in \mathrm{F}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(f) &:= \mathbb{E}[\phi(-\mathrm{Y}f(\mathrm{X}))] \\
&= \mathbb{E}[\phi(-f(\mathrm{X}))\mathbb{1}_{\{\mathrm{Y}=1\}} + \phi(f(\mathrm{X}))\mathbb{1}_{\{\mathrm{Y}=-1\}}] \\
&= \mathbb{E}[\phi(-f(\mathrm{X}))\eta(\mathrm{X}) + \phi(f(\mathrm{X}))(1 - \eta(\mathrm{X}))] \quad \text{(espérance totale)} \\
&= \mathbb{E}[h\eta(\mathrm{X})(f(\mathrm{X}))] = \int_{\mathbb{R}^d} h_{\eta(\mathrm{X})}(f(\mathrm{X}))\,\mathrm{P}_\mathrm{X}(dx)
\end{aligned}$$

Ainsi, par construction, si f^* est bien définie pour P_X-presque tout x, elle minimise effectivement le risque convexifié.

Vérifions maintenant cette condition. Pour cela, commençons par rappeler les hypothèses faites sur la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$:

(i) ϕ est dérivable,

(ii) ϕ est strictement convexe,

(iii) ϕ est croissante,

(iv) $\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$,

(v) $\phi(0) = 1$.

On pourra remarquer au passage que $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ est un exemple de fonction qui satisfait toutes ces hypothèses. On en déduit un certain nombre de propriétés supplémentaires.

(vi) ϕ est strictement croissante. **Preuve :** ϕ étant strictement convexe sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Elle y est en outre croissante. Par conséquent, si elle n'était pas strictement croissante, elle admettrait au moins un palier, ce qui contredirait la stricte convexité.

(vii) $\phi > 0$. **Preuve :** Conséquence immédiate des hypothèses (iv) et (vi).

(viii) $\phi'(0) > 0$. **Preuve :** ϕ étant (strictement) convexe et dérivable, elle vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ l'inégalité $\phi(x) > \phi(0) + \phi'(0)x$ (i.e., la courbe représentative de ϕ est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier de celle en 0). Comme ϕ est strictement croissante, sa dérivée est positive ou nulle. Par l'absurde, si on avait $\phi'(0) = 0$, alors pour tout $x < 0$, on obtiendrait $\phi(x) > \phi(0)$, ce qui contredirait la croissance de ϕ. On en conclut que $\phi'(0) > 0$.

(ix) $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$. **Preuve :** Comme précédemment, par (i) et (ii), on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ l'inégalité $\phi(x) > \phi(0) + \phi'(0)x$. En utilisant (viii), on obtient alors directement que $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$.

Prenons maintenant $u \in [0, 1]$ et étudions la fonction h_u.

— Cas où $u \in \{0, 1\}$. Les propriétés (vi) et (vii) impliquent que ϕ n'admet pas de minimum, mais seulement un infimum en $-\infty$. Il vient que lorsque $u \in \{0, 1\}$, les fonctions $h_0 : a \in \mathbb{R} \mapsto \phi(a)$ et $h_1 : a \in \mathbb{R} \mapsto \phi(-a)$ n'admettent pas de minimum. Ainsi, la fonction f^* n'est pas définie sur l'ensemble $\mathrm{X}_0 := \{x \in \mathbb{R}^d : \eta(x) \in \{0, 1\}\}$.

— Cas où $u \in]0, 1[$. Commençons par remarquer que

(x) $\lim_{a\to+\infty} h_u(a) = \lim_{a\to-\infty} h_u(a) = +\infty$ (d'après (iv) et (ix)),

(xi) $h_u(0) = 1$, (d'après (v))

(xii) h_u est continue car ϕ, donc h_u est dérivable. Les points précédents impliquent qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $a \in] - \infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[$, on a $h_u(a) > 1 = h_u(0)$. Le point (xii) dit alors que h_u est continue sur $[-\alpha, \alpha]$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes (théorème des valeurs extrêmes), i.e. elle y admet au moins un minimum m_u. Or, ϕ étant strictement convexe, h_u l'est aussi, et m_u est unique sur cet interval

2) Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Comme ϕ est dérivable (i), la fonction $h_{\eta(x)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ l'est aussi, et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$h'_{\eta(x)}(a) = -\eta(x)\phi'(-a) + (1 - \eta(x))\phi'(a).$$

Vérifions maintenant que la fonction $\mathrm{sgn} \circ f^*$ coïncide avec le classifieur de Bayes. Prenons pour cela $x \in \mathcal{X}_1$. Nous avons vu qu'alors $h_{\eta(x)}$ est dérivable, strictement convexe, admettant un minimum m en $f^*(x)$. Par conséquent, $h'_{\eta(x)}(a) = 0$ ssi $a = f^*(x)$. Or $h'_{\eta(x)}(a) = 0$ signifie

$$\frac{\eta(x)}{1-\eta(x)} = \frac{\phi'(a)}{\phi'(-a)}.$$

(comme on a pris $x \in \mathcal{X}_1$, on a bien $1-\eta(x) \neq 0$, puisque ϕ est strictement convexe et strictement croissante, sa dérivée est positive ou nulle et strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$, donc strictement positive). On a donc l'égalité des rapports

$$\frac{\eta(x)}{1-\eta(x)} = \frac{\phi'(f^*(x))}{\phi'(-f^*(x))}.$$

d'où

$$\eta(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow frac\eta(x)1-\eta(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{\phi'(f^*(x))}{\phi'(-f^*(x))} > 1 \Leftrightarrow \phi(\phi^*(x)) > \phi(-\phi^*(x)) \Leftrightarrow f^*(x) > 0.$$

(ϕ' strictement croissante car ϕ strictement convexe)

Finalement, on a bien

$$\mathrm{sgn} \circ f^*(x) := 2\mathbb{1}\{f^*(x) > 0\} - 1 = 2\mathbb{1}\{\eta(x) > \frac{1}{2}\} - 1,$$

pour P_X-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. La fonction $\mathrm{sgn} \circ f^*$ coïncide effectivement avec le classifieur de Bayes.

3) (a) Soit $f \in \mathcal{F}$. Nous avons vu à l'exercice 2 du TD 2 que l'on pouvait écrire dans le cas présent

$$L(\mathrm{sgn} \circ f) - L^* = 2\mathbb{E}\left[\left|\eta(X) - \frac{1}{2}\right|\left|\mathbb{1}\{f(X) \leq 0\} - \mathbb{1}\{\eta(X) \leq \frac{1}{2}\}\right|\right].$$

Or on peut remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|\mathbb{1}\{f(X) \leq 0\} - \mathbb{1}\{\eta(X) \leq \frac{1}{2}\}\right| = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathrm{sgn}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathrm{sgn}(2\eta(\mathbf{x}) - 1) \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \leq \mathbb{1}\{(2\eta(\mathbf{x})-1)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0\}$$

d' ou

$$\begin{aligned} L(\mathrm{sgn} \circ f) - L^* &\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\eta(X) - \frac{1}{2}\right| \mathbb{1}\{(2\eta(\mathbf{x}) - 1)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0\}\right] \\ &= 2\mathbb{E}\left[\left(\left|\eta(X) - \frac{1}{2}\right| \mathbb{1}\{(2\eta(\mathbf{x}) - 1)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0\}\right)^{\frac{s}{s}}\right] \end{aligned}$$

$$\leq \left(2\mathbb{E}\left(\left|\eta(X) - \frac{1}{2}\right|^s \mathbb{1}\{(2\eta(\mathbf{x}) - 1)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0\}\right)\right)^{\frac{1}{s}}$$

en utilisant l'inégalité de Jensen pour la fonction concave $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{\frac{1}{s}}$ qui, comme la fonction convexe intérieure $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^s$, peut être prolongée par continuité en 0 pour $s > 1$ (ainsi toutes les écritures ci-dessus ont bien du sens).

(b) Par hypothèse, il existe des réels $s > 1$ et $c > 0$ tels que pour tout $u \in]0, 1[$ on a

$$\left|\frac{1}{2} - u\right|^s \leq c^s(1 - H(u)).$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{X}_1$ on a

$$\left|\frac{1}{2} - u\right|^s \leq c^s(1 - H(\eta(x))).$$

avec $H(\eta(x)) := \min h_{\eta(x)}(a) = h_{\eta(x)}(f^*(x))$ d'après la question 1. Soit maintenant $f \in \mathcal{F}$. En repartant du résultat de la question 3.a, cette dernière inégalité

$$\begin{aligned} L(\operatorname{sgn} \circ \mathbf{f}) - L^* &\leq 2\mathbb{E}[c^s(1 - h_{\eta(X)}(\mathbf{f}^*(X)))\mathbb{1}\{(2\eta(X) - 1)\mathbf{f}(X) \leq 0\})]^{\frac{1}{s}} \\ &= 2c\mathbb{E}[(1 - h_{\eta(X)}(\mathbf{f}^*(X)))\mathbb{1}\{(2\eta(X) - 1)\mathbf{f}(X) \leq 0\})]^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

Puisque la fonction $x \in R_+^* \mapsto x^{\frac{1}{s}}$ prolongée par continuité en 0 est croissante pour $s > 1$ et puisque $c > 0$, il nous reste à vérifier que $A(\mathbf{f}) - A^*$ majore cette dernière espérance. Nous avons vu en question 1 que $A(\mathbf{f}) - A^* = \mathbb{E}[h_{\eta(X)}(\mathbf{f}(X)) - h_{\eta(X)}(\mathbf{f}^*(X))]$. Prenons maintenant $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_1$.

— Si $(2\eta(\mathbf{x}) - 1)\mathbf{f}(\mathbf{x}) > 0$, alors par définition de $\mathbf{f}^*$ on a

$$(1 - h_{\eta(\mathbf{x})}(\mathbf{f}^*(\mathbf{x})))\mathbb{1}\{(2\eta(\mathbf{x}) - 1)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0\} = 0 \leq h_{\eta(\mathbf{x})}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - h_{\eta(\mathbf{x})}(\mathbf{f}^*(\mathbf{x})).$$

— Si $(2\eta(\mathbf{x})-1)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$, alors

$$\begin{aligned}
h_{\eta(\mathbf{x})}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) &= \eta(\mathbf{x})\phi(-\mathbf{f}(\mathbf{x})) + (1-\eta(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \text{ (par définition de } h_{\eta(\mathbf{x})}\\
&> \phi(-\eta(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + (1-\eta(\mathbf{x}))\mathbf{f}(\mathbf{x})) \text{ } (\phi \text{ strictement convexe})\\
&= \phi(-\mathbf{f}(\mathbf{x})(2\eta(\mathbf{x})-1))\\
&\geq \phi(0) \text{ } (\phi \text{ croissante et } -\mathbf{f}(\mathbf{x})(2\eta(\mathbf{x})-1) \geq 0)\\
&= 1, \text{ par (v)}
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
h_{\eta(\mathbf{x})}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - h_{\eta(\mathbf{x})}(\mathbf{f}^*(\mathbf{x})) &\geq 1 - h_{\eta(\mathbf{x})}(\mathbf{f}^*(\mathbf{x}))\\
&= (1 - h_{\eta(\mathbf{x})}(\mathbf{f}^*(\mathbf{x})))\mathbb{1}\{(2\eta(\mathbf{x})-1)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0\}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que

$$h_{\eta(\mathrm{X})}(f(\mathrm{X})) - h_{\eta(\mathrm{X})}(f^*(\mathrm{X})) \geq (1 - h_{\eta(\mathbf{x})}(\mathbf{f}^*(\mathbf{x})))\mathbb{1}\{(2\eta(\mathbf{x})-1)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0\}$$

$\mathrm{P_X}$-p.s. et l'inégalité reste donc vraie en passant à l'espérance des deux côtés. In fine, nous avons bien montré que

$$\mathrm{L}(\mathrm{sgn} \circ f) - \mathrm{L}^* \leq 2c(\mathrm{A}(f) - \mathrm{A}^*)^{\frac{1}{s}}$$

(c) Soient maintenant $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ et $u \in]0,1[$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\phi(a) = ue^{-a} + (1-u)e^a$, qui atteint son minimum en $a_u \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u}{1-u} = \frac{e^{a_u}}{e^{-a_u}} = e^{2a_u} \quad \textit{i.e.}, \text{en} \quad a_u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u}{1-u}\right),$$

et

$$h_u(a_u) = u\sqrt{\frac{1-u}{u}} + (1-u)\sqrt{\frac{u}{1-u}} = 2\sqrt{u}\sqrt{1-u}$$

La fonction H s'écrit alors $\mathrm{H} : u \in]0,1[\mapsto 2\sqrt{u}\sqrt{1-u}$. Elle est dérivable, de dérivée $\mathrm{H}'(u) : u \in]0,1[\mapsto \frac{1-2u}{\sqrt{u(1-u)}}$ et $\mathrm{H}'(u) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{H}(u) = 1 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$ for $u \in]0,1[$.
On remarque alors que pour tout $u \in]0,1[$, on a $\sqrt{u}\sqrt{1-u} \leq \frac{1}{2}$, d'où

$$
\begin{aligned}
1-\mathrm{H}(u) &= 1-2\sqrt{u}\sqrt{1-u} = 2\left(\frac{1}{2}-\sqrt{u}\sqrt{1-u}\right)\\
&\geq 2\left(\frac{1}{2}-\sqrt{u}\sqrt{1-u}\right)\left(\frac{1}{2}+\sqrt{u}\sqrt{1-u}\right) \quad \text{(la dernière parenthèse est } \leq 1)\\
&\geq 2\left(\frac{1}{4}-u(1-u)\right) = 2\left(\frac{1}{4}+u^2-u\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{2}-u\right)^2
\end{aligned}
$$

qui donne finalement

$$
\left|\frac{1}{2}-u\right|^2 \leq \frac{1}{2}(1-\mathrm{H}(u)).
$$

Les constantes $s=2$ et $c=\sqrt{\frac{1}{2}}$ permettent donc de vérifier la condition (2).