Practica 2

González Borja, Miguel
Illescas Arizti, Rodrigo
Meyer Mañón, Juan Carlos
Rodríguez Orozco, Alejandro

28 / Abril / 2018

Introducción

A continuación los ejercicios de la práctica. Todos fueron realizados en Python 3.6 utilizando los paquetes *numpy* y *scipy.optimize*. También se incluye un cuaderno de IPython para cada ejercicio dentro de la carpeta Ejercicios, junto con los scripts *.py* para obtener los resultados. Cada uno de estos utiliza los siguientes imports:

```
In [1]: import sys
        sys.path.append('../')
        import latexStrings as ls
        import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        from math import *
        from IPython.display import Latex
        import odesolver
```

Se puede encontrar un repositorio del proyecto aqui.

Ejercicio 1

Tenemos el PVI:

$$y' = y + 2e^{-t} \qquad y(0) = 1 \tag{1}$$

Dado que el lado derecho de la EDO, $y + 2e^{-t}$ es de clase C^1 para todo $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y por lo tanto Lipschitz Continua en dicha region, sabemos que existe una solucion unica a este problema, que en general es dada por:

$$y(t) = (y_0 e^{-t_0} + e^{-2t_0} - e^{-2t})e^t \tag{2}$$

Ahora apliquemos el metodo de Euler Explicito con paso $h = 0.1$:

```
In [1]: f = lambda t, y : y+2*np.exp(-t)
        exact = lambda t, t0, y0 : np.exp(t)*(y0*np.exp(-t0)+np.exp(-2*t0)-np.exp(-2*t))
        I = (0, 1)
```

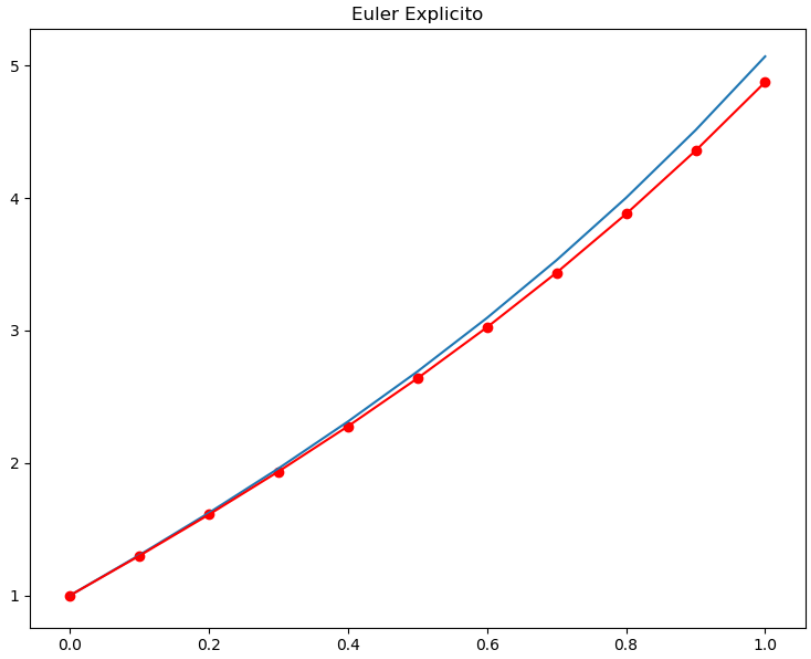
```
y0 = 1
y1 = exact(1,0,1)
T, W = odesolver.solve(f,y0,I,10,method="Explicit Euler")
globalError = abs(W[0,10]-y1)
localErrors = [abs(W[0,i+1] - exact(T[i+1], T[i], W[0,i])) for i in range(10)]
maxLocalError = max(localErrors)
```

$$w = \{1, 1.3, 1.6109675, 1.9358104, 2.2775551, 2.6393746, 3.0246182, 3.4368423, 3.8798436, 4.3576938, 4.8747771\}$$

Error Global: 0.1939071469339151

Maximo Error Local: 0.022668868433444622

Graficamente, observemos como se comporta la solucion exacta contra la aproximada:



Vemos que la solucion aproximada, auque sigue la direccion general, siempre va por debajo de la solucion verdadera. Esto se debe a que nuestra solucion general (2) es convexa en el intervalo donde estamos buscando la solucion, y por lo tanto el metodo subestima la pendiente en sus aproximaciones.

Ahora apliquemos el metodo de Euler Explicito con pasos $h = 0.1 \times 2^{-k}$ para $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ en el intervalo $[0, 1]$:

```
In [2]: res = []
        globalErrors=[]
```

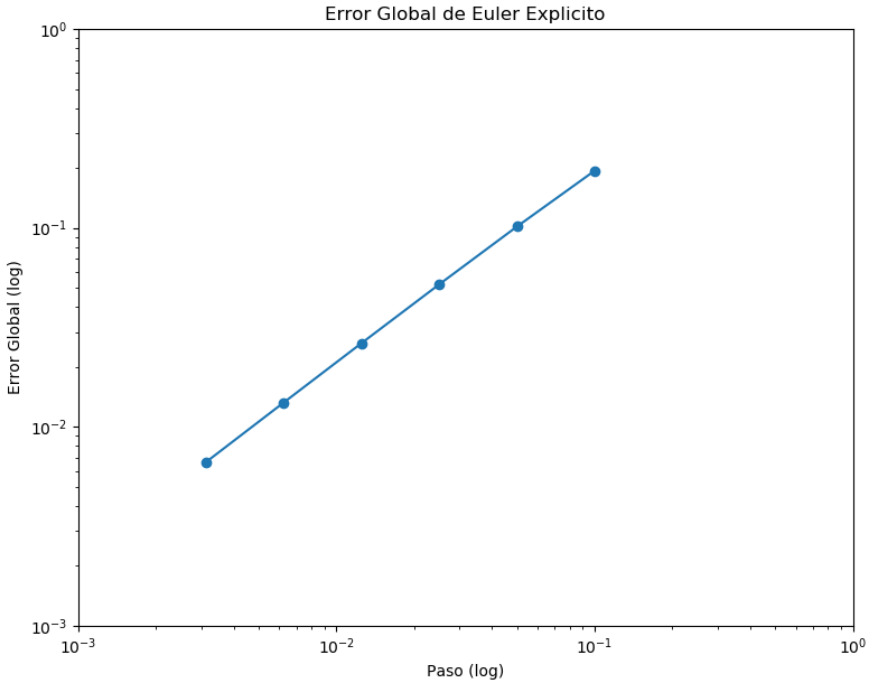
```
for k in range(6):
    h = 0.1*(2**-k)
    m = int((I[1]-I[0])/h)
    T, W = odesolver.solve(f, y0, I, m, method="Explicit Euler")
    g = abs(W[0,m]-y1)
    globalErrors.append(g)
    localErrors = [abs(W[0,i+1] - exact(T[i+1], T[i], W[0,i])) for i in range(m)]
    maxLocalError = max(localErrors)
    eoc = "NaN" if k==0 else log(g/prevg)/log(h/prevh)
    res.append([k, h, maxLocalError, eoc])
    prevh = h
    prevg = g
```

Observemos el comportamiento del error del metodo en relacion con el tamaño del paso:

k	Paso	Error Local Maximo	eoc
0	0.1	0.022668868433444622	NaN
1	0.05	0.005982387299206415	0.933587546963545
2	0.025	0.0015384740393056262	0.9656406382261543
3	0.0125	0.00039021932959482086	0.9825161515419355
4	0.00625	9.827082448321534e-05	0.9911799106800493
5	0.003125	2.4658225118656674e-05	0.9955701393945221

Sabemos que en teoria, los pasos de Euler Explicito tienen un error del orden de $O(h^2)$, mientras que el error global es de orden $O(h)$. En efecto, vemos que el error local maximo siempre cumple la cota deseada, pues en el peor de los casos, cuando $h = 0.1$, el error es aproximadamente $0.022 = 2.2h^2$, y conforme disminuye el tamaño de los pasos se sigue cumpliendo la cota.

Por otro lado, observamos que la razon de convergencia experimental (eoc) empieza siendo 0.93 pero rapidamente se aproxima a 1 conforme disminuye el tamaño de los pasos utilizados en su calculo. Esto nos lleva a la conclusion de que el error global en efecto es de orden 1, lo cual es aun mas evidente al observar el comportamiento del error en terminos del tamaño del paso, como se muestra en la siguiente grafica:



Podemos observar que, en escala logaritmica, el error global y el paso tienen una relacion lineal, que es lo esperado de un metodo con error global de orden $O(h)$.

Ejercicio 2

Tomando el PVI (1) y la solución general de la ecuación (2) del ejercicio anterior aplicaremos el método del Trapecio explícito con paso $h_1 = 0.1$. En el ejercicio 1 se argumentó la existencia y unicidad del PVI.

Calculemos el error global en el punto t = 1:

$$E_{Trapecio}(h_1) = |w_{10} - y(1)|$$

con w_{10} la aproximación del método en t=1.

```
In [1]: f = lambda t, y : y+2*np.exp(-t)
        exact = lambda t, t0, y0 : np.exp(t)*(y0*np.exp(-t0)+np.exp(-2*t0)-np.exp(-2*t))
        I = (0, 1)
        y0 = 1
        y1 = exact(1,0,1)
        T, W = odesolver.solve(f,y0,I,10,method="Explicit Trapezoid")
        globalError = abs(W[0,10]-y1)
```

$$E_{Trapecio}(h_1) = 0.0046374955401011775$$

Veamos lo que sucede cuando usamos el paso $h_2 := \frac{h_1}{2} = 0.05$ y calculemos el correspondiende error global en t=1:

$$E_{Trapecio}(h_2) = |w_{20} - y(1)|$$

```
In [2]: T, W = odesolver.solve(f,y0,I,20,method="Explicit Trapezoid")
        globalError = abs(W[0,20]-y1)
```

$$E_{Trapecio}(h_2) = 0.0012209778161409446$$

Ahora calcuemos el error global en t=1 usando el método Runge-Kutta 4 usando $h_1 = 0.1$:

$$E_{RK4}(h_1) = |w_{10} - y(1)|$$

```
In [3]: T, W = odesolver.solve(f,y0,I,10,method="RK4")
        globalError = abs(W[0,10]-y1)
```

$$E_{RK4}(h_1) = 2.334812125859287e - 06$$

	$E_{Trapecio}(h_1)$	$E_{Trapecio}(h_2)$	$E_{RK4}(h_1)$
Error (global en t = 1)	$4.63749554010 \times 10^{-3}$	$1.22097781614 \times 10^{-3}$	$2.3348121258 \times 10^{-6}$
Número de estados	20	40	40

En la tabla anterior notamos lo siguiente:

$$E_{RK4}(h_1) < E_{Trapecio}(h_2) < E_{Trapecio}(h_1)$$

Podemos observar que mediante el método del Trapecio explícito con paso h_2 obtenemos un error aproximadamente 4 veces menor que con paso h_1 ya que:

$$E_{Trapecio}(h_1) = O(h_1^2)$$

$$\Rightarrow E_{Trapecio}(h_2) = O(h_2^2) = O\left(\frac{h_1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow E_{Trapecio}(h_2) \approx \frac{1}{4}O(h_1^2) = \frac{1}{4}E_{Trapecio}(h_1)$$

El problema es que el método con h_2 necesita de 40 estados, el doble con respecto a usar h_1.

Por otro lado, el método Runge-Kutta 4 necesita de 40 estados al igual que el Trapecio explícito con h_2 pero observando los resultados de la tabla notamos que el error global E_{RK4} es menor a $E_{Trapecio}(h_2)$ por un factor de 10^3 aproximadamente.

Por lo tanto, para reducir el error, es preferible usar el método Runge-Kutta 4 ya que, por los mismos 40 estados requeridos, se obtiene un error menor al del Trapecio explícito con h_2.

Ejercicio 3

Tomemos el siguiente PVI:

$$\begin{matrix} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{matrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{matrix} \quad \text{para } t \in [0,1] \tag{3}$$

Con solución exacta $\overrightarrow{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ dada por :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-t}\sin(t) \\ y_2(t) &= e^{-t}\cos(t) \end{aligned} \tag{4}$$

Sea $\overrightarrow{W}_j$ el vector de aprximación correspondiente a la aplicación del método del Punto Medio Implícito con paso h_j. La entrada w_i es la aproximación en $t = 1$ de y_i para $i, j \in \{1, 2\}$. Definimos $E_{PMImpl}(h_j) = \|G_j\|_2$ el error global en $t = 1$ para $j \in \{1, 2\}$, con $\overrightarrow{G}_j := |W_j - \overrightarrow{y}(1)|$ cuya entrada $g_i = |w_1 - y_i(1)|$.

Aplicaremos el método para $h_1 = 0.1$ y $h_2 = 0.01$:

```
In [1]: f = lambda t, y : np.array([-y[0]+y[1], -y[0]-y[1]])
        soln = lambda t: np.array([np.exp(-T)*np.sin(T), np.exp(-T)*np.cos(T)])
        y0 = np.array([0,1])
        T,W = odesolver.solve(f, y0, (0,1), 10, method = 'Implicit Midpoint')
        globalError1=linear.norm(W[:,10]-soln(T)[:,10])
        dif=abs(W[:,10]-soln(T)[:,10])
```

$$h_1 = 0.1$$
$$\vec{W}_1 = \begin{pmatrix} 0.310408 \\ 0.198583 \end{pmatrix}$$
$$\vec{G}_1 = \begin{pmatrix} 0.000848 \\ 0.000183 \end{pmatrix}$$
$$E_{PMImpl}(h_1) = 0.0008678198131427709$$

```
In [2]: T,W = odesolver.solve(f, y0, (0,1), 100, method = 'Implicit Midpoint')
        globalError2=linear.norm(W[:,100]-soln(1)[:,100])
        dif=abs(W[:,100]-soln(T)[:,100])
```

$$h_2 = 0.01$$
$$\vec{W}_2 = \begin{pmatrix} 0.309568 \\ 0.198764 \end{pmatrix}$$
$$\vec{G}_2 = \begin{pmatrix} 0.000008 \\ 0.000002 \end{pmatrix}$$
$$E_{PMImpl}(h_2) = 8.671073839286167e-06$$

Sabemos que el método del Punto Medio Implícito con paso $\hat{h}$ tiene un error global de de orden 2. Luego, con $\hat{h} := h_1 = 0.1$ esperamos:

$$E_{PMImpl}(h_1) = O\left(h_1^2\right) = O\left(0.1^2\right)$$

Y con $\hat{h} := h_2 = 0.01$ esperamos:

$$E_{PMImpl}(h_2) = O\left(h_2^2\right) = O\left(0.01^2\right)$$

Observamos que:

$$E_{PMImpl}(h_1) = O\left(h_1^2\right)$$

$$h_2 = \frac{h_1}{10} \Rightarrow E_{PMImpl}(h_2) = O\left(\frac{h_1}{10}\right)^2 \Rightarrow E_{PMImpl}(h_2) \approx \frac{1}{100} O(h_1^2) = \frac{1}{100} E_{PMImpl}(h_1)$$

Esto implica que el error global del método para h_2 debe ser aproximadamente 100 veces menor al error global con el paso h_1. Comparemos esto con nuestros resultados:

$$E_{PMImpl}(h_2) = 8.671073839286167e-06 \approx 8.67819813142771e-06 = \frac{1}{100} E_{PMImpl}(h_1)$$

Y vemos que en efecto la reducción del error de h_1 a $h_2 = \frac{h_1}{10}$ es consistente con la teoria.

Ejercicio 4

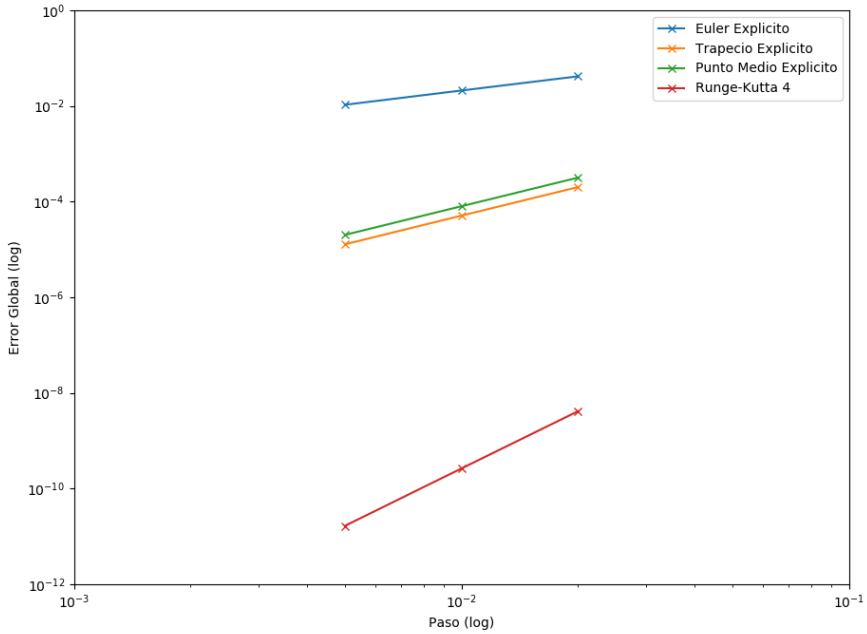
Ejercicio 5

Consideremos el PVI (1), cuya solucion (2) ha sido justificada previamente. Utilizemos los métodos:

- Euler Explícito
- Trapecio Explícito
- Punto Medio Explícito
- RK4

Con pasos $h \in \{1/50, 1/100, 1/200\}$ para calcular y comparar el error global en t=1. Obtenemos como resultados:

Paso	Euler Explicito	Trapecio Explicito	Punto Medio Implicito	Runge-Kutta 4
0.02	0.041788516341	0.000201525212813	0.00031786426130	4.138891895e-09
0.01	0.0210985428547	5.090600531e-05	8.0138760276e-05	2.61991317529e-10
0.005	0.010601086125	1.27925873654e-05	2.01192086386e-05	1.64810387559e-11



En la tabla podemos notar los Errores Globales en t=1 de cada método coinciden con los órdenes que vimos teóricamente ($O(h)$ para Euler, $O(h^2)$ para Trapecio y Punto Medio y $O(h^4)$ para RK4). También podemos notar que a pesar de tener el mismo orden, el método del trapecio fué más preciso que el método del punto medio para esta ODE.

La gráfica de nuevo confirma esto, pues vemos que la pendiente aproxiamda de las rectas de los errores coinside con sus errores teoricos.

Ejercicio 6

Tomemos el siguiente PVI:

$$\begin{aligned} y'' &= 10y'(1-y) \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 1 - \frac{\pi}{20} \end{aligned}$$

Para $t \in [0,1]$. Luego podemos reescribirlo como un sistema de ecuaciones de primer orden de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 10y_2(1-y_1) \end{aligned}$$

Con solución exacta dada por :

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \tfrac{\pi}{20}\tan(\tfrac{\pi}{4}t) \\ y(1) &= 1 - \tfrac{\pi}{20} \end{aligned} \tag{5}$$

Así, definimos f como

```
In [1]: f = lambda t, y : np.array([y[1], 10*y[1]*(1-y[0])])
        exact = lambda t : 1-pi/20*tan(pi/4*t)
```

Para aplicar Shooting Method, tomamos una aproximación inicial de $y_2 = 1$

$$\overrightarrow{y_0}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y utilizaremos el método de Runge Kutta 4 con 1000 pasos para aproximar la función en $y(1)$

```
In [2]: y0 = [1, 0]
        _, W = odesolver.solve(f, y0, (0,1), 1000,  method = 'rk4')
        ans = W[0][-1]
```

$$W_{1000} = 1.0$$

Veamos que tan acertada fue nuestra elección

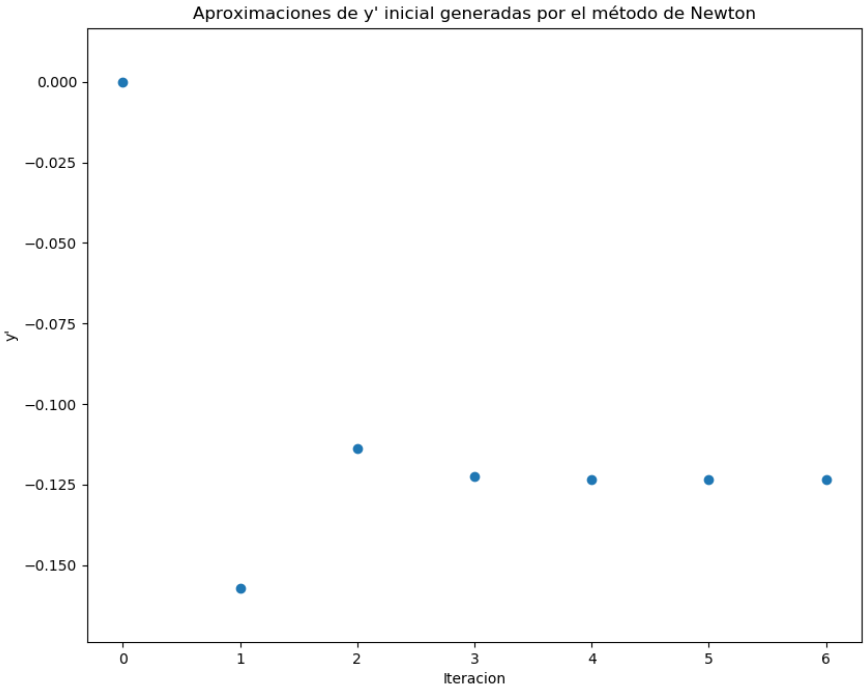
$$W_{1000} - y(1) = 0.15707963267948966$$

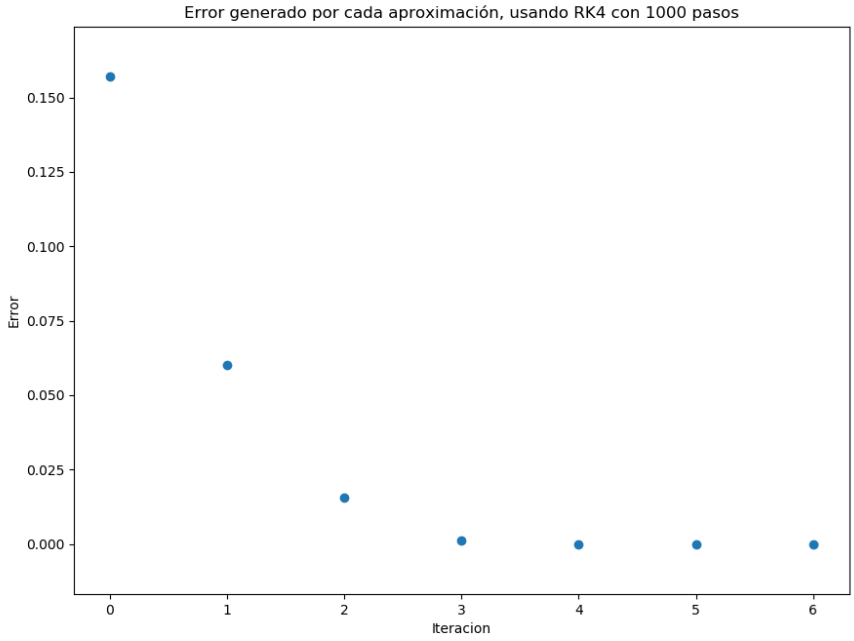
Parece ser que nuestra aproximación inicial sobreestimó la solución. Usaremos el método de Newton para seguir generando aproximaciones.

Definimos una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que toma una estimación inical de $y_2 = y'$ y regresa la distancia a la solución delimitada por el BVP. De este modo, $F(0) = 0.15707963267948966$ En *odesolver*, definimos la función "shooting" que toma una función, un valor inicial de y_1, una aproximación inicial de y_2 y la la solución del BVP y crea la función F, para después aplicar el método de Newton hasta encontrar una raíz, o bien, encontrar el valor inicial de y_2 que hace que se satisfaga el BVP. Esto nos da la siguiente tabla:

Iteracion	Pendiente	Error
1	-0.1571058117415369	0.06011796937074976
2	-0.1136129484483078	0.015605062058363206
3	-0.12257599202933653	0.0012971130776441298
4	-0.1233885530092585	3.0275526610390457e-05
5	-0.1233700198445987	5.7558321331363516e-08
6	-0.12337005501206845	2.5480728638171968e-12

Observamos que con esta aproximación inicial se satisface el BVP con un error menor a 1e-10. Ademas, podemos observar el comportamiento del error y las pendientes aproximadas en las siguientes graficas:


Aproximaciones de y' inicial generadas por el método de Newton
0.000
−0.025
−0.050
−0.075
−0.100
−0.125
−0.150
y'
0
1
2
3
4
5
6
Iteracion


Error generado por cada aproximación, usando RK4 con 1000 pasos
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
Error
0
1
2
3
4
5
6
Iteracion