Primer Proyecto: Método de Región de Confianza

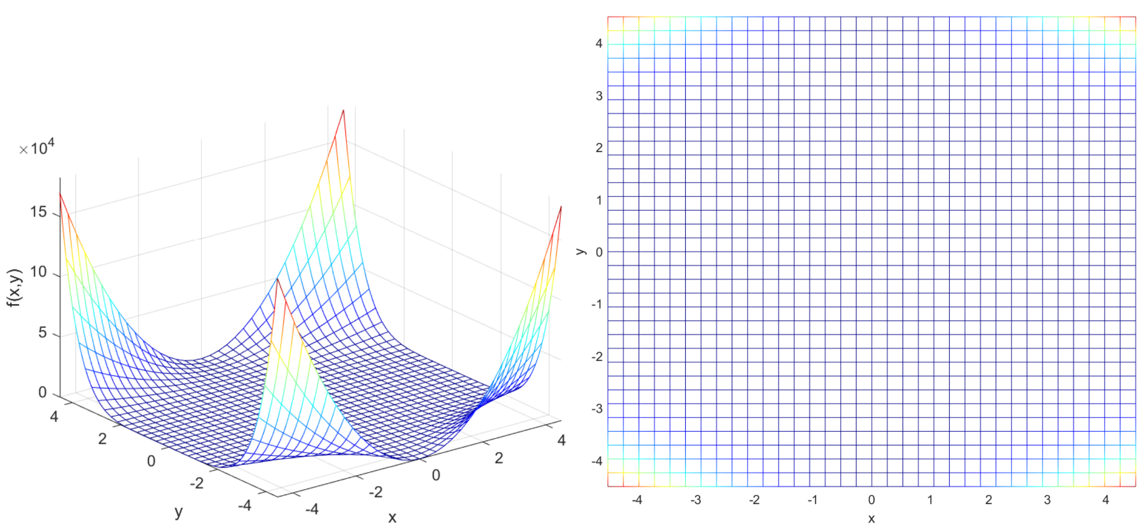
Miguel González Borja	Andrea Marín Alarcón	Mónica Elizabeth Alba González
155766	158999	160502

13 de octubre de 2019

En este proyecto se implementó el método de región de confianza con 2 variantes para la solución del sub problema de región de confianza. La primera variante utiliza el punto de Cauchy, que busca minimizar el modelo cuadrático generado en cada punto en la dirección del gradiente. La segunda variante utilizó el punto *dogleg*, que consta de una combinación convexa de el punto de Cauchy del modelo y su mínimo global dado por el punto de Newton.
El código fue escrito en MATLAB, y puede ser encontrado en un repositorio de GitHub aquí. Para probar los métodos, se utilizó la función de Beale (Vea la Fig. 1), definida por:

$$f(x,y) = (1.5 - x + xy)^2 + (2.25 - x + xy^2)^2 + (2.625 - x + xy^3)^2$$

Esta función tiene un mínimo local y global en $\vec{x_*} = (3, 0.5)^T$, con $f(x_*) = 0$.



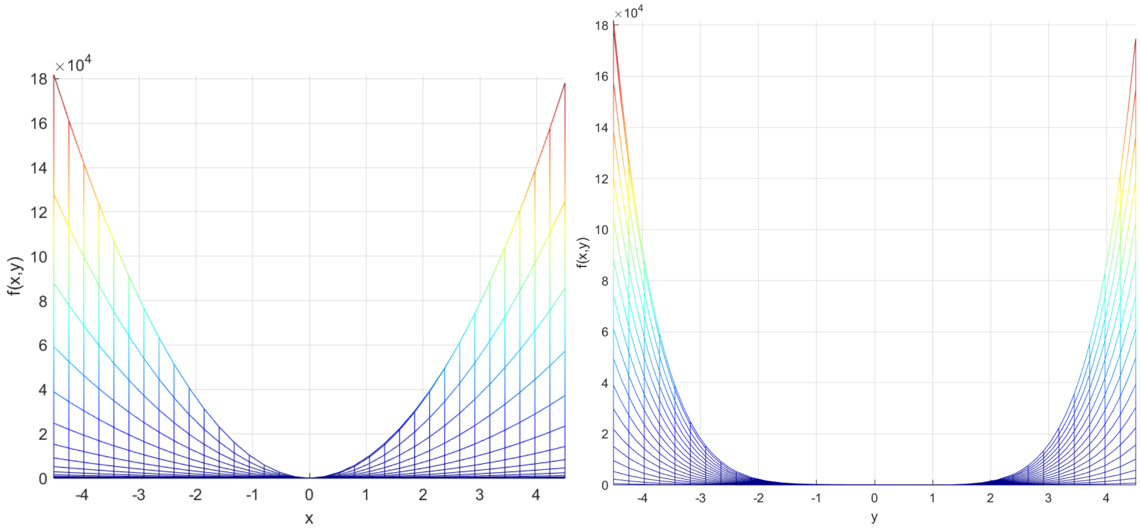


Figura 1: Gráfica de la función de Beale en $[-4.5, 4.5] \times [4.5, 4.5]$

Ejercicio 1

Se utilizó como punto inicial $\vec{x_0} = (2, 0)^T$, donde el Hessiano tiene un eigenvalor mínimo dado por $\lambda_{min} = 2.6148$. Una vez que $\lambda_{min} > 0$ el Hessiano es definido positivo.
El radio de confianza está dado por:

$$\Delta = \frac{\|P_N\| + \|P_C\|}{2} = 0.5081$$

Con esto, $||P_C||_2 < \Delta < ||P_N||_2$, por lo que el punto *dogleg* es distinto a ambos, pues se encuentra en el segmento de recta que va de $x_0 + P_C$ a $x_0 + P_N$ y es tal que $||P_{DL}||_2 = \Delta$
Dada esta Δ la calidad de nuestra aproximación es:

$$\frac{f(x_0 + P_{DL}) - f(x_0)}{m_c(x_0 + P_{DL}) - m_c(x_0)} = 0.7382$$

por lo que en esta región el modelo cuadrático es una buena aproximación de la función original.

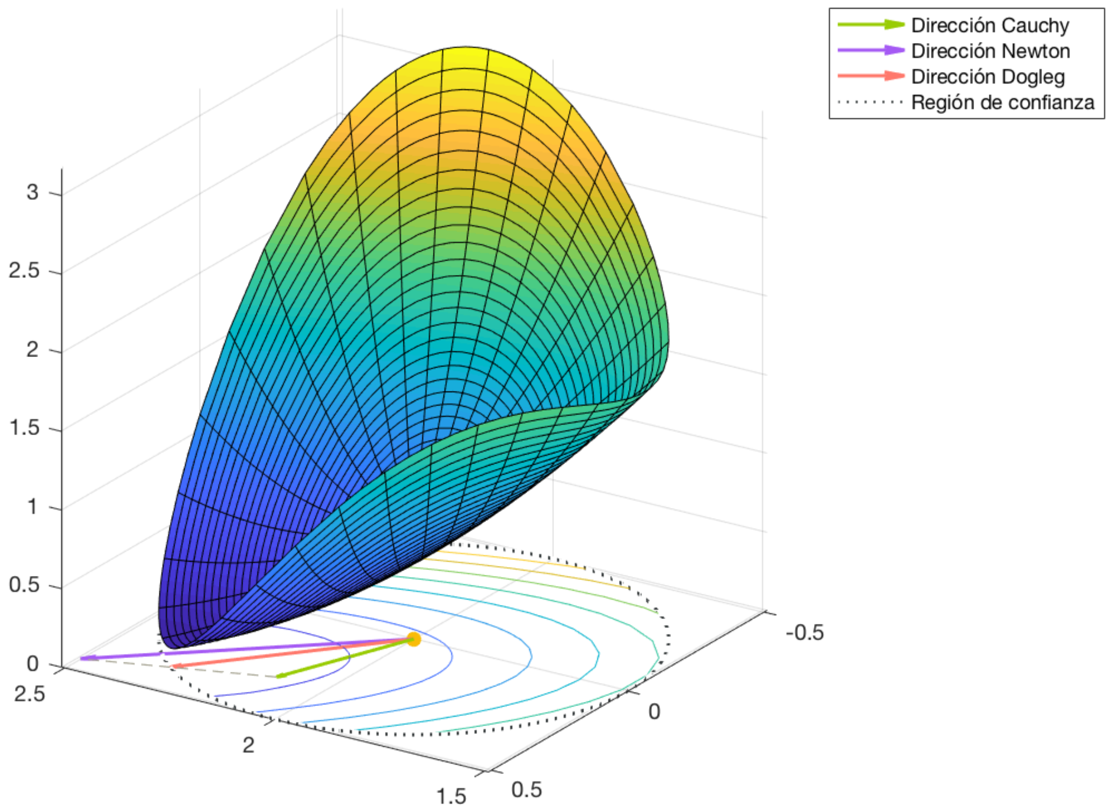


Figura 2: Modelo Cuadrático en $\vec{x} = (2,0)^T$ con radio de confianza $\Delta = 0.5081$

Ejercicio 2

En este ejercicio se ejecutaron los métodos con el punto inicial $x_0 = (-3,-3)$. En este punto el eigenvalor mínimo del Hessiano es

$$\lambda_{min} = -2.0549e + 03$$

por lo que no es (semi)positivo definido. Además, tomando en cuenta que la función de Beale no es convexa, tenemos que

$$||x_0 - x_*||_2 = ||(-3,-3) - (3,0.5)||_2 = 6.94622 > \Delta_{max}$$

Podemos observar en la Tabla 1 que ambos métodos convergen, pero que si se utiliza el método de *dogleg* se llega al mínimo de la función en menos iteraciones y con un menor error de aproximación.
Con estos datos, podemos garantizar que para la función de Beale, la mejor aproximación a la solución óptima es el punto DogLeg.

Método	Iteraciones	Convergió	Error de aproximación
Punto de Cauchy	57	sí	6.7164e-06
Punto DogLeg	15	sí	1.4180e-08

Tabla 1: Resultados del método de Región de Confianza

Ejercicio 3

En la Figura 3 se puede observar la trayectoria tomada utilizando *DogLeg* y el punto de Cauchy. Vemos que, de un valor inicial en la función de Beale de $8,152.2$. Ambos métodos logran tener un valor menor a 50 (indicado por la última curva de nivel) en 7 iteraciones para Cauchy y 6 iteraciones para *DogLeg*. Además, vemos que la trayectoria de *DogLeg* inicia disminuyendo en x, pues el punto de Newton generado por el modelo inicial se encuentra en esa dirección.

En las Figuras 4a y 4b se puede observar un acercamiento de las trayectorias, con curvas de nivel $f(x,y) \in \{1,2,\ldots,10\}$. Vemos que ambos métodos logran tener un valor menor a 1 en la iteración 11 para Cauchy y 10 para *DogLeg*. Después de esto, el punto de Cauchy disminuye su avance, tardando 46 iteraciones para converger al punto óptimo, mientras que *DogLeg* logra llegar en tan sólo 5 iteraciones más.

Con esto, podemos comprobar el resultado del ejercicio anterior, y asegurar que el mejor aproximador, en cuanto a tiempo de ejecución y margen de error, se consigue con el punto *DogLeg*.

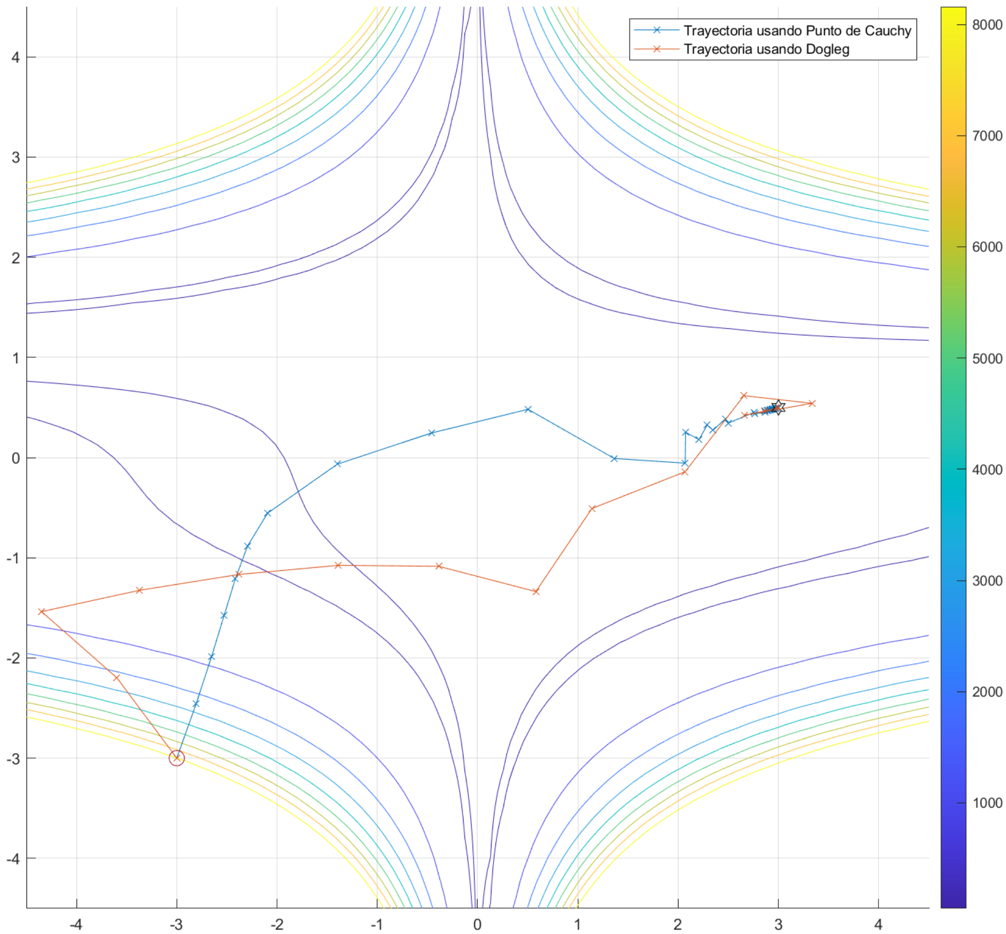
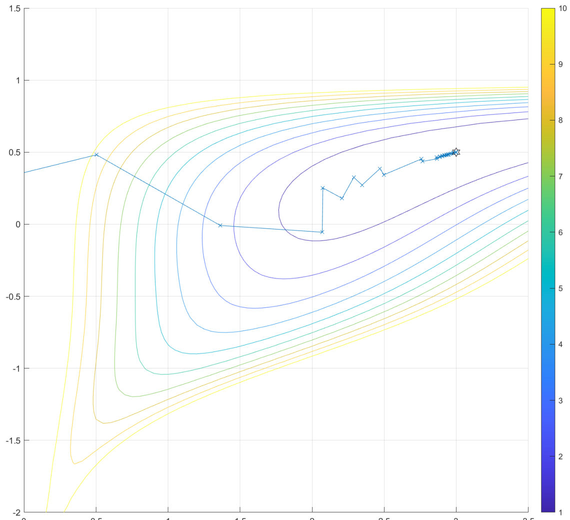
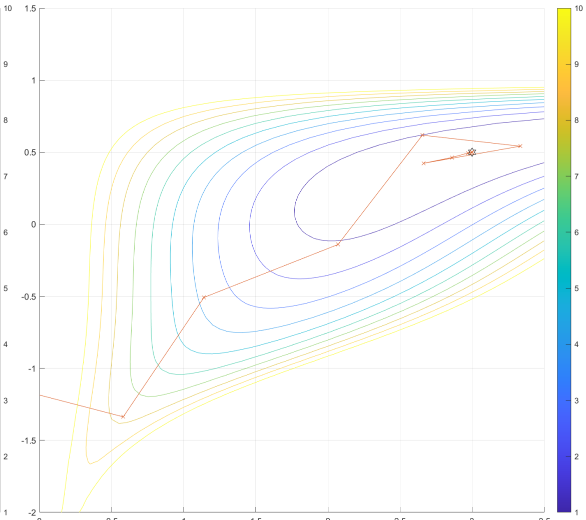


Figura 3: Trayectorias del método de región de confianza utilizando Punto de Cauchy y Dogleg



(a) Utilizando Punto de Cauchy



(b) Utilizando Dogleg

Figura 4: Acercamiento de las trayectorias del método de región de confianza