Grothendieck topologies and applications

Topologies de Grothendieck et applications

H. Hamraoui, K. Azi

University Hassan II
Faculty of Sciences
Department of Mathematics and Informatics
Km 8 El Jadida road B.P 5366
Maarif Casablanca, Morocco
E-mail : hindahamraoui@yahoo.fr ; azi_macquart@hotmail.com

Keywords : presheaves ; sheaves ; Grothendieck topology ; topos ; k-schemes ; Zariski topology ; Etale topology ; Nisnevich topology.

Mots-clefs : préfaisceaux ; faisceaux ; topologie de Grothendieck ; k-schémas, topologie de Zariski ; topologie Etale ; topologie de Nisnevich.

Abstract : Following [3], we define Grothendieck topologies on a small category and describe sheaves for these Grothendieck topologies. This generalises, in a natural way theory of sheaves on a topological space [2].

Résumé : Suivant [3], sur toute petite catégorie on définit des topologies dites de Grothendieck et on décrit les faisceaux correspondants. Ceci généralise, de manière naturelle le cas des faisceaux sur un espace topologique [2].

1 Introduction

Etant donné un espace topologique X on a étudié dans [2] dont le but de définir la cohomologie, la catégorie des pré-faisceaux d'ensembles ou de A-modules, A un anneau commutatif unitaire sur X, et sa sous-catégorie pleine de faisceaux en construisant le faisceau associé à un pré-faisceau. Nous rappellerons, brièvement, cette étude dans la section 2.

Dans la section 3, suivant [3], on définit une topologie, dite de Grothendieck, sur une catégorie C, moyennant les cribles couvrants, de telles catégories sont appelées des sites. On s'intéresse ensuite à la catégorie des préfaisceaux et on définit sa sous-catégorie pleine de faisceaux appelée topos, grâce au lemme de Yoneda.

La section 4, est consacrée à l'étude de cinq exemples : En considérant la catégorie $Ouv(X)$ où X est un espace topologique, nous définissons une topologie de Grothendieck et ses topos de manière à retrouver les résultats de la section 2. Dans le deuxième exemple, on considère la catégorie BG des G_ensembles où G est un groupe, nous définissons une topologie de Grothendieck et caractérisons ses topos. Dans les trois derniers exemples, on travaille avec la catégorie des k-shémas où k est un corps, nous définissons trois topologies de Grothendieck, dites de Zariski, étale, Nisnevish et étudions les topos correspondants.

Les auteurs voudraient exprimer leurs vifs remerciements aux professeurs Joël Riou, Pere Pascual, Pierre Vogel, Mohamed Rachid Hilali, Abdellatif Rochdi et Bouchta Hmimina pour les discussions enrichissantes ainsi que le service d'Ambassade de France à Rabat chargé de la coopération universitaire.

2 Faisceau sur un espace topologique

Définition 1. Soit X un espace topologique. Un préfaisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur X est la donnée de :
1) Pour tout ouvert U de X d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$.
2) Pour tout ouvert $V \subset U$ d'une application dite de restriction $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho_{U|V}} \mathcal{F}(V)$ vérifiant :
i) $\rho_{U|U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$.
ii) Pour toutes inclusions d'ouverts $W \subset V \subset U$ alors $\rho_{V|W} \circ \rho_{U|V} = \rho_{U|W}$.

Exemple 2. $\mathcal{F}(U) = C(U, \mathbb{R}) = \{\textit{fonctions continues sur } U\ \}$.

Définition 3. Un préfaisceau $\mathcal{F}$ est un faisceau si et seulement si : Pour toute famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$ de X on a une bijection :
$\mathcal{F}(_{i\in I}U_i) \longrightarrow \left\{(s_i)_{i\in I} \text{ tel que } s_i \in \mathcal{F}(U_i)\ \forall i,j \in I \quad s_{i|U_i \cap U_j} = s_{j|U_i \cap U_j}\right\}$
$s \longmapsto s_{|U_i}$

Exemple 4. *Le préfaisceau des fonctions continues est un faisceau.*

Tout préfaisceau n'est pas un faisceau, dans ce cas on impose certaines conditions supplémentaires pour forcer en quelque sorte le préfaisceau à devenir un faisceau, d'où l'intérêt de la notion de faisceau associé à un préfaisceau.

Proposition 5. *Etant donné un préfaisceau $\mathcal{F}$ il existe un faisceau $\mathcal{F}^+$et un morphisme $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$vérifiant : Pour tout morphisme $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ où $\mathcal{G}$ est un faisceau il existe un unique morphisme $\psi : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ tel que $\varphi = \psi \circ \theta$. Le couple $(\mathcal{F}^+, \theta)$ est unique à isomorphisme près.*

Preuve 6. (*Voir* [1])

Définition 7. Le couple $(\mathcal{F}^+, \theta)$ dont on a montré l'existence dans la proposition précédente est appelé faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{F}$.

3 Topologie de Grothendieck

3.1 Cribles

Le long de cette partie $\mathcal{C}$ désigne une petite catégorie (c'est à dire la classe des objets de $\mathcal{C}$ est un ensemble). On notera $PR\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$: Les objets de $PR\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ sont les préfaisceaux d'ensembles et pour tous préfaisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ un morphisme de préfaisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ un morphisme de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$ est une transformation naturelle de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$.

Exemple 8. *Pour tout objet X de $\mathcal{C}$ le foncteur $h_X := Hom_{\mathcal{C}}(-, X)$ est un préfaisceau appelé préfaisceau représenté par X.*

On peut munir la catégorie $PR\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ d'une relation d'ordre de la manière suivante : pour tous préfaisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{C}$ on dira que $\mathcal{E}$ est un sous-préfaisceau de $\mathcal{F}$ si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}(X)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(X)$.

Définition 9. Un préfaisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}$ est dit représentable s'il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que le foncteur $h_X := Hom_{\mathcal{C}}(-, X)$ soit isomorphe à $\mathcal{F}$.

Lemme 10. (*de Yoneda*))(*Voir* [4])
Pour tout $X \in \mathcal{C}$ et tout préfaisceau $\mathcal{F} \in PR\mathcal{F}_c$ le morphisme suivant est une bijection :

$$\begin{array}{ccc} Hom_{PR\mathcal{F}}(h_X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(X) \\ \phi & \longmapsto & \phi_X(id_X) \end{array}$$

Définition 11. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Le foncteur $\mathcal{F}$ est dit fidèle (resp. plein) si l'application :
$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ est injective (resp. surjective). Un foncteur qui est à la fois fidèle et plein est dit pleinement fidèle.

Il découle du lemme de Yoneda que le foncteur $\mathcal{C} \longrightarrow PR\mathcal{F}$ qui à un objet X associe le préfaisceau $Hom_{\mathcal{C}}(-,X)$ est pleinement fidèle.

Définition 12. Un crible $\mathcal{S}$ sur X est un sous-préfaisceau du préfaisceau représenté par X.

Proposition 13. *Se donner un crible de X est encore équivalent à la donnée d'une classe $\mathcal{S}'$de morphismes de la catégorie $\mathcal{C}$ vérifiant :*
i) Chaque flèche f de $\mathcal{S}'$ a pour but X.
ii) Pour toute flèche f de $\mathcal{S}'$ et toute flèche g de $\mathcal{C}$ la composée $f \circ g$ est un élément de $\mathcal{S}'$.

Exemple 14. *i) Pour tout objet $X \in \mathcal{C}$ le préfaisceau $Hom(-,X)$ est un crible appelé crible trivial.*
ii) On considère la catégorie $Ouv(X)$ dont les objets sont les sous-ensembles ouverts de X et dont les morphismes sont les inclusions d'ouverts.
Dans $Ouv(X)$ un crible $\mathcal{S}$ d'un ouvert $V \subset U$ est défini par :
$\mathcal{S}(V) \subset Hom_{Ouv(X)}(V,U) = \{$*l'inclusion de V dans U*$\}$
$\mathcal{S}(V)$ *est donc réduit à un élément.*

Définition 15. Soit $\left(U_i \xrightarrow{f_i} X\right)_{i\in I}$ une famille de morphismes de $\mathcal{C}$. Le crible engendré par les f_i est l'ensemble des flèches :
$\langle f_i \rangle = \{f : Y \longrightarrow X \ / \ \exists\ i \in I \quad h_i : Y \longrightarrow U_i$ où $f = f_i \circ h_i\}$

Définition 16. Soit $\mathcal{S}$ un crible de X et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Le produit fibré $\mathcal{S} \times_{Hom(-,X)} Hom(-,Y)$ existe dans la catégorie des préfaisceaux $PRF_{\mathcal{C}}$ (Voir [3]) , on le note $\mathcal{S}^f$. $\mathcal{S}^f \subset Hom(-,Y)$ est un crible de Y et il est défini pour tout objet Z de la catégorie $\mathcal{C}$:
$\mathcal{S}^f(Z) = \{g : Z \longrightarrow Y$ tel que $f \circ g \in \mathcal{S}(Z)\}$

Proposition 17. *Si le morphisme $f : Y \longrightarrow X$ de la définition précédente appartient à $\mathcal{S}$ alors $\mathcal{S}^f = Hom(-,Y)$.*

Preuve 18. (*Voir* [3])

Proposition 19. *Supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ admet des produits fibrés. Soient* $\left(U_i \xrightarrow{f_i} X\right)_{i\in I}$ *une famille de morphismes de $\mathcal{C}$ et Y un objet de C, $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme et $\mathcal{S}$ un crible de X. Si* $S = \langle U_i \longrightarrow X,\ i \in I\rangle$ *alors* $S^f = \langle U_i \times_X Y \longrightarrow Y,\ i \in I\rangle$.

Preuve 20. (*Voir* [3])

3.2 Sites

3.2.1 Topologies

Définition 21. Une topologie de Grothendieck T sur la catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un ensemble $T(X)$ de cribles de X vérifiants les axiomes suivants :
T_1) Stabilité par changement de base : Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, tout crible $\mathcal{S} \in T(X)$ et tout morphisme $f : Y \longrightarrow X$ où $Y \in \mathcal{C}$ le crible $\mathcal{S}^f \in T(Y)$.
T_2) Caractère local : Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont deux cribles de X, si $\mathcal{S} \in T(X)$ et si pour tout $Y \in \mathcal{C}$ et tout morphisme $Hom(-,Y) \longrightarrow \mathcal{S}$ le crible $\mathcal{S}'^f \in T(Y)$ alors $\mathcal{S}' \in T(X)$.
T_3) L'identité : Pour tout objet X de $\mathcal{C}$ le crible trivial $Hom(-,X) \in T(X)$. Les cribles appartenant à $T(X)$ sont dits $T-$couvrants. Toute catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une topologie de Grothendieck T est appelée site, on le note $(\mathcal{C}, T)$. La catégorie $\mathcal{C}$ est appelée la catégorie sous-jacente au site.
La relation d'inclusion des préfaisceaux induit une relation d'ordre sur les cribles et par suite sur les cribles couvrants. On dira alors pour tous cribles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ de X que $\mathcal{S}$ est plus fin que $\mathcal{S}'$ si $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.

Définition 22. Soit $(\mathcal{C}, T)$ un site et X un objet de $\mathcal{C}$. Une famille de morphismes $(f_i : U_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ de $\mathcal{C}$ est dite T-couvrante si le crible engendré par la famille $(f_i)_{i\in I}$ est un crible T-couvrant de X.

Lemme 23. *Si $(\mathcal{C}, T)$ est un site, alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tous cribles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ de X les assertions suivantes sont vérifiées :*

i) Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont $T-$couvrants alors $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$ est $T-$couvrant..
ii) Si $\mathcal{S}$ est $T-$couvrant et $\mathcal{S}$ plus fin que $\mathcal{S}'$ alors $\mathcal{S}'$est $T-$couvrant
iii) L'ensemble ordonné $T(X)$ est filtrant.

Preuve 24. *i) Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{S}$. Il découle de la remarque 1.1 que le crible $(\mathcal{S} \cap \mathcal{S}')^f = Hom(-, Y)$ est $T-$couvrant pour Y d'après T_3. On déduit de T_2 que $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' \in T(X)$.*
ii) Similairement à i) soit $f : Y \longrightarrow X$ une flèche de $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ est plus fin que $\mathcal{S}'$on a à nouveau $(\mathcal{S}')^f = Hom(-, Y)$ et on conclut grâce à T_2.
iii) Elle découle du fait que $T(X)$ est non vide d'après T_3 et des assertions i) et ii).

Définition 25. Si T_1 et T_2 sont deux topologies sur la catégorie $\mathcal{C}$ on dira que T_1 est plus fine que T_2 si pour tout objet X de $\mathcal{C}$ le crible $T_1(X) \subset T_2(X)$.

Exemple 26. *La topologie définie sur $\mathcal{C}$ par $T(X) = Hom(-, X)$ est la moins fine de toutes les topologies sur $\mathcal{C}$, on l'appelle la topologie grossière.*
La topologie définie sur $\mathcal{C}$ par $T(X) = \{Tous\ les\ cribles\ de\ X\}$ est la plus fine de toutes les topologies sur $\mathcal{C}$, on l'appelle la topologie discrète.

Proposition 27. *Si $(T_i)_{i \in I}$ est une famille de topologies sur $\mathcal{C}$ alors la topologie T définie par $T(X) = \bigcap_{i \in I} T_i(X)$ est :*
i) une topologie
ii) la borne inférieure des T_i pour l'ordre défini sur les topologies.

Preuve 28. (*Voir* [3])

La famille $(T_i)_{i \in I}$ admet aussi une borne supérieure, c'est la topologie intersection des topologies plus fine que chacune des T_i.

3.3 Pré-topologies

Définition 29. On appelle pré-topologie de Grothendieck sur $\mathcal{C}$ la donnée de : $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$, $Cov(X)$ est un ensemble de famille de morphismes

$(f_i : U_i \longrightarrow X)_{i \in I}$. Cette famille vérifie les propriétés suivantes :
1) L'existence du produit fibré : Pour tout $(f_i : U_i \longrightarrow X)_{i\in I} \in Cov(X)$ les morphismes f_i sont quadrables, c'est à dire $\forall Y \longrightarrow X$ dans la catégorie $\mathcal{C}$ le produit fibré $U_i \times_X Y$ existe.
2) La stabilité par changement de base : $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ $\forall$ $(f_i : U_i \longrightarrow X)_{i\in I} \in Cov(X)$ $\forall Y \longrightarrow X$ dans la catégorie $\mathcal{C}$ alors $(f_i : U_i \times_X Y \longrightarrow Y)_{i\in I} \in Cov(Y)$.
3) La stabilité par composition : $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ $\forall$ $(f_i : U_i \longrightarrow X)_{i\in I} \in Cov(X)$ $\forall i \in I$ considérons $(g_{j_i} : V_{j_i} \longrightarrow U_i)_{j_i \in J_i} \in Cov(U_i)$. Alors la famille $(f_i \circ g_{j_i} : V_{j_i} \longrightarrow X)_{j_i\in J_i, i\in I} \in Cov(X)$.
4) L'identité : $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ on a $(id_X : X \longrightarrow X) \in Cov(X)$.

Définition 30. Soient Cov une prétopologie sur $\mathcal{C}$, X un objet de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ un crible de X. On dira que $\mathcal{S}$ est élémentaire s'il existe un recouvrement $Cov(X) = (f_i : U_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ tel que $\mathcal{S} = \langle U_i \longrightarrow X, i \in I\rangle$.

3.4 Topos

Définition 31. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck et $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un préfaisceau séparé (resp. est un faisceau) d'ensembles sur le site $(\mathcal{C}, T)$ si pout tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout crible couvrant $\mathcal{S}$ de X l'application :
$Hom_{PR\mathcal{F}_\mathcal{C}}(Hom_\mathcal{C}(-, X), \mathcal{F}) \longrightarrow Hom_{PR\mathcal{F}_\mathcal{C}}(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ est injective (resp. bijective). On note $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ la sous-catégorie de $PR\mathcal{F}_\mathcal{C}$ formés des faisceaux sur $\mathcal{C}$ et on l'appelle topos associé au site $(\mathcal{C}, T)$.

Proposition 32. *Si la topologie sur $\mathcal{C}$ est engendrée par une pré-topologie définie par une famille de recouvrement $(f_i : U_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ pour chaque objet X alors un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ est un faisceau si et seulement si :* $\mathcal{F}(X) \tilde{\longrightarrow} \left\{(s_i)_{i\in I} \;/\; s_i \in \mathcal{F}(U_i)\ \forall i, j \in I \quad s_{i|U_{ij}} = s \text{ où } U_{ij} = U_i \times_X U_j\right\}$ *est un isomorphisme.*

Preuve 33. (*Voir* [3])

4 Exemples de sites

4.1 Le site $Ouv(X)$

4.1.1 La pré-topologie

Proposition 34. *Pour tout espace topologique X on obtient un site en équipant la catégorie $Ouv(X)$ de la famille de recouvrements $(U_i \longrightarrow U)_{i\in I} \in Cov(U)$ si et seulement si $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.*

Preuve 35. *1) L'existence du produit fibré : Soit $U, \{U_i\}_{i\in I} \in Ouv(X)$ tel que $f : U_i \longrightarrow U$ et $g : U_j \longrightarrow U$.*
$U_i \times_U U_j = \{(x, y) \in U_i \times U_j \ \ / f(x) = g(y)\}$
$= \{(x, y) \in U_i \times U_j \ \ / x = y\} = U_i \cap U_j \in Ouv(X)$.
De plus, $\forall\ W \in Ouv(X)$ et $W \xrightarrow{a} U_i$ et $W \xrightarrow{b} U_j$ tel que $f \circ a = g \circ b$
Alors $\exists!\ u : W \longrightarrow U_i \cap U_j$ et on a pour tout $w \in W$:
$(f \circ a)\ (w) = (g \circ b)\,(w) \Longrightarrow a(w) = b(w)$.
Comme $a(w) \in U$ et $b(w) \in V$ alors $(a(w), b(w)) = u(w)$.
2) La stabilité par changement de base : Soit $(U_i \longrightarrow U)_{i\in I} \in Cov(U)$.
Alors $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i \Longrightarrow V \cap U = V \cap \left(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\right)$.
Comme $V \subset U$ on a $V = V \cap \left(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\right)$
D'où $V = \bigcup\limits_{i\in I} (V \cap U_i)$. Ainsi $(V \cap U_i \longrightarrow V)_{i\in I} \in Cov(V)$.
3) La stabilité par composition : $(g_{j_i} : V_{j_i} \longrightarrow U_i)_{i\in I, j_i \in J_i} \in Cov(U_i)$
$\Longleftrightarrow\ U_i = \bigcup\limits_{i\in I, j_i\in J_i} V_{j_i}.\ \Longleftrightarrow\ U = \bigcup\limits_{i\in I}\left(\bigcup\limits_{i\in I, j_i\in J_i} V_{j_i}\right) = \bigcup\limits_{i\in I, j_i\in J_i} V_{j_i}$.
D'où $(f_i \circ g_{j_i} : V_{j_i} \longrightarrow U) \in Cov(U)$.
4) L'identité : Il est évident que $\forall U \in Ouv(X)\ \ id_U \in Cov(U)$.
Conclusion : $(Ouv(X), Cov(U))_{U\in Ouv(X)}$ est un site. C'est ainsi que la notion de site sur une catégorie généralise la notion de topologie sur un ensemble.

4.1.2 Topos sur $Ouv(X)$

Un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur le site $Ouv(X)$ est un faisceau si et seulement si $\mathcal{F}(X) \tilde{\longrightarrow} \left\{(s_i)_{i\in I} \ / \ s_i \in \mathcal{F}(U_i) \ \forall i,j \in I \quad s_{i|U_{ij}} = s \text{ où } U_{ij} = U_i \times_X U_j\right\}$ est un isomorphisme. Comme $U_i \times_X U_j = U_i \cap U_j$ on retrouve la définition du faisceau dans le cas d'un espace topologique. La catégorie des topos de $Ouv(X)$ et celle des faisceaux sur X sont équivalentes.

4.2 Le site BG où G est un groupe

Définition 36. Soit G un groupe et X un ensemble . On dit que X est un G-ensemble à gauche s'il existe une application

$G \times X \longrightarrow X$

$(g,x) \longmapsto g.x$ vérifiant :

1) $\forall g_1, g_2 \in G \quad (g_1.g_2)(x) = g_1.(g_2.x)$

2) $\forall x \in X \quad \exists e \in G \ / \ ex = x$

Définition 37. On note BG la catégorie dont :

Ob(BG)=$\{G-$ ensembles à gauche$\}$

$Hom_{BG}(E_1, E_2) = \{f : E_1 \longrightarrow E_2 \ / \ \forall x \in E_1 \ \ \forall g \in G \quad f(g.x) = g.f(x)\}$

4.2.1 Une pré-topologie sur BG

Proposition 38. *La famille de recouvrements suivants est une pré-topologie de Grothendieck sur BG* :

$$(U_i \longrightarrow X)_{i\in I} \in Cov(X) \iff \coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow X \text{ surjective}$$

Preuve 39. *1) Existence du produit fibré :*
Soient U_i et U_j deux G-ensembles :

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_X U_j & \longrightarrow & U_i \\ \downarrow & & \downarrow_f \\ U_j & \underset{g}{\longrightarrow} & X \end{array}$$

$U_i \times_X U_j = \{(a,b) \in U_i \times U_j \ \textit{tel que}\ f(a) = g(b)\}$
$a \in U_i \Longrightarrow \exists x \in U_i \quad \exists g_1 \in G \quad a = g_1.x$
$b \in U_j \Longrightarrow \exists y \in U_j \quad \exists g_2 \in G \quad b = g_2.y$
$U_i \times_X U_j = \{(a,b) \in U_i \times U_j \ \textit{tel que}\ g_1.\ f(x) = g_2.g(y) \quad g_1, g_2 \in G\ \}$
$U_i \times_X U_j = \left\{(a,b) \in U_i \times U_j \ \textit{tel que}\ f(x) = \ g_1^{-1}.g_2.g(y) \quad g_1, g_2 \in G\ \right\}$
On vérifie aisément que $U_i \times_X U_j$ *est un G-ensemble car :*

$$\begin{array}{lcl} G \times U_i \times_X U_j & \longrightarrow & U_i \times_X U_j \\ (h, \alpha) & \longmapsto & h.\alpha \end{array}$$

$$\alpha \in U_i \times_X U_j \Longrightarrow \alpha = (x,y) \in U_i \times U_j \ / \ \ f(x) = g_1^{-1}.g_2.g(y).$$

$$h.\alpha = h.(x,y) = (h.x, h.y) \in U_i \times U_j \ / \ f(h.x) = g_1^{-1}.g_2.g(h.y)$$

$$\Longrightarrow h.\alpha = h.(x,y) = (h.x, h.y) \in U_i \times U_j \ \ / \ \ h.f(x) = h.g_1^{-1}.g_2.g(y)$$

D'où $U_i \times_X U_j$ *est un objet de la catégorie* $\mathcal{C}$.
2) Stabilité par composition :
Supposons que $(\ f_i)_{i\in I} \in Cov(U)$ *et* $(g_{j_i} : V_{j_i} \longrightarrow U_i)_{j_i \in J_i} \in Cov(U_i)$.

$$f_i \in Cov(U) \iff \pi_{f_i} : \coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow X \ \textit{surjective.}$$

$$g_{j_i} \in Cov(U_i) \iff \pi_{g_j} : \coprod_{j_i \in J_i} V_{j_i} \longrightarrow U_i \ \textit{surjective.}$$

On considère la composition suivante :

$$\begin{array}{ll} \pi_{f_i} : & \coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow X \\ & \uparrow \pi \\ \pi_{g_j} : \coprod_{j_i\in J_i} V_{j_i} \longrightarrow U_i & \end{array}$$

D'où : $\pi_{f_i} \circ \pi \circ \ \pi_{g_j} : \coprod_{j_i \in J_i} V_{j_i} \longrightarrow X$ *est surjective comme étant composée d'applications surjectives.*
Ainsi la famille $(f_i \circ g_{j_i} : V_{j_i} \longrightarrow X)_{j_i \in J_i, i\in I} \in Cov(X)$.
3) Stabilité par changement de base :
$(U_i \longrightarrow X)_{i\in I} \in Cov(X) \iff \coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow X$ *surjective. Et* $\forall\ Y \longrightarrow X$ *l'application* $\coprod_{i\in I}(U_i \times_X Y) \longrightarrow Y$ *est surjective.*
D'où $\ U_i \times_X Y \longrightarrow Y)_{i\in I} \in Cov(Y)$.

4) L'identité : Comme $X\coprod X = X$ *on a* $id_X : X \longrightarrow X \in Cov(X)$.

4.2.2 Topos sur le site BG

Soit U *un* G*-ensemble. On peut construire un préfaisceau d'ensembles sur* U *de la manière suivante :*

$$\begin{array}{lcc} \mathcal{F}_U : BG^{Opp} & \longrightarrow & Ens \\ V & \longmapsto & Hom_{BG}(V,U) \end{array}$$

Pour montrer que le préfaisceau $\mathcal{F}_U$ *défini sur* BG *est un faisceau il suffit de vérifier que l'application* φ^* *est bijective où :*

$$\mathcal{F}_U(X) \xrightarrow{\varphi_i^*} \mathcal{A}(X) = \left\{ s_i \in \mathcal{F}_U(U_i) \ / \ s_{i|U_i\times_X U_j} = s_{j|\ U_i\times_X U_j} \right\}$$

i) L'injectivité : On considère l'application $Hom(X,U) \xrightarrow{\varphi_i^*} Hom(U_i,U)$ *qui à* f *associe* $\varphi_i^*(f) = f\circ\varphi_i = \mathcal{F}_U(\varphi_i)$.

Soient $h, g \in \mathcal{F}_U(X) = Hom(X,U)$ *tel que* $\varphi_i^*(h) = \varphi_i^*(g)$ *et montrons que* $h = g$.

$\varphi_i^*(h) = \varphi_i^*(g) \iff \forall\left(\varphi_i : U_i \longrightarrow X\right)_{i\in I} \in Cov(X) \quad h\circ\varphi_i = g\circ\varphi_i$.

Soit $x \in X$ *alors* $\exists! i \in I$ *tel que* $x = \varphi_i(u_i)$. $h(x) = h\circ\varphi_i(u_i) = (h\circ\varphi_i)(u_i) = (g\circ\varphi_i)(u_i) = g(x)$. *D'où* φ_i^* *est injective.*

ii) La surjectivité : Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & X \\ q_i\uparrow & & \uparrow\varphi_j \\ U_i\times U & \underset{q_j}{\longrightarrow} & U_j \end{array}$$

Soit $(t_i)_{i\in I} \in Hom(U_i,U) \ / \ q_i^*(t_i) = q_j^*(t_j) \iff t_i\circ q_i = t_j\circ q_j$.

On cherche à construire $t \in Hom(X,U) \ / \ t_i = \varphi_i^*(t) = t\circ\varphi_i$.

Comme $\coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow X$ *est surjective alors* $\forall x \in X \quad \exists!\ i \in I$ *tel que* $x = \varphi_i(u_i)$. *Compte tenu du triangle suivant :*

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ t\nearrow & & \nwarrow t_i \\ X & \xleftarrow{\varphi_i} & U_i \end{array}$$

L'application t *recherchée est donnée par :*

$(t\circ\varphi_i)(u_i) = t(\varphi_i(u_i) = t(x) = t_i(u_i)$. *D'où* φ_i^* *est surjective.*

Conclusion : $\forall U \in Ob(BG)$ *le foncteur* $Hom(-,U)$ *est un faisceau d'ensembles sur* BG.

4.3 Topologie de grothendieck sur la catégorie des schémas

Soit Sch/k *la catégorie des schémas séparés et de type fini (voir* [1]*) sur un corps* k *.*

4.3.1 Topologie de Zariski

Définition 40. Un sous schéma ouvert d'un schéma X est un schéma U dont l'espace topologique est un sous ensemble ouvert de X et dont la structure de faisceau $\mathcal{O}_U$ est isomorphe à la restriction $\mathcal{O}_{X|U}$ du faisceau sur X.
Une immersion ouverte est un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ qui induit un isomorphisme de X dans un sous schéma ouvert de Y.

Définition 41. Pour tout schéma X on dit qu'une familles de morphismes de la forme $(f_i : U_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ est un recouvrement de Zariski si f_i est une immersion ouverte pour tout $i \in I$. C'est une pré-topologie dont le site correspondant est $(X)_{Zar}$

4.3.2 Topologie étale

Définition 42. Soit k un corps et X, Y deux schémas sur k. Un morphisme de schémas $f : X \longrightarrow Y$ est étale si f est localement de présentation finie, plat et si pour tout point $y \in Y$ le $k(y)$-schéma X_y.
On dit qu'un schéma X est étale si le morphisme $X \longrightarrow Spec(k)$ est étale .

Définition 43. Soit X un schéma dans Sch/k. On dit qu'une familles de morphismes de la forme $(f_i : U_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ est un recouvrement étale si le morphisme $\coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow X$ est surjectif . La topologie engendrée par la pré-topologie des recouvrements étales est appelée topologie étale sur Sch/k . On note $(Sch/k)_{Et}$ le site correspondant.

4.3.3 Caractérisation des topos de Sch/k

L'objectif de cette partie est de donner la structure de tout topos étale associé à un corps.

Proposition 44. *Soit k un corps, $\bar{k}$ une clôture séparable de k et $k_{ét}$ la catégorie des k-algèbres étales. Les faisceaux $\mathcal{F}$ sur $k_{ét}$ sont des G-ensembles discrets X où $G = Gal(\bar{k}/k)$ et on a une équivalence de catégories :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{k_{ét}} & \xrightarrow{i} & G-\text{ensembles discrets} \\ \mathcal{F} & \longmapsto & i(\mathcal{F}) = \varinjlim\limits_{L/k \text{ finie}, L\subset\bar{k}} \mathcal{F}(L) \end{array}$$

Preuve 45. *Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur k on pose $i(\mathcal{F}) = \varinjlim\limits_{L/k \text{ finie}, L\subset\bar{k}} \mathcal{F}(L)$ Alors $i(\mathcal{F})$ est un ensemble sur lequel G opère. Réciproquement soit E un G-ensemble discret. On considère le préfaisceau défini sur la sous-catégorie de $\hat{k}_{ét}$ formée des extensions finies séparables de k inclues dans $\bar{k}$ par $\mathcal{F}_E(L) = E^{Gal(\bar{k}/L)}$. Comme le préfaisceau d'inclusion de cette sous-catégorie dans $\hat{k}_{ét}$ est une équivalence de catégories alors on peut prolonger $\mathcal{F}_E$ à $\hat{k}_{ét}$ de manière essentiellement unique puis à $k_{ét}$ de manière unique en un foncteur qui commute aux somme disjointes. Alors $\mathcal{F}_E$ est un faisceau.*

4.3.4 Topologie de Nisnevich

Définition 46. Pour tout schéma X on dit qu'une familles de morphismes de la forme $(f_i : U_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ est un recouvrement de Nisnevich si : i) Le morphisme f_i soit surjectif.
ii) f_i est étale pour tout $i \in I$.
iii) Pour tout point $x \in X$ il existe un indice $i \in I$ et un point $u \in U_i$ tel que $f_i(u) = x$ et que f_i induise un isomorphisme entre les corps résiduels

$k(x) \xrightarrow{\sim} k(u)$. La topologie engendrée par la pré-topologie des recouvrements de Nisnevich est appelée topologie de Nisnevich sur Sch/k et on note $(Sch/k)_{Nis}$ le site correspondant.

4.3.5 Caractérisation des topos de Sch/k

Proposition 47. *Soit k un corps. Un préfaisceau Sch/k est un faisceau de Nisnevich si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
i) $\mathcal{F}(\varnothing)$ est un singleton.
ii) $\forall E, F \in Ob(Sch/k)$ l'application $\mathcal{F}(E \times F) \longrightarrow \mathcal{F}(E) \times \mathcal{F}(F)$ est une bijection.

Preuve 48. (*Voir* [4])

Remarquons que la topologie étale est plus fine que la topologie de Nisnevich qui est plus fine que la topologie de Zariski car tout morphisme de Nisnevich est un morphisme étale et tout morphisme étale est un morphisme de Zariski.

Références

[1] R.Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, (1977)

[2] R.Godement,Topologie algébrique et Théorie des faisceaux. Hermann (1958)

[3] Alexandre Grothendieck, Michael Artin, Jean-Louis Verdier. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, (1966-1967). Lectures Notes in Mathematics. Springer.

[4] Joël Riou, Théorie homotopique des S-schémas, Mémoire de DEA, (2002)