Schließen mit Unsicherheit

Emanuel Kitzelmann

Probelehrveranstaltung TH Brandenburg
Angewandte Künstliche Intelligenz
26.09.2022

Einordnung

- VL/Ü „Grundlagen der Künstlichen Intelligenz“ (BA, 4. S.) inkl. Programmierpraxis
    1. Einführung (Begriff, Historie)
    2. Problemlösen durch Suche
    3. Logikbasierte Wissensrepräsentation und Handlungsplanung
    4. **Schließen mit Unsicherheit**
    5. Ausgewählte Verfahren des maschinellen Lernens (Bayes‘sche Verfahren, Neuronale Netze)
    6. Reflektion, Ausblick, mögliche Vertiefungen
- Literatur:
    - Russel, Norvig: KI, ein moderner Ansatz
    - Boersch, Heinsohn, Socher: Wissensverarbeitung. Eine Einführung in die KI
- Voraussetzungen: Programmierung, Datenstrukturen, Logik, **Mathematik III**
- Lernplattform: Moodle
- ***Heute***: keine besonderen Voraussetzungen

Das Jahr 1997:

Künstliche Intelligenz übertrifft den Menschen

Der IBM-Computer Deep Blue schlägt Schachweltmeister Gary Kasparow


"Ehre der Menschheit" verloren

Heute vor 20 Jahren, vom 3. bis 11. Mai fand in New York der Aufsehen erregende Wettkampf

Schach spielen vs. Erkrankungen behandeln

Schachspiel

- Vollständig bekannter Spielstand
- Sehr begrenzte Anzahl möglicher Spielzüge
- Eindeutiges Resultat für jeden möglichen Spielzug

Erkrankungen behandeln

- Unvollständig bekannter Gesamtzustand des Patienten → Diagnose *unsicher*
- Große Anzahl mgl. Einflüsse, Untersuchungen, Therapien
- Wirkung von Umwelteinflüssen, Untersuchungen und Therapien *unsicher*

Unsicherheit wichtiger Faktor in vielen realen Anwendungsfeldern der künstlichen Intelligenz.

Lösung: KI-Techniken, die auf **Wahrscheinlichkeitstheorie** basieren.

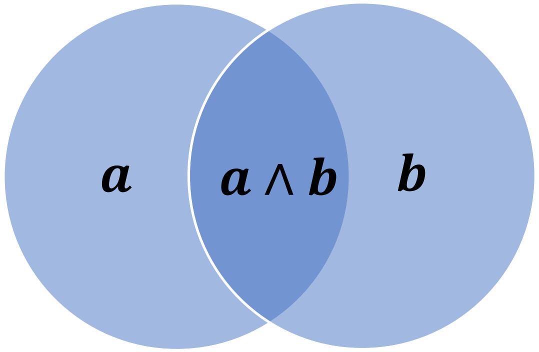
Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeiten

- **Diskrete Zufallsvariablen**, z.B. K (Karies) und S (Zahnschmerzen) mit möglichen Werten

  k: *Person hat Karies* s: *Person hat Zahnschmerzen*

  $\neg k$: *Person hat keine Karies* $\neg s$: *Person hat keine Zahnschmerzen*

- ***A-priori*-Wahrscheinlichkeit**, z.B. $P(k) = 0{,}2$
  - Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person Karies hat, beträgt 20%
- ***Bedingte* (*a-posteriori*) Wahrscheinlichkeit**, z.B. $P(k \mid s) = 0{,}64$
  - Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die Zahnschmerzen (s) hat, Karies (k) hat, beträgt 64%
  - s: **Bedingung** oder **Evidenz**: Information, dass Person Zahnschmerzen hat
- ***Gemeinsame* Wahrscheinlichkeit**, z.B. $P(k \wedge s) = 0{,}16$
  - Die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig gewählte Person Karies *und* Schmerzen hat, beträgt 16%



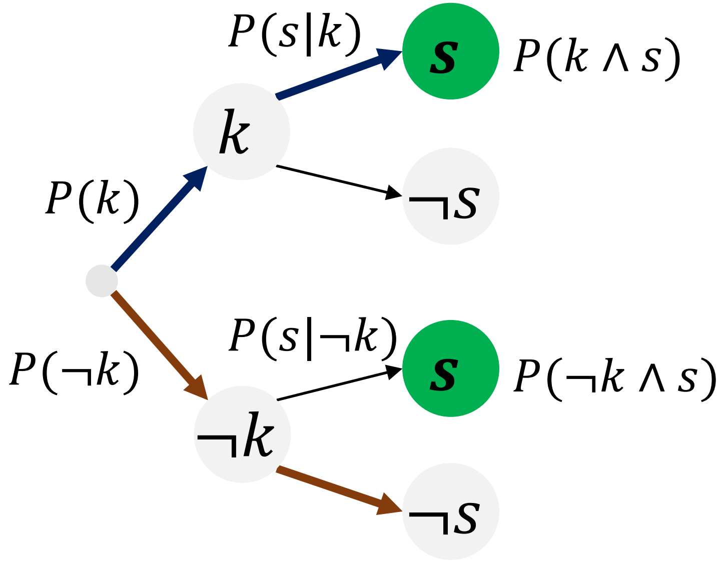
Zusammenhang verschiedener Wahrscheinlichkeiten

Beispiele für Zufallsvariablen $K\ \{k, \neg k\}, S\ \{s, \neg s\}$

$\boldsymbol{P(k \wedge s) = P(k) \cdot P(s|k)}$ (mit 1. Pfadregel)

$\boldsymbol{P(\neg k \wedge s) = P(\neg k) \cdot P(s|\neg k)}$ (mit 1. Pfadregel)

$\boldsymbol{P(s) = P(s \wedge k) + P(s \wedge \neg k)}$ (Totale Wahrscheinlichkeit)



Allgemein gilt für zwei Zufallsvariablen A, B und beliebige mögliche Werte:

1. Produktregel: $P(A,B) = P(A) \cdot P(B|A)$ und $P(A,B) = P(B) \cdot P(A|B)$
2. durch Umstellen: $P(B|A) = \frac{P(A,B)}{P(A)}$
3. Marginalisierung: $P(A = a) = \sum_{b \in B} P(a \wedge b)$

Die Regeln können leicht für mehr als zwei Variablen generalisiert werden.

Das Bayes‘sche Gesetz

Thomas Bayes,
Engl. Mathematiker
1701 – 1761

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten beschreiben u.a.
  - *Kausalwissen* (Ursache → Wirkung), z.B. Karies → Schmerzen: $P(s|k) = 0{,}8$
  - *Rückschlüsse / Diagnosen* (Wirkung → Ursache),

    z.B. Zahnschmerzen → Karies: $P(k|s) = 0{,}64$
- Wie aus Wissen $P(s|k) = 0{,}8$ auf $P(k|s) = 0{,}64$ schließen?
  - Produktregel: $P(k,s) = P(k) \cdot P(s|k) = P(s) \cdot P(k|s)$
  - durch $P(s)$ teilen: $P(k|s) = \frac{P(k) \cdot P(s|k)}{P(s)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}25} = 0{,}64$ (mit z.B. $P(k) = 0{,}2; P(s) = 0{,}25$)

Das **Bayes‘sche Gesetz:**

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Mgl. Anwendung:

$$\underbrace{P(\text{Ursache} \mid \text{Effekt})}_{\text{Diagnose}} = \frac{\overbrace{P(\text{Effekt} \mid \text{Ursache})}^{\text{Kausalwissen}} \cdot P(\text{Ursache})}{P(\text{Effekt})}$$

Vollständige gemeinsame Verteilung

- Dritte Variable D (Dentalsonde) mit d: Zahnschmelz porös, $\neg d$: nicht porös
- Aus **vollständiger gemeinsamer Verteilung** *alle* Wahrscheinlichkeiten ermittelbar
- A-priori- und gemeinsame Wahrscheinlichkeiten durch Marginalisierung, z.B.:
  - $P(k, s) = P(k, s, d) + P(k, s, \neg d) = 0{,}144 + 0{,}016 = 0{,}16$
  - $P(s) = \sum_{(x,y) \in K \times D} P(s, x, y) = P(s, k, d) + P(s, \neg k, d) + \cdots = 0{,}25$

		s	¬s
d	k	0,144	0,036
	¬k	0,018	0,142
¬d	k	0,016	0,004
	¬k	0,072	0,568

- *Abfrage-Variablen* gegeben *Evidenz* und *unbeobachtete Variablen*, z.B.
  - Abfrage $K = k$ gegeben Evidenz $S = s$ und unbeobachtet D

    $P(k|s) = \frac{P(k,s)}{P(s)}$ und mittels Marginalisierung $\frac{P(k,s)}{P(s)} = \frac{0{,}16}{0{,}25} \approx 0{,}64$
  - Abfrage $K = k$ gegeben Evidenz $S = s$ und $D = \neg d$

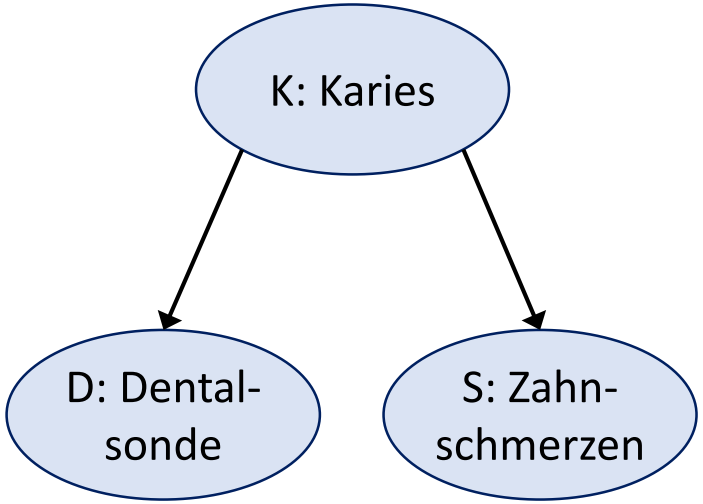
    $P(k|s, \neg d) = \frac{P(k,s,\neg d)}{P(s,\neg d)} = \frac{0{,}016}{0{,}088} = 0,\overline{18}$

Wie viele
Einträge hat
die Tabelle bei
n Variablen?

Die **vollständige gemeinsame Verteilung** (***full joint distribution***) einer Menge von Zufallsvariablen ist eine *vollständige Wissensbasis* der Domäne.

Bedingte Unabhängigkeit

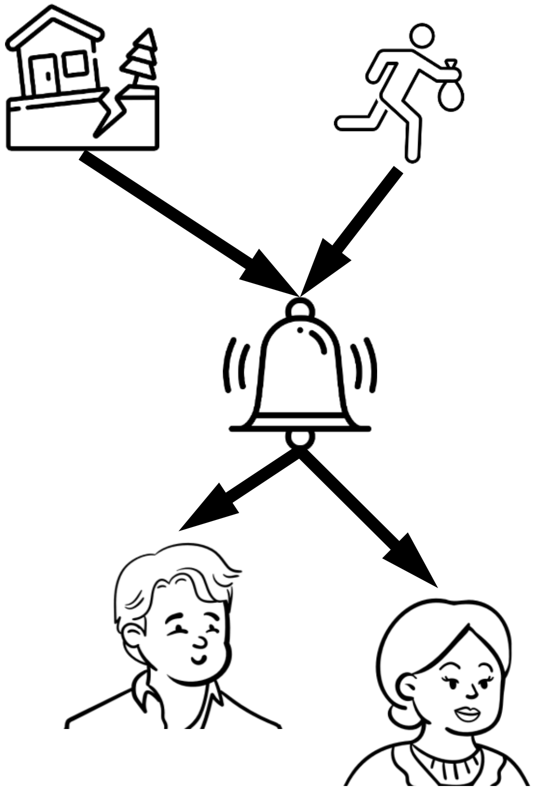
- Zahnschmerzen und Dentalsonde sind *nicht* unabhängig:
  - $\mathrm{P}(d|s) > \mathrm{P}(d)$, also $\mathrm{P}(D|S) \neq \mathrm{P}(D)$
- *Aber*: gegeben Evidenz „Karies“ (*bedingt*) unabhängig:
  - $\mathrm{P}(D|S,K) = \mathrm{P}(D|K)$ und $\mathrm{P}(D,S|k) = \mathrm{P}(D|k) \cdot \mathrm{P}(S|k)$
- Damit gemeinsame Verteilung umformen:
  - $\mathrm{P}(D,S,K) = \mathrm{P}(K) \cdot \mathrm{P}(D,S|K) = \mathrm{P}(K) \cdot \mathrm{P}(D|K) \cdot \mathrm{P}(S|K)$



- Statt $\mathrm{P}(D,S,K)$ können die Verteilungen $\mathrm{P}(K),\ \mathrm{P}(D|K),\ \mathrm{P}(S|K)$ einzeln gespeichert werden.
  - Anzahl gespeicherter Werte: $1 + 2 + 2 = 5$ statt 7

Szenario

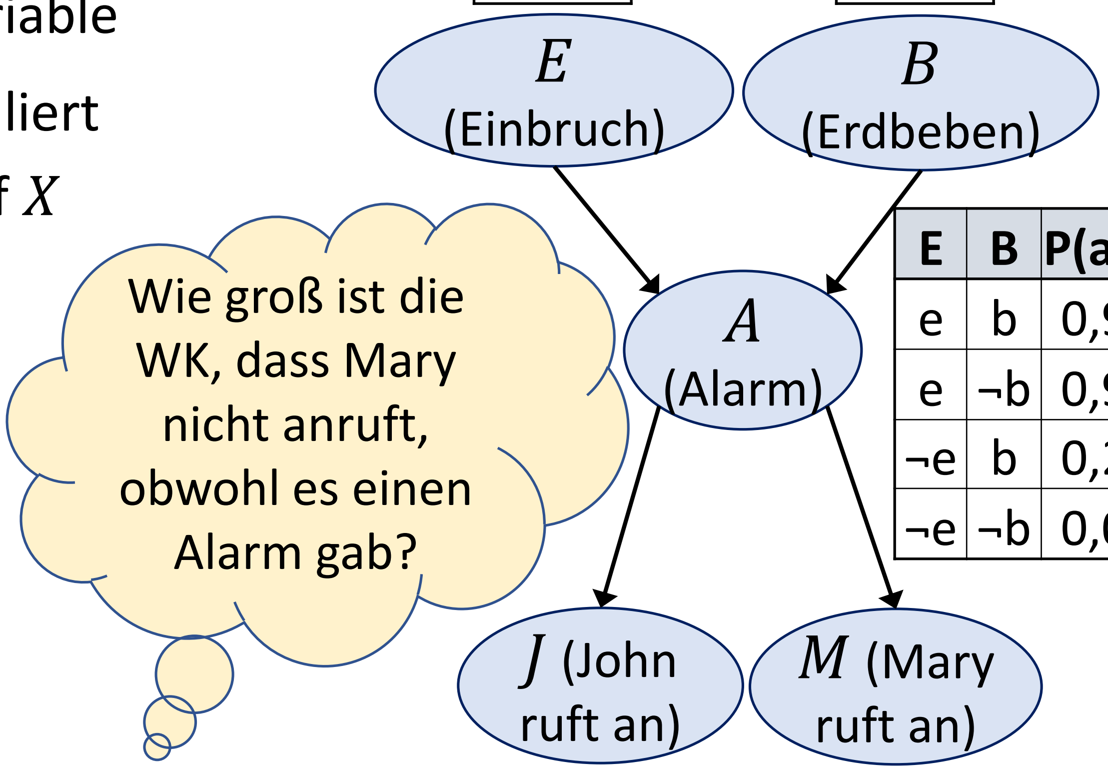
- Du hast Dir eine neue *Alarmanlage* installiert, die bei einem *Einbruch* recht zuverlässig losgeht, aber auch durch leichte *Erdbeben* ausgelöst werden kann (Szenario von Judea Pearl).
- Deine zwei Nachbarn *John* und *Mary* haben versprochen, Dich im Urlaub anzurufen, wenn Deine Alarmanlage losgeht.
- John ruft mit ziemlicher Sicherheit an, wenn die Alarmanlage losgeht, hält manchmal aber auch andere Geräusche für den Alarm.
- Mary hört öfter mal laute Musik und hört dann den Alarm nicht.



Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Einbruch stattgefunden hat, wenn John und/oder Mary angerufen oder nicht angerufen haben?

Bayes‘sches Netz

- Gerichteter zyklenfreier Graph (DAG)
  - Jeder Knoten repräsentiert eine Zufallsvariable
  - Ein Pfeil von Knoten A zu Knoten X modelliert einen *direkten kausalen Einfluss* von A auf X
    - A Elternknoten von X.
    - $\mathrm{Eltern}(X)$: Menge aller Elternknoten von X
  - kein Pfad von Knoten X führt zurück zu X
- Mit jedem Knoten X assoziiert: Verteilung $P(X \mid \mathrm{Eltern}(X))$
  - als Tabelle bedingter Wahrscheinlichkeiten (*conditional probability table*, CPT)



P(e)
0,001

P(b)
0,002

E	B	P(a|E,B)
e	b	0,95
e	¬b	0,94
¬e	b	0,29
¬e	¬b	0,001

A	P(j|A)
a	0,9
¬a	0,05

A	P(m|A)
a	0,7
¬a	0,01

Bayes-Netz konstruieren

Benötigte Variablen festlegen

↓

Variablen so in totale Ordnung $X_1, \ldots X_n$ bringen, dass Ursachen *vor* Effekten kommen

↓

Zu jeder Variable X_i genau diejenigen Variablen aus $X_1, \ldots, X_{i-1}$ wählen, die X_i *unmittelbar* beeinflussen → $\mathrm{Eltern}(X_i)$

↓

CPTs hinzufügen

Durch diese Art der Konstruktion:

- Kausalnetz: CPTs repräsentieren direkte Kausal-Beziehungen (i.d.R. am leichtesten ermittelbar)
- Minimale Anzahl von Pfeilen → maximale Dekomposition der gemeinsamen Verteilung
- Korrekte Abbildung der vollständigen gemeinsamen Verteilung

Bayes‘sches Netz – Bedeutung

Ein BN repräsentiert durch Ausnutzen bedingter Unabhängigkeit *kompakt und effizient* die *vollständige gemeinsame Verteilung* $\boldsymbol{P(X_1, \dots, X_n)}$ einer Menge von Zufallsvariablen.

$$P(X_1, \dots, X_n) = P(X_1|Eltern(X_1)) \cdot \dots \cdot P(X_n|Eltern(X_n)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i|Eltern(X_i))$$

Dem gegenüber die **Kettenregel** (*gilt immer*):

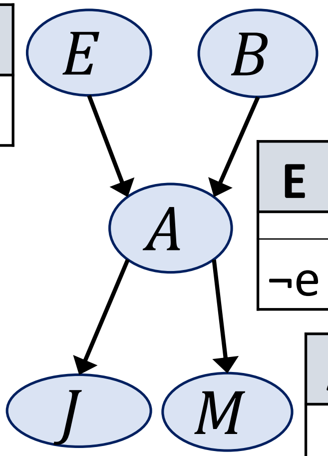
$$P(X_1, \dots, X_n) = P(X_1) \cdot P(X_2|X_1) \cdot \dots \cdot P(X_n|X_{n-1}, \dots, X_1) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i|X_{i-1}, \dots, X_1)$$

Wahrscheinlichkeit, dass *kein* Einbruch und *kein* Erdbeben stattfanden, aber der Alarm losging und John und Mary angerufen haben.

$$P(\neg e, \neg b, a, j, m)$$
$$= P(\neg e) \cdot P(\neg b) \cdot P(a|\neg e, \neg b) \cdot P(j|a) \cdot P(m|a)$$
$$= 0{,}999 \cdot 0{,}998 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 \approx 0{,}000628$$

P(e)
0,001

P(b)
0,002



E	B	P(a|E,B)
¬e	¬b	0,001

A	P(j|A)
a	0,9

A	P(m|A)
a	0,7

Inferenz in Bayes-Netzen (*exemplarisch*)

Evidenz: John, Mary rufen an. **Anfrage**: WK für Einbruch $P(e|j,m)$? **Unbekannt**: Alarm A, Erdbeben E.

Lösung der Anfrage:

- $P(e|j,m) = \frac{P(e,j,m)}{P(j,m)}$ Zähler und Nenner durch **Marginalisierung**, exemplarisch für *Zähler*.
- $P(e,j,m) = \sum_{x\in B,y\in A} P(e,j,m,x,y) = \sum_{x\in B,y\in A} P(e)\cdot P(x)\cdot P(y|e,x)\cdot P(j|y)\cdot P(m|y)$
- je zwei Werte für x (b, $\neg b$) und y (a, $\neg a$), insgesamt vier Summanden:

$$\begin{aligned} P(e,j,m) = {} & P(e)\cdot P(b)\cdot P(a|e,b)\cdot P(j|a)\cdot P(m|a) + \\ & P(e)\cdot P(b)\cdot P(\neg a|e,b)\cdot P(j|\neg a)\cdot P(m|\neg a) + \\ & P(e)\cdot P(\neg b)\cdot P(a|e,\neg b)\cdot P(j|a)\cdot P(m|a) + \\ & P(e)\cdot P(\neg b)\cdot P(\neg a|e,\neg b)\cdot P(j|\neg a)\cdot P(m|\neg a) \end{aligned}$$

- Wahrscheinlichkeiten aus den CPTs ablesen, einsetzen, ausrechnen:

$$P(e,j,m) = 0{,}00059224;\ P(j,m) = 0{,}00208414;\ \boldsymbol{P(e|j,m)} = \frac{\mathbf{0{,}00059224}}{\mathbf{0{,}00208414}} \approx \mathbf{0{,}284}$$

***Allgemein*: Das Berechnen einer Anfrage in einem Bayes-Netz ergibt sich als das *Aufsummieren von Produkten* von im BN gespeicherten bedingten Wahrscheinlichkeiten.**

Bayes‘sche Netze mit Python

- Es gibt verschiedene Packages für Bayes‘sche Netze in Python
  - pomegranate enthält neben Bayes‘schen Netzen auch noch weitere wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle
- Ein Jupyter-Notebook mit dem „Alarm“-Bayes-Netz und den entsprechenden Beispielrechnungen der vorigen Folien finden Sie hier: https://github.com/ekitzelmann/THB-PLV-22
  - Datei: BayesNet_Alarm.ipynb. Downloaden, um den Code auszuprobieren
  - dazu muss Python installiert sein und zusätzlich die Packages pomegranate und pygraphviz

Mögliche Anwendungsgebiete Bayes‘scher Netze

Medizinische Diagnostik, Monitoring

Datensicherheit,
Malware-Detection

Diagnose / Überwachung
technischer Systeme

Dokumenten-
Klassifikation

Ausblick

- Normalisierung: Bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilungen effizienter berechnen
- Algorithmen zur Inferenz in Bayes‘schen Netzen
- Domänen mit *stetigen* Zufallsvariablen
- Maschinelles Lernen basierend auf dem Bayes‘schen Gesetz:
  - Naive Bayes Classifier
  - Lernen von Bayes‘schen Netzen aus Daten

Aufgaben

1. Auf Folie 10 ist die Behauptung, dass Zahnschmerzen und Dentalsonde nicht unabhängig, jedoch *bedingt* unabhängig gegeben Karies sind.
   Zeigen Sie beides durch geeignete Berechnungen auf Basis der vollständigen gemeinsamen Verteilung auf Folie 8.

2. Berechnen Sie im „Alarm“-Bayes-Netz
   a) die gemeinsame Wahrscheinlichkeit $P(e, \neg b, a, j, \neg m)$,
   b) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass John anruft, wenn ein Einbruch stattgefunden hat.

3. Lassen Sie durch geeignete Funktionsaufrufe beide Wahrscheinlichkeiten aus 2. auch im vorgegebenen Jupyter-Notebook berechnen.

4. Beweisen Sie die Kettenregel für drei Variablen:
   $P(A, B, C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|B, A)$.

5. Überlegen Sie sich selbst eine Anwendungsdomäne, einige dazu passende Variablen und deren Zusammenhänge. Konstruieren Sie ein passendes Bayes‘sches Netz und berechnen Sie die vollständige gemeinsame Verteilung für eine bestimmte Belegung sowie eine A-posteriori-Abfrage gegeben Evidenz. Implementieren und Testen Sie Ihr Netz auch in Python.

Vielen Dank!

https://github.com/ekitzelmann/THB-PLV-22
(Folien als PDF und Jupyter-Notebook)

Bildquellen

- https://de.freepik.com
- https://blog.adafruit.com/2016/02/17/20-years-ago-kasparov63-beat-ibm-please-open-source-deep-blue/
- https://de.chessbase.com/post/20-jahre-kasparov-gegen-deep-blue
- https://www.maschinenmarkt.vogel.de/deep-blue-gegen-garri-kasparow-a-588990/