

1

2)

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq |w|_b\}$
 $xyz = a^n b^n, |xy| \leq n, |y| > 0 \Rightarrow x = a^m, m < n \Rightarrow xz = a^m b^n \notin L \Rightarrow$ по лемме о накачке язык нерегулярный.

4)

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$
 $xyz = a^n b^n, |xy| \leq n, |y| > 0 \Rightarrow x = a^m, m \neq n \Rightarrow xz = a^m b^n \notin L \Rightarrow$ язык нерегулярный.

6)

$L = \{\alpha \cdot a \cdot \beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^*, |\alpha|_b > |\beta|_a\} = (a|b)^* b (a|b)^* a b^* = R$

• $L \subset R$

Рассмотрим $\alpha \cdot a \cdot \beta \in L$. Заметим, что $|\alpha|_b > |\beta|_a \geq 0 \Rightarrow |\alpha|_b \geq 1 \Rightarrow \alpha \in (a|b)^* b (a|b)^*$.

– $\beta \in b^* \Rightarrow \alpha \cdot a \cdot \beta \in R$

– $a \in \beta \Rightarrow \beta \in (a|b)^* a b^* \Rightarrow \alpha \cdot a \cdot \beta \in \alpha \cdot a \cdot (a|b)^* \cdot a \cdot b^* \Rightarrow$ обозначим $\alpha' = \alpha \cdot a \cdot (a|b)^* = (a|b)^* b (a|b)^* \cdot a \cdot (a|b)^* = (a|b)^* b (a|b)^*, \beta' = b^* \Rightarrow \alpha' \cdot a \cdot \beta' \in R$

• $R \subset L$

Рассмотрим произвольное слово w из языка R : $w = \gamma \cdot b \cdot \delta \cdot a \cdot \beta$, где $\gamma, \delta \in (a|b)^*, \beta \in b^*$. Обозначим $\alpha = \gamma \cdot b \cdot \delta$, тогда $|\alpha|_b \geq 1 > 0 = |\beta|_a$, значит, $w \in L$.

Следовательно, язык регулярный.

8)

$L = \{w \cdot a^m \mid 1 \leq |w|_b \leq m\}$
 $xyz = b^n a^n, |xy| \leq n, |y| > 0 \Rightarrow x = b^k, y = b^l, k + l = n \Rightarrow xy^2z = b^{k+2l} a^n \notin L \Rightarrow$ язык нерегулярный.

2

1) $(a|b)^* (a (a|b)^* a \mid b (a|b)^* b) = (a|b)^* (ab^*a \mid ba^*b)$

(\subset) $w = \alpha a \beta a, \alpha, \beta \in (a|b)^* \Rightarrow$ выделим самую правую a из $a\beta$: $a\beta \in (a|b)^* a b^* \Rightarrow w \in \alpha (a|b)^* a b^* a = (a|b)^* a b^* a$. Аналогично при $w = \alpha b \beta b$ получаем $(a|b)^* b a^* b$.

(\supset) Очевидно.

2) $\epsilon \mid a (a \mid ba)^* (\epsilon \mid b) = (a \mid ab)^*$

Слова данного языка — это ϵ и все слова, начинающиеся с a , в которых нет двух b подряд. Упрощённое регулярное выражение описывает то же множество слов.

3) $\epsilon \mid e e^* \mid f f^* = e^* \mid f^*$

(\subset) $\epsilon \in e^*, ee^* \in e^*, ff^* \in f^*$

(\supset) $w \in e^* \Rightarrow \begin{cases} w = \epsilon & \Rightarrow ok \\ w = ee^* & \Rightarrow ok \end{cases}, w \in f^* — \text{аналогично.}$