

1

Воспользуемся методом Якоби для решения уравнения $Ax = b$, который сходится, если A имеет диагональное преобладание. $A = D + L + U$, где L — нижняя треугольная часть, U — верхняя треугольная часть, D — диагональ.

$$(D + L + U)x = b \Rightarrow Dx = -(L + U)x + b \Rightarrow x = D^{-1}(b - (L + U)x).$$

Положим $x_{k+1} = D^{-1}(b - (L + U)x_k)$. Переписывая в виде $x_{k+1} = Bx_k + q$, получаем:

$$B = -D^{-1}(L+U), q = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{A_{11}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{A_{nn}} \end{pmatrix}, Bx_k = -D^{-1}(L+U)x_k = - \begin{pmatrix} \frac{1}{A_{11}} \sum_{j \neq 1} A_{1j}(x_k)_j \\ \dots \\ \frac{1}{A_{nn}} \sum_{j \neq n} A_{nj}(x_k)_j \end{pmatrix}.$$

2

$$x_{k+1} = Bx_k$$

Если $\|B\| < 1$, $x_k \rightarrow \mathbf{0}$ (все компоненты предела одинаковы). Если $\|B\| > 0$, x_k расходится. Если $B = I$, $x_k \rightarrow x_0$, но для произвольной $\|B\| = 1$ нет сходимости.