Имеется система дифференциальных уравнений:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \qquad (1)$$

Также имеются собственные числа:

$$\vec{\lambda} = (-10, -5, -1, -0.5)$$

Найдем решение в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix} (\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 \vec{\alpha}_3 \vec{\alpha}_4) * \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} \\ e^{\lambda_2} \\ e^{\lambda_3} \\ e^{\lambda_4} \end{pmatrix} = C_1 * \overrightarrow{\alpha^1} * e^{\lambda_1} * C_2 * \overrightarrow{\alpha^2} * e^{\lambda_2} + C_3 * \overrightarrow{\alpha^3} * e^{\lambda_3} + C_4 * \overrightarrow{\alpha^4} * e^{\lambda_4} (*)$$

Для получения матрицы A воспользуемся формулой:

$$A = T^{-1} * B * T \qquad (v)$$

Получим случайную матрицу T:

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -10 & -5 & 14 \\ 12 & -6 & 10 & -2 \\ -6 & 11 & 3 & -11 \\ 14 & 2 & -7 & -11 \end{pmatrix}$$

Проверим матрицу на вырожденность:

$$\det T \neq 0$$
$$\det T = -3968$$

⇒ Матрица невырожденнная, значит дальнейшие расчеты имеют место быть.

Запишем диагональную матрицу B, состоящую из собственных чисел:

$$B = \begin{pmatrix} -10.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5000 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу A по правилу (v):

$$A = \begin{pmatrix} -3.0504 & -44.6371 & -14.7046 & 56.9748 \\ -1.4677 & -89.0323 & -25.8790 & 110.2661 \\ -3.4798 & -10.1452 & -6.7681 & 15.2601 \\ -1.2984 & -66.4516 & -19.4315 & 82.3508 \end{pmatrix}$$

Система (1) имеет вид:

$$\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}-3.0504 & -44.6371 & -14.7046 & 56.9748\\ -1.4677 & -89.0323 & -25.8790 & 110.2661\\ -3.4798 & -10.1452 & -6.7681 & 15.2601\\ -1.2984 & -66.4516 & -19.4315 & 82.3508\end{pmatrix}\vec{x}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3.0504\,x_1-44.6371\,x_2-14.7046\,x_3+56.9748\,x_4\\ \dot{x}_2 &= -1.4677\,x_1-89.0323\,x_2-25.8790\,x_3+110.2661\,x_4\\ \dot{x}_3 &= -3.4798\,x_1-10.1452\,x_2-6.7681\,x_3+15.2601\,x_4\\ \dot{x}_4 &= -1.2984\,x_1-66.4516\,x_2-19.4315\,x_3+82.3508\,x_4\end{aligned} \qquad (2)$$

Рассчитаем собственные вектора и числа:

$$\alpha=\begin{pmatrix}0.379009 & 0.318930 & -0.393187 & 0.263195\\ 0.734644 & 0.755812 & -0.705996 & 0.701854\\ 0.096839 & -0.042371 & -0.068777 & 0.229452\\ 0.554322 & 0.570295 & -0.585016 & 0.620871\end{pmatrix}$$

$$\lambda=\begin{pmatrix}-10.0000 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5.0000 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1.0000 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -0.5000\end{pmatrix}$$

Проверим, что собственные вектора и числа рассчитаны правильно:

$$A\vec{\alpha}_i=\lambda_i\vec{\alpha}_i,$$

где $\vec{\alpha}_i$ - вектор-столбец матрицы α

Для $A\vec{\alpha}_1=\lambda_1\vec{\alpha}_1$:

$$\begin{pmatrix}-3.7901\\ -7.3464\\ -0.9684\\ -5.5432\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3.7901\\ -7.3464\\ -0.9684\\ -5.5432\end{pmatrix}$$

Для $A\vec{\alpha}_2=\lambda_2\vec{\alpha}_2$:

$$\begin{pmatrix}-1.5946\\ -3.7791\\ 0.2119\\ -2.8515\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5946\\ -3.7791\\ 0.2119\\ -2.8515\end{pmatrix}$$

Для $A\vec{\alpha}_3=\lambda_3\vec{\alpha}_3$:

$$\begin{pmatrix}0.393187\\0.705996\\0.068777\\0.585016\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.393187\\0.705996\\0.068777\\0.585016\end{pmatrix}$$

Для $A\vec{\alpha}_4=\lambda_4\vec{\alpha}_4$:

$$\begin{pmatrix}-0.1316\\-0.3509\\-0.1147\\-0.3104\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.1316\\-0.3509\\-0.1147\\-0.3104\end{pmatrix}$$

Зададим вектор начальных условий:

$$\vec{x}_0^T=(2.0000-1.5000\,1.0000-2.5000)$$

Найдем коэффициенты C_i. Из уравнения (*) можно сказать, что:

$$C=\alpha^{-1}\vec{x}_0$$

Тогда:

$$C=\begin{pmatrix}35.0181\\-21.1266\\2.4331\\-13.5930\end{pmatrix}$$

Запишем уравнения (*):

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_2\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4)\begin{pmatrix}C_1&0&0&0\\0&C_2&0&0\\0&0&C_3&0\\0&0&0&C_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}\\e^{\lambda_2}\\e^{\lambda_3}\\e^{\lambda_4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13.2722&-6.7379&-0.9567&-3.5776\\25.7258&-15.9677&-1.7177&-9.5403\\3.3911&0.8952&-0.1673&-3.1190\\19.4113&-12.0484&-1.4234&-8.4395\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}\\e^{\lambda_2}\\e^{\lambda_3}\\e^{\lambda_4}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13.2722e^{\lambda_1 t}-6.7379e^{\lambda_2 t}-0.9567e^{\lambda_3 t}-3.5776e^{\lambda_4 t}\\25.7258e^{\lambda_1 t}-15.9677e^{\lambda_2 t}-1.7177e^{\lambda_3 t}-9.5403e^{\lambda_4 t}\\3.3911e^{\lambda_1 t}+0.8952e^{\lambda_2 t}-0.1673e^{\lambda_3 t}-3.1190e^{\lambda_4 t}\\19.4113e^{\lambda_1 t}-12.0484e^{\lambda_2 t}-1.4234e^{\lambda_3 t}-8.4395e^{\lambda_4 t}\end{pmatrix}$$

Пусть имеется матрица H:

$$H=\left(\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_2\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4\right)\begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13.2722 & -6.7379 & -0.9567 & -3.5776 \\ 25.7258 & -15.9677 & -1.7177 & -9.5403 \\ 3.3911 & 0.8952 & -0.1673 & -3.1190 \\ 19.4113 & -12.0484 & -1.4234 & -8.4395 \end{pmatrix}$$

Тогда :

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix}=H^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Найдем H^{-1}:

$$H^{-1}=\begin{pmatrix} 0.068966 & 0.344828 & 0.172414 & -0.482759 \\ 0.250000 & -0.125000 & 0.208333 & -0.041667 \\ -3.000000 & 5.500000 & 1.500000 & -5.500000 \\ 0.307692 & 0.043956 & -0.153846 & -0.241758 \end{pmatrix}$$

Запишем уравнение (**):

$$\begin{pmatrix} e^{-10t} \\ e^{-5t} \\ e^{-t} \\ e^{-0.5t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.068966 & 0.344828 & 0.172414 & -0.482759 \\ 0.250000 & -0.125000 & 0.208333 & -0.041667 \\ -3.000000 & 5.500000 & 1.500000 & -5.500000 \\ 0.307692 & 0.043956 & -0.153846 & -0.241758 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 0.068966\,x_1 + 0.344828\,x_2 + 0.172414\,x_3 - 0.482759\,x_4 \\ 0.250000\,x_1 - 0.125000\,x_2 + 0.208333\,x_3 - 0.041667\,x_4 \\ -3.000000\,x_1 + 5.500000\,x_2 + 1.500000\,x_3 - 5.500000\,x_4 \\ 0.307692\,x_1 + 0.043956\,x_2 - 0.153846\,x_3 - 0.241758\,x_4 \end{pmatrix} \qquad (***)$$

Пусть:

$$\begin{pmatrix} e^{-10t} \\ e^{-5t} \\ e^{-t} \\ e^{-0.5t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение (***) примет вид :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.068966\,x_1 & 0.344828\,x_2 & 0.172414\,x_3 & -0.482759\,x_4 \\ 0.250000\,x_1 & -0.125000\,x_2 & 0.208333\,x_3 & -0.041667\,x_4 \\ -3.000000\,x_1 & 5.500000\,x_2 & 1.500000\,x_3 & -5.500000\,x_4 \\ 0.307692\,x_1 & 0.043956\,x_2 & -0.153846\,x_3 & -0.241758\,x_4 \end{pmatrix}$$

Запишем это уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned}
e_1 &= 0.068966\,x_1 +0.344828\,x_2 +0.172414\,x_3 -0.482759\,x_4 \\
e_2 &= 0.250000\,x_1 -0.125000\,x_2 +0.208333\,x_3 -0.041667\,x_4 \\
e_3 &= -3.000000\,x_1 +5.500000\,x_2 +1.500000\,x_3 -5.500000\,x_4 \\
e_4 &= 0.307692\,x_1 +0.043956\,x_2 -0.153846\,x_3 -0.241758\,x_4
\end{aligned} \qquad (3)$$

Введем голономную связь $e_1=0$, тогда система (3) примет вид:

$$\begin{aligned}
0 &= 0.068966\,x_1 +0.344828\,x_2 +0.172414\,x_3 -0.482759\,x_4 \\
e_2 &= 0.250000\,x_1 -0.125000\,x_2 +0.208333\,x_3 -0.041667\,x_4 \\
e_3 &= -3.000000\,x_1 +5.500000\,x_2 +1.500000\,x_3 -5.500000\,x_4 \\
e_4 &= 0.307692\,x_1 +0.043956\,x_2 -0.153846\,x_3 -0.241758\,x_4
\end{aligned} \qquad (4)$$

Проверим влияние выражения x_i из первого уравнения системы (4), а также каждого случая соберем схему для анализа процессов в исходной системе и системе пониженного порядка. Анализ будем проводить в ПО SimInTech.

Выразим x_1 из (4):

$$x_1 = -\frac{0.344828}{0.068966}x_2 - \frac{0.172414}{0.068966}x_3 + \frac{0.482759}{0.068966}x_4$$

$$-4.999971000203 \cdot x_2 - 2.4999855001015 \cdot x_3 + 6.9999565003045 \cdot x_4$$

После подстановки в исходную систему (2), получаем:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_2 = -1.4677*(-4.999971000203 \cdot x_2 - 2.4999855001015 \cdot x_3 + 6.9999565003045 \cdot x_4) - \\
-89.0323\,x_2 - 25.8790\,x_3 + 110.2661\,x_4 = \\
= -81.6938425630021 \cdot x_2 - 22.209771281501 \cdot x_3 + 99.9922638445031 \cdot x_4
\end{gathered}$$

Для остальных $\dot{x}_i$ аналогичным образом подставляем x_1. В результате получаем следующую систему пониженного порядка:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= -81.6938425630021 \cdot x_2 - 22.209771281501 \cdot x_3 + 99.9922638445031 \cdot x_4 \\
\dot{x}_3 &= 7.2536990865064 \cdot x_2 + 1.9313495432532 \cdot x_3 - 9.09834862975959 \cdot x_4 \\
\dot{x}_4 &= -59.9596376533364 \cdot x_2 - 16.1855188266682 \cdot x_3 + 73.2620564800046 \cdot x_4
\end{aligned} \qquad (5)$$

Выразим x_2 из (4):

$$x_2 = -0.200001159998608 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_3 + 1.3999994200007 \cdot x_4$$

После подстановки в исходную систему (2), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5.87707177897387 \cdot x_1 + 7.61395 \cdot x_3 - 5.51711411051306 \cdot x_4 \\ \dot{x}_3 &= -1.45074823158212 \cdot x_1 - 1.6955 \cdot x_3 + 1.05682588420894 \cdot x_4 \\ \dot{x}_4 &= 11.9919970837635 \cdot x_1 + 13.7943 \cdot x_3 - 10.6814014581182 \cdot x_4 \end{aligned} \qquad (6)$$

Выразим x_3 из (4):

$$x_3 = -0.400002319997216 \cdot x_1 - 2.0 \cdot x_2 + 2.79999884000139 \cdot x_4$$

После подстановки в исходную систему (2), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2.83147411463106 \cdot x_1 - 15.2279 \cdot x_2 + 15.8019370573155 \cdot x_4 \\ \dot{x}_2 &= 8.88396003920795 \cdot x_1 - 37.2743 \cdot x_2 + 37.804930019604 \cdot x_4 \\ \dot{x}_4 &= 6.4742450810259 \cdot x_1 - 27.5886 \cdot x_2 + 27.942622540513 \cdot x_4 \end{aligned} \qquad (7)$$

Выразим x_4 из (4):

$$x_4 = 0.142858030611547 \cdot x_1 + 0.714286010203849 \cdot x_2 + 0.357143005101925 \cdot x_3$$

После подстановки в исходную систему (2), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5.08890772248679 \cdot x_1 - 3.94079742583774 \cdot x_2 + 5.64355128708113 \cdot x_3 \\ \dot{x}_2 &= 14.2846978892159 \cdot x_1 - 10.2707673702614 \cdot x_2 + 13.5017663148693 \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 &= -1.29977216706473 \cdot x_1 + 0.754875944311756 \cdot x_2 - 1.31806202784412 \cdot x_3 \end{aligned} \qquad (8)$$

Промоделируем все ранее полученные системы. Для этого соберем следующую схему в по SimInTech:

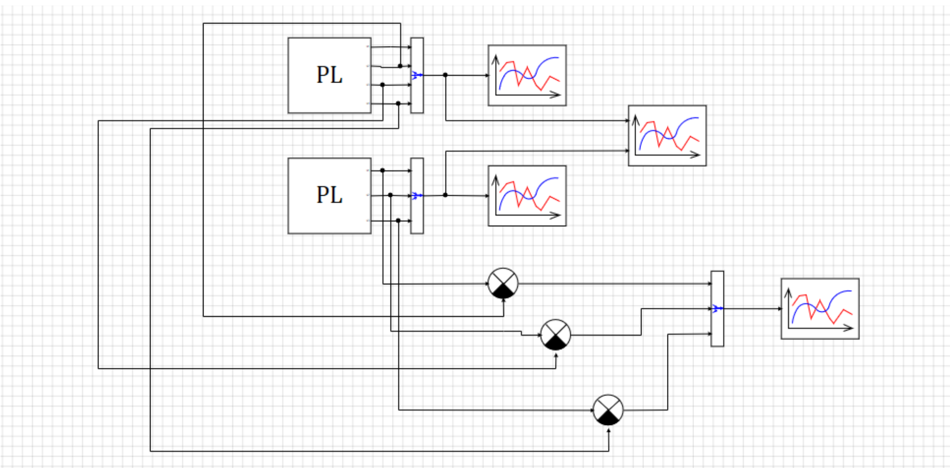


Рисунок 1: Схема для моделирования в SimInTech

На Рисунок 2 представлен график исходной системы (2).

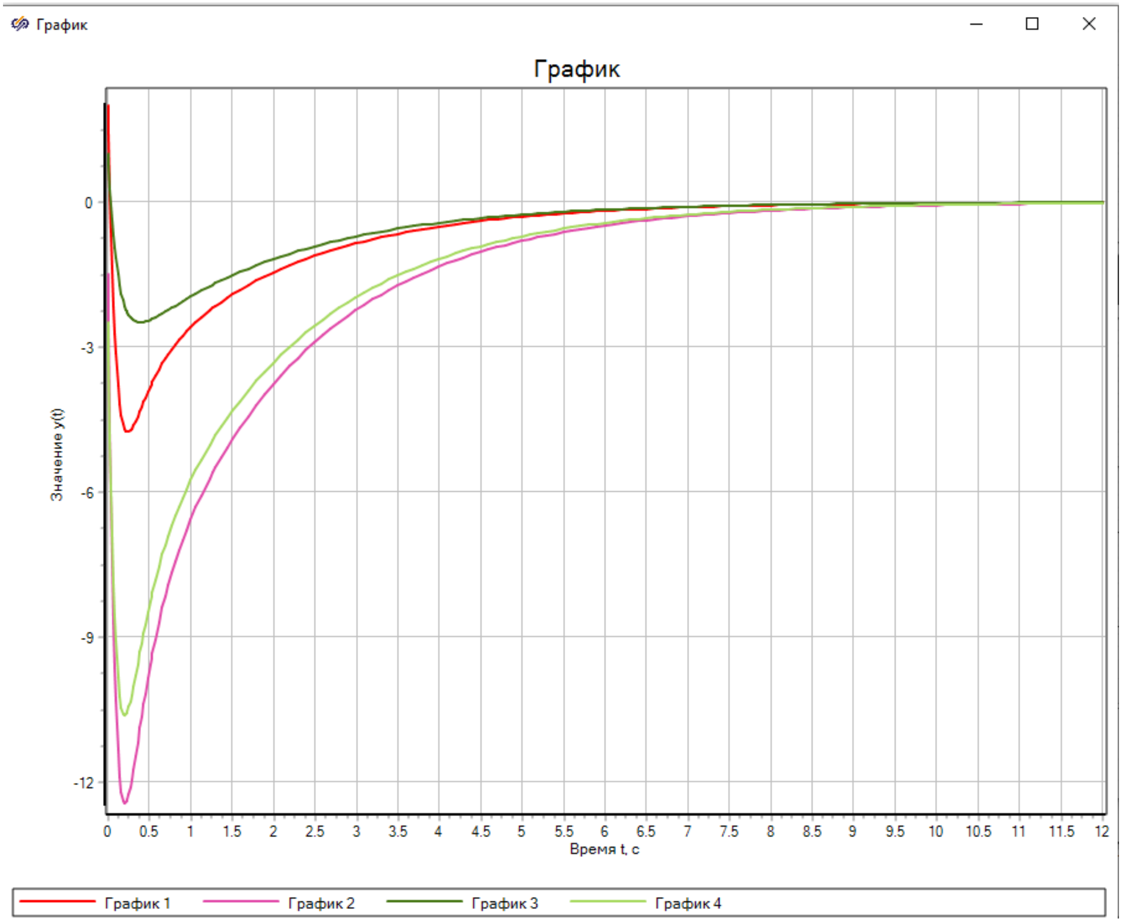


Рисунок 2: График исходной системы (2)

На Рисунок 3, Рисунок 5, Рисунок 7, Рисунок 9 показаны графики систем с пониженным порядком. Из этих графиков можно заметить, что все $\dot{x}_i$ получили другой характер движения. Также на Рисунок 4, Рисунок 6, Рисунок 8, Рисунок 10 приведены графики ошибки между системами. Если сравнивать графики ошибок с разными выраженными x_i, видно что в разных случаях ошибка отличается. Можно предположить, что это зависит от коэффициента при x_i в уравнении при голономной связи (см. (4)).

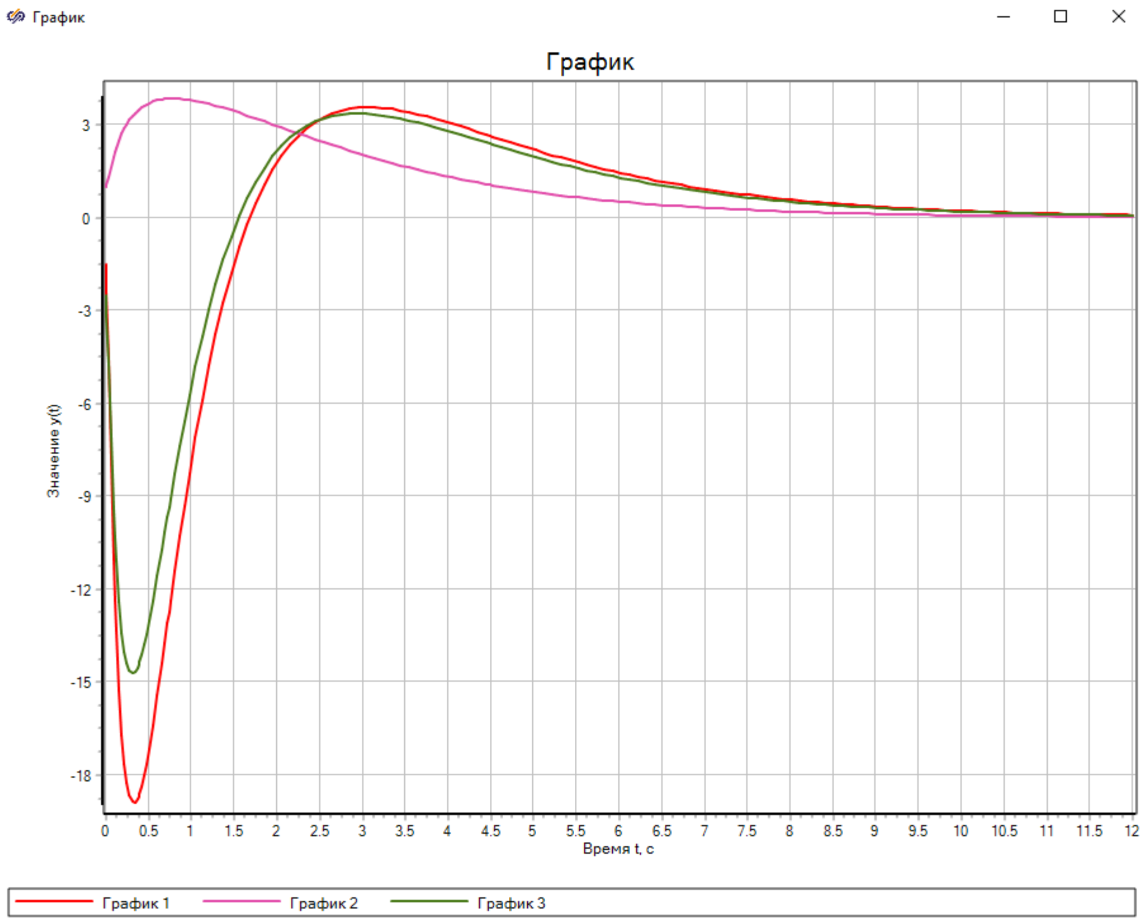


Рисунок 3: График системы (5) с пониженным порядком, выражен x1

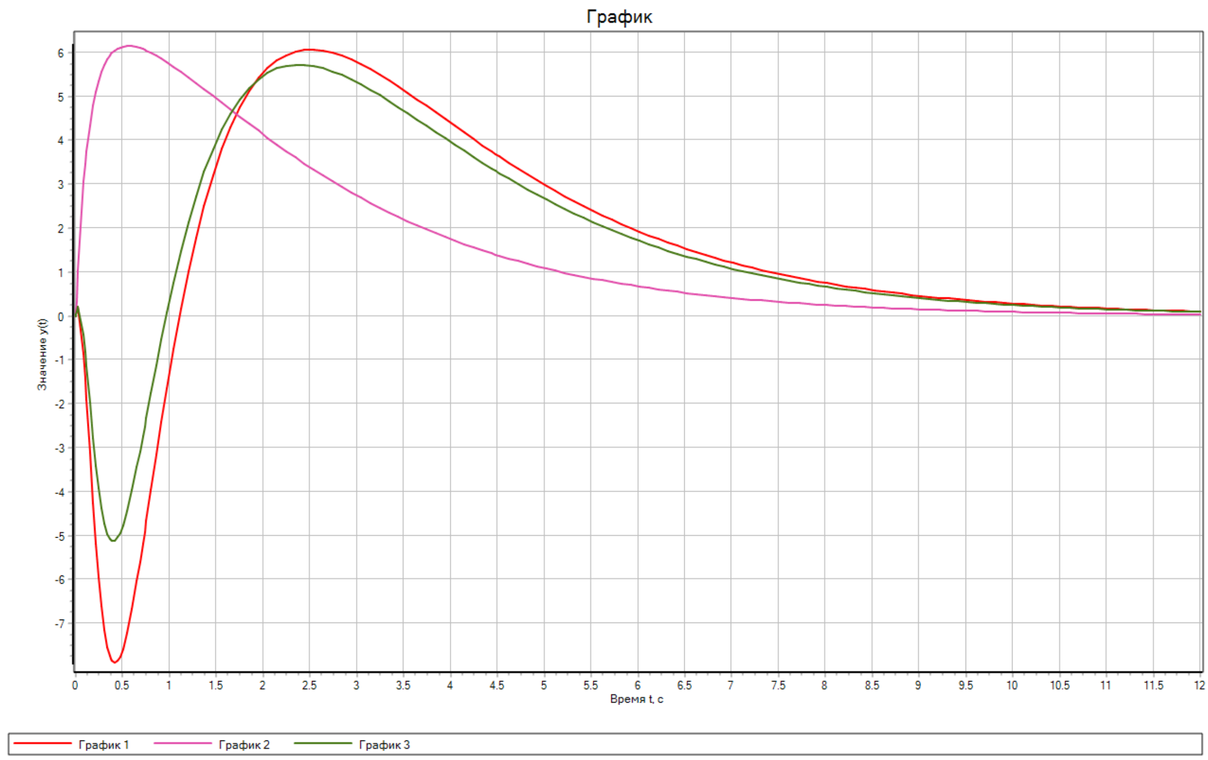


Рисунок 4: Ошибка между исходной системой(2) и системой (5)

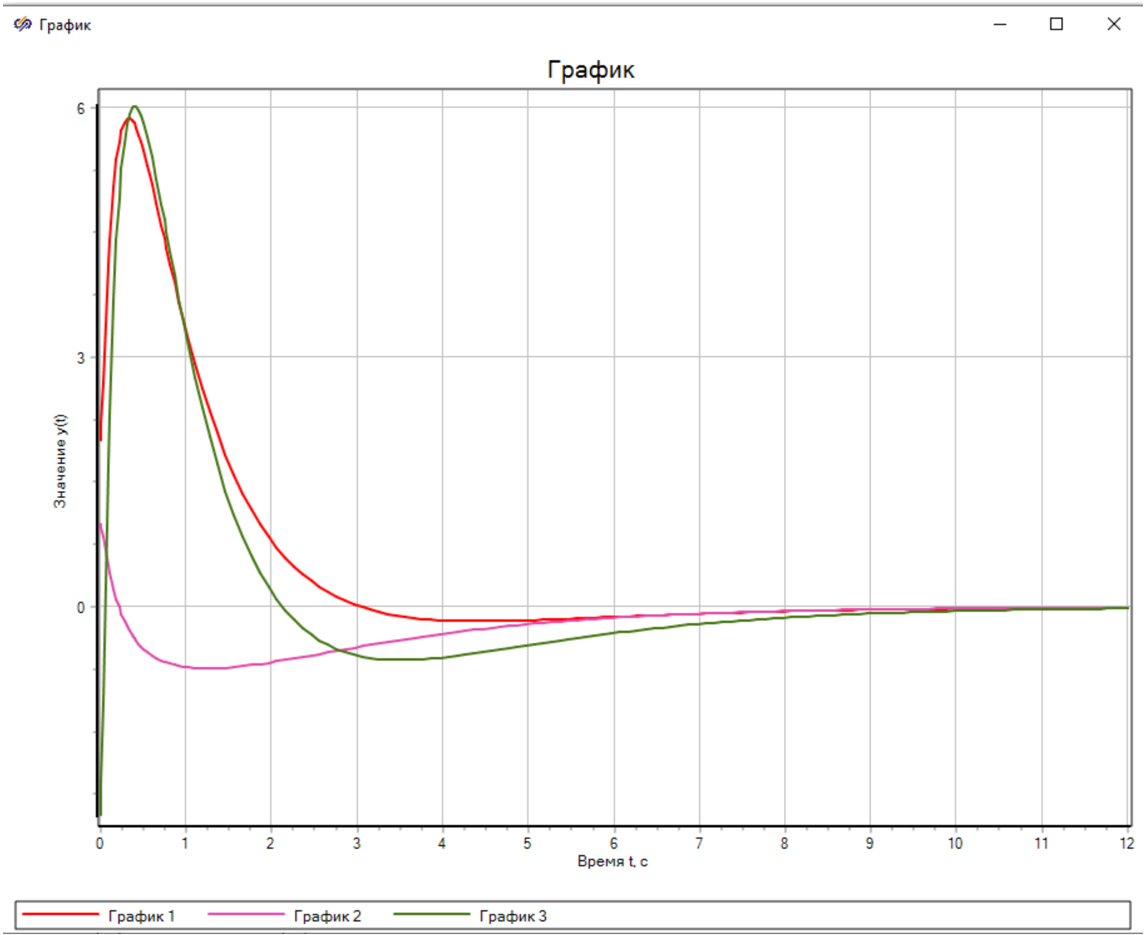


Рисунок 5: График для системы (6), выражен x2

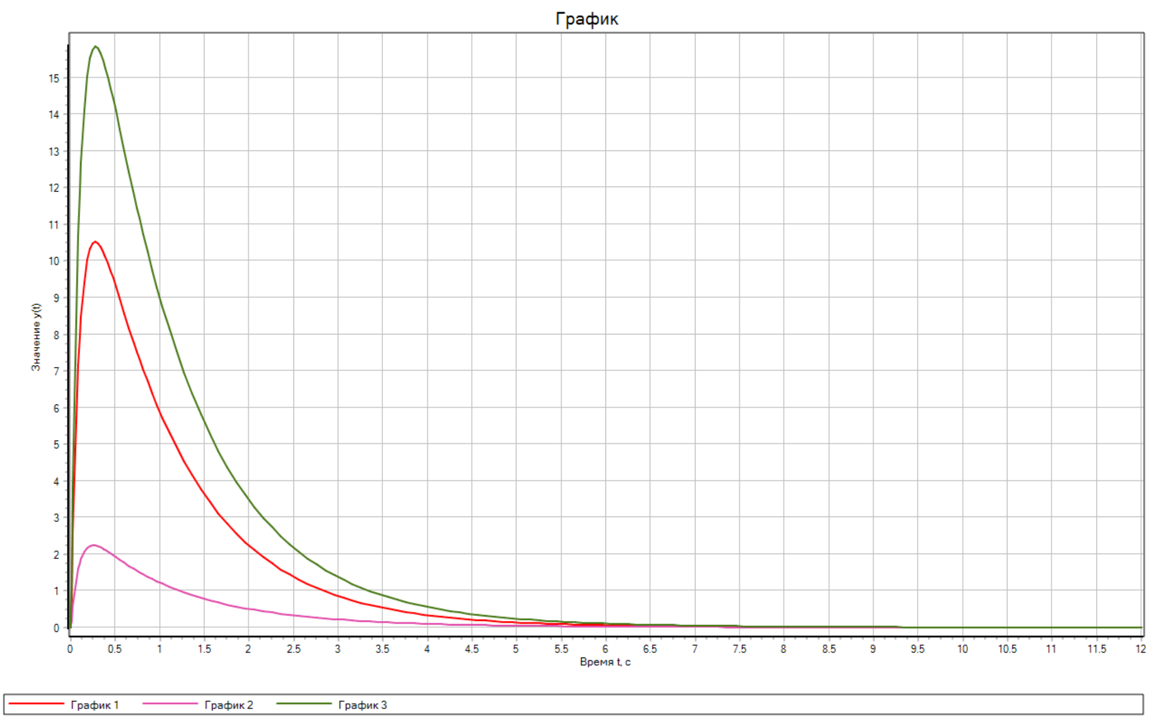


Рисунок 6: Ошибка между системой (2) и системой (6)

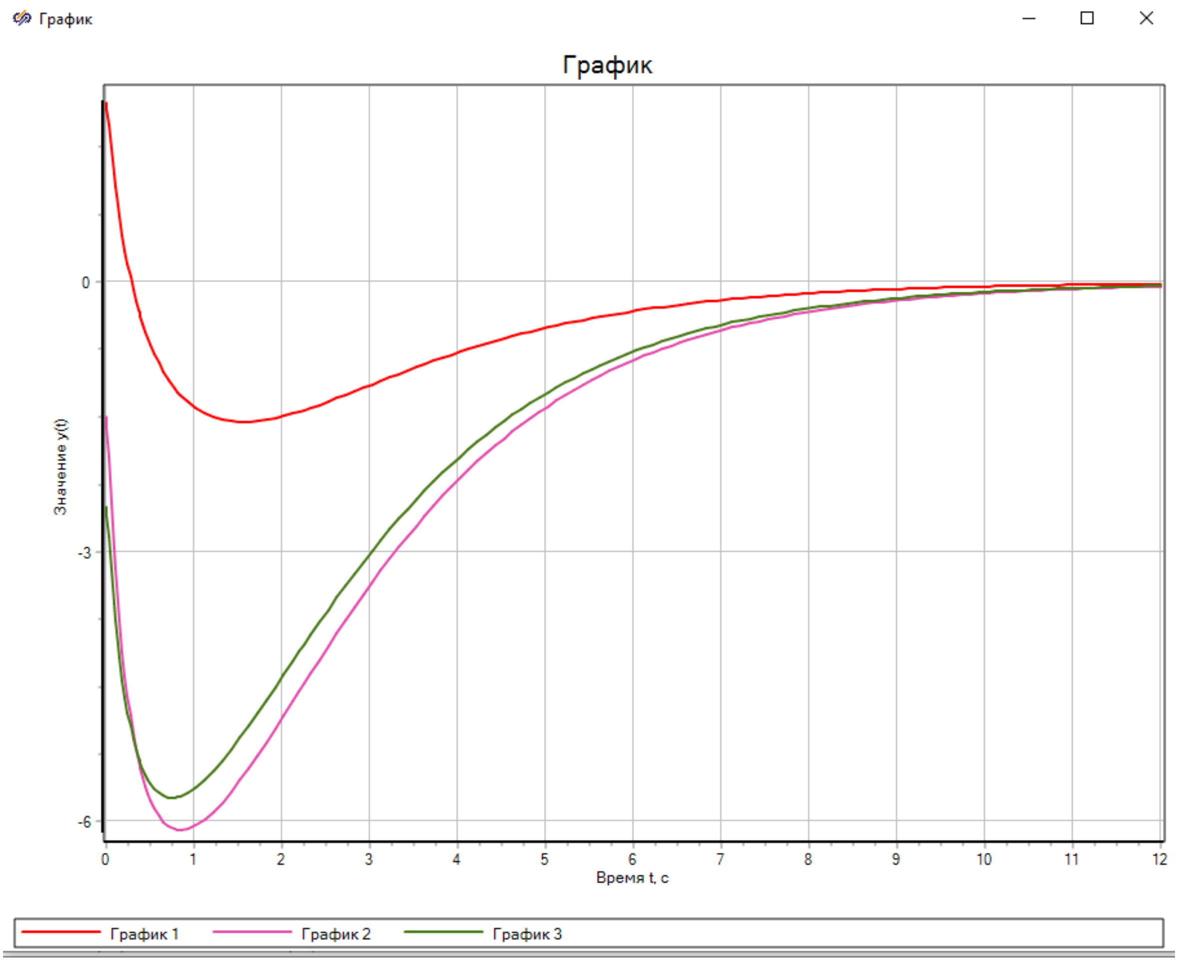


Рисунок 7: График системы (7), выражен x3

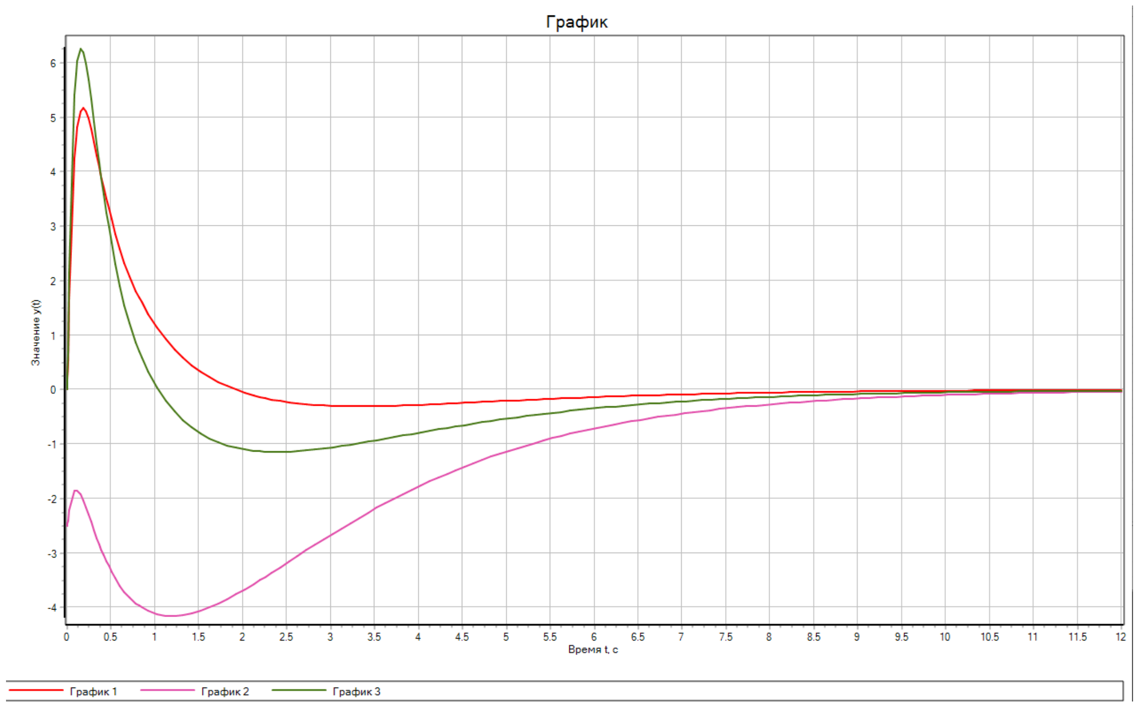


Рисунок 8: График ошибки между системой (2) и системой (7)

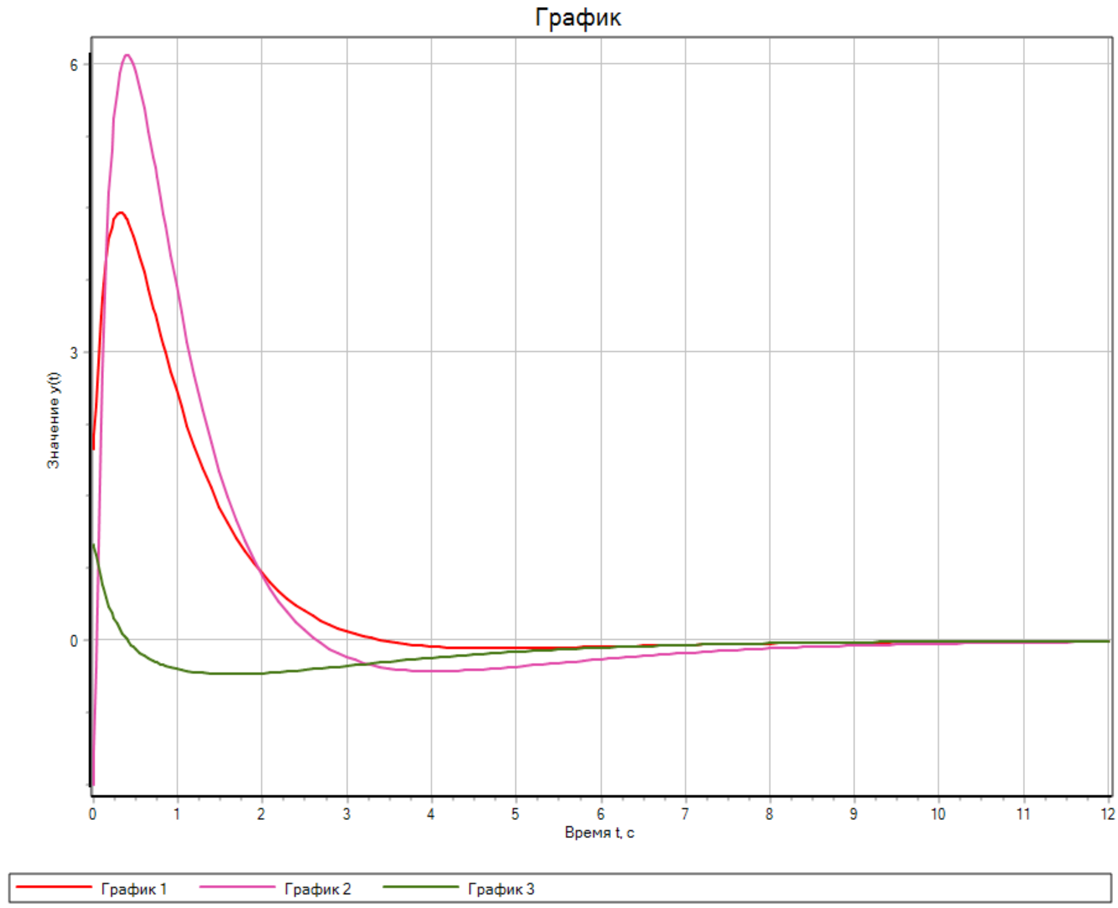


Рисунок 9: График системы (8)

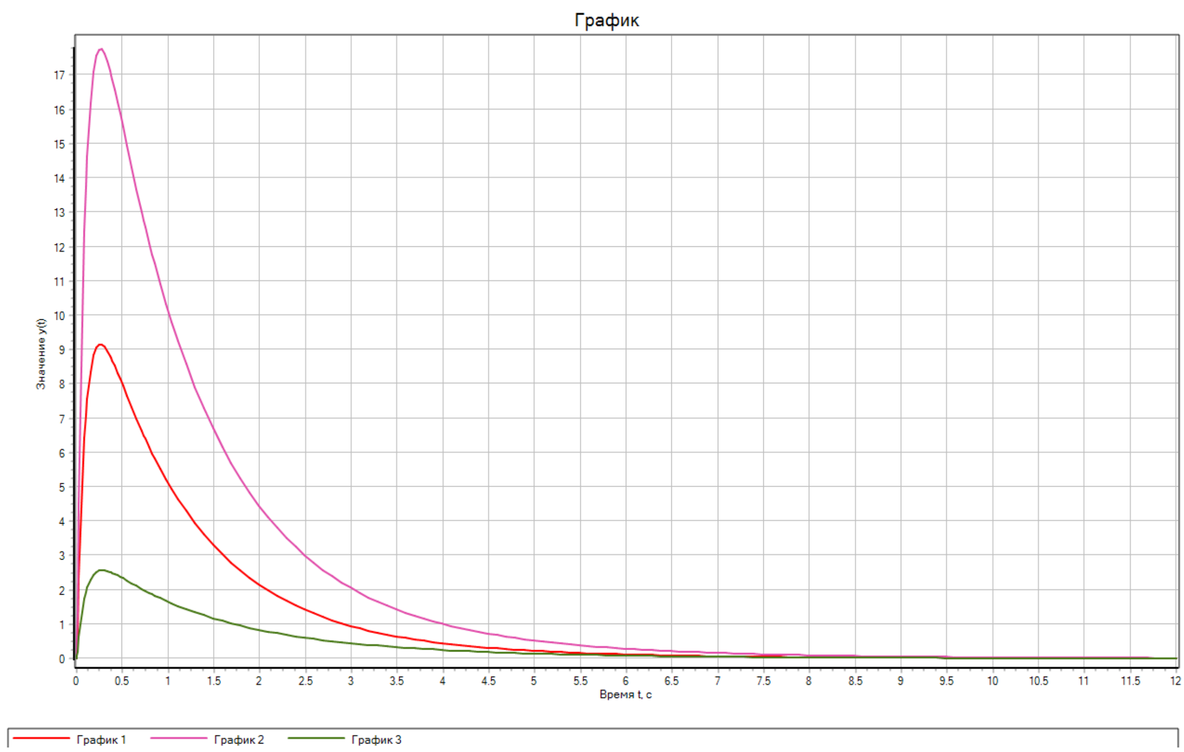
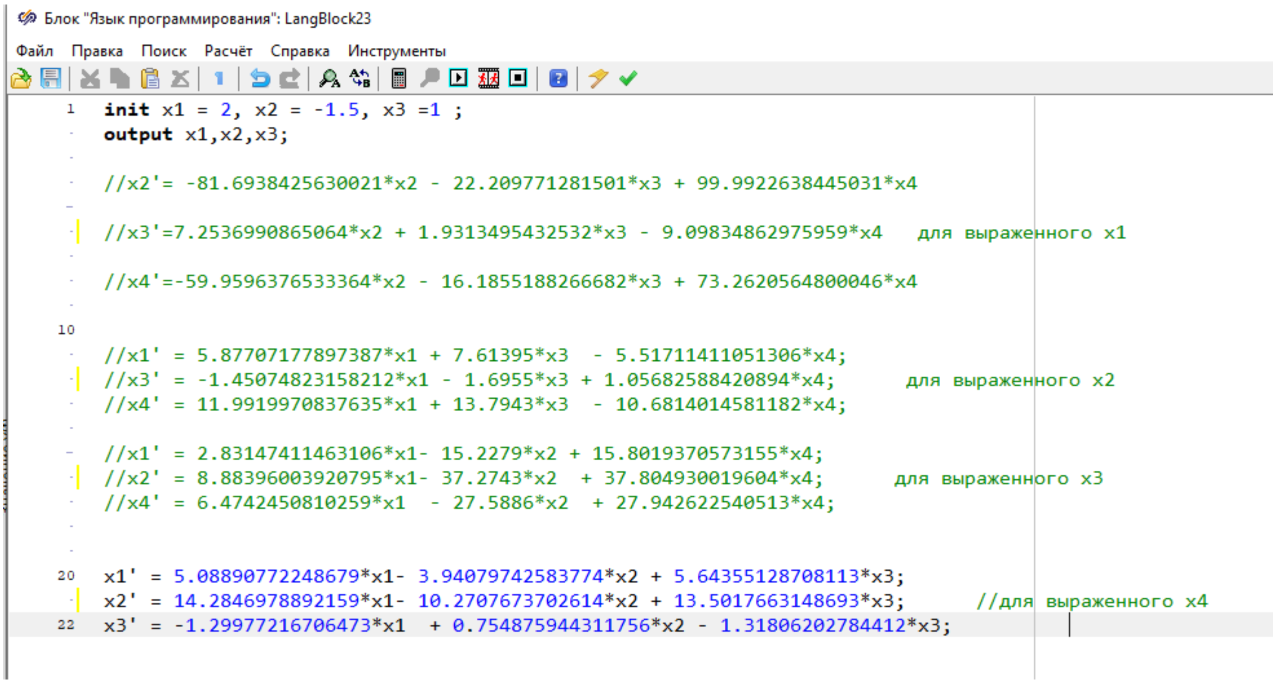


Рисунок 10: График ошибки между системой (2) и системой (8)

Параметры используемые в схеме:



Блок "Язык программирования": LangBlock23

Файл Правка Поиск Расчёт Справка Инструменты

```
init x1 = 2, x2 = -1.5, x3 =1 ;
output x1,x2,x3;

//x2'= -81.6938425630021*x2 - 22.209771281501*x3 + 99.9922638445031*x4

//x3'=7.2536990865064*x2 + 1.9313495432532*x3 - 9.09834862975959*x4   для выраженного x1

//x4'=-59.9596376533364*x2 - 16.1855188266682*x3 + 73.2620564800046*x4


//x1' = 5.87707177897387*x1 + 7.61395*x3  - 5.51711411051306*x4;
//x3' = -1.45074823158212*x1 - 1.6955*x3 + 1.05682588420894*x4;     для выраженного x2
//x4' = 11.9919970837635*x1 + 13.7943*x3  - 10.6814014581182*x4;

//x1' = 2.83147411463106*x1- 15.2279*x2 + 15.8019370573155*x4;
//x2' = 8.88396003920795*x1- 37.2743*x2  + 37.804930019604*x4;     для выраженного x3
//x4' = 6.4742450810259*x1  - 27.5886*x2  + 27.942622540513*x4;


x1' = 5.08890772248679*x1- 3.94079742583774*x2 + 5.64355128708113*x3;
x2' = 14.2846978892159*x1- 10.2707673702614*x2 + 13.5017663148693*x3;     //для выраженного x4
x3' = -1.29977216706473*x1  + 0.754875944311756*x2 - 1.31806202784412*x3;
```

Рисунок 11: Параметры используемые для моделирования