# P14.1: Fourierkoeffizienten.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig und $2\pi$-periodisch mit F.K's $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$

(a) z.Z.: $\forall y \in \mathbb{R}: \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

f stetig $\rightarrow$ f R.I.

Bew: Sei

$$g(y) := \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x)\,dx$$

und sei $F$ eine Stammfkt. von $f$.

Es gilt: $$\frac{d}{dy} g(y) = \frac{d}{dy} \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x)\,dx = \frac{d}{dy}\left[F(y+\pi) - F(y-\pi)\right]$$

$$= f(y+\pi) - f(y-\pi) \underset{f,\,2\pi \text{ periodisch}}{=} 0$$

(b) F.K's von $g(x) = f(x-y)$

$$\hat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, e^{-ikx}\,dx \quad ; \text{ Substituiere: } \xi = x-y,\ d\xi = dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(\xi)\, e^{-ik(\xi+y)}\,d\xi \overset{(a)}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-iky} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, e^{-ik\xi}\,d\xi}_{\equiv \hat{f}_k}$$

$$\boxed{\hat{g}_k = \frac{e^{-iky}}{2\pi} \hat{f}_k}$$

(c) F.k.'s von $h(x) = f(2x)$

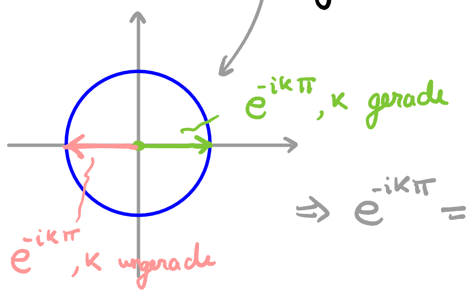
h ist nun $\pi$-periodisch!

$$\hat{h}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(2x) \cdot e^{-ikx}\,dx \quad ; \text{ Substituiere } \xi = 2x \rightarrow d\xi = 2\,dx$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(\xi) \cdot e^{-\frac{ik\xi}{2}}\,d\xi = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-2\pi}^{0} f(\xi)\, e^{-i\frac{k}{2}\xi}\,d\xi + \int_{0}^{2\pi} f(\xi)\, e^{-i\frac{k}{2}\xi}\,d\xi\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\int_{0}^{2\pi} f(\xi+2\pi)\, e^{-i\frac{k}{2}(\xi+2\pi)}\,d(\xi+2\pi) + \int_{0}^{2\pi} f(\xi)\, e^{-i\frac{k}{2}\xi}\,d\xi\right]$$

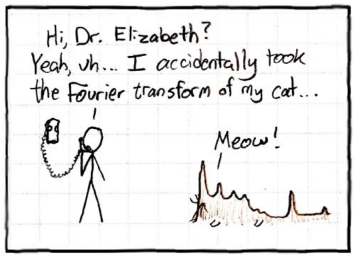
$$= \frac{1}{4\pi}\left[ e^{-ik\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\, e^{-i\frac{k}{2}\xi}\, d\xi + \int_0^{2\pi} f(\xi)\, e^{-i\frac{k}{2}\xi}\, d\xi \right]$$




$\Rightarrow e^{-ik\pi} = (-1)^k$

$$\Rightarrow \hat{h}_k = \begin{cases} 0 & \text{, falls } k \text{ ungerade} \\ \hat{f}_{\frac{k}{2}} & \text{, falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

## P14.2: Fourierkoeffizienten von $|\cos(\frac{x}{2})|$




(a) $$\hat{f}_k^{\cos} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx$$

Wieso nicht sinus koeff?

Sinus ist ungerade!, d.h. $f(-x) = -f(x)$, i.e. bei einem symm. Intervall wie $[-\pi, \pi]$ heben die positive und negative Beiträge genau auf. Bem: $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin x \, dx = 0$

Da $f(x)$ gerade ist, ist $f(x)\cdot \sin(x)$ ungerade, d.h.

gerade × ungerade

$$\hat{f}_k^{\sin} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = 0 \quad \forall k$$

Weiter mit der Aufgabe: Part Int: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\pi \cdot \hat{f}_k^{\cos} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\frac{x}{2}\right) \cos(kx)\, dx = 2\left[\sin\frac{x}{2}\cdot \cos(kx)\Big|_{-\pi}^{+\pi} + k\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin\frac{x}{2}\, dx\right]$$

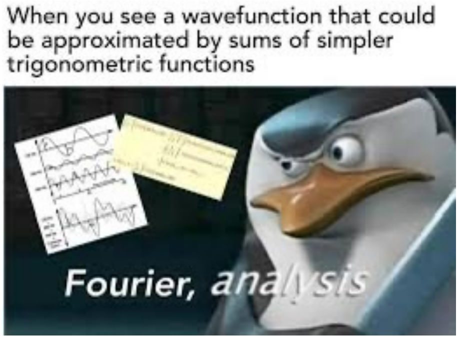
$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{v}\, d\big(\underbrace{\sin(\tfrac{x}{2})}_{u}\big)$$

$$= 2\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot \cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + 2k\left(-\sin(kx)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{+\pi} - k\int_{-\pi}^{\pi} k \cos(kx)\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx\right)\right]$$

$$= 4\cdot(-1)^k - 0 + 4k^2\pi\, \hat{f}_k^{\cos}$$

$$\Rightarrow \quad \pi \hat{f}_k^{\cos} = 4(-1)^k + 4k^2\pi \hat{f}_k^{\cos}$$

$$\hat{f}_k^{\cos} = \frac{4(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}$$




(b) $\hat{f}_k^{\cos} = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} \quad , k \in \mathbb{N}_0$

$k \in \mathbb{N}_0$ : $\cos(y) = \frac{e^{-iy} + e^{iy}}{2}$ und $e^{\pm ik\pi} = (-1)^k$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\frac{\left(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}\right)}{2}dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-i(k+\frac{1}{2})x} + e^{-i(k-\frac{1}{2})x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{-i(k-\frac{1}{2})x}}{-i(k-\frac{1}{2})} + \frac{e^{-i(k+\frac{1}{2})x}}{-i(k+1/2)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

weg I: $\sin\lambda y = \frac{e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda y}}{2i} \Rightarrow 2i\sin(\lambda y) = e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda y}$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\overbrace{e^{-i(k-\frac{1}{2})\pi} - e^{+i(k-\frac{1}{2})\pi}}^{-2i\sin((k-1/2)\pi)}}{-i(k-\frac{1}{2})} + \frac{e^{-i(k+\frac{1}{2})\pi} - e^{+i(k-\frac{1}{2})\pi}}{-i(k+1/2)}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{-2\cancel{i}\sin((k-\frac{1}{2})\pi)}{-\cancel{i}(k-1/2)} + \frac{-2\cancel{i}\sin((k+1/2)\pi)}{-\cancel{i}(k+1/2)}\right]$$

oder

$$e^{-i(k-1/2)\pi} - e^{i(k-1/2)\pi} = e^{-ik\pi}\cdot i - e^{ik\pi}\cdot(-i) = 2i(-1)^k$$

$$e^{-i(k+1/2)\pi} - e^{i(k+1/2)\pi} = e^{-ik\pi}\cdot(-i) - e^{-ik\pi}\cdot i = -2i(-1)^k$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}\pi} \left[ \frac{\cancel{2}\cancel{i}(-1)^k}{-\cancel{i}(k-1/2)} + \frac{-\cancel{2}\cancel{i}(-1)^k}{-\cancel{i}(k+1/2)} \right]$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi} \left[ \frac{1}{k+1/2} - \frac{1}{k-1/2} \right] = \frac{(-1)^k}{2\pi} \cdot \frac{-1}{k^2 - 1/4}$$

$$= \frac{2(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}$$

(c) Sei $L := \frac{1}{2}$, dann gilt wegen $|-\sin(\frac{x}{2})| \leq \frac{1}{2} \; \forall x \in \mathbb{R}$, daß $\cos(\frac{x}{2})$ Lipschitz stetig ist. Es gilt nach dem Satz über die Punktweise Konvergenz von Fourierreihen, daß die $\forall x \in \mathbb{R}$ punktweise konvergiert. Also:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; |\cos(\tfrac{x}{2})| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = \frac{f_0^{\cos}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k^{\cos} \cos(kx)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos(x) - \frac{4}{15\pi}\cos(2x) + \ldots$$

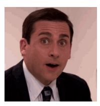
Sogar glm. konvergent, da f stetig und die F.K. absolut summierbar sind, also:

$$\sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}_k| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \leq \frac{4}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

$(4k^2-1) \geq 3k^2$

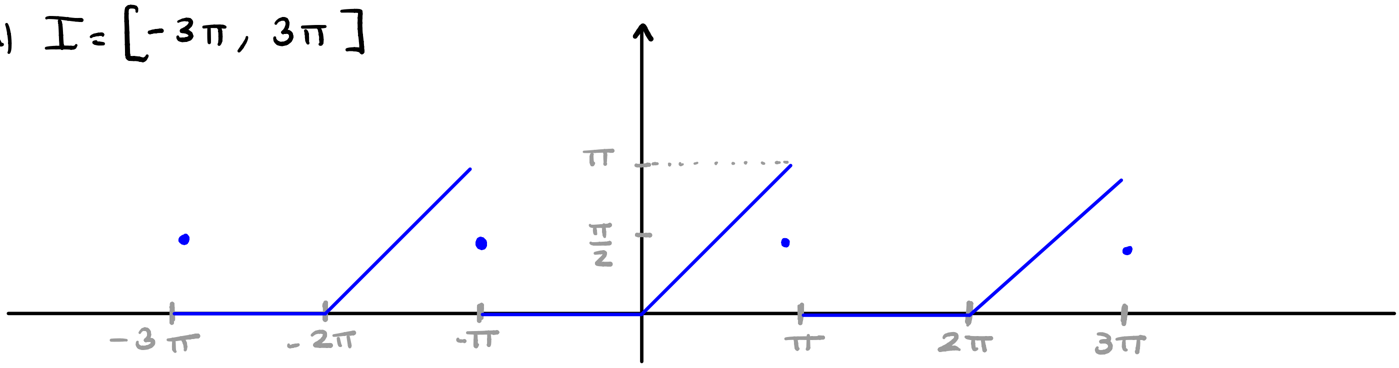
Basel Problem!

## P14.3: Fourierreihen.



Sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi) \\ \pi/2, & x = \pi \end{cases}$ $\quad 2\pi$ - Periodisch!

(a) $I = [-3\pi, 3\pi]$



(b) $$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \overset{(k\neq 0)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{-ik}\left(x\, e^{-ikx}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-ikx}\, dx\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{2\pi i k}\left(\pi \cdot e^{-ik\pi} - 0 - \frac{e^{-ikx}}{-ik}\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{\overset{=i^2}{-1}}{2\pi i k}\left(\pi \cdot e^{-ik\pi} + \frac{e^{-ik\pi}}{ik} - \frac{1}{ik}\right)$$

$$= \frac{i}{2\pi k}\left(\pi \cdot (-1)^k + \frac{(-1)^k - 1}{ik}\right)$$

$$= \frac{i(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2}$$

und $$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{4}$$

(c) f ist stückweise stetig diff.bar, d.h. also konv. die Fourierreihe bei den stetigen bereiche gegen f und bei unstetigkeiten ($x \in (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$) gegen den Mittelwert vom rechts- und linksseitigen grenzwerte, somit konvergiert die F.R. pktweise gegen f.

Da die Grenzfkt. aber unstetig ist, ist dies nicht gleichmäßig konvergent!