Blatt-11

Ana1 Ph, Grp1
(eklavya.goyal@tum.de)

P11.

(a) $$\frac{4!}{x(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \left[\binom{x}{4}\right]^{-1}$$

Binomial Koeffezient

Schritt 1: In Linearfaktoren zerlegen

(Ansatz) $$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}$$

Die zu bestimmenden Koeffizienten

Schritt 2: Ausmultiplizieren

$$\left[\binom{x}{4}\right]^{-1} = \frac{A(x-1)(x-2)(x-3) + Bx(x-2)(x-3) + Cx(x-1)(x-3) + Dx(x-1)(x-2)}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}$$

Schritt 3: mit dem Nenner (beide Seiten) Multiplizieren.

$$4! = 24 = A(x-1)(x-2)(x-3) + Bx(x-2)(x-3) + Cx(x-1)(x-3) + Dx(x-1)(x-2)$$

$$\left.\begin{aligned}
x=0 &\implies 24 = -6A \implies A = -4\\
x=1 &\implies 24 = -2B \implies B = 12\\
x=2 &\implies 24 = -2C \implies C = -12\\
x=3 &\implies 24 = 6D \implies D = 4
\end{aligned}\right\}$$

Nun integrieren wir direkt:

$$I = \int dx \, \frac{4!}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \int dx \left[\frac{-4}{x} + \frac{12}{x-1} - \frac{12}{x-2} + \frac{4}{x-3}\right]$$

$$= -4\int\frac{dx}{x} + 12\int\frac{dx}{x-1} - 12\int\frac{dx}{x-2} + 4\int\frac{dx}{x-3}$$

$= -4 \ln|x| + 12 \ln|x-1| - 12 \ln|x-2| + 4 \ln|x-3| \boxed{+ C}$ wichtig! :)

$= 4 \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + 12 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| + C$

auf $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$

(b) $\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{(1+x)+x^2(1+x)} = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$

Nun, 2 optionen: entweder $(1+x^2) = (x-i)(x+i)$

$= \frac{A}{1+x} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i}$

oder, $= \frac{A}{1+x} + \frac{Bx + C}{1+x^2}$ Lineare Term

Idee: $\deg(N) = \deg(Z) + 1$

$\Rightarrow$ Stammfkt einfach!

Also, $1 = A(1+x^2) + \underbrace{(Bx+C)(1+x)}_{Bx^2 + (B+C)x + C}$

$x = -1 \implies A = 1/2$

$\left.\begin{array}{ll} x = i & \implies C - B + (B+C)i = 1 \\ x = -i & \implies C - B - (B+C)i = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C - B = 1 \\ C + B = 0 \end{array}\right\}$ ✓

$\Rightarrow C = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{1}{2}$

Nun integrieren wir:

$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int dx \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$

$= \frac{1}{2} \ln|1+x| + \frac{1}{2} \arctan|x| - \frac{1}{4} \ln|1+x^2| + C$

auf $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

P11.2: (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} =: I$

(1) Konvergenz?

problematische Stellen: $x \to 0^+ \wedge x \to \infty$

für $x \to 0^+$ gilt, daß $1+x \simeq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

[Rigoroser: Sei $(0<\alpha<0{,}01 \wedge x<\alpha)$]

oder anders gesagt: $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad (x \to 0^+)$

Also ist $\displaystyle I \simeq \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\varepsilon}$

definiert! d.h. $x \to 0^+$ ist keine Problemstelle mehr.

Nun für $x \to \infty$ gilt, daß $1+x \simeq x$, d.h.

$$\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \simeq \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

und da $\displaystyle\int_L^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{L}}$ für $L>0$ definiert ist

folgt, daß I konvergiert!

(2) Substituiere $\sqrt{x}$ weg, d.h. $z=\sqrt{x} \Rightarrow dz = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

Also $\displaystyle I = 2\int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{\infty}} \frac{dz}{1+z^2} = 2\arctan z \Big|_0^\infty = 2\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$

$= \pi$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\cosh(x)-1}}$

Wieder untersuchen wir das Verhalten bei $x \to \infty$ und $x \to 0^+$.

für $x \to 0^+$: Wir Taylorn mal $\cosh(x)$ um $x=0$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

also ist $\cosh(x) - 1 \simeq \frac{x^2}{2}$ in der nähe von 0 $(\mathcal{U}_0)$

Damit erhalten wir: $\dfrac{1}{\sqrt{\cosh(x)-1}} \simeq \dfrac{\sqrt{2}}{x}$

und wi $\varepsilon \to 0$ ist das integral $\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x}$

logarithmisch-divergent! Also divergiert das Integral wenn x gegen 0 geht.

Nur zur vollständigkeit, Verhalten wenn $x \to \infty$:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \simeq \frac{e^x}{2} \quad \text{für } x \to \infty$$

und $\cosh(x) - 1 \simeq \dfrac{e^x}{2} \quad (x \to \infty)$

Also: $\dfrac{1}{\sqrt{\cosh(x)-1}} \simeq \sqrt{2}\, e^{-x/2}$ exponential-decay!

$$\sqrt{2}\int_L^{\infty} e^{-x/2}\,dx = 2\sqrt{2}\, e^{-x/2}\Big|_{\infty}^{L} = \frac{2\sqrt{2}}{e^{L/2}} \Rightarrow \text{konvergiert!}$$

Damit ist $x \to \infty$ kein problem, aber $x \to 0$ schon, also divergiert das Integral!

Eine Aufgabe aus Klausur MA9202 WS2014/15 von S. Warzel

6. **Integration** **[5 Punkte]**

(a) Berechnen Sie das folgende Integral für alle $x \in \mathbb{R}$. (HINWEIS: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$) **[3]**

$$\int_0^x 2t \arctan(t) \mathrm{d}t = \quad (1+x^2)\arctan(x) - x$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Integral $\int_1^\infty x^\alpha \mathrm{d}x$ absolut konvergent? **[2]**

$$\alpha \in \quad (-\infty, -1)$$

LÖSUNG:

(a) $\int_0^x 2t \arctan(t) \mathrm{d}t = \left[t^2 \arctan(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \mathrm{d}t = x^2 \arctan(x) - \int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2} \mathrm{d}t$
$= x^2 \arctan(x) - \int_0^x \mathrm{d}t + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = x^2 \arctan(x) - x + \left[\arctan(t)\right]_0^x = (x^2+1)\arctan(x) - x.$

(b) Der Integrand ist positiv, also sind Konvergenz und absolute Konvergenz äquivalent. Wir berechnen $\int_1^x t^\alpha \mathrm{d}t \overset{\alpha \neq -1}{=} \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^x = -\frac{1}{1+\alpha} + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \to \begin{cases} -\frac{1}{1+\alpha} \in \mathbb{R} & \text{für } \alpha < -1, \\ \infty & \text{für } \alpha > -1. \end{cases}$
Für $\alpha = -1$ ist das uneigentliche Integral bekanntermaßen nicht konvergent.