Taylorentwicklung

<u>Satz von Taylor</u>: Sei $f \in \mathcal{C}^n((a,b))$ und $\frac{d f^{(n)}}{dx} =: f^{(n+1)}$ existiert auf (a,b), dann existiert für $x, x_0 \in [a,b]$ mit $x \neq x_0$ ein ξ zwischen x_0 und x (also $\xi \in [\min(x_0,x), \max(x_0,x)]$, so daß

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{T_n f(x;x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n f(x;x_0)}}$$

Wolf's Notation: $\left(T_n(x;x_0)\right)$ $\left(R_n(x;x_0)\right)$

gilt. $T_n f(x;x_0)$ heißt das <u>n-te Taylorpolynom</u> von x um x_0.
$R_n f(x;x_0)$ heißt das <u>Lagrange-Restglied</u>.

<u>Def</u>: (Taylorreihe) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ mit Randpunkten x und x_0.
Für ein $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ heißt die (konvergente <u>oder</u> divergente) Reihe

$$\boxed{T_\infty f(x;x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

die <u>Taylorreihe</u> von f bei x_0.

Präsenzaufgaben:

P13.1: Ordnung: 6 um $x_0 = 0$

↑ höchste grad

(a) $\sin(x) = f(x)$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \mathcal{O}(x^7)$$

d.h., also: $T_6 f(x;0) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

(b) Aus (a) folgt:

$$f(x) = \sin(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2(2k+1)}}{(2k+1)!} = x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{10} + \mathcal{O}(x^{14})$$

d.h.: $T_6 f(x;0) = x^2 - \frac{1}{6}x^6$

(c) $f(x) = \sin(x^2+2x)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2+2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad - (*)$$

$$\Rightarrow (x^2+2x)^{2k+1}$$

$$x^{2k+1} \cdot (x+2)^{2k+1}$$

$$x^{2k+1} \cdot \left[\sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} \cdot x^{2k+1-i} \cdot 2^i\right]$$

$$k=0: \quad x \cdot \left[\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \cdot x^{1-i} \cdot 2^i\right] = x(x+2)$$

$$k=1: \quad x^3 \cdot \left[\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \cdot x^{3-i} \cdot 2^i\right] = x^3(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$$

$$k=2: \quad x^5 \left[\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} \cdot x^i \cdot 2^{5-i}\right] = x^5(32 + 80x + \mathcal{O}(x^2))$$

Also insgesamt:

$$T_6 f(x;0) = \overbrace{\frac{1\cdot(x^2+2x)}{1!}}^{k=0 \text{ in } (*)} + \overbrace{(-1)\cdot\frac{x^6+6x^5+12x^4+8x^3}{3!}}^{k=1 \text{ in } (*)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1\cdot\left(80x^6+32x^5+O(x^7)\right)}{120}}_{k=2 \text{ in } (*)}$$

$$= 2x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^4 - \frac{11}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^6$$

(d) $f(x) = \sin(\sin(x))$

Bemerkung: Man kann auch Potenzreihen in Potenzreihen einsetzen!

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (\sin(x))^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

nun sei $y = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$

$$f(y) = \sum \frac{(-1)^k (\sin(x))^{2k+1}}{(2k+1)!} = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + O(y^7)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right)^3$$

$$+ \frac{1}{120}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right)^5 + O(y^7)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + O(x^7)\right)$$

$$+ \frac{1}{120}\left(x^5 + O(x^7)\right)$$

$$(*)\quad \left(\underline{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\cdot\left(\underline{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\cdot\left(\underline{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) = x^3 + (1+1+1)\,x^2\left(-\frac{x^3}{6}\right) + O(x^7)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + O(x^7)$$

d.h.: $T_6 f(x;0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$

P13.2: (a) $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1-x}{1+x}$

geom. reihe

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

$$f(x) = \frac{1 - x - 1 + 1}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$$

$$\overset{(*)}{=} -1 + 2\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \pm \dots\right)$$

$$= -1 + 2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 \pm \dots$$

Konvergenzradius der Reihe ist $\rho := 1$.

Partialsumme

Alternierende Reihe $\longrightarrow$ $\forall x, |x| < \rho$ $\quad \lim_{n\to\infty} s_n \in \underbrace{[s_n, s_{n+1}]}_{\text{upper \& lower bounds!}}$

Für $x \in [0, \frac{1}{4}]$ ist $\quad 0 \leq 2x^4 = \frac{1}{128} < 1\% = \frac{1}{100}$, i.e. schon das dritte polynom genügt:

$$\underbrace{|f(x) - T_3 f(x;0)| \leq 2x^4}_{\boxed{\text{absolute error}}}$$

$$T_3 f(x;0) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3$$

Für absolute error passt $T_3 f(x;0)$! Wir überprüfen mal ob dies auch für relative error gilt!

$$\left| \frac{f(x) - T_3 f(x;0)}{f(x)} \right| \quad \text{für} \quad x \in [0, \tfrac{1}{4}] \longrightarrow f(x) \in [\tfrac{3}{5}, 1]$$

$$\frac{1-0}{1+0} = 1 \qquad \frac{1 - 1/4}{1 + 1/4} = \frac{3}{5}$$

Also das „worst case" Approximation wäre

$$\left| \frac{f(x) - T_3 f(x;0)}{f(x)} \right| \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{128} = \frac{1.6}{128} > 1\%$$

D.h. dass wir noch ein Term mitnehmen müssen um das relative Error $< 1\%$ zu bekommen!

$$\left| \frac{f(x) - T_4 f(x;0)}{f(x)} \right| \leq \frac{1.6}{512} < 1\%$$

Also $\quad T_4 f(x;0) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 \quad$ wäre die

„richtige" Antwort, i.e. das approximiert auch die relativen Fehler gut!

P13.2 (b) $E(v) = \dfrac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Wir führen $\beta := \dfrac{v^2}{c^2}$ ein.

$\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-(n-1))}{n!}$

Wie wir schon wissen:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = 1 + \binom{-1/2}{1} x + \binom{-1/2}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x}{8} + \mathcal{O}(x^3)$$

Das gilt für $|x| < 1$!

Somit ist für $|\beta| < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-\beta^2)^n = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6)$$

Also:

$$E(v) = \underbrace{m_0 c^2}_{\text{dies ist die Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{nicht relativistische Kinetische Energie}} + \underbrace{\frac{3}{8} m_0 v^2 \frac{v^2}{c^2}}_{\text{erste relativistische Korrekturterm!}} + m_0 v^2 \mathcal{O}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

P13.3 (a) Für jede Lipschitz-stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert eine Folge von polynomen, die glm. gegen f konvergiert.

Menge versehen mit einem Metrik
(i) $d(x,y)=0 \iff x=y$ (ii) $d(x,y)=d(y,x)$
(iii) $d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$

Lip-stetigkeit: M, N metrischer Räume, $f: M \to N$ heißt Lip-stetig, falls gilt:

$$\exists L>0: \forall x,y \in M: \quad d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x,y)$$

Glm. Konvergenz: $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$, $f_n: D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert glm. gegen „Grenzfkt" f, falls $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

Die Aussage ist falsch. Als gegenbsp. sei $f(x) = \sin(x)$, die Lip-stetig mit $L = 1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 1$ ist. Wenn es eine Folge von polynomen $(P_n)_n$ gäbe, die glm. gegen f konvergetier, dann gälte es für einen festen aber bieliedigen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \qquad - (*)$$

Aus (*) und (*) folgt folgends: $(-1 \leq \sin(x) \leq 1)$ -(*)

1) Aus gleichmäßige Konvergenz von polynomen $(P_n)_n$ folgt, daß die Fehler „höchstens" ε ist, d.h.

$$-\varepsilon \leq \sin(x) - P_n(x) \leq \varepsilon$$

2) Nun mit (1), (*) und (*) haben wir insgesamt:

$$-1-\varepsilon \leq -\sin(x) - \varepsilon \leq P_n(x) \leq \sin(x) + \varepsilon \leq 1+\varepsilon$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, d.h. daß $P_n(x)$ eine Konstante Fkt ist ($\forall n > n_0$), denn sonst:

$$\infty = \lim_{x\to\pm\infty} |P_n(x)| \leq 1+\varepsilon$$

Was offensichtlich ein widerspruch ist. Eine Folge konst. Fkt kann nicht gegen $\sin x$ konvergieren, Also ist die Aussage Falsch.

(b) Sei $f:(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ glm. stetig. Dann existiert eine Folge von polynomen, die glm. gegen f konvergiert.

Glm-Stetigkeit: Sei $f: \mathbb{R} \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, dann ist f glm. stetig auf $\mathcal{U}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathcal{U} : |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Satz: (Weierstraß'sche Approximationsatz):

Sei f stetig auf eine abgeschlossene Intervall $[a,b]$. Es existiert ein polynom $p(x)$ $\forall \varepsilon > 0$:

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Um das obige Satz zu anwenden, bräuchten wir noch, das funktion auf einem abg. Intervall zu erweitern!

Sei dazu $(x_n)_n \subseteq (0,1)$, $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ eine Folge. Aus Stetigkeit von f folgt, daß $f(x_n)$ eine Cauchyfolge ist, da:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_m, x_n \in (0,1) : |x_m - x_n| < \delta \Longrightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$

Cauchy-Folge

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

d.h. daß $f(x_n)$ konvergiert zu einen Punkt a.

Wir setzen $f(0) := a$ und wiederholen das Spiel für $x = 1$.

Damit ist der Funktion auf $[0,1]$ stetig und der Behauptung folgt aus Weierstraß'sche Approximationsatz.