P5.1: Cauchy'sche Produktformel:

Wiederholung: Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ abs. konv. und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{q^k \cdot q^{n-k}}_{q^{k+n-k} = q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} q^n}_{\text{summieren } q^n \ (n+1) \text{ mal}}$$

fängt bei Null an.

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, q^n}$$

da $|q| < 1$ ist, konvergieren die beide Reihen absolut, und damit auch deren produkt.

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, q^n - \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$\overset{(a)}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$= \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{1-q} = \frac{q}{1-q^2}$$, da $|q| < 1$

(c) $$\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \overset{(b)}{=} \frac{1/2}{(1 - 1/2)^2} = \frac{\cancel{1/2}}{(1/2)^{\cancel{2}}} = 2$$

P5.2: Konvergenzradius:

Wiederholung: $$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$ Cauchy-Hadamard.

Euler/Quotientenkrit.: $$R = \frac{1}{s}, \quad s := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$, falls s existiert.

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot z^n$$

I. Cauchy Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|}} = \frac{}{\frac{1}{2} \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \big(\underbrace{n^{2/n}}_{=:\, a_n}\big)}$$

Beh: $a_n \longrightarrow 1$

z.z.: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - 1| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Bew: $$a_n = n^{2/n} = e^{\frac{2}{n}\ln(n)} = e^{2\overbrace{\left(\frac{\ln n}{n}\right)}^{=:\,\xi}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \xi \to 0$, da n schneller gegen ∞ geht als $\ln(n)$

sehr wichtig in der Informatik!

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e^{2\cdot 0} = 1$$

und damit: $\boxed{R = 2}$

II. Euler:

(6) $z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, mit

Häufungspunkt von a_n sind 0 und 1 $\quad a_n = \begin{cases} 1 & , \exists k \in \mathbb{N}_0 : 2^k = n \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$

damit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \underline{R = 1}$

P5.3: Konvergenzradius:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{q^n} z^n \quad , k \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0$

$$s := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^k}{|q^n|}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{|q|} = \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{1}{s} = \underline{\underline{q}}$$

$\Rightarrow$ für $q > 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{q^n}$ konv. (abs.) und damit $a_n = \frac{n^k}{q^n}$ eine Nullfolge.

$\rightarrow$ vgl. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n$ Konv. bedingung??

$\hat{=} \sum_{n=0}^{\infty} (\omega)^n$, falls $|\omega| < 1$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{q}\right| < 1 \Rightarrow \underline{q > 1}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot z^n$

Euler: $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\cancel{n!}(n+1)}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\cancel{n!}}{n^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \cancel{(n+1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n}}{\cancel{n^n}} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}$$

$$R = \left(\frac{1}{e}\right)^{-1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n} = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{\frac{n}{e}} = 1$$

Cauchy hadamad besagt dies nur für $\limsup_{n\to\infty}$

berechne lim inf seperat! $\Rightarrow$ lim