P 7.1. Landau-Symbole

$\boxed{\text{Recap}}$: $f, g : \underset{\text{in } \mathbb{R}}{D} \to \mathbb{R}$, mit $x_0 \in \overline{D}$ Abschluss von D.

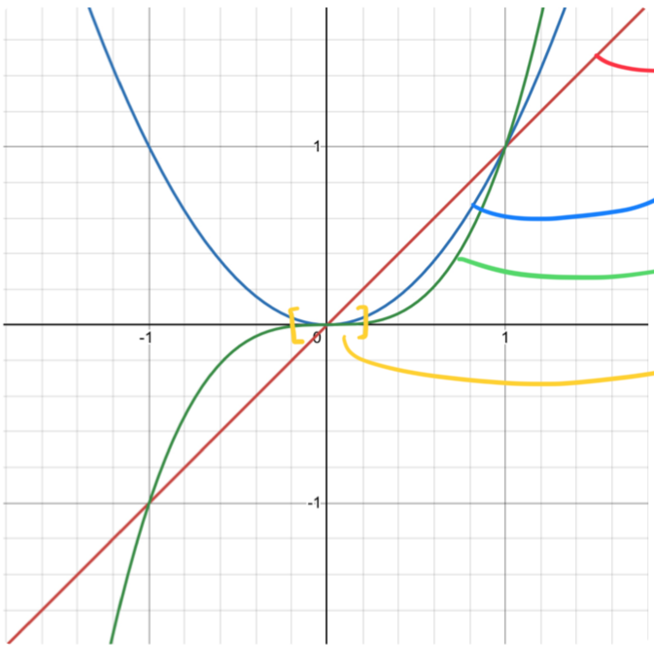
$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad (x \to x_0)$$

„f is of the order of g"   gehören zusammen

(∀x near x_0, not necessarily at x_0)

$$\exists \delta > 0 \; \exists c \in \mathbb{R} \; \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$$

Bsp:



$f(x) = x$

$g(x) = x^2$

$h(x) = x^3$

(Kleine) Umgebung von $x_0 = 0$

Es gilt:

$$h(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad (x \to x_0)$$
$$g(x) = \mathcal{O}(f(x)) \quad (x \to x_0)$$

⇒ In der nähe von Null sind die Funktionen von derselben ordnung.

Zurück zur Aufgabe:

Sei $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| =: b \in (0, \infty)$, $\varepsilon = b/2$

$$\exists \delta > 0 : \; \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| - b \right| < \varepsilon$$

Weiter gilt es auch:

$$-\varepsilon + b < \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < b + \varepsilon$$

Sei $c := b + \varepsilon = \frac{3b}{2} \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < c$

Sei $\tilde{c} := \frac{1}{-\varepsilon + b} = \frac{2}{b} \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| > \frac{1}{\tilde{c}}$

$\square$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{6} + \dots$

$= 1.$

$\overset{(a)}{\Rightarrow} \sin(x) = \mathcal{O}(x)$ und $x = \mathcal{O}(\sin(x))$ $(x \to 0)$

Aus $|\sin(x)| \leq 1$ $(\forall x)$ folgt weiter, daß $\sin(x) = \mathcal{O}(1)$ $(x \to \infty)$

(c) $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sinh(x)}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2x} \right)$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{2x} \right) + \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{-x} - 1}{2x} \right)$$

$2(-x)$

(*) weil $e^x - 1$ bzw. $e^{-x} - 1$ kann man sehr schön Taylor'n.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\Rightarrow e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

und $e^{-x} - 1 = -x + \frac{(-x)^2}{2} + \dots$

eingesetzt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2}}{2x} + \lim_{x\to 0} \frac{-x + \frac{x^2}{2}}{2(-x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Es gilt also: $\sinh(x) = \mathcal{O}(x) \quad (x \to 0)$

$$\to \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} - \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-2x}}{2}}_{\to 0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\sinh(x) = \mathcal{O}(e^x) \quad (x \to \infty)$$

P7.2: Zwischenwertsatz

__Gegeben:__ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig — (I)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ — (II)

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ — (III)

__Zu zeigen:__ f ist surjektiv, d.h.
$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}: y = f(x)$

„ganze Wertebereich wird betroffen"
→ jeder bekommt mind. ein Stück Pizza :)

__Beweis:__

Anmerkung: $\text{II} \Leftrightarrow \forall R > 0\ \exists K > 0: \forall x > R: f(x) > K$

$\text{III} \Leftrightarrow \forall \tilde{R} < 0\ \exists \tilde{K} < 0: \forall x < \tilde{R}: f(x) < \tilde{K}$

Sei $\xi^{\in\mathbb{R}}$ beliebig.

zz: $\exists x_0 : f(x_0) = \xi$

wegen I.: $\exists R_+ > 0 : \quad f(R_+) \geq \xi$

wegen II: $\exists R_- < 0 : \quad f(R_-) \leq \xi$

Zwischenwertsatz:

Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann $\forall y_0 \in [f(a), f(b)]$

$\exists x_0 \in [a,b] : \quad f(x_0) = y$

da $\xi \in [f(R_+), f(R_-)]$

können wir den Zwischenwertsatz anwenden und:

$\exists x_0 \in [R_-, R_+] : \quad f(x_0) = \xi$

$\square$

P7.3: Ableitungen

$\boxed{\text{Recap:}}$ Differenzierbarkeit in einem Punkt und auf einem Intervall.

$f : \mathbb{R} \supseteq I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ <u>diffbar</u>, falls die Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

existiert. In dem Fall heißt $f'(x_0)$ die Ableitung von f im Punkt x_0.

f heißt diffbar auf I, falls die obige Limes $\forall x_0 \in I$ existiert.

(a) Für $x = 0$: $\quad f(x) = \sin(x)$

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\boxed{P7.1(b)}}{=} 1$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}}^{\text{(oben)} = 1}$$

$$= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\left(\cancel{1} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + \dots - \cancel{1}\right)}{h} + \cos x$$

$$= \cos(x)$$

$\boxed{\text{Recap:}}$ Ableitung der Umkehrfunktion

Seien

$$\begin{tikzcd} M \subseteq \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "f"] & N \subseteq \mathbb{R} \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

also $f(x) = y \ \wedge$
$f^{-1}(y) = x$

Es gilt insbesondere:

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y \iff \frac{d}{dy} f\left(\overbrace{f^{-1}(y)}^{=: g(y)}\right) = 1$$

$$\frac{d}{d\,g(y)} f(g(y)) \cdot \frac{d}{dy} g(y) = 1 \Rightarrow f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

(b) $$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$$

(c) $$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha \ln(x)}\right) \overset{K.R.}{=} e^{\alpha \ln x} \frac{d}{dx}(\alpha \ln(x))$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

(d) $$\sqrt{1-x^2} = f \circ g(x) \quad \text{mit} \quad f(y) = \sqrt{y} \wedge g(x) = 1-x^2$$

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \wedge g'(x) = -2x \qquad y = g(x)$$

$$(f \circ g(x))' = f'(y) \cdot g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$