EKLAVYA GOYAL
eklavya.goyal@tum.de
(Ana 1 Ph, gruppe 1)

TUTORIUM-15

Lineare Differentialgleichungen

Wieso überhaupt?

Sind Differentialgleichungen wichtig in der Physik?

Ja, Differentialgleichungen sind in der Physik von entscheidender Bedeutung, da sie beschreiben, wie sich physikalische Größen in Zeit und Raum verändern. Von Newtons Bewegungsgesetzen über Maxwells Gleichungen in der Elektrodynamik bis hin zur Schrödingergleichung in der Quantenmechanik bilden sie das mathematische Fundament nahezu aller physikalischen Theorien. Sie ermöglichen es Wissenschaftlern, das Verhalten von Systemen vorherzusagen, komplexe Phänomene wie Strömungsdynamik und Wärmeleitung zu modellieren und die grundlegenden Naturgesetze besser zu verstehen. Durch die Lösung von Differentialgleichungen wird die Brücke zwischen theoretischen Prinzipien und realen Anwendungen geschlagen, was sie zu einem unverzichtbaren Werkzeug in der Physik macht.

– der Bre hat recht!

Def: (Gewöhnliche DGL's)

- Eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$F\left(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)\right) = 0 \quad, t \in \mathbb{R} \qquad -(1)$$

- Eine gewöhnliche, lineare DGL n-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x^{(1)}(t) + a_0 x(t) = b(t) \qquad -(2)$$

mit der Inhomogenität $b(t)$.

Satz: (Reduktion auf System 1. Ordnung)

Die DGL (2) ist Äquivalent zu dem System:

wichtig, normalisiert!

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + b(t) \qquad -(3)$$

wobei

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Satz: (Lösung homogener Systeme)

Die DGL $\dot{x} = Ax$ mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{tA} \cdot x(0) \qquad - (4)$$

wobei e^{tA}, der sog. Matrix exponential, wie folgt definiert ist:

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad - (5)$$

Def: (Anfangswertproblem, en: Initial value problem.)

Zusammen mit der DGL ist auch das $x(0) = x_0$ gegeben $\Rightarrow$ AWP. (4) ist die Eindeutige Lsg des AWP's.

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) \quad \wedge \quad x(0) = x \qquad - (6)$$

Def: (Lösungsfundamentalsystem)

Die Lösungen der DGL $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bilden einen Komplexen Vektorraum $\mathcal{L}$. Jede Basis von $\mathcal{L}$ nennen wir Lösungfundamentalsystem.

Def: (charakteristische Polynom)

Für (2) heißt

$$\chi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \qquad - (7)$$

das Charakteristische Polynom.

Satz: Sei k_j die alg. vielfachheit der Nullstelle λ_j von $\chi(\lambda)$. $\chi(\lambda) = \prod_{j=1}^{p} (\lambda - \lambda_j)^{k_j}$. Dann ist jede Lösung von (2) von der Form

$$x(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{m=1}^{k_j} c_{jm}\, t^{m-1} e^{\lambda_j t}, \quad c_{jm} \in \mathbb{C} \qquad - (8)$$

Satz: (Lösungen Inhomogener Systeme) - Variationen der Konstanten.

Die DGL (3) $\dot{x}(t) = A\,x(t) + b(t)$ mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

besitzt die allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{tA}\,x(0) + e^{tA} \int_0^t e^{-t'A}\, b(t')\, dt' \qquad - (9)$$

P15.1: DGL'n höherer Ordnung:

(a) $\ddot{q} = -q + \delta \dddot{q}$, $\delta > 0$

Wir bringen das zunächst mal in form von Gl. (2). , i.e.

$$\dddot{q} - \frac{1}{\delta} \ddot{q} + 0 \cdot \dot{q} - \frac{1}{\delta} \cdot q = 0$$

Wir wählen also $x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix}$ und $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \\ \dddot{q}(t) \end{pmatrix}$

Dann folgt aus obigem Satz, daß wir die obige gl. in einem Form wie Gl. (3) schreiben könnten, wobei $A(t) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^3$.

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\delta} & 0 & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix} \quad \text{und } b(t) = 0 \in \mathbb{R}^3$$

Es gilt für $\chi(\lambda)$: $\chi_A(t) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - \frac{\lambda^2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = 0$$

(einfach n-te ableitung mit n-te potenz ersetzen!)

(b) $$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + K x_1 + \alpha (x_1 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 + K x_2 + \alpha (x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \dot{x} = A x$$

man setze $y_1 = x_1$, $y_2 = \dot{x}_1 = v_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = \dot{x}_2 = v_2$

Dann haben wir

$$\dot{y}_2 = \ddot{x}_1 = -K x_1 - \alpha (x_1 - x_2) = -(K+\alpha) x_1 + \alpha x_2$$
$$\dot{y}_4 = \ddot{x}_2 = -K x_2 - \alpha (x_2 - x_1) = -(K+\alpha) x_2 + \alpha x_1$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ -(\kappa+\alpha)\, x_1 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 \\ -(\kappa+\alpha)\, x_2 + \alpha x_1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(\kappa+\alpha)\, y_1 + \alpha\, y_3 \\ y_4 \\ \alpha y_1 - (\kappa+\alpha)\, y_3 \end{pmatrix}$$

Es folgt also: $\dot{y} = A\, y$ mit $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$

und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\kappa+\alpha) & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & -(\kappa+\alpha) & 0 \end{pmatrix}$$

P15.2: Lineare Zeitabhängige DGL.

$a \in \mathbb{R}$, AWP mit $\dot{x} = a(t)\, x$ mit $x(0) = 1$

(a) Ansatz: $x(t) = c \cdot e^{d(t)}$

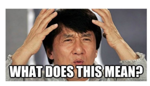
eingesetzt ergibt: $c \cdot \dot{d}(t)\, \cancel{e^{d(t)}} = a(t) \cdot c \cdot \cancel{e^{d(t)}}$

$\Rightarrow c \cdot \dot{d}(t) = c \cdot a(t)$

d.h. $c = 0 \quad \vee \quad \dot{d}(t) = a(t)$

Man setze $d(t) := \int_0^t a(t')\, dt'$, dann gilt:

$u(x) = e^{\int P(x)dx}$



$t \mapsto c \cdot e^{d(t)}$ erfüllt unser DGL.

Anfangsbedingung: $x(0) = 1 \Rightarrow c \cdot e^{d(0)} = 1 \Rightarrow c = 1.$

Also, $x(t) = e^{\int_0^t a(t')\, dt'}$ ist Lösung der AWP.

(b) Nun sei $t \mapsto x_b(t)$ eine Lsg. der DGL $\dot{x}(t) = a(t)\, x(t)$

Idee: • wir können $\frac{x_b(t)}{x_a(t)}$ machen, und wenn das eine Konstante ergibt, haben wir bereits gezeigt.

• $\frac{d}{dx}(\text{konst}) = 0$.

in (a) hatten wir $x_a(t) = e^{d(t)} = e^{\int_0^t a(t')\,dt'}$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x_b(t)}{e^{d(t)}}\right] = \frac{\dot{x}_b(t)\cdot e^{d(t)} - \dot{d}(t)\, x_b(t)\, e^{d(t)}}{e^{2d(t)}}$$

$$= \frac{e^{d(t)}\left(\overbrace{a(t)\cdot x_b(t)}^{\text{DGL}} - \overbrace{a(t)\, x_b(t)}^{\dot{d}(t) = a(t)}\right)}{e^{2d(t)}} =$$

$\square$

P15.3: Inhomogene lineare DGL erster Ordnung

$$\dot{x} = -x + \sin(t)$$

(a) Es folgt aus (g) daß $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x(0) = x_0$ mit $A = -1 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

und $b(t) = \sin(t)$, $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$.

$$x_p(t) = e^{tA}\left(0 + \int_0^t e^{-t'A}\, b(t')\,dt'\right)$$

$$= e^{-t}\left(\int_0^t e^{t'} \sin(t')\,dt'\right)$$

$$\overset{(*)}{=} e^{-t}\left(\tfrac{1}{2} e^{t'}(\sin t' - \cos t')\Big|_0^t\right)$$

$$= \frac{e^{-t}}{2}\left[e^{t}(\sin t - \cos t) - e^{0}\cdot(-1)\right]$$

(*) : $\int e^{t'} \sin t'\,dt =: I$

Part. Int: $\int v\,du = v\cdot u - \int u\,dv$.

$= -\int e^{t'}\, d(\cos t') = I$

$= -\left[e^{t'}\cos t' - \int e^{t'} \cos t'\,dt'\right]$

$= -e^{t'}\cos t' + \int e^{t'}\, d(\sin t')$

$= -e^{t'}\cos t' + \sin t'\, e^{t'} - I$

$I = \frac{1}{2} e^{t'}(\sin t' - \cos t')$

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-t} + \sin t - \cos t\right]$$ ← sog. „partikuläre Lösung"

(b) Ein Fundamentalsystem der homogenen Gl. ist e^{-t}. Alle Lsg. der homogenen Gleichung sind Linearkombinationen davon.

Also ce^{-t}, $c \in \mathbb{R}$. Daher hat die inhom. DGL genau die Lsg.

$$x(t) = ce^{-t} + x_p(t)$$

$$x(t) = \left(c+\frac{1}{2}\right)e^{-t} + \frac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin t - \cos t\right), \quad c \in \mathbb{R}. \qquad -(10)$$

(c) beschränkte Lösung $\Rightarrow$ (10) $\Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin t - \cos t\right)$$

<u>Physikteil</u>: Ansatz: $x(t) = A\sin(t - \varphi_0) = A\sin t\cos\varphi_0 - A\cos t\sin\varphi_0$

$$\Rightarrow A\cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad A\sin\varphi_0 = \frac{1}{2}$$

$$A^2\cos^2\varphi_0 = \frac{1}{4} \quad \wedge \quad A^2\sin^2\varphi_0 = \frac{1}{4}$$

$$A^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(Ae^{i\varphi_0} = \frac{1+i}{2}\right)$$