P5.1: Cauchy'sche Produktformel:

Wiederholung: Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ abs. konv. und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{q^k \cdot q^{n-k}}_{q^{k+n-k} = q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} q^n}_{\text{summieren } q^n \ (n+1) \text{ mal}}$$

fängt bei Null an.

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, q^n}$$

da $|q| < 1$ ist, konvergieren die beide Reihen absolut, und damit auch deren produkt.

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, q^n - \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$\overset{(a)}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$= \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{1-q} = \frac{q}{1-q^2}, \text{ da } |q| < 1$$

(c) $$\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \overset{(b)}{=} \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{\cancel{1/2}}{(1/2)^{\cancel{2}}} = 2$$

P5.2: Konvergenzradius:

Wiederholung: $$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$ Cauchy-Hadamard.

Euler/Quotientenkrit.: $$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}, \quad s := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$, falls s existiert.

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot z^n$$

I. Cauchy Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \limsup_{n\to\infty} \big(\underbrace{n^{2/n}}_{=: a_n} \big)}$$

Beh: $a_n \longrightarrow 1$

zZ: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - 1| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Bew: $$a_n = n^{2/n} = e^{\frac{2}{n} \ln(n)} = e^{2 \overbrace{\left(\frac{\ln n}{n}\right)}^{=: \xi}}$$

$\lim_{n\to\infty} \xi \to 0$, da n schneller gegen ∞ geht als $\ln(n)$

sehr wichtig in der Informatik!

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e^{2 \cdot 0} = 1$$

und damit: $\boxed{R = 2}$

II. Euler:

(b) $z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, mit

Häufungspunkt von a_n sind 0 und 1 $\quad a_n = \begin{cases} 1 & , \exists k \in \mathbb{N}_0 : 2^k = n \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$

damit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \underline{R = 1}$

<u>P5.3</u>: Konvergenzradius:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{q^n} z^n$, $k \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

$$s := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^k}{|q^n|}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{|q|} = \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{s} = \underline{\underline{q}}$$

$\Rightarrow$ für $q > 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{q^n}$ konv. (abs.) und damit $a_n = \frac{n^k}{q^n}$ eine Nullfolge.

$\to$ vgl. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n$ Konv. bedingung??

$\stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (\omega)^n$, falls $|\omega| < 1$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{q}\right| < 1 \Rightarrow \underline{q > 1}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot z^n$

Euler: $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\cancel{n!}(n+1)}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\cancel{n!}}{n^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \cancel{(n+1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n}}{\cancel{n^n}} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}$$

$$R = \left(\frac{1}{e}\right)^{-1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n} = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{\frac{n}{e}} = 1$$

Cauchy hadamad besagt dies nur für $\limsup_{n\to\infty}$

berechne lim inf seperat! $\Rightarrow$ lim

V. Stetigkeit

Def: Seien M, N metrische Räume. $f: M \longrightarrow N$ heißt

- **stetig in** $x_0 \in M$, falls $\forall \{a_n\}: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, $a_n \in M^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).$$

- **stetig**, falls f stetig in x_0 $\forall\, x_0 \in M$.

Korollar: Seien $M, N \in \mathbb{C}$ und $f, g: M \longrightarrow N$ stetig in $x_0 \in M$, dann gilt, dasselbe auch für $h(x)$, $\tilde{h}(x)$, $\tilde{\tilde{h}}(x)$.

$\rightarrow h: M \longrightarrow N$, $x \longmapsto h(x) := f(x) + g(x)$

$\rightarrow \tilde{h}: M \longrightarrow N$, $x \longmapsto \tilde{h}(x) := f(x) \cdot g(x)$

$\rightarrow \tilde{\tilde{h}}: M \setminus S \longrightarrow N$, $x \longmapsto \tilde{\tilde{h}}(x) := f(x)/g(x)$

wobei $S := \{x \in M \mid g(x) = 0\}$

Satz: Ist $g: M \longrightarrow N$ stetig in $x_0 \in M$ und $f: N \longrightarrow K$ stetig in $y_0 := g(x_0) \in N$, dann ist $f \circ g: M \longrightarrow K$ stetig in $x_0 \in M$.

Satz: Äquivalente Formulierungen von Stetigkeit.

$$f: M \longrightarrow N \text{ stetig in } x_0 \in M$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: f\left(\mathcal{U}_\delta(x_0) \cap M\right) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M: d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Def: Gleichmäßige Stetigkeit.

Seien M, N metrische Räume, $f: M \longrightarrow N$ heißt glm. stetig, falls gilt:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x,y\in M: d(x,y)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon$

$\Rightarrow$ Eine δ (der von ε abhangig ist) fürs ganze funktion. Bei Stetigkeit könnte man für jede $x_0 \in M$ eine neue δ wählen. Da war das δ von ε UND x_0 abhangig.

Def: Lipschitz-Stetigkeit.

Seien M,N metrische Räume, $f: M \longrightarrow N$ heißt Lip. stetig, falls gilt:

$$\exists L>0 \ \forall x,y \in M: \ d(f(x),f(y)) \leq L \ d(x,y)$$

Satz: $f: M \longrightarrow N$, M, N metrische Räume, es gilt

f Lipschitz-Stetig $\Rightarrow f$ glm. stetig $\Rightarrow f$ stetig (auf M)

Bem: Falls M abgeschlossene Menge, dann stetig $\Rightarrow$ glm. stetig.

Bem:* Eine sehr wichtige unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit ist, dass Stetigkeit eine lokale Eigenschaft einer Funktion ist - d.h. dass eine Funktion ist stetig (oder auch nicht) an einem bestimm--ten Punkt des Definitionsbereichs ($x_0 \in M$) - und dies kann bestimmt werden, indem nur die Werte der Funktion in einer (beliebig kleinen) Nachbarschaft dieses Punktes angesehen werden.

Falls wir davon sprechen, dass eine Funktion auf einem Intervall stetig ist, dann meinen wir, dass die Funktion <u>LOKAL</u> an jedem punkt des Intervalls stetig ist.

Im gegensatz dazu ist gleichmäßige Stetigkeit eine <u>GLOBALE</u> Eigenschaft von f, in dem Sinne, dass sich die obige definition von glm. stetigkeit auf jeden punkt in M bezieht.

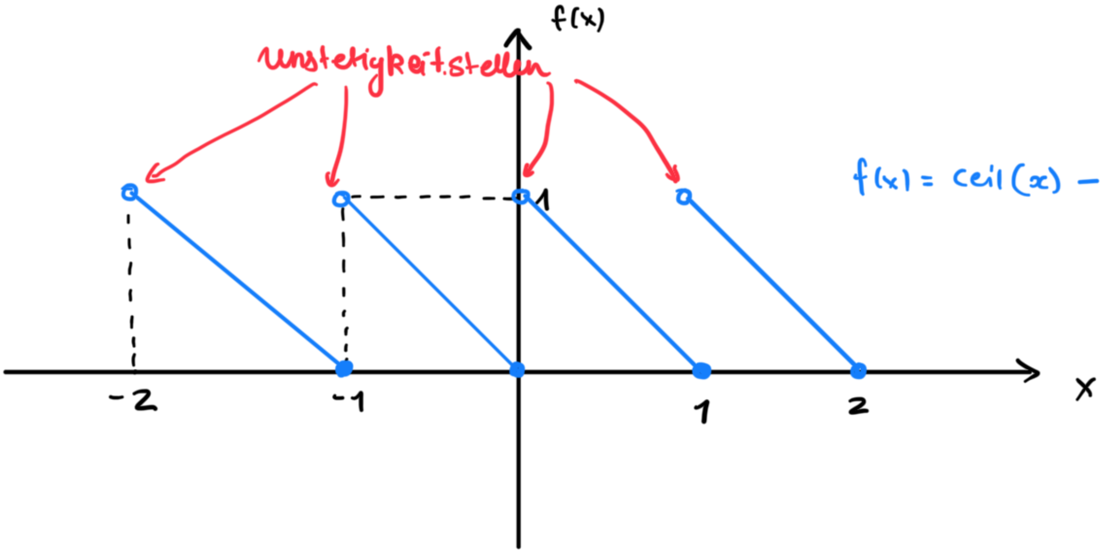
Blatt 6

P6.1: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{ceil}(x) - x$, mit

$$\text{ceil}(x) = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$$

(a) z.B.: $\text{ceil}(2.2) = 3$ $\quad$ $\text{ceil}(-0.1) = 0$

$\text{ceil}(0.1) = 1$ $\quad$ $\text{ceil}(-2,2) = -2$



(b) $\forall u \in \mathbb{Z}$, Sei $u = k$, $k \in \mathbb{Z}$

Beweis: Wir konstruieren eine Folge $u_n = u + \frac{1}{n}$

damit gilt $\lim_{n\to\infty} u_n = u$

Nun ist z.z, daß $f(x_n)$ gegen $f(u)$ konvergiert.

Also daß

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) \overset{?}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} (\text{ceil}(u_n) - u_n) \overset{?}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left((u+1) - \left(u + \frac{1}{n}\right)\right) \overset{?}{=} \text{ceil}(u) - u$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) \overset{?}{=} 0 \qquad (\text{da } u \in \mathbb{Z})$$

$$1 \neq 0 \qquad ↯ \qquad \square$$

(c) $g(0)$ ist offensichtlich (obige beweis)
$g(-1)$ auch, da dort kein Wert von g existiert.
Nun muß man $g(1)$ näher betrachten.
Sei x_n eine beliebige folge, die gegen 1 konvergiert.
z.Z: $f(x_n) \longrightarrow f(1)$
Es gilt $x_n \leq 1$ (da def. bereich von g)
Weiter gilt: $\exists n \quad n \geq N : x_n > 0$, dann gilt
$f(x_n) = 1 - x_n$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(1)$

- Es gilt $g\left([-1,1]\right) = [0,1)$

$g(0) = 0 \Rightarrow \inf\limits_{x\in[-1,1]} g(x) = \min\limits_{x\in[-1,1]} g(x) = 0$

$g\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 1 \Rightarrow \sup\limits_{x\in[-1,1]} g(x) = 1$, $\max\limits_{x\in[-1,1]} g(x)$ existiert nicht.

P6.2: Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-Stetig

(a) Sei $L > 0$ die Lipschitzkonstante für f in M, $x_* \in M$ und $(x_n) \subset M$ eine Folge in M mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$

z.Z: $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_*)$$

Beweis: Wir wissen: $|f(x_n) - f(x_*)| \overset{\text{Lip-Stetig}}{\leq} L\,|x_n - x_*|$ — (1)

daß $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$ heißt:

(Erinnerung) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \; |x_n - x_*| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - x_*| = 0 \qquad -(2)$$

zurück zu (1)

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_*)| \leq \lim_{n\to\infty} L\,|x_n - x_*|$$

$$\text{"} \qquad \overset{(2)}{\leq} 0 \qquad -(+)$$

Es gilt aber $|\cdot| \geq 0 \qquad -(++)$

$$\overset{(+)\wedge(++)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_*)$$

$\square$

(b) Sei wieder $L > 0$ für f in M, $\varepsilon > 0$ beliebig.

Neben Rechnung: Sei $\delta > 0$,

$$\forall x,y \in M: \; |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| \leq L \cdot \delta =: \varepsilon$$

nun einfach umgekehrt hinschreiben :)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$

$$\forall x,y \in M: \; |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| < L \cdot \delta = \varepsilon$$

$\square$

P6.3: Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Widerspruchsbeweis:

Ann: f nicht beschränkt, d.h.

$\forall \xi > 0 \quad \exists x \in [a,b] : |f(x)| \geq \xi$

d.h. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \; x_n \subseteq [a,b]$ mit $|f(x_n)| \geq n$

Bolzano - Weierstraß besagt aber, dass

$\exists \; x_{g(x)} : \lim\limits_{n\to\infty} x_{g(x)} = x_* \in [a,b]$

Teilfolge
en: subsequence

$\Rightarrow$ Es folgt aus Stetigkeit von f, daß:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{g(n)}) \overset{\text{stetig}}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_{g(n)}\right) = f(x_*)$$

Insbesondere ist $f(x_{g(n)})$ beschränkt
(+ monoton),

was $|f(x_{g(n)})| \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ widerspricht.

$\lightning$ $\square$

P 7.1. Landau - Symbole

Recap: $f, g : D \to \mathbb{R}$, mit $x_0 \in \overline{D}$ — Abschluss von D.
(D in $\mathbb{R}$)

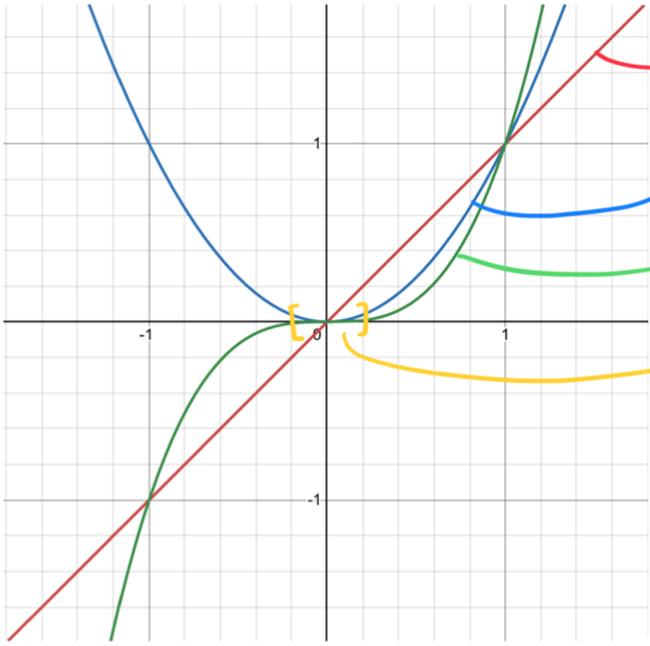
$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad (x \to x_0)$$

„f is of the order of g" — gehören zusammen

($\forall x$ near x_0, not necessarily at x_0)

$$\exists \delta > 0 \ \exists c \in \mathbb{R} \ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$$

Bsp:



$f(x) = x$

$g(x) = x^2$

$h(x) = x^3$

(Kleine) Umgebung von $x_0 = 0$

Es gilt:

$h(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad (x \to x_0)$

$g(x) = \mathcal{O}(f(x)) \quad (x \to x_0)$

$\Rightarrow$ In der nähe von Null sind die Funktionen von derselben ordnung.

Zurück zur Aufgabe:

Sei $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| =: b \in (0, \infty)$, $\varepsilon = b/2$

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| - b \right| < \varepsilon$$

Weiter gilt es auch:

$$-\varepsilon + b < \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < b + \varepsilon$$

Sei $c := b + \varepsilon = \frac{3b}{2} \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < c$

Sei $\tilde{c} := \frac{1}{-\varepsilon + b} = \frac{2}{b} \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| > \frac{1}{\tilde{c}}$ $\square$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots}{x} = \lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{6} + \dots$

$= 1.$

$\overset{(a)}{\Rightarrow}$ $\sin(x) = \mathcal{O}(x)$ und $x = \mathcal{O}(\sin(x))$ $(x \longrightarrow 0)$

Aus $|\sin(x)| \leq 1$ $(\forall x)$ folgt weiter, daß $\sin(x) = \mathcal{O}(1)$ $(x \longrightarrow \infty)$

(c) $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sinh(x)}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2x} \right)$

$\overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{2x} \right) + \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{-x} - 1}{\underset{2(-x)}{2x}} \right)$

(*) weil $e^x - 1$ bzw. $e^{-x} - 1$ kann man sehr schön Taylor'n.

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

$\Rightarrow e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \dots$

und $e^{-x} - 1 = -x + \frac{(-x)^2}{2} + \dots$

eingesetzt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2}}{2x} + \lim_{x\to 0} \frac{-x + \frac{x^2}{2}}{2(-x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Es gilt also: $\sinh(x) = \mathcal{O}(x) \quad (x \to 0)$

$$\to \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} - \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-2x}}{2}}_{\to 0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\sinh(x) = \mathcal{O}(e^x) \quad (x \to \infty)$$

P7.2: Zwischenwertsatz

__Gegeben:__ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig — (I)

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ — (II)

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ — (III)

__Zu zeigen:__ f ist surjektiv, d.h.
$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}: y = f(x)$

„ganze Wertebereich wird betroffen"
→ jeder bekommt mind. ein Stück Pizza :)

__Beweis:__

Anmerkung: $\text{II} \Leftrightarrow \forall R > 0\ \exists K > 0: \forall x > R: f(x) > K$
$\text{III} \Leftrightarrow \forall \tilde{R} < 0\ \exists \tilde{K} < 0: \forall x < \tilde{R}: f(x) < \tilde{K}$

Sei $\xi^{\in \mathbb{R}}$ beliebig.

$\underline{ZZ}$: $\exists x_0 : f(x_0) = \xi$

wegen I.: $\exists R_+ > 0 : \quad f(R_+) \geq \xi$

wegen II: $\exists R_- < 0 : \quad f(R_-) \leq \xi$

Zwischenwertsatz:

Ist $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann $\forall y_0 \in [f(a), f(b)]$

$\exists x_0 \in [a,b] : \quad f(x_0) = y$

da $\xi \in [f(R_+), f(R_-)]$

können wir den Zwischenwertsatz anwenden und:

$\exists x_0 \in [R_-, R_+] : \quad f(x_0) = \xi$

$\square$

P7.3: Ableitungen

$\boxed{\text{Recap}}$: Differenzierbarkeit in einem Punkt und auf einem Intervall.

$f: \mathbb{R} \supseteq I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ diffbar, falls die Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

existiert. In dem Fall heißt $f'(x_0)$ die Ableitung von f im Punkt x_0.

f heißt diff'bar auf I, falls die obige Limes $\forall x_0 \in I$ existiert.

(a) Für $x = 0$: $\quad f(x) = \sin(x)$

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\boxed{P7.1(b)}}{=} 1$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}}_{\overset{(\text{oben})}{=} 1}$$

$$= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\left(\cancel{1} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + \ldots - \cancel{1}\right)}{h} + \cos x$$

$$= \cos(x)$$

$\boxed{\text{Recap:}}$ Ableitung der Umkehrfunktion

$$\text{Seien } \quad M \subseteq \mathbb{R} \;\underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}}\; N \subseteq \mathbb{R} \quad \text{also } f(x) = y \;\wedge\; f^{-1}(y) = x$$

Es gilt insbesondere:

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y \iff \frac{d}{dy} f\big(\overbrace{f^{-1}(y)}^{=: g(y)}\big) = 1$$

$$\frac{d}{d\,g(y)} f(g(y)) \cdot \frac{d}{dy} g(y) = 1 \Rightarrow f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \left[f^{-1}(y)\right]' = \underline{\underline{\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}}$$

(b) $$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , x \in (-1,1)$$

(c) $$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha \ln(x)}\right) \overset{K.R.}{=} e^{\alpha \ln x} \frac{d}{dx}(\alpha \ln(x))$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

(d) $$\sqrt{1-x^2} = f \circ g(x) \quad \text{mit} \quad f(y) = \sqrt{y} \wedge g(x) = 1-x^2$$

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \wedge \quad g'(x) = -2x \qquad y = g(x)$$

$$(f \circ g(x))' = f'(y) \cdot g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

L'Hôspital'sche Regel:

TUTORIUM 08 - Gruppe 1 (Do, 12-14)

(I) • $f, g: (0, b) \to \mathbb{R}$ diff.bar mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (0, b)$

$$\left[\left(\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0\right) \vee \left(\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \infty\right)\right] \wedge$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert.} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

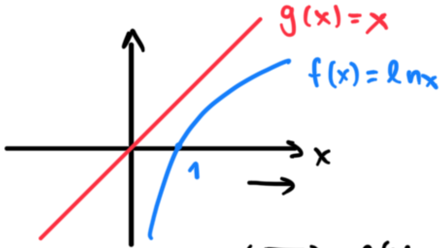
(II) • $f, g: (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ diff.bar mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, \infty)$

$$\left[\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0\right) \vee \left(\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty\right)\right] \wedge$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert.} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

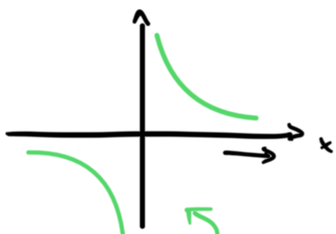
P 8.1:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$



$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} x = \infty$



$$\overset{\text{(II) - l'H}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \boxed{0}$$

(c) $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x$

Zur Erinnerung: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{a}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Wir wissen bereits, daß:

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim_{x\to 0} \ln x = (-\infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0} -\ln(x) = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x \ln x \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} - \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} (-x) = \boxed{0}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to\infty} x \underbrace{\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}_{\to 1} \overset{l'H}{=} \boxed{\infty}$$

(d) $$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \ln x\right) \overset{(*)}{=} \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right) \overset{(a)}{=} \boxed{1}$$

$*$: Stetigkeit vom exponentialfkt. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$

z.E: erlaubt vertauschen von limes- und Abbildungsvorschrift.

(e) $$\lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

- $\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(1) = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \cancel{\frac{-1}{x^2}}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = \boxed{1}.$$

(f) $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \exp\left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\overset{(e)}{=} \boxed{e}.$$

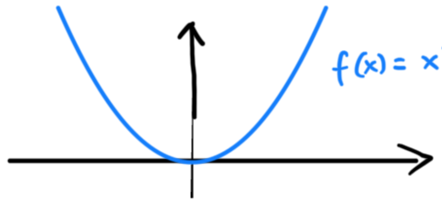
P 8.2.:

$\boxed{\text{RECAP}}$: • $f : \mathbb{R} \supseteq I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt

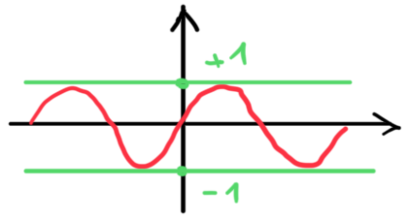
$$\Updownarrow$$

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I : \quad m \leq f(x) \leq M$$

z.B:



Nicht beschränkt



beschrankt! z.B $m = -1$
$M = +1$

- **SUPREMUMSEIGENSCHAFT**

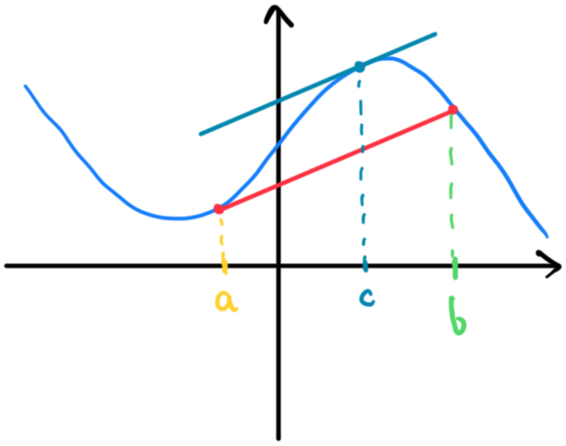
Jede nach oben beschränkte, nicht leere Teilmenge der Relle Zahlen besitzt ein supremum in $\mathbb{R}$. Analog für Infimum.

- **MITTELWERTSATZ DER DIFFERENTIALRECHNUNG:**

Sei $f: \mathbb{R} \supseteq [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $a < b$ stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf (a,b) dann gilt:

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Das ist eine Verallgemeinerung der Salz von Rolle $\left(f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = 0 \right)$



Geometrisch heißt es, daß die Tangente an der Kurve f an einer Stelle c parallel zur Sekante zwischen a und b ist.

Nun zur aufgabe:

Gegeben: $f: \mathbb{R} \supseteq I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diff.bar auf I.

$f': I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt z.Z: f ist Lip.-stetig.

Also $\exists L > 0: \; |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$

Beweis: Der Menge $\{f'(x) : x \in I\}$ ist also beschränkt.

Man setze $L := \sup\{|f'(x)| : x \in I\} \in [0, \infty)$

Fall I: $L = 0 \rightsquigarrow f$ konstant. $\square_I$

Fall II: $L > 0$

f ist sowohl stetig als auch diff-bar in I.

Seien $\alpha, \beta \in I: \; \alpha < \beta$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, daß es eine $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq I$ gibt so daß

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \qquad - (*)$$

$$f'(\xi) \in \{|f'(x)| : x \in I\} \Rightarrow f'(\xi) \leq L. \quad (+)$$

Aus $(*)$ und $(+)$ folgt die Behauptung! $\square_{II}$

$\square$

P 8.3: KURVENDISKUSSION:

Sei $f: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x e^{-x}$

a) Stetigkeit und Diffbarkeit:

f ist als Kombination (Verkettung, Produkt usw.) stetiger Funktionen stetig. Dasselbe gilt für Diffbarkeit!

b) Monotonie- und Konvexitätsbereiche.

<u>Beh</u>: $f^{(n)}(x) = \left((-1)^n \cdot (x-n)\right) \cdot e^{-x}$

<u>I.A.</u>: $f'(x) = (1-x)\, e^{-x} = e^{-x}$

<u>I.S.</u>: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left[\left((-1)^n (x-n)\right) e^{-x}\right]'$

$$= (-1)^n \cdot e^{-x} - (-1)^n (x-n)\, e^{-x}$$

$$= (-1)^n (1 - x + n)\, e^{-x} = (-1)^{n+1} (x-(n+1))\, e^{-x} \quad \square$$

Dies impliziert insbesondere daß: $f \in C^\infty([0,\infty), \mathbb{R})$

• $f'(x) = (1-x)\, e^{-x}$

Nullstelle: $x = 1$

Vorzeichentabelle:

	0		1	
$1-x$		+	0	−
e^{-x}		+		+
$f'(x)$		+		−

„Nullstelle"

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} > 0, & x \in [0,1) \\ = 0, & x = 1 \\ < 0, & x \in (1,\infty) \end{cases}$$

(Monotoniekriterium) – Wolf Skript Pg. 57

$\Rightarrow$ f ist streng monoton steigend auf $[0,1)]$ und streng monoton fallend auf $[(1,\infty)$

[geht auch.

• $f''(x) = (x-2)\, e^{-x}$

Nullstelle bei $x = 2$

V.Z. tabelle:

	0		2	
$x-2$		−	0	+
e^{-x}		+		+
$f''(x)$		−		+

$$f''(x) = \begin{cases} < 0, & x \in [0,2) \\ = 0, & x = 2 \\ > 0, & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

Daher ist f strikt konkav auf $[0,2]$ und strikt konvex auf $[2,\infty)$.

(c) $f'(x) = 0$ ist eine Notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für ein Extremum einer Funktion.

$\Rightarrow$ Kandidaten für Lokale Extrema:

- $x = 1$ (da $f'(1) = 0$)
- $x = 0$ (Rand von def Bereich)

Nun eingesetzt in $f''(x) \Rightarrow f''(1) < 0$

Das heißt also, dass $x=1$ ein Lokales Maximum ist. Weiter folgt aus strenge Monotonie links und rechts von $x = 1$ ist dies sogar ein globales Maximum. Wegen des Monotonie-verhaltens liegt bei $x=0$ also ein lokales Minimum. Weiter ist $f(0) = 0$. Daraus kann man folgern, daß, da $f(x) > 0 \; \forall x \in [0, \infty)$ gilt, ist $x=0$ ein globales Minimum.

$f(0) = 0$ und

$f(1) = 1/e \simeq \frac{1}{2.7} = 0.36$.

WENDEPUNKT:

$f''(x) \overset{!}{=} 0 \overset{(b)}{\Rightarrow} x = 2$ $\qquad f(2) = \frac{2}{e^2} \simeq \frac{2}{7{,}5} \simeq 0{,}27$

Insgesamt haben wir:

→ EXTREMA
- → globales Max. bei $x=1$ mit $f(1)=\frac{1}{e}$
- → globales Min bei $x=0$ mit $f(0)=0$

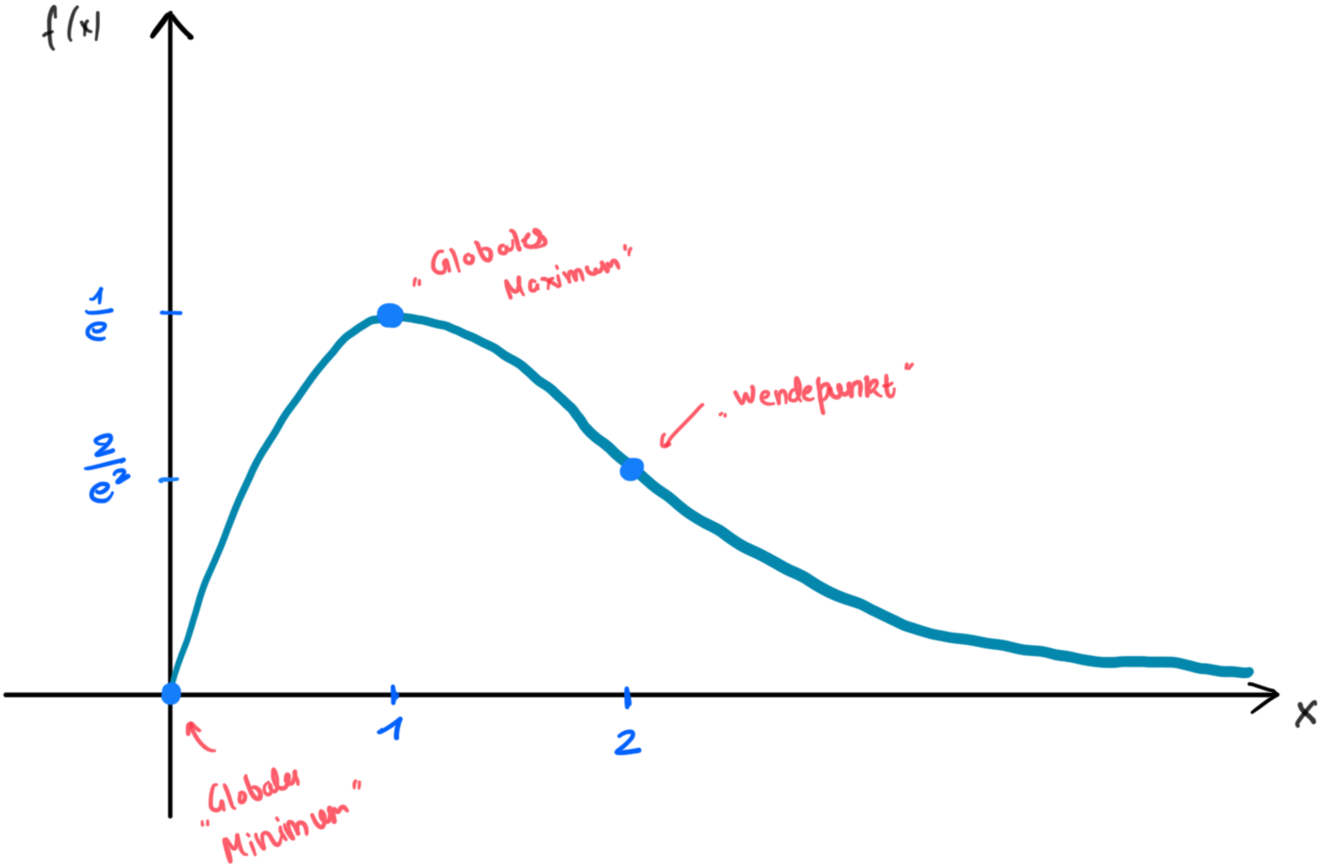
→ WENDEPUNKT → bei $x=2$ mit $f(2)=\frac{2}{e^2}$

(d) (1) Grenzverhalten:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \Big| \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(2) Extrema + Wendepunkte

(3) Konvexität / Konkavität



Blatt-11

Ana 1 Ph, Grp 1
(eklavya.goyal@tum.de)

P11.

(a) $$\frac{4!}{x(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \left[\binom{x}{4}\right]^{-1}$$

Binomial Koeffezient

Schritt 1: In Linearfaktoren zerlegen

(Ansatz)
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}$$

Die zu bestimmenden Koeffizienten

Schritt 2: Ausmultiplizieren

$$\left[\binom{x}{4}\right]^{-1} = \frac{A(x-1)(x-2)(x-3) + Bx(x-2)(x-3) + Cx(x-1)(x-3) + Dx(x-1)(x-2)}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}$$

Schritt 3: mit dem Nenner (beide Seiten) Multiplizieren.

$$4! = 24 = A(x-1)(x-2)(x-3) + Bx(x-2)(x-3) + Cx(x-1)(x-3) + Dx(x-1)(x-2)$$

$$\left.\begin{aligned}
x=0 &\implies 24 = -6A \implies A = -4\\
x=1 &\implies 24 = -2B \implies B = 12\\
x=2 &\implies 24 = -2C \implies C = -12\\
x=3 &\implies 24 = 6D \implies D = 4
\end{aligned}\right\}$$

Nun integrieren wir direkt:

$$I = \int dx \frac{4!}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \int dx \left[\frac{-4}{x} + \frac{12}{x-1} - \frac{12}{x-2} + \frac{4}{x-3}\right]$$

$$= -4\int\frac{dx}{x} + 12\int\frac{dx}{x-1} - 12\int\frac{dx}{x-2} + 4\int\frac{dx}{x-3}$$

$$= -4 \ln|x| + 12 \ln|x-1| - 12 \ln|x-2| + 4 \ln|x-3| \boxed{+ C}$$

wichtig! :)

$$= 4 \ln\left|\frac{x-3}{x}\right| + 12 \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$$

auf $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$

(b) $$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{(1+x)+x^2(1+x)} = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$$

Nun, 2 optionen: entweder $(1+x^2) = (x-i)(x+i)$

$$= \frac{A}{1+x} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i}$$

oder, $$= \frac{A}{1+x} + \frac{Bx + C}{1+x^2}$$

Lineare Term

Idee: $\deg(N) = \deg(Z) + 1$

$\Rightarrow$ stammfkt einfach!

Also, $1 = A(1+x^2) + \underbrace{(Bx+C)(1+x)}_{Bx^2 + (B+C)x + C}$

$x = -1 \implies A = 1/2$

$$\left.\begin{array}{ll} x = i & \implies C - B + (B+C)i = 1 \\ x = -i & \implies C - B - (B+C)i = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C - B = 1 \\ C + B = 0 \end{array}\right\} ✓$$

$\Rightarrow C = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{1}{2}$

Nun integrieren wir:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int dx \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1+x| + \frac{1}{2} \arctan|x| - \frac{1}{4} \ln|1+x^2| + C$$

auf $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

P11.2: (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} =: I$

(1) Konvergenz?

problematische Stellen: $x \to 0^+ \wedge x \to \infty$

für $x \to 0^+$ gilt, daß $1+x \simeq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

[Rigoroser: Sei $(0<\alpha<0{,}01 \wedge x<\alpha)$]

oder anders gesagt: $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad (x \to 0^+)$

Also ist $\displaystyle I \simeq \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\varepsilon}$

definiert! d.h. $x \to 0^+$ ist keine Problemstelle mehr.

Nun für $x \to \infty$ gilt, daß $1+x \simeq x$, d.h.

$$\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \simeq \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

und da $\displaystyle\int_L^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{L}}$ für $L>0$ definiert ist

folgt, daß I konvergiert!

(2) Substituiere $\sqrt{x}$ weg, d.h. $z = \sqrt{x} \Rightarrow dz = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Also $\displaystyle I = 2\int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{\infty}} \frac{dz}{1+z^2} = 2 \arctan z \Big|_0^\infty = 2\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$

$= \pi$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\cosh(x)-1}}$

Wieder untersuchen wir das Verhalten bei $x \to \infty$ und $x \to 0^+$.

für $x \to 0^+$: Wir Taylorn mal $\cosh(x)$ um $x=0$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

also ist $\cosh(x) - 1 \simeq \frac{x^2}{2}$ in der nähe von 0 (U_0)

Damit erhalten wir: $\frac{1}{\sqrt{\cosh(x)-1}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{x}$

und mi $\varepsilon \to 0$ ist das integral $\sqrt{2}\int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x}$

logarithmisch - divergent! Also divergiert das Integral wenn x gegen 0 geht.

Nur zur vollständigkeit, Verhalten wenn $x \to \infty$:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \simeq \frac{e^x}{2} \quad \text{für } x \to \infty$$

und $\cosh(x) - 1 \simeq \frac{e^x}{2} \quad (x \to \infty)$

Also: $\frac{1}{\sqrt{\cosh(x)-1}} \simeq \sqrt{2}\, e^{-x/2}$

exponential-decay!

$$\sqrt{2}\int_L^{\infty} e^{-x/2}\, dx = 2\sqrt{2}\, e^{-x/2}\Big|_{\infty}^{L} = \frac{2\sqrt{2}}{e^{L/2}} \Rightarrow \text{konvergiert!}$$

Damit ist $x \to \infty$ kein problem, aber $x \to 0$ schon, also divergiert das Integral!

Eine Aufgabe aus Klausur MA9202 WS2014/15 von S. Warzel

6. **Integration** **[5 Punkte]**

(a) Berechnen Sie das folgende Integral für alle $x \in \mathbb{R}$. (HINWEIS: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$) **[3]**

$$\int_0^x 2t \arctan(t) \mathrm{d}t = \quad (1+x^2)\arctan(x) - x$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Integral $\int_1^\infty x^\alpha \mathrm{d}x$ absolut konvergent? **[2]**

$$\alpha \in \quad (-\infty, -1)$$

LÖSUNG:

(a) $\int_0^x 2t \arctan(t)\mathrm{d}t = \left[t^2 \arctan(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = x^2 \arctan(x) - \int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$
$= x^2 \arctan(x) - \int_0^x \mathrm{d}t + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = x^2\arctan(x) - x + \left[\arctan(t)\right]_0^x = (x^2+1)\arctan(x) - x.$

(b) Der Integrand ist positiv, also sind Konvergenz und absolute Konvergenz äquivalent. Wir berechnen $\int_1^x t^\alpha \mathrm{d}t \overset{\alpha \neq -1}{=} \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^x = -\frac{1}{1+\alpha} + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \to \begin{cases} -\frac{1}{1+\alpha} \in \mathbb{R} & \text{für } \alpha < -1, \\ \infty & \text{für } \alpha > -1. \end{cases}$
Für $\alpha = -1$ ist das uneigentliche Integral bekanntermaßen nicht konvergent.

Funktionenfolgen

AnaIPh, Grp 1
(eklavya.goyal@tum.de)

Def: (Supremumsnorm) Sei M eine nicht leere Menge und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Normierter-Raum, dann bezeichnet $\mathcal{B}(M,Y)$ den Funktionenraum (en: Function space) der beschränkten Funktionen von M nach Y. Die Supremum-Norm auf diesen Funktionenraum ist die Abbildung

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(M,Y) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{wobei}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in M} \|f(x)\|_Y$$

Def: Sei $f: \mathbb{R} \supseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$. Eine Folge von Funktionen $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert

- punktweise gegen f, wenn $\boxed{\forall x \in D: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$
- gleichmäßig gegen f, wenn $\boxed{\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0}$

Bemerkung: 1. Punktweise Konvergenz hängt von x ab, Gleichmäßige Konv. hängt nicht von x ab.

2. Punktweise Konvergenz setzt lediglich voraus, dass die Fkt.folge an jedem punkt eine Konvergenzgeschwindigkeit hat. Dies kann schnell für einige Punkte sein, aber sehr, sehr langsam für die andere. Als Bsp. betrachten wir:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \frac{1}{n} x^2$$

da $a_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, folgt, daß

$$\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad f(x) = 0$$

„Nullfunktion"

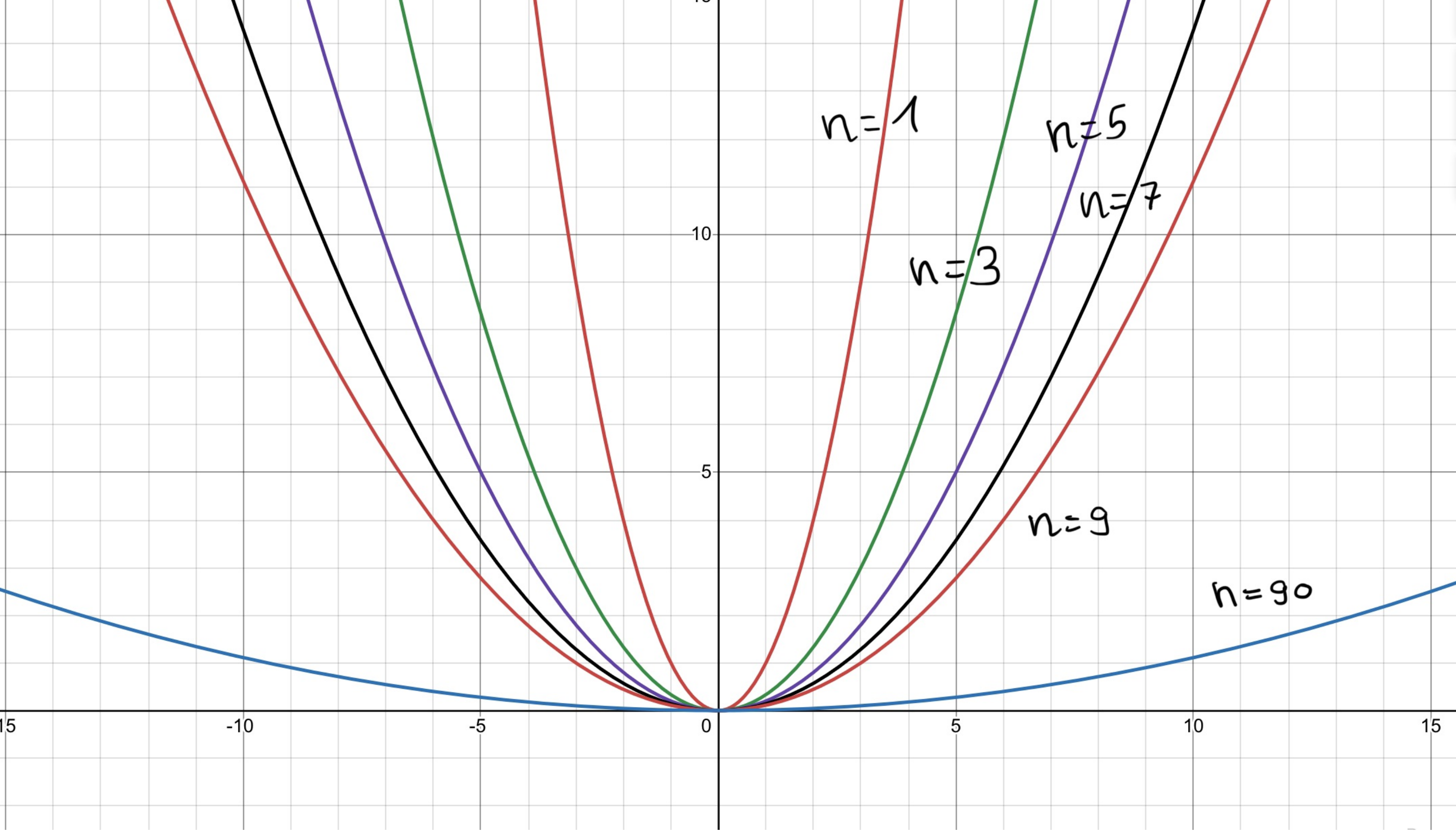


Fig 1: $f_n = \frac{x^2}{n}$ für einige werte von n. Wie man hier sieht, konvergiert x=0 „sofort" gegen 0, aber z.B x = 10 hat eine sehr langsame Konv. geschw.

3. Bei der glm. Konv. setzt man voraus, dass der größte Abstand zw. f und die f_n's gegen Null geht.

P12.1: (a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x^9}$, $x \in [0,1]$

Für $x \in (0,1]$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{2/n} \cdot x^{9/n}$

$$\overset{\sqrt{\cdot}\ \text{stetig}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x}\right)^9 = 1.$$

Für $x=0$: $f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Damit ist (f_n)

Punktweise Konvergent auf $[0,1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Da f unstetig, f_n aber $\forall n \in \mathbb{N}$ stetig auf $[0,1]$, kann f_n auf $[0,1]$ nicht glm. konvergieren.

(b) $g_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

(i) Punktweise:

(*) $\sin(\cdot)$ stetig

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \overset{(*)}{=} \sin\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\right) = \sin(0) = 0$$

Damit konvergiert g_n Pkt.weise gegen $0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) glm. Konv. : $|f_n - f| = \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|$

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| = 1$ (für z.B. $n=2$ und $x=\pi$)

da sup nicht gegen 0 geht, konvergiert $g_n(x)$ nicht glm.

(c) $h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$

(i) Punktweise Konv. :

(*) Stetigkeit von $\sqrt{\cdot}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \overset{(*)}{=} \sqrt{x^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = |x|$$

Also es konvergiert Punktweise mit Grenzfunktion:

$$h(x) = |x|$$

(ii) glm. Konv: $\left| \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x| \right| = \left| \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right|$

$$\left| \left(\underbrace{\sqrt{x^2+1/n}}_{a} - \underbrace{\sqrt{x^2}}_{b}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1/n}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1/n}+\sqrt{x^2}} \right| = \left| \frac{\cancel{x^2} + 1/n - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1/n}+\sqrt{x^2}} \right|$$

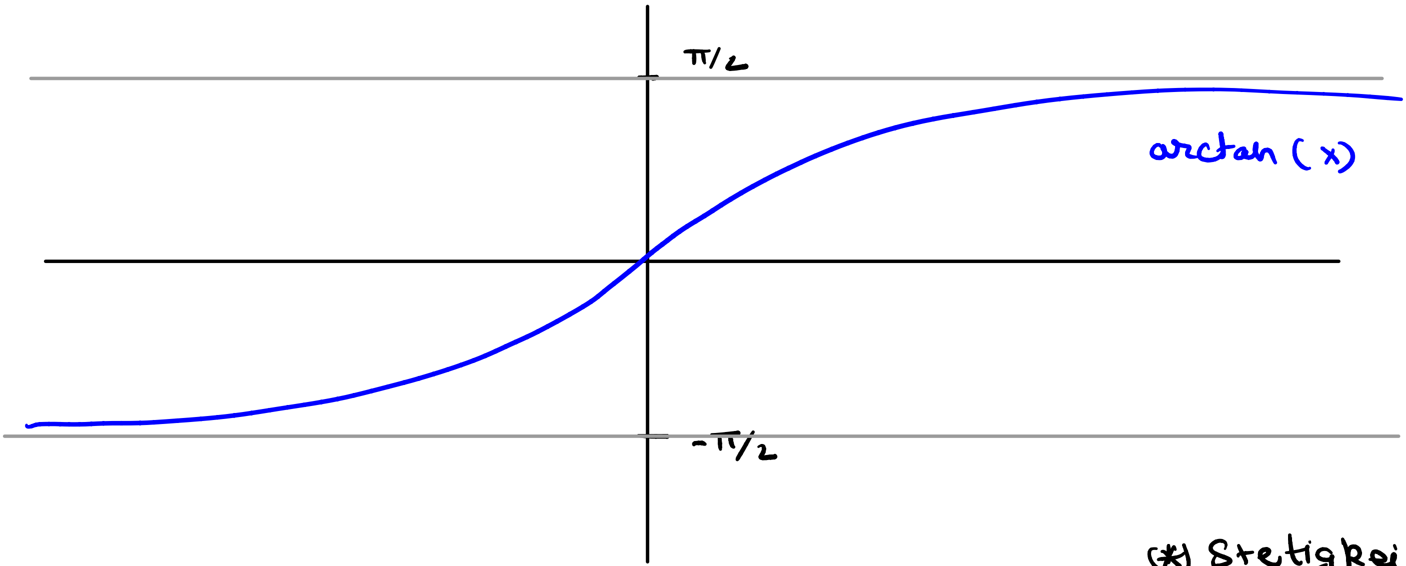
$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{1}{n} \left| \frac{1}{\sqrt{x^2+1/n}+\sqrt{x^2}} \right| \leq \frac{1}{n} \left| \frac{1}{\sqrt{1/n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| h_n(x) - h(x) \right| \right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Damit konvergiert $h_n(x)$ sogar gleichmäßig gegen $h(x)$.

(d) $k_n(x) = \arctan(nx)$, $x \in \mathbb{R}$



(*) Stetigkeit von arctan(x).

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) \overset{(*)}{=} \arctan\left(\lim_{n\to\infty}(nx)\right)$$

Für $x>0$: $\lim_{n\to\infty} nx = \infty$, $x<0$: $\lim_{n\to\infty} nx = -\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \begin{cases} -\pi/2, & x<0 \\ +\pi/2, & x>0 \end{cases}$$

$x=0: \; k_n(0) = 0$, d.h.

$$k(x) = \begin{cases} \pi/2 & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ -\pi/2 & , x<0 \end{cases}$$

nicht stetig, also kann nicht glm. Konvergieren.

$$k_n(x) \xrightarrow{\text{Punktweise}} k(x).$$

P12.2. $f_n(x) = x^n \cdot e^{-nx}$, $g_n(x) = x^n \cdot e^{-x^n}$

Einige Beobachtungen: f_n und g_n sind $\forall n \in \mathbb{N}$ nicht negativ, stetig und ungleich der Nullfunktion

Als Komposition stetiger Fkt.

Alle Funktionen nehmen das Minimum 0 im Ursprung an.

Grenzverhalten:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}\right)^n \overset{l'H}{=} 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{x^n}} \overset{n \times l'H}{=} 0$$

Sei h eine solche Funktion:

$\exists x_0 \in [0,\infty) : \; h(x) =: c > 0$

dazu gibt es ein $\xi > x_0$: $h(x) \le \frac{c}{2} \;\; \forall \; x \ge \xi$

höchstens $\frac{1}{2}$ wie maxima.

Erinnerung Folge $\to 0$:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 : \; \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon$

Funktionen:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \xi > 0 \;\; h(x) < \varepsilon \quad \forall x > \xi$

$h(x)$ ist also auf $[0, \xi]$ beschränkt, und da $[0,\xi]$ ein Kompakter Intervall ist, darf man den Satz von Max und Min anwenden.

Für $x \geq 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = 0$ da $x < 1+x \leq e^x$

$g_n(x) \to$ $0 \leq x < 1$ ist x^n eine Null Folge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{e^{x^n}} = \frac{0}{e^0} = 0$$

Für $x = 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{1}{e}$

Für $x > 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{e^{x^n}} = 0$ (exp wächst schneller)

Insg. also: $g(x) = \begin{cases} 1/e, & x = 1 \\ 0, & x \in [0,\infty) \setminus \{1\} \end{cases}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) = (f_1(x))^n$, $f_1 = x \cdot e^{-x}$

Also besitzt jeder f_n sein max. an der selben Stelle wie f_1, da $y \mapsto y^n$ streng monoton steig. end auf $[0,\infty)$ ist.:

$$f_1'(x) = e^{-x}(1-x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 1$$

damit $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_0^+} f_n(x) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_0^+} f_n(1) = \frac{1}{e^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Also konvergiert f gleichmäßig gegen 0.

Taylorentwicklung

<u>Satz von Taylor</u>: Sei $f \in \mathcal{C}^n((a,b))$ und $\frac{d f^{(n)}}{dx} =: f^{(n+1)}$ existiert auf (a,b), dann existiert für $x, x_0 \in (a,b)$ mit $x \neq x_0$ ein ξ zwischen x_0 und x (also $\xi \in (\min(x_0,x), \max(x_0,x))$, so daß

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{T_n f(x;x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n f(x;x_0)}$$

Wolf's Notation: $\left(T_n(x;x_0)\right)$ $\qquad$ $\left(R_n(x;x_0)\right)$

gilt. $T_n f(x;x_0)$ heißt das <u>n-te Taylorpolynom</u> von x um x_0.

$R_n f(x;x_0)$ heißt das <u>Lagrange-Restglied</u>.

<u>Def</u>: (Taylorreihe) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $x_0 \in D$.

Für ein $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ heißt die (konvergente <u>oder</u> divergente) Reihe

$$T_\infty f(x;x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

die <u>Taylorreihe</u> von f bei x_0.

Präsenzaufgaben:

P13.1: Ordnung: 6 um $x_0 = 0$

↑ höchste grad

(a) $\sin(x) = f(x)$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \mathcal{O}(x^7)$$

d.h., also: $T_6 f(x;0) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

(b) Aus (a) folgt:

$$f(x) = \sin(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2(2k+1)}}{(2k+1)!} = x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{10} + \mathcal{O}(x^{14})$$

d.h.: $T_6 f(x;0) = x^2 - \frac{1}{6}x^6$

(c) $f(x) = \sin(x^2+2x)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2+2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad -(*)$$

$$\Rightarrow (x^2+2x)^{2k+1}$$

$$x^{2k+1} \cdot (x+2)^{2k+1}$$

$$x^{2k+1} \cdot \left[\sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} \cdot x^{2k+1-i} \cdot 2^i\right]$$

$$k=0: \quad x \cdot \left[\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \cdot x^{1-i} \cdot 2^i\right] = x(x+2)$$

$$k=1: \quad x^3 \cdot \left[\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \cdot x^{3-i} \cdot 2^i\right] = x^3(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$$

$$k=2: \quad x^5 \left[\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} \cdot x^i \cdot 2^{5-i}\right] = x^5(32 + 80x + \mathcal{O}(x^2))$$

Also insgesamt:

$$T_6 f(x;0) = \overbrace{\frac{1\cdot(x^2+2x)}{1!}}^{K=0 \text{ in } (*)} + \overbrace{(-1)\cdot\frac{x^6+6x^5+12x^4+8x^3}{3!}}^{K=1 \text{ in } (*)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1\cdot\left(80x^6+32x^5+\mathcal{O}(x^7)\right)}{120}}_{K=2 \text{ in } (*)}$$

$$= 2x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^4 - \frac{11}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^6$$

(d) $f(x) = \sin(\sin(x))$

$$f(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K\cdot(\sin(x))^{2K+1}}{(2K+1)!}$$

Bemerkung: Man kann auch Potenzreihen in Potenzreihen einsetzen!

nun sei $y = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$

$$f(y) = \sum \frac{(-1)^K\,(\sin(x))^{2K+1}}{(2K+1)!} = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + \mathcal{O}(y^7)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\right)^3$$

$$+ \frac{1}{120}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\right)^5 + \mathcal{O}(y^7)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^7)\right)$$

$$+ \frac{1}{120}\left(x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right)$$

$$(*)\quad \left(\underline{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\cdot\left(\underline{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\cdot\left(\underline{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) = x^3 + (1+1+1)\,x^2\left(-\frac{x^3}{6}\right) + \mathcal{O}(x^7)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \mathcal{O}(x^7)$$

d.h.: $T_6 f(x;0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$

P13.2 : (a) $f: (-1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1-x}{1+x}$

geom. reihe

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

$$f(x) = \frac{1-x-1+1}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$$

$$\overset{(*)}{=} -1 + 2\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \pm \ldots\right)$$

$$= -1 + 2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 \pm \ldots$$

Konvergenzradius der Reihe ist $\rho := 1$.

Partialsumme

Alternierende Reihe $\longrightarrow \forall x, |x| < \rho$ $\lim_{n\to\infty} s_n \in \underbrace{[s_n, s_{n+1}]}_{\text{upper \& lower bounds!}}$

Für $x \in [0, \frac{1}{4}]$ ist $0 \leq 2x^4 = \frac{1}{128} < 1\% = \frac{1}{100}$, i.e. schon das dritte polynom genügt:

$$\underbrace{|f(x) - T_3 f(x;0)| \leq 2x^4}_{\boxed{\text{absolute error}}}$$

$$T_3 f(x;0) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3$$

Für absolute error passt $T_3 f(x;0)$! Wir überprüfen mal ob dies auch für relative error gilt!

$$\left|\frac{f(x) - T_3 f(x;0)}{f(x)}\right| \quad \text{für} \quad x \in [0, \tfrac{1}{4}] \longrightarrow f(x) \in [\tfrac{3}{5}, 1]$$

$\frac{1-0}{1+0} = 1$, $\frac{1-1/4}{1+1/4} = \frac{3}{5}$

Also das „worst case" Approximation wäre

$$\left|\frac{f(x) - T_3 f(x;0)}{f(x)}\right| \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{128} = \frac{1.6}{128} > 1\%$$

D.h. dass wir noch ein Term mitnehmen müssen um das relative Error $< 1\%$ zu bekommen!

$$\left|\frac{f(x) - T_4 f(x;0)}{f(x)}\right| \leq \frac{1.6}{512} < 1\%$$

Also $T_4 f(x;0) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4$ wäre die

„richtige" Antwort, i.e. das approximiert auch die relativen Fehler gut!

P13.2 (b) $$E(v) = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wir führen $\beta := \frac{v^2}{c^2}$ ein.

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - (n-1))}{n!}$$

Wie wir schon wissen:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = 1 + \binom{-1/2}{1} x + \binom{-1/2}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x}{8} + \mathcal{O}(x^3)$$

Das gilt für $|x| < 1$!

Somit ist für $|\beta| < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-\beta^2)^n = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6)$$

Also:

$$E(v) = \underbrace{m_0 c^2}_{\text{dies ist die Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{nicht relativistische Kinetische Energie}} + \underbrace{\frac{3}{8} m_0 v^2 \frac{v^2}{c^2}}_{\text{erste relativistische Korrekturterm!}} + m_0 v^2 \mathcal{O}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

P13.3 (a) Für jede Lipschitz-stetige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ existiert eine Folge von polynomen, die glm. gegen f konvergiert.

Menge versehen mit einem Metrik
(i) $d(x,y)=0 \iff x=y$ (ii) $d(x,y)=d(y,x)$
(iii) $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$

Lip-stetigkeit: M, N metrischer Räume, $f: M\longrightarrow N$ heißt Lip-stetig, falls gilt:

$$\exists L>0: \ \forall x,y\in M: \ d(f(x),f(y))\leq L\cdot d(x,y)$$

Glm. Konvergenz: $f: \mathbb{R}\supseteq D\longrightarrow\mathbb{R}$, $f_n: D\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ konvergiert glm. gegen „Grenzfkt" f, falls $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$

Die Aussage ist falsch. Als gegenbsp. sei $f(x)=\sin(x)$, die Lip-stetig mit $L=1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|=1$ ist. Wenn es eine Folge von polynomen $(P_n)_n$ gäbe, die glm. gegen f konvergerier, dann gäbe es für einen festen aber biediligen $\varepsilon>0$ ein $n_0\in\mathbb{N}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\sin(x)-P_n(x)|<\varepsilon \quad \forall n>n_0 \qquad -(*)$$

Aus (*) und (*) folgt folgends: $(-1\leq\sin(x)\leq 1)$ -(*)

1) Aus gleichmäßige Konvergenz von polynomen $(P_n)_n$ folgt, daß die Fehler „höchstens" ε ist, d.h.

$$-\varepsilon\leq\sin(x)-P_n(x)\leq\varepsilon$$

2) Nun mit (1), (*) und (*) haben wir insgesamt:

$$-1-\varepsilon\leq-\sin(x)-\varepsilon\leq P_n(x)\leq\sin(x)+\varepsilon\leq 1+\varepsilon$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, d.h. daß $P_n(x)$ eine Konstante Fkt ist $(\forall n>n_0)$, denn sonst:

$$\infty=\lim_{x\to\pm\infty}|P_n(x)|\leq 1+\varepsilon$$

Was offensichtlich ein widerspruch ist. Eine Folge konst. Fkt kann nicht gegen $\sin x$ konvergieren, Also ist die Aussage Falsch.

(b) Sei $f: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ glm. stetig. Dann existiert eine Folge von polynomen, die glm. gegen f konvergiert.

Glm-Stetigkeit: Sei $f: \mathbb{R} \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, dann ist f glm. stetig auf $\mathcal{U}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \forall x, y \in \mathcal{U}: |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Satz: (Weierstraß'sche Approximationsatz):

Sei f stetig auf eine abgeschlossene Intervall $[a,b]$. Es existiert ein polynom $p(x)$ $\forall \varepsilon > 0$:

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Um das obige Satz zu anwenden, bräuchten wir noch, das funktion auf einem abg. Intervall zu erweitern!

Sei dazu $(x_n)_n \subseteq (0,1)$, $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ eine Folge. Aus Stetigkeit von f folgt, daß $f(x_n)$ eine Cauchyfolge ist, da:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_m, x_n \in (0,1) : |x_m - x_n| < \delta \Longrightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$

Cauchy-Folge

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

d.h. daß $f(x_n)$ konvergiert zu einen Punkt a.

Wir setzen $f(0) := a$ und wiederholen das Spiel für $x = 1$.

Damit ist der Funktion auf $[0,1]$ stetig und der Behauptung folgt aus Weierstraß'sche Approximationsatz.

P14.1: Fourierkoeffizienten.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig und 2π-periodisch mit F.K's $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$

(a) Z.Z.: $\forall y \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

f stetig $\to$ f R.I.

Bew: Sei $\displaystyle g(y) := \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x)\,dx$ und sei F eine Stammfkt. von f.

Es gilt: $\displaystyle \frac{d}{dy} g(y) = \frac{d}{dy}\int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x)\,dx = \frac{d}{dy}\Big[F(y+\pi) - F(y-\pi)\Big]$

$$= f(y+\pi) - f(y-\pi) = 0$$

f, 2π periodisch

(b) F.K's von $g(x) = f(x-y)$

$$\hat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, e^{-ikx}\,dx \quad ; \text{ Substituiere: } \xi = x-y,\ d\xi = dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(\xi)\, e^{-ik(\xi+y)}\,d\xi \overset{(a)}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-iky} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, e^{-ik\xi}\,d\xi}_{\equiv \hat{f}_k}$$

$$\boxed{\hat{g}_k = \frac{e^{-iky}}{2\pi}\,\hat{f}_k}$$

(c) F.k.'s von $h(x) = f(2x)$

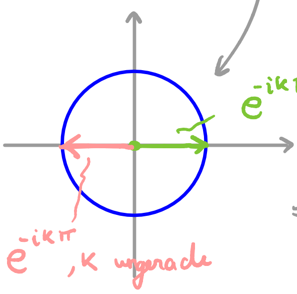
h ist nun π-periodisch!

$$\hat{h}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(2x)\cdot e^{-ikx}\,dx \quad ; \text{ Substituiere } \xi = 2x \to d\xi = 2\,dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(\xi)\cdot e^{-\frac{ik\xi}{2}}\,d\xi = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-2\pi}^{0} f(\xi)\, e^{-i\frac{k}{2}\xi}\,d\xi + \int_{0}^{2\pi} f(\xi)\, e^{-i\frac{k}{2}\xi}\,d\xi\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\int_{0}^{2\pi} f(\xi+2\pi)\, e^{-i\frac{k}{2}(\xi+2\pi)}\,d(\xi+2\pi) + \int_{0}^{2\pi} f(\xi)\, e^{-i\frac{k}{2}\xi}\,d\xi\right]$$

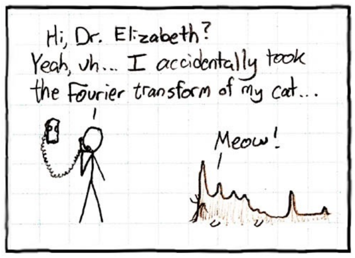
$$= \frac{1}{4\pi}\left[e^{-ik\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\, e^{-i\frac{k}{2}\xi}\, d\xi + \int_0^{2\pi} f(\xi)\, e^{-i\frac{k}{2}\xi}\, d\xi \right]$$



$\Rightarrow e^{-ik\pi} = (-1)^k$

$$\Rightarrow \quad \hat{h}_k = \begin{cases} 0 & \text{, falls } k \text{ ungerade} \\ \hat{f}_{\frac{k}{2}} & \text{, falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

P14.2: Fourierkoeffizienten von $\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|$



(a) $$\hat{f}_k^{\cos} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx$$

Wieso nicht sinus koeff?

Sinus ist ungerade!, d.h. $f(-x) = -f(x)$, i.e. bei einem symm. Intervall wie $[-\pi,\pi]$ heben die positive und negative Beiträge genau auf. Bew: $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin x \, dx = 0$

gerade × ungerade

Da $f(x)$ gerade ist, ist $f(x)\cdot\sin(x)$ ungerade, d.h.

$$\hat{f}_k^{\sin} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\, dx = 0 \quad \forall k$$

Weiter mit der Aufgabe: Part Int: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\pi\cdot\hat{f}_k^{\cos} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}\right)\cos(kx)\, dx = 2\left[\sin\frac{x}{2}\cdot\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{+\pi} + k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin\frac{x}{2}\, dx\right]$$

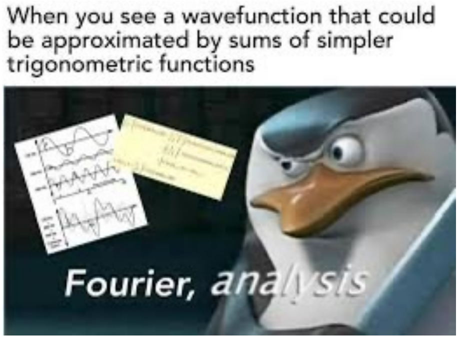
$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{v}\, d\big(\underbrace{\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)}_{u}\big)$$

$$= 2\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + 2k\left(-\sin(kx)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{+\pi} - k\int_{-\pi}^{\pi} k\cos(kx)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx\right)\right]$$

$$= 4\cdot(-1)^k - 0 + 4k^2\pi\,\hat{f}_k^{\cos}$$

$$\Rightarrow \quad \pi \hat{f}_k^{\cos} = 4(-1)^k + 4k^2\pi\, \hat{f}_k^{\cos}$$

$$\hat{f}_k^{\cos} = \frac{4(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}$$



(b) $\hat{f}_k^{\cos} = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} \quad , k \in \mathbb{N}_0$

$k \in \mathbb{N}_0$: $\cos(y) = \dfrac{e^{-iy} + e^{iy}}{2}$ und $e^{\pm ik\pi} = (-1)^k$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\left(\frac{e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-i(k+\frac{1}{2})x} + e^{-i(k-\frac{1}{2})x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{-i(k-\frac{1}{2})x}}{-i(k-\frac{1}{2})} + \frac{e^{-i(k+\frac{1}{2})x}}{-i(k+1/2)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Weg I: $\sin\lambda y = \dfrac{e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda y}}{2i} \Rightarrow 2i\sin(\lambda y) = e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda y}$

$-2i\sin((k-1/2)\pi)$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{-i(k-\frac{1}{2})\pi} - e^{+i(k-\frac{1}{2})\pi}}{-i(k-\frac{1}{2})} + \frac{e^{-i(k+\frac{1}{2})\pi} - e^{+i(k-\frac{1}{2})\pi}}{-i(k+1/2)}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{-2\cancel{i}\sin((k-\frac{1}{2})\pi)}{-\cancel{i}(k-1/2)} + \frac{-2\cancel{i}\sin((k+1/2)\pi)}{-\cancel{i}(k+1/2)}\right]$$

oder

$$e^{-i(k-1/2)\pi} - e^{i(k-1/2)\pi} = e^{-ik\pi}\cdot i - e^{ik\pi}\cdot(-i) = 2i(-1)^k$$

$$e^{-i(k+1/2)\pi} - e^{i(k+1/2)\pi} = e^{-ik\pi}\cdot(-i) - e^{-ik\pi}\cdot i = -2i(-1)^k$$

$$= \frac{1}{{}_2\cancel{4}\pi}\left[\frac{\cancel{2}\cancel{i}(-1)^k}{-\cancel{i}(k-1/2)} + \frac{-\cancel{2}\cancel{i}(-1)^k}{-\cancel{i}(k+1/2)}\right]$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi}\left[\frac{1}{k+1/2} - \frac{1}{k-1/2}\right] = \frac{(-1)^k}{2\pi}\cdot\frac{-1}{k^2-1/4}$$

$$= \frac{2(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}$$

(c) Sei $L := \frac{1}{2}$, dann gilt wegen $|-\sin(\frac{x}{2})| \leq \frac{1}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$, daß $\cos(\frac{x}{2})$ Lipschitz stetig ist. Es gilt nach dem Satz über die Punktweise Konvergenz von Fourierreihen, daß die $\forall x \in \mathbb{R}$ punktweise konvergiert. Also:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad |\cos(\tfrac{x}{2})| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = \frac{f_0^{\cos}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k^{\cos} \cos(kx)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos(x) - \frac{4}{15\pi}\cos(2x) + \dots$$

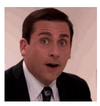
Sogar glm. Konvergent, da f stetig und die F.K. absolut summierbar sind, also:

$$\sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}_k| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \leq \frac{4}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

$(4k^2-1) \geq 3k^2$

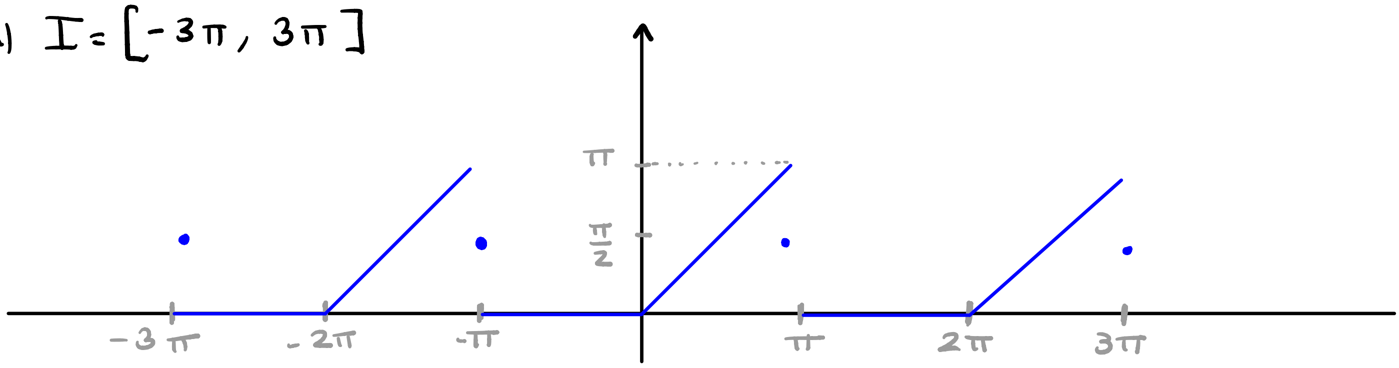
Basel Problem!

P14.3: Fourierreihen.



Sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi) \\ \pi/2, & x = \pi \end{cases}$ 2π - Periodisch!

(a) $I = [-3\pi, 3\pi]$



(b) $\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \overset{(k \neq 0)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} x\, e^{-ikx}\, dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-ik} \left(x\, e^{-ikx} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-ikx}\, dx \right) \right)$$

$$= \frac{-1}{2\pi i k} \left(\pi \cdot e^{-ik\pi} - 0 - \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{\overset{= i^2}{-1}}{2\pi i k} \left(\pi \cdot e^{-ik\pi} + \frac{e^{-ik\pi}}{ik} - \frac{1}{ik} \right)$$

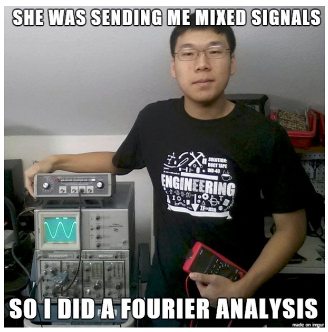
$$= \frac{i}{2\pi k} \left(\pi \cdot (-1)^k + \frac{(-1)^k - 1}{ik} \right)$$

$$= \frac{i(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2}$$

und $\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{4}$

(c) f ist stückweise stetig diff.bar, d.h. also konv. die Fourierreihe bei den stetigen bereiche gegen f und bei unstetigkeiten ($x \in (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$) gegen den Mittelwert vom rechts- und linksseitigen grenzwerte, somit konvergiert die F.R. pktweise gegen f.

Da die Grenzfkt. aber unstetig ist, ist dies nicht gleichmäßig konvergent!



TUTORIUM-15

Lineare Differentialgleichungen

EKLAVYA GOYAL
eklavya.goyal@tum.de
(Ana1Ph, gruppe1)

Wieso überhaupt?

> Sind Differentialgleichungen wichtig in der Physik?
>
> Ja, Differentialgleichungen sind in der Physik von entscheidender Bedeutung, da sie beschreiben, wie sich physikalische Größen in Zeit und Raum verändern. Von Newtons Bewegungsgesetzen über Maxwells Gleichungen in der Elektrodynamik bis hin zur Schrödingergleichung in der Quantenmechanik bilden sie das mathematische Fundament nahezu aller physikalischen Theorien. Sie ermöglichen es Wissenschaftlern, das Verhalten von Systemen vorherzusagen, komplexe Phänomene wie Strömungsdynamik und Wärmeleitung zu modellieren und die grundlegenden Naturgesetze besser zu verstehen. Durch die Lösung von Differentialgleichungen wird die Brücke zwischen theoretischen Prinzipien und realen Anwendungen geschlagen, was sie zu einem unverzichtbaren Werkzeug in der Physik macht.

- der Bre hat recht!

Def: (Gewöhnliche DGL's)

- Eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$F\left(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \qquad -(1)$$

- Eine gewöhnliche, lineare DGL n-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x^{(1)}(t) + a_0 x(t) = b(t) \qquad -(2)$$

mit der Inhomogenität $b(t)$.

Satz: (Reduktion auf System 1. Ordnung)

Die DGL (2) ist äquivalent zu dem System:

wichtig, normalisiert!

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + b(t) \qquad -(3)$$

wobei

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Satz: (Lösung homogener Systeme)

Die DGL $\dot{x} = Ax$ mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{tA} \cdot x(0) \qquad - (4)$$

wobei e^{tA}, der sog. Matrix exponential, wie folgt definiert ist:

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad - (5)$$

Def: (Anfangswertproblem, en: Initial value problem.)

Zusammen mit der DGL ist auch das $x(0) = x_0$ gegeben $\Rightarrow$ AWP. (4) ist die Eindeutige Lsg des AWP's.

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) \quad \wedge \quad x(0) = x \qquad - (6)$$

Def: (Lösungsfundamentalsystem)

Die Lösungen der DGL $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bilden einen Komplexen Vektorraum $\mathcal{L}$. Jede Basis von $\mathcal{L}$ nennen wir Lösungfundamentalsystem.

Def: (charakteristische Polynom)

Für (2) heißt

$$\chi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \qquad - (7)$$

das Charakteristische Polynom.

Satz: Sei k_j die alg. vielfachheit der Nullstelle λ_j von $\chi(\lambda)$. $\chi(\lambda) = \prod_{j=1}^{p} (\lambda - \lambda_j)^{k_j}$. Dann ist jede Lösung von (2) von der Form

$$x(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{m=1}^{k_j} c_{jm}\, t^{m-1} e^{\lambda_j t}, \quad c_{jm} \in \mathbb{C} \qquad - (8)$$

Satz: (Lösungen Inhomogener Systeme) – Variationen der Konstanten.

Die DGL (3) $\dot{x}(t) = A\,x(t) + b(t)$ mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

besitzt die allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{tA}\,x(0) + e^{tA} \int_0^t e^{-t'A}\, b(t')\, dt' \qquad - \ (9)$$

P15.1: DGL'n höherer Ordnung:

(a) $\dddot{q} = -q + \delta \dddot{q}$, $\delta > 0$

Wir bringen das zunächst mal in form von Gl. (2)., i.e.

$$\dddot{q} - \frac{1}{\delta}\ddot{q} + 0 \cdot \dot{q} - \frac{1}{\delta} \cdot q = 0$$

Wir wählen also $x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix}$ und $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \\ \dddot{q}(t) \end{pmatrix}$

Dann folgt aus obigem Satz, daß wir die obige gl. in einem Form wie Gl. (3) schreiben könnten, wobei $A(t) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^3$.

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\delta} & 0 & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix} \quad \text{und } b(t) = 0 \in \mathbb{R}^3$$

Es gilt für $\chi(\lambda)$: $\chi_A(t) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - \frac{\lambda^2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = 0$$

(einfach n-te ableitung mit n-te potenz ersetzen!)

(b) $$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + K x_1 + \alpha(x_1 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 + K x_2 + \alpha(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \dot{x} = A x$$

man setze $y_1 = x_1$, $y_2 = \dot{x}_1 = v_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = \dot{x}_2 = v_2$

Dann haben wir

$$\dot{y}_2 = \ddot{x}_1 = -K x_1 - \alpha(x_1 - x_2) = -(K+\alpha) x_1 + \alpha x_2$$

$$\dot{y}_4 = \ddot{x}_2 = -K x_2 - \alpha(x_2 - x_1) = -(K+\alpha) x_2 + \alpha x_1$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ -(\kappa+\alpha) x_1 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 \\ -(\kappa+\alpha) x_2 + \alpha x_1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(\kappa+\alpha) y_1 + \alpha y_3 \\ y_4 \\ \alpha y_1 - (\kappa+\alpha) y_3 \end{pmatrix}$$

Es folgt also: $\dot{y} = A y$ mit $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$

und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\kappa+\alpha) & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & -(\kappa+\alpha) & 0 \end{pmatrix}$$

P15.2: Lineare Zeitabhängige DGL.

$a \in \mathbb{R}$, AWP mit $\dot{x} = a(t)\, x$ mit $x(0) = 1$

(a) Ansatz: $x(t) = c \cdot e^{d(t)}$

eingesetzt ergibt: $c \cdot \dot{d}(t) \cancel{e^{d(t)}} = a(t) \cdot c \cdot \cancel{e^{d(t)}}$

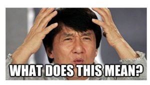
$$\Rightarrow c \cdot \dot{d}(t) = c \cdot a(t)$$

d.h. $c = 0 \quad \vee \quad \dot{d}(t) = a(t)$

Man setze $d(t) := \int_0^t a(t')\, dt'$, dann gilt:

$t \mapsto c \cdot e^{d(t)}$ erfüllt unser DGL.

$u(x) = e^{\int P(x)dx}$



Anfangsbedingung: $x(0) = 1 \Rightarrow c \cdot e^{d(0)} = 1 \Rightarrow c = 1.$

Also, $x(t) = e^{\int_0^t a(t')\, dt'}$ ist Lösung der AWP.

(b) Nun sei $t \mapsto x_b(t)$ eine Lsg. der DGL $\dot{x}(t) = a(t)\, x(t)$

Idee: • wir können $\frac{x_b(t)}{x_a(t)}$ machen, und wenn das eine Konstante ergibt, haben wir bereits gezeigt.

• $\frac{d}{dx}(\text{konst}) = 0.$

in (a) hatten wir $x_a(t) = e^{d(t)} = e^{\int_0^t a(t')\,dt'}$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x_b(t)}{e^{d(t)}}\right] = \frac{\dot{x}_b(t) \cdot e^{d(t)} - \dot{d}(t)\, x_b(t)\, e^{d(t)}}{e^{2d(t)}}$$

$$= \frac{e^{d(t)}\left(\overbrace{a(t) \cdot x_b(t)}^{\text{DGL}} - \overbrace{a(t)\, x_b(t)}^{\dot{d}(t) = a(t)}\right)}{e^{2d(t)}} =$$

$\square$

P15.3: Inhomogene lineare DGL erster Ordnung

$$\dot{x} = -x + \sin(t)$$

(a) Es folgt aus (g) daß $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x(0) = x_0$ mit $A = -1 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und $b(t) = \sin(t)$, $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$.

$$x_p(t) = e^{tA}\left(0 + \int_0^t e^{-t'A}\, b(t')\,dt'\right)$$

$$= e^{-t}\left(\int_0^t e^{t'} \sin(t')\,dt'\right)$$

$$\overset{(*)}{=} e^{-t}\left(\frac{1}{2} e^{t'}(\sin t' - \cos t')\Big|_0^t\right)$$

$$= \frac{e^{-t}}{2}\left[e^{t}(\sin t - \cos t) - e^{0} \cdot (-1)\right]$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-t} + \sin t - \cos t\right]$$ ← sog. „partikuläre Lösung"

$(*)$: $\int e^{t'} \sin t'\,dt =: I$

Part. Int: $\int v\,du = v \cdot u - \int u\,dv$.

$= -\int e^{t'}\, d(\cos t') = I$

$= -\left[e^{t'}\cos t' - \int e^{t'} \cos t'\,dt'\right]$

$= -e^{t'}\cos t' + \int e^{t'}\, d(\sin t')$

$= -e^{t'}\cos t' + \sin t'\, e^{t'} - I$

$I = \frac{1}{2} e^{t'}(\sin t' - \cos t')$

(b) Ein Fundamentalsystem der homogenen Gl. ist e^{-t}. Alle Lsg. der homogenen Gleichung sind Linearkombinationen davon.

Also ce^{-t}, $c\in\mathbb{R}$. Daher hat die inhom. DGL genau die Lsg.

$$x(t) = ce^{-t} + x_p(t)$$

$$x(t) = \left(c+\tfrac{1}{2}\right)e^{-t} + \tfrac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin t - \cos t\right) \quad , c\in\mathbb{R}. \qquad -(10)$$

(c) beschränkte Lösung $\Rightarrow$ (10) $\rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin t - \cos t\right)$$

<u>Physikteil</u>: Ansatz: $x(t) = A\sin(t-\varphi_0) = A\sin t\cos\varphi_0 - A\cos t\sin\varphi_0$

$\Rightarrow A\cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \quad\wedge\quad A\sin\varphi_0 = \frac{1}{2}$ $\quad A^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$A^2\cos^2\varphi_0 = \frac{1}{4} \quad\wedge\quad A^2\sin^2\varphi_0 = \frac{1}{4}$ $\quad \sin\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

$\left(Ae^{i\varphi_0} = \frac{1+i}{2}\right)$