TUTORIUM - 8

$g \in C^\infty$ → smooth, glatte

$f: I \xrightarrow{} \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$

Def: f heißt beschränkt $\Longleftrightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R}:$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in I$$

Def: Supremumseigenschaft:

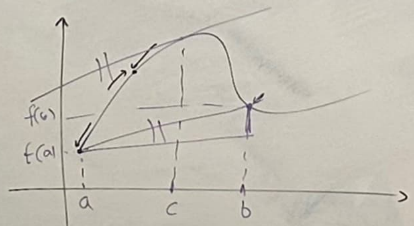
Jede ① nicht leere, ② nach oben beschränkte ③ Teilmenge von Reelle Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$. Analog für Infimum.

Def: Mittelwertsatz der D.R. $\quad I = [a,b]$

$f: I \to \mathbb{R}$. (i) f ist stetig auf $[a,b]$

(ii) f ist diffbar auf (a,b)

$$\exists\, c \in (a,b): \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



P8.2: $f: I \xrightarrow{} \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, stetig Diff auf I $\quad f \in C^1(I, \mathbb{R})$

f' existiert und stetig. f' ist beschränkt

z.z.: f Lip-Stetig $\Longleftrightarrow \exists\, L > 0: \ |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in I$

$\to M := \{ f'(x) \mid x \in I \}$; $\quad L \overset{\text{sup. Eig.}}{:=} \sup \{ |f'(x)| \mid x \in I \}$ — (*)

Fall I: $L = 0$

$\Rightarrow f$ ist konst damit auch Lip-Stetig $\square_I$

Fall II: $L > 0$

$\alpha, \beta \in I: \ \alpha < \beta$

f ist stetig auf $[\alpha, \beta]$

f ist diffbar auf (α, β)

→ MWS der D.R.

$$\exists\, \xi \in (\alpha, \beta): \ f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \quad (\dagger$$

$$(*) \iff f'(\xi) \le L$$

$$(\dagger) \iff L \geqslant \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$$

$\square_{\mathrm{II}}$

$\square$

P8.1 L'Hôpital'sche Regel.

exp ist stetig ✓

(d) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\cdot \ln x\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right) = e^0 = 1$

(e) $\lim_{x\to\infty} \underbrace{x\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$

Stetigkeit von exp (e)

(f) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\underbrace{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = e$

P8.3: $f: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x\cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$

$M := [0,\infty) \setminus S := \{x \mid e^x = 0\}$

(i) Verknüpfung stetiger Funktion ist stetig.

→ Diffbarkeit von f folgt aus diffbarkeit von die beiden andern funktionen eingeschränkt auf $[0,\infty)$.

(ii) Monotonie: $f'(x) = \underbrace{(1-x)}\underbrace{e^{-x}}$

$\left(f^{(n)}(x) = ((-1)^n x - n)\, e^{-x} \right.$

Induktionsbeweis →

	0	1	
$1-x$	+	0	−
e^{-x}	+		+
$f'(x)$	+	0	−

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

(57) Wolfskript.

- $f(x)$ ist streng monoton steigend auf $[0,1]$
- $f(x)$ ist " " fallend auf $[1,\infty)$

→ Konvexität

$f''(x) = (2-x)e^{-x}$

	0	2
$x-2$	−	+
e^{-x}	+	+
$f''(x)$	−	+

$[0,2]$ strikt konkav

$[2,\infty)$ strikt konvex

$\cdot f$

(c) Extrema: $f'(x) \overset{!}{=} 0$ (notwendig! aber nicht Hinreichend)

Kandidat: $x = 1$ | $x = 0$

$f(1) = \frac{1}{e} \simeq \frac{1}{2.71} \simeq 0.37$ || $f(2) = \frac{2}{e^2} \simeq \frac{2}{7.5} = 0{,}27$

$f(0) = 0$

$x = 1$ ist lokale Maximum.

strenge Monotonieverhalten $\Rightarrow$ globale Max.

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ | $f(x) \geq 0 \Rightarrow x = 0$ globale Minimum.

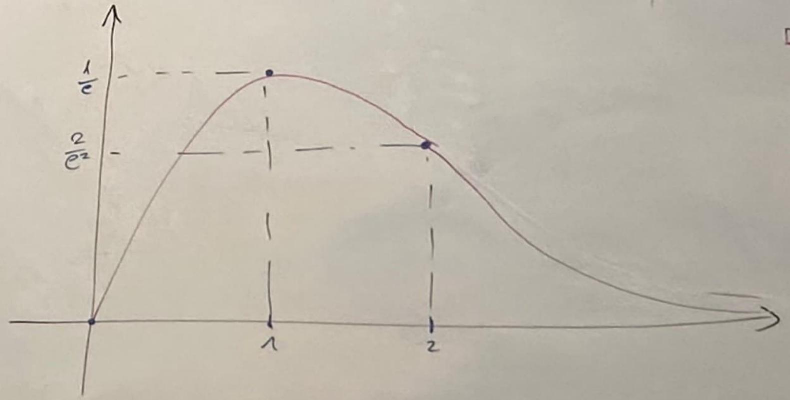
Wendepunkt: $f''(x) \overset{!}{=} 0 \xRightarrow{\boxed{x=2}} f(2) = 0{,}27$

$\boxed{x = 2}$ Wendepunkt

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ | $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

(*) $\Longleftrightarrow f'(\xi) \leq L$

(†) $\Longleftrightarrow L \geq \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$



D_{II}

□