TUTORIUM - 12

$\mathcal{L} = T - U$

<u>Satz van Taylor</u>. $f \in C^n((a,b))$ und $\frac{df^{(n)}}{dx} =: f^{(n+1)}$ existiert $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

auf (a,b) dann existiert für $x, x_0 \in [a,b]$ mit $x \neq x_0$ ein ξ zwischen x, x_0

$\xi \in [\min(x,x_0), \max(x,x_0)]$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{T_n(x;0) \quad T_n f(x;0)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}}_{R_n f(x;x_0) \quad R_n(x;x_0)}$$

<u>Def</u> (Taylorreihe) $f: D \to \mathbb{R}$

$$T_\infty f(x;0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Voraussetzung $f \in C^\infty(D)$

T.R. bei x_0.

wann ist eine P.R = T.R.

(a) $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = T.R.$, $\boxed{T_3 \sin(x;0) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}\ \cancel{- \frac{x^7}{720}}$

(b) $f(x) : \sin(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} = x^2 - \frac{x^6}{6} + \cancel{\frac{x^{10}}{120}}$

$y = x^2$

$(x^2+2x)(x^2+2x)(x^2+2x)$

$x, (x^2)$

(c) $f(x) = \sin(x^2+2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2+2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = (x^2+2x) - \frac{(x^2+2x)^3}{6} + \frac{(x^2+2x)^5}{120}$

$\boxed{T_6 f(x;0) = 2x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^4 - \frac{11}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^6}$

$= 2x + x^2 - \frac{1}{6}\left((x^2)^3 + 3\cdot(x^2)^2(2x) + 3x^2(2x)^2 + (2x)^3\right)$

$+ \frac{1}{120}\left((2x)^5 + 5x^2 \cdot (2x)^4 + O(x^7)\right)$

TUTORIUM - 12

(d) $f(x) = \sin(\underbrace{\sin(x)}_{y}) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^5 \ldots$

$y = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 - x^2 \frac{x^3}{6} \cdot 3 + O(x^7)\right) + \frac{1}{120}\left(x^5 + O(x^7)\right)$

$T_6 f^{(x,0)} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{10} x^5$

P13. (a) $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1-x}{1+x}$

$\frac{1}{1-q}$ $q=(-x)$

wann ist ein T.R = P.R

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x+(1-1)}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1+2\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \qquad \rho := 1 \; |\text{Konv.}| < \rho$$

$$= -1+2\left(1-x+x^2-x^3+x^4 \pm \dots\right)$$

Alternierende Reihe $+x^3 - x^3$ $+1-)$

$$= 1-2x+2x^2-2x^3 + 2x^4 \pm \dots$$

$-\, I_3 f(x;0)$

$\forall x$ $|x| < \rho = 1$ $\lim_{n\to\infty} S_n \in [S_m, S_{m+1}]$

$f(x) \in \left[\frac{3}{5}, 1\right]$ $\forall x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$

• Absoluten Fehler: $|f(x) - I_3 f(x;0)| \le \underbrace{2x^4}_{[0,\frac{1}{4}]} = \frac{1}{128} < \frac{1}{100} = 1\%$

$\frac{1}{128}$

• Relativer Fehler: $\left|\frac{f(x) - I_3 f(x;0)}{f(x)}\right| \le \frac{2 \cdot x^4}{3/5} = \frac{1{,}6}{128} > 1\%$

$$\left|\frac{f(x) - I_4 f(x;0)}{f(x)}\right| \le 2 \cdot x^5 \cdot 1{,}6 = \frac{1{,}6}{512} < 1\%$$

P13.3 (a) $f(x) = \sin x$, ist Lip stetig mit $L := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| = 1$ $\qquad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \le L$

Es gäbe so eine Folge von Polynomen $(P_n)_n$ die glm. gegen f konv., dann gäbe es einen festen aber beliebigen $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin(x) - P_n| < \varepsilon$ $\forall n > n_0$

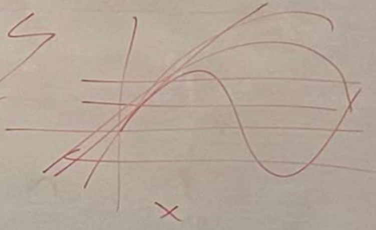
$-1 \le \sin x \le 1$

$$\forall x : |\sin(x) - P_n| < \varepsilon \longrightarrow -\varepsilon < \sin(x) - P_n < \varepsilon \rightarrow \sin x - \varepsilon < P_n < \sin x + \varepsilon$$

$$-(1+\varepsilon) \le -\sin(x) - \varepsilon < P_n(x) < \sin(x) + \varepsilon \le 1 + \varepsilon$$

$\sqrt{3} \approx 1{,}732$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ ax}}{\infty} = \lim_{x \to \pm\infty} |P_n(x)| \le 1 + \varepsilon \quad ↯$$



P13.3 (a) $f(x) = \sin x$, ist Lip stetig mit $L := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1$ $\quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \le L$

Es gäbe so eine Folge von Polynomen $(P_n)_n$ die glm. gegen f konv., dann gäbe es einen festen aber beliebigen $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\sin(x) - P_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$

$-1 \le \sin x \le 1$

$\forall x: \; |\sin(x) - P_n| < \varepsilon \longrightarrow -\varepsilon < \sin(x) - P_n < \varepsilon \rightarrow +\sin x - \varepsilon < P_n < \sin x + \varepsilon$

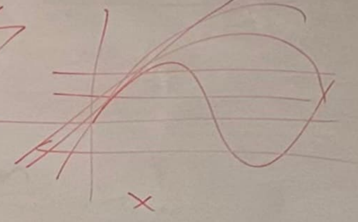
$-(1+\varepsilon) \le -\sin(x) - \varepsilon < P_n(x) < \sin(x) + \varepsilon \le 1 + \varepsilon$

$\sqrt{3} \approx 1{,}732$

$\infty = \lim\limits_{x \to \pm\infty} |P_n(x)| \le 1 + \varepsilon$ ↯

$\downarrow$

$a x$



wann ist eine T.R = P.R

$R_n f(x;x_0) = f(x) - I_n f(x;x_0)$; $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$

$\exists \xi$ zw. x, x_0 $\quad R_n f(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$0 < e^x - \left(1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) < \frac{1}{24}$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$

$= R_2 f(x;0) \overset{T_2}{=} e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$

$\xi \in [0, \frac{1}{2}]$

$e^\xi \leq \sqrt{e} < 2$

$R_2 f(x,0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \cdot x^3 = \frac{e^\xi}{6} \cdot x^3 \overset{1/2}{=} \frac{e^\xi}{48} < \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$