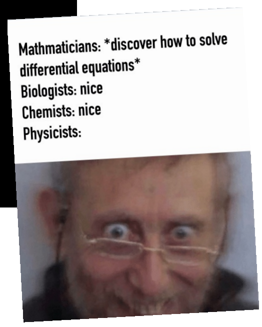
TUTORIUM-15

Lineare Differentialgleichungen

EKLAVYA GOYAL
eklavya.goyal@tum.de
(Ana 1Ph, gruppe 1)

Wieso überhaupt?

> Sind Differentialgleichungen wichtig in der Physik?
>
> Ja, Differentialgleichungen sind in der Physik von entscheidender Bedeutung, da sie beschreiben, wie sich physikalische Größen in Zeit und Raum verändern. Von Newtons Bewegungsgesetzen über Maxwells Gleichungen in der Elektrodynamik bis hin zur Schrödingergleichung in der Quantenmechanik bilden sie das mathematische Fundament nahezu aller physikalischen Theorien. Sie ermöglichen es Wissenschaftlern, das Verhalten von Systemen vorherzusagen, komplexe Phänomene wie Strömungsdynamik und Wärmeleitung zu modellieren und die grundlegenden Naturgesetze besser zu verstehen. Durch die Lösung von Differentialgleichungen wird die Brücke zwischen theoretischen Prinzipien und realen Anwendungen geschlagen, was sie zu einem unverzichtbaren Werkzeug in der Physik macht.



– der Bre hat recht!

Def: (Gewöhnliche DGL's)

- Eine **gewöhnliche DGL n-ter Ordnung** ist eine Gleichung der Form

$$F\left(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots\ldots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)\right) = 0 \quad , t \in \mathbb{R} \qquad -(1)$$

- Eine **gewöhnliche, lineare DGL n-ter Ordnung** ist eine Gleichung der Form

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}\, x^{(n-1)}(t) + \ldots\ldots + a_1 x^{(1)}(t) + a_0\, x(t) = \underset{\text{Inhomogenität}}{b(t)} \qquad -(2)$$

mit der Inhomogenität $b(t)$.

Satz: (Reduktion auf System 1. Ordnung)

Die DGL (2) ist Äquivalent zu dem System: $, x \in \mathbb{R}^n$

wichtig, normalisiert!

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + b(t) \qquad -(3)$$

wobei

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Satz: (Lösung homogener Systeme)

Die DGL $\dot{x} = Ax$ ($b(t)=0$) mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{tA} \cdot x(0) \qquad - (4)$$

wobei e^{tA}, der sog. Matrix exponential, wie folgt definiert ist:

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad - (5)$$

Def: (Anfangswertproblem, en: Initial value problem.)

Zusammen mit der DGL ist auch das $x(0) = x_0$ gegeben $\Rightarrow$ AWP. (4) ist die Eindeutige Lsg des AWP's.

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \quad \wedge \quad x(0) = x \qquad - (6)$$

Def: (Lösungsfundamentalsystem)

Die Lösungen der DGL $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bilden einen komplexen Vektorraum $\mathcal{L}$. Jede Basis von $\mathcal{L}$ nennen wir Lösungfundamentalsystem.

Def: (charakteristische Polynom)

Für (2) heißt, $b(t)=0$

$$\chi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \qquad - (7)$$

das Charakteristische Polynom.

Satz: Sei k_j die alg. vielfachheit der Nullstelle λ_j von $\chi(\lambda)$. $\chi(\lambda) = \prod_{j=1}^{p} (\lambda-\lambda_j)^{k_j}$. Dann ist jede Lösung von (2), $b=0$ von der Form

$$x(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{m=1}^{k_j} c_{jm}\, t^{m-1} e^{\lambda_j t}, \quad c_{jm} \in \mathbb{C} \qquad - (8)$$

<u>Satz</u>: (Lösungen Inhomogener Systeme) - Variationen der Konstanten.

Die DGL (3) $\dot{x}(t) = A\,x(t) + b(t)$ mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$

besitzt die allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{tA} x(0) + \underbrace{e^{tA} \int_0^t e^{-t'A}\, b(t')\, dt}_{x_p(t)} \qquad - (9)$$

P15.1 (a) $\ddot{q} = -q + \delta \dddot{q}$, $\delta > 0$, $n = 3$

$$\underset{\lambda^3}{\dddot{q}} - \frac{1}{\delta}\underset{\lambda^2}{\ddot{q}} + 0 \cdot \underset{\lambda^1}{\dot{q}} - \frac{1}{\delta}\underset{\lambda^0}{q} = 0$$

$$x(t) := \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , \quad \dot{x}(t) := \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \\ \dddot{q}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\exists\, b \in \mathbb{R}^3$ $\underline{A \in \mathbb{R}^{3\times3}}$

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + \cancel{b(t)} \leftarrow \text{inhomogenität.}$$

$b(t) = 0 \in \mathbb{R}^3$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \overset{-\lambda}{0} & 1 & 0 \\ 0 & \overset{-\lambda}{0} & 1 \\ \frac{1}{\delta} & 0 & \frac{1}{\delta}{-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \det \underset{(\lambda\mathbb{1} - A)}{(A - \lambda\mathbb{1})} = *$$

$$* = \chi(\lambda) = \lambda^3 - \frac{\lambda^2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = 0 \quad ✓$$

(b) $\left.\begin{array}{l} \ddot{x}_1 + \kappa x_1 + \alpha(x_1 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \kappa x_2 + \alpha(x_2 - x_1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\dot{x} = A x}$

$y_1 = x_1$, $\underline{y_2} = \dot{x}_1 = v_1$; $y_3 = x_2$, $y_4 = \dot{x}_2 = v_2$

$$\mathbb{R}^4 \ni y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \underline{y_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \underline{\dot{x}_2} \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

$\dot{y}_2 = \underline{\ddot{x}_1} = -(\kappa + \alpha)\, x_1 + \alpha x_2$; $\dot{y}_4 = \ddot{x}_2 = \underline{-(\kappa + \alpha)}\ \underline{x_2} + \alpha\, \underline{x_1}$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(\kappa+\alpha)\, y_1 + \alpha\, \underline{y_3} \\ \underline{y_4} \\ \alpha\, y_1 - (\kappa+\alpha)\, y_3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = Ay \qquad A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(k+\alpha) & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & -(k+\alpha) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

P15.2: (a) $a \in \mathbb{R}$ $\quad \underline{\dot{x} = a(t)\cdot x} \quad \underline{x(0) = 1}$

Ansatz: $x(t) = c \cdot e^{d(t)}$

$$c \cdot \dot{d}(t) \cdot \cancel{e^{d(t)}} = a(t) \cdot c \cdot \cancel{e^{d(t)}}$$

$$\Rightarrow c \cdot \dot{d}(t) = c \cdot a(t)$$

$\underline{c = 0}$ $\qquad$ $c \neq 0$: $\dot{d}(t) = a(t)$

$$\downarrow$$

$$\underline{\underline{d(t)}} := \int_0^t a(t')\, dt'$$

$t \mapsto c e^{d(t)}$ erfüllt unser DGL.

AWP: $x(0) = 1 \Rightarrow c \cdot e^{d(0)} = 1 \Rightarrow c = 1$

Also, Lösung der DGL + AWP

$$x_a(t) = e^{\int_0^t a(t')\, dt'}$$

(b) $t \mapsto x_b(t)$ $\qquad$ DGL: $\dot{x}_b(t) = a(t) \cdot x_b(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{x_b}{x_a}}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_b(t)}{e^{d(t)}}\right) = \frac{\overbrace{\dot{x}_b(t)}^{= a(t)\, x_b(t)} \cdot e^{d(t)} - \overbrace{\dot{d}(t)}^{= a(t)}\, x_b(t)\, e^{d(t)}}{e^{2d(t)}}$$

$$= \frac{e^{d(t)}}{e^{2a(t)}}\left(a(t)\, x_b(t) - a(t)\, x_b(t)\right) = 0$$

P15.3 (a) $\dot{x} = -x + \sin(t)$

(9) $\Rightarrow$ $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x(0) = x_0$ mit $A = -1 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

$b(t) = \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$

$$x_p(t) = e^{tA}\left(0 + \int_0^t e^{-t'A}\, b(t')\,dt'\right)$$ Satz

$$\overset{(*)}{=} e^{-t}\left(\int_0^t e^{t'} \sin(t')\,dt'\right)$$

$$= e^{-t}\left(\frac{1}{2} e^{t'}\left(\sin t' - \cos t'\right)\Big|_0^t\right)$$

$$= \frac{e^{-t}}{2}\left[e^t(\sin t - \cos t) \underbrace{- e^0 \cdot (-1)}_{+1}\right]$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-t} + \sin t - \cos t\right]$$

(b)

$$x(t) = c \cdot e^{-t} + x_p(t)$$

$$x(t) = \left(c + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t), \quad c \in \mathbb{R} \qquad -(10)$$

(c) beschränkte Lsg: $(10) \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$$x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$$

Physik:

$$x(t) = A \sin(t - \varphi_0) = A(\sin t \cos\varphi_0 - \sin\varphi_0 \cos t)$$

$A \cos\varphi_0 = \frac{1}{2}$ $\wedge$ $A \sin\varphi_0 = \frac{1}{2}$

$A^2 \cos^2\varphi_0 = \frac{1}{4}$ $\wedge$ $A^2 \sin^2\varphi_0 = \frac{1}{4}$

$A^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sin\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}.$