Def: M eine nicht leere menge und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Raum, $\mathcal{B}(M,Y)$ - Fkt.raum.

Sup norm: $\|\cdot\|_{\infty} : \mathcal{B}(M,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$$\|f\|_{\infty} \longmapsto \sup_{x\in M} \|f(x)\|_Y$$

$\|\cdot\|$

(i) Definitheit: $\|x\|=0 \Rightarrow x=0$

(ii) Homogenität: $\|\alpha\cdot x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$, $\alpha\in\mathbb{R}$

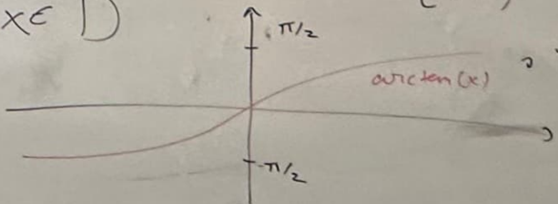
(iii) Dreiecksungl.: $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

Def: $f : \mathbb{R} \supseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ konvergiert

- punktweise gegen f. $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x\in D$
- gleichmäßige gegen f. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n - f| = 0$

$[0,1)$ $\displaystyle\int^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(\cos x + x)} =$



P12.1: (c) $h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad$ (*) $\sqrt{\cdot}$ stetig.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Pkt.: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\right) \overset{(*)}{=} \sqrt{\underbrace{x^2 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{Grenzwertkalkül}}} = \sqrt{x^2} = |x|$

$h(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ gegen.

$h_n(x)$ konv. pkt.

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Glm.: $\left|h_n(x) - h(x)\right| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2}\right| = \left|\frac{(\overbrace{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}^{a} - \overbrace{\sqrt{x^2}}^{b}) \cdot (\sqrt{x^2+1/n} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2+1/n} + \sqrt{x^2}}\right| = \left|\frac{\cancel{x^2} + 1/n - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1/n} + \sqrt{x^2}}\right|$

$\frac{1}{n} \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1/n} + \sqrt{x^2}}\right| \overset{(x=0)}{\leqslant} \frac{1}{n} \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{1/n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$0 \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|h_n(x) - h(x)\right|\right)}_{=0} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

glm. ✓

P12.1: (c) $h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad$ (*) $\sqrt{\cdot}$ stetig

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Pkt.: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\right) \overset{(*)}{=} \sqrt{\underbrace{x^2 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{Grenzwertkalkül}}} = \sqrt{x^2} = |x|$

$h(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ gegen. $h_n(x)$ konv. pkt.

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Glm.: $\left|h_n(x) - h(x)\right| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2}\right| = \left|\frac{\left(\overbrace{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}^{a} - \overbrace{\sqrt{x^2}}^{b}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1/n} + \sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+1/n} + \sqrt{x^2}}\right| = \left|\frac{\cancel{x^2} + 1/n - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1/n} + \sqrt{x^2}}\right|$

$\frac{1}{n} \cdot \underbrace{\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1/n} + \sqrt{x^2}}\right|}\overset{(x=0)}{\leqslant} \frac{1}{n} \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{1/n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$0 \leq \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|h_n(x) - h(x)\right|\right)}_{=0} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

glm. ✓

P12.2: $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ $\quad g_n(x) = x^n e^{-x^n}$, $x \in [0,\infty)$

(a) f_n, g_n sind nicht negativ, als Verknüpfung stetiger Fkt, stetig, und ungleich nullfkt. $\forall n \in \mathbb{N}$

Grenzverhalten: $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = 0$

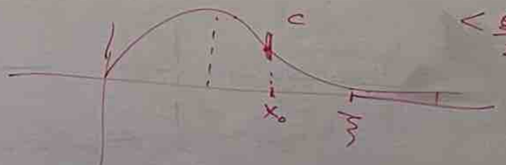
$\lim\limits_{x\to\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{y}{e^y}\right) = 0$

Sei h eine Fkt mit Eigenschaften.

$\exists x_0 > 0 : h(x_0) =: c > 0$

$\exists \xi > 0 : h(x) < \frac{c}{2} \quad \forall x > \xi$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: a_n < \varepsilon \ \forall n > N$



h ist auf $\underbrace{[0, \xi]}_{\text{abg. \& beschr.} \Rightarrow \text{kompakt}}$ beschränkt

↳ h nimmt sein max und min an.

für $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = 0$$

$\rightarrow g_n(x)$: $0 \leq x < 1$: x^n eine Nullfolge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{e^{xn}} = \frac{0}{e^0} = 0$$

$x = 1$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{e^{1n}} = \frac{1}{e}$

$x > 1$: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^n}{e^{xn}}\right) = 0$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\infty) \setminus \{1\} \\ \frac{1}{e}, & x = 1 \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^n}\right) = 0$ f ist glm. konv. gegen 0.

$f_n(x)$

(c) $f_1(x) = x \cdot e^{-x}$ $\quad f_n(x) = x^n \cdot e^{-nx}$ $\quad x = 0$

$$f_n = (f_1(x))^n = (x \cdot e^{-x})^n = x^n \cdot (e^{-x})^n = x^n \cdot e^{-nx}$$

$y \mapsto y^n$ str mon. steigend!

alle f_n's haben dasselbe Maxima wie f_1.

$$f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \stackrel{!}{=} 0$$

$\boxed{x = 1} \Rightarrow f_1(x=1) = \frac{1}{e}$