Funktionenfolgen

Ana1Ph, Grp1
(eklavya.goyal@tum.de)

Def: (Supremumsnorm) Sei M eine nicht leere Menge und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Normierter-Raum, dann bezeichnet $\mathcal{B}(M,Y)$ den Funktionenraum (en: Function space) der beschränkten Funktionen von M nach Y. Die Supremum-Norm auf diesen Funktionenraum ist die Abbildung

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(M,Y) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{wobei}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in M} \|f(x)\|_Y$$

Def: Sei $f: \mathbb{R} \supseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$. Eine Folge von Funktionen $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, konvergiert

- punktweise gegen f, wenn $\boxed{\forall x\in D: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$
- gleichmäßig gegen f, wenn $\boxed{\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0}$

Bemerkung: 1. Punktweise Konvergenz hängt von x ab, Gleichmäßige Konv. hängt nicht von x ab.
2. Punktweise Konvergenz setzt lediglich voraus, dass die Fkt.folge an jedem Punkt eine Konvergenzgeschwindigkeit hat. Dies kann schnell für einige Punkte sein, aber sehr, sehr langsam für die andere. Als Bsp. betrachten wir:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \frac{1}{n}x^2$$

da $a_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, folgt, daß

$$\forall x\in\mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \leftarrow f(x) = 0$$

„Nullfunktion"

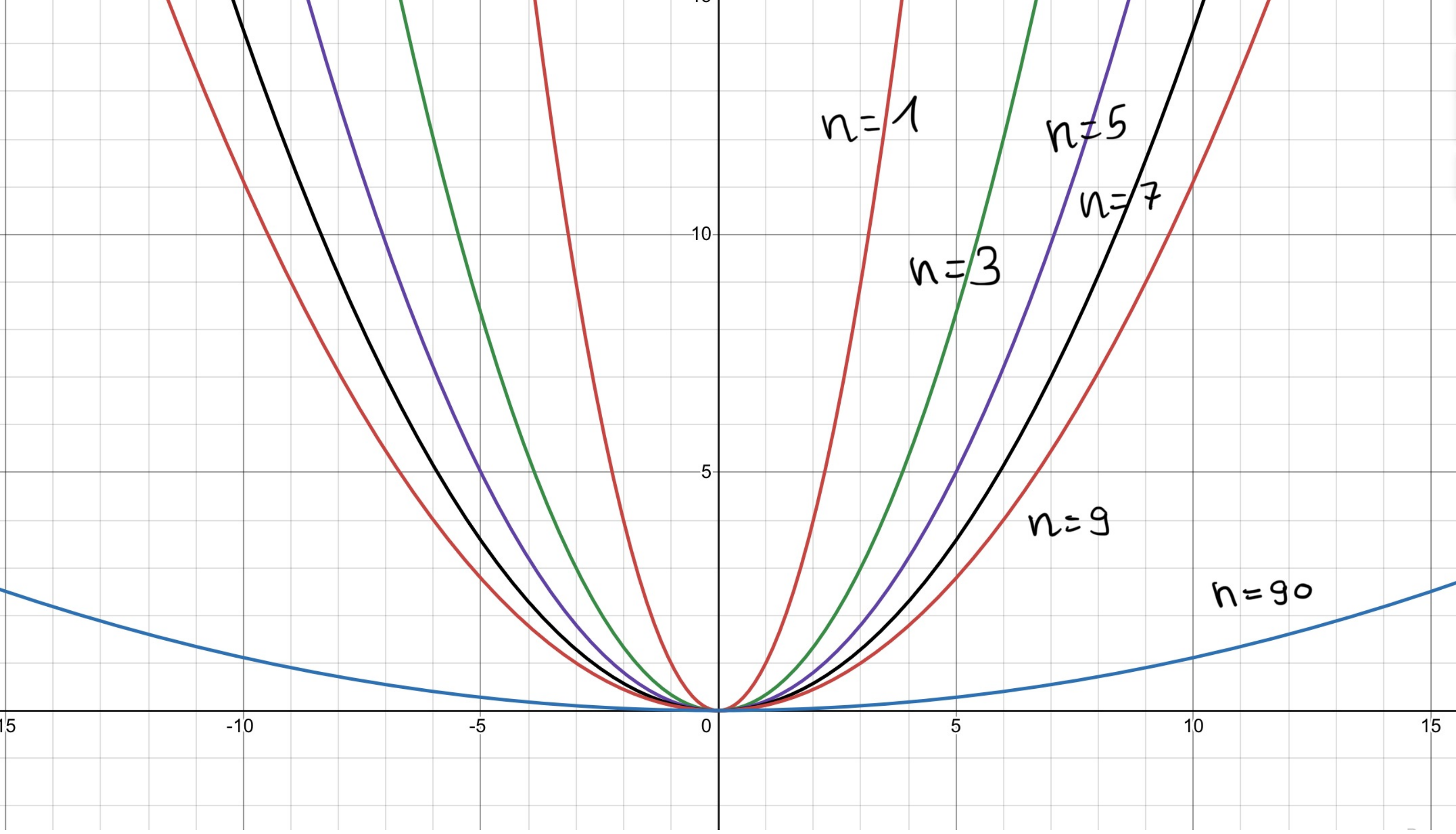


Fig 1: $f_n = \frac{x^2}{n}$ für einige werte von n. Wie man hier sieht, konvergiert x=0 „sofort" gegen 0, aber z.B x = 10 hat eine sehr langsame Konv. geschw.

3. Bei der glm. Konv. setzt man voraus, dass der größte Abstand zw. f und die f_n's gegen Null geht.

P12.1: (a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x^9}$, $x \in [0,1]$

Für $x \in (0,1]$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{2/n} \cdot x^{9/n}$

$$\overset{\sqrt{\cdot}\text{ stetig}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x}\right)^9 = 1.$$

Für $x=0$: $f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Damit ist (f_n)

Punktweise Konvergent auf $[0,1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Da f unstetig, f_n aber $\forall n \in \mathbb{N}$ stetig auf $[0,1]$, kann f_n auf $[0,1]$ nicht glm. konvergieren.

(b) $g_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

(i) Punktweise: $\quad$ (*) $\sin(\cdot)$ stetig

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \overset{(*)}{=} \sin\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\right) = \sin(0) = 0$$

Damit konvergiert g_n Pkt.weise gegen $0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) glm. Konv.: $\quad |f_n - f| = \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|$

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| = 1$ (für z.B. $n=2$ und $x=\pi$)

da sup nicht gegen 0 geht, konvergiert $g_n(x)$ nicht glm.

(c) $h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$

(i) Punktweise Konv.: $\quad$ (*) Stetigkeit von $\sqrt{\cdot}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \overset{(*)}{=} \sqrt{x^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = |x|$$

Also es konvergiert Punktweise mit Grenzfunktion:

$$h(x) = |x|$$

(ii) glm. Konv: $\left| \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x| \right| = \left| \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right|$

$$\left| \left(\underbrace{\sqrt{x^2+1/n}}_{a} - \underbrace{\sqrt{x^2}}_{b}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1/n}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1/n}+\sqrt{x^2}} \right| = \left| \frac{\cancel{x^2} + 1/n - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1/n}+\sqrt{x^2}} \right|$$

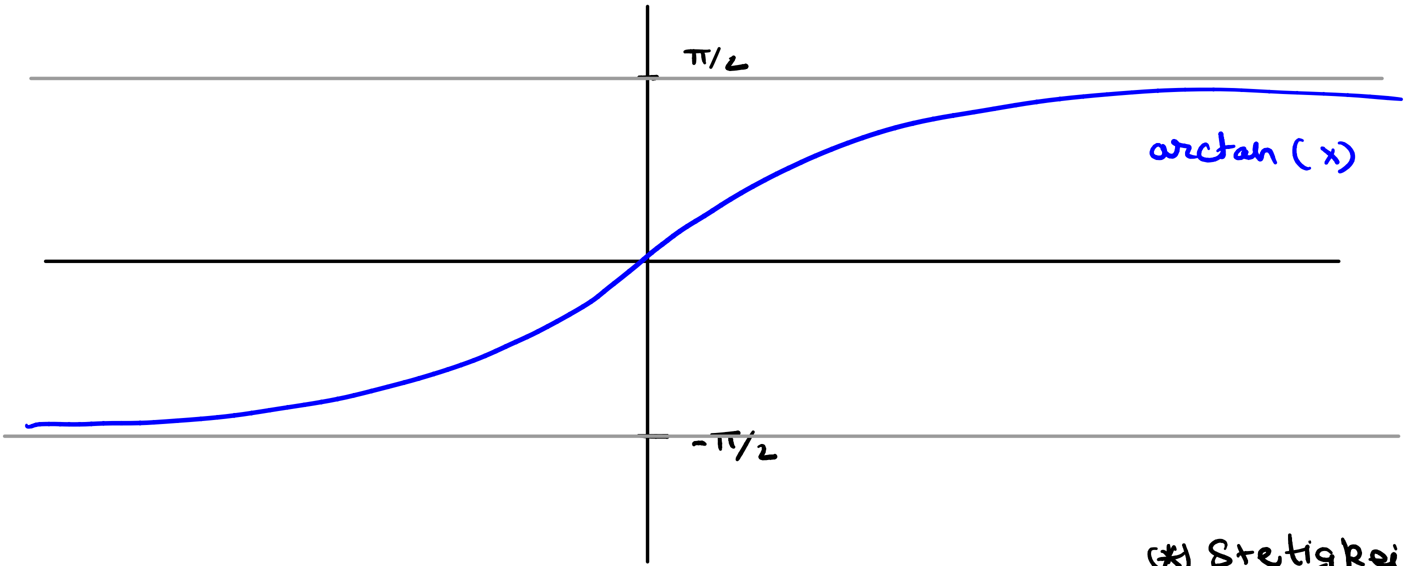
$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{1}{n} \left| \frac{1}{\sqrt{x^2+1/n}+\sqrt{x^2}} \right| \leq \frac{1}{n} \left| \frac{1}{\sqrt{1/n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| h_n(x) - h(x) \right| \right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Damit konvergiert $h_n(x)$ sogar gleichmäßig gegen $h(x)$.

(d) $k_n(x) = \arctan(nx)$, $x \in \mathbb{R}$



(*) Stetigkeit von arctan(x).

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) \overset{(*)}{=} \arctan\left(\lim_{n\to\infty}(nx)\right)$$

Für $x>0$: $\lim_{n\to\infty} nx = \infty$, $x<0$: $\lim_{n\to\infty} nx = -\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \begin{cases} -\pi/2, & x<0 \\ +\pi/2, & x>0 \end{cases}$$

$x=0$: $k_n(0) = 0$, d.h.

nicht stetig, also kann nicht glm. Konvergieren.

$$k(x) = \begin{cases} \pi/2 & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ -\pi/2 & , x<0 \end{cases}$$

$$k_n(x) \xrightarrow{\text{Punktweise}} k(x) .$$

P12.2. $f_n(x) = x^n \cdot e^{-nx}$, $g_n(x) = x^n \cdot e^{-x^n}$

Einige Beobachtungen: f_n und g_n sind $\forall n \in \mathbb{N}$ nicht negativ, stetig und ungleich der Nullfunktion

Als Komposition stetigen Fkt.

Alle funktionen nehmen das Minimum 0 im Ursprung an.

Grenzverhalten:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}\right)^n \overset{\ell'H}{=} 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{x^n}} \overset{n \times l'H}{=} 0$$

Sei h eine solche Funktion:

$\exists x_0 \in [0,\infty)$: $h(x) =: c > 0$

dazu gibt es ein $\xi > x_0$: $\underbrace{h(x) \leq \frac{c}{2} \; \forall \; x \geq \xi}$

höchstens $\frac{1}{2}$ wie maxima.

Erinnerung folge $\to 0$:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 : \; \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon$

Funktionen:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \xi > 0 \; h(x) < \varepsilon \quad \forall x > \xi$

$h(x)$ ist also auf $[0, \xi]$ beschränkt, und da $[0, \xi]$ ein Kompakter Intervall ist, darf man den Satz von Max und Min anwenden.

Für $X \geq 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = 0$ da $x < 1+x \leq e^x$

$g_n(x) \rightarrow$ $0 \leq x < 1$ ist x^n eine Null Folge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{e^{x^n}} = \frac{0}{e^0} = 0$$

Für $x = 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{1}{e}$

Für $x > 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{e^{x^n}} = 0$ (exp wächst schneller)

Insg. also: $g(x) = \begin{cases} 1/e, & x = 1 \\ 0, & x \in [0, \infty) \setminus \{1\} \end{cases}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) = (f_1(x))^n$, $f_1 = x \cdot e^{-x}$

Also besitzt jeder f_n sein max. an derselben stelle wie f_1, da $y \mapsto y^n$ streng monoton steig. und auf $[0, \infty)$ ist.:

$$f_1'(x) = e^{-x}(1-x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 1$$

damit $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_0^+} f_n(x) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_0^+} f_n(1) = \frac{1}{e^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Also konvergiert f gleichmäßig gegen 0.