

# TAYLORENTWICKLUNG

Satz von Taylor: Sei  $f \in C^n((a, b))$  und  $\frac{d f^{(n)}}{dx} =: f^{(n+1)}$  existiert auf  $(a, b)$ , dann existiert für  $x, x_0 \in (a, b)$  mit  $x \neq x_0$  ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$  (also  $\xi \in (\min(x_0, x), \max(x_0, x))$ ), so daß

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}_{T_n f(x; x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{R_n f(x; x_0)}$$

Wolf's Notation:  $(T_n(x; x_0))$      $T_n f(x; x_0)$      $R_n f(x; x_0) \quad (R_n(x; x_0))$

gilt.  $T_n f(x; x_0)$  heißt das n-te Taylorpolynom von  $x$  um  $x_0$ .  
 $R_n f(x; x_0)$  heißt das Lagrange-Restglied.

Def: (Taylorreihe) Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  offen mit  $x_0 \in D$ .

Für ein  $f \in C^\infty(D)$  heißt die (konvergente oder divergente) Reihe

$$T_\infty f(x; x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

die Taylorreihe von  $f$  bei  $x_0$ .

# Präsenzaufgaben:

P 13.1: Ordnung: 6 um  $x_0 = 0$

(a)  $\sin(x) = f(x)$  höchste grad

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + O(x^7)$$

$$\text{d.h., also: } T_6 f(x; 0) = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5$$

(b) Aus (a) folgt:

$$f(x) = \sin(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2(2k+1)}}{(2k+1)!} = x^2 - \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{120} x^{10} + O(x^{14})$$

$$\text{d.h.: } T_6 f(x; 0) = x^2 - \frac{1}{6} x^6$$

(c)  $f(x) = \sin(x^2 + 2x)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2 + 2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2x)^{2k+1} \\ x^{2k+1} \cdot (x+2)^{2k+1}$$

$$x^{2k+1} \cdot \left[ \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} \cdot x^{2k+1-i} \cdot 2^i \right]$$

$$K=0: x \cdot \left[ \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \cdot x^{1-i} \cdot 2^i \right] = x(x+2)$$

$$K=1: x^3 \cdot \left[ \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \cdot x^{3-i} \cdot 2^i \right] = x^3(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$$

$$K=2: x^5 \left[ \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} \cdot x^i \cdot 2^{5-i} \right] = x^5(32 + 80x + O(x^2))$$

Also insgesamt:

$$\begin{aligned}
 T_6 f(x; 0) &= \underbrace{\frac{1 \cdot (x^2 + 2x)}{1!}}_{K=0 \text{ in } (*)} + \underbrace{(-1) \cdot \frac{x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3}{8!}}_{K=1 \text{ in } (*)} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1 \cdot (80x^6 + 32x^5 + \Theta(x^7))}{120}}_{K=2 \text{ in } (*)} \\
 &= 2x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^4 - \frac{11}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^6
 \end{aligned}$$

(d)  $f(x) = \sin(\sin(x))$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (\sin(x))^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Bemerkung: Man kann auch Potenzreihen in Potenzreihen einsetzen!



nun sei  $y = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \Theta(x^7)$

$$\begin{aligned}
 f(y) &= \sum \frac{(-1)^k (\sin(x))^{2k+1}}{(2k+1)!} = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + \Theta(y^7) \\
 &= \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \Theta(x^7) \right) - \frac{1}{6} \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \Theta(x^7) \right)^3 \\
 &\quad + \frac{1}{120} \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \Theta(x^7) \right)^5 + \Theta(y^7) \\
 &= \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \Theta(x^7) \right) - \frac{1}{6} \left( x^3 - \frac{x^5}{2} + \Theta(x^7) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{120} \left( x^5 + \Theta(x^7) \right)
 \end{aligned}$$

(\*)  $\left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \cdot \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \cdot \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) = x^3 + (1+1+1)x^2 \left( -\frac{x^3}{6} \right) + \Theta(x^7)$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \Theta(x^7)$$

d.h.:  $T_6 f(x; 0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$

P 13.2: (a)  $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \frac{1-x}{1+x}$

$$f(x) = \frac{1-x-1+1}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$$

$$= -1 + 2 \left( 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \pm \dots \right)$$

$$= -1 + 2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 \pm \dots$$

Konvergenzradius der Reihe ist  $\rho := 1$ .

Alternierende Reihe  $\rightarrow \forall x, |x| < \rho$   $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in [s_n, s_{n+1}]$  Partialsumme

Für  $x \in [0, \frac{1}{4}]$  ist  $0 \leq 2x^4 = \frac{1}{128} < 1\% = \frac{1}{100}$ , i.e. schon upper & lower bounds!  
das dritte Polynom genügt:  $|f(x) - T_3 f(x; 0)| \leq 2x^4$

$$T_3 f(x; 0) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3$$

Für absolute Error passt  $T_3 f(x; 0)$ ! Wir überprüfen mal ob dies auch für relative Error gilt!

$$\left| \frac{f(x) - T_3 f(x; 0)}{f(x)} \right| \quad \text{für } x \in [0, \frac{1}{4}] \rightarrow f(x) \in [\frac{3}{5}, 1]$$

$\frac{1-0}{1+0} = 1$   
 $\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$

Also das "worst case" Approximation wäre

$$\left| \frac{f(x) - T_3 f(x; 0)}{f(x)} \right| \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{128} = \frac{1.6}{128} > 1\%$$

D.h. dass wir noch ein Term mitnehmen müssen um das relative Error  $< 1\%$  zu bekommen!

$$\left| \frac{f(x) - T_4 f(x; 0)}{f(x)} \right| \leq \frac{1.6}{512} < 1\%$$

Also  $T_4 f(x; 0) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4$  wäre die

„richtige“ Antwort, i.e. das approximiert auch die relativen Fehler gut!

$$\underline{P13.2} \quad (b) \quad E(v) = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wir führen  $\beta := \frac{v^2}{c^2}$  ein.

$${\alpha \choose n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!}$$

Wie wir schon wissen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = 1 + \binom{-1/2}{1} x + \binom{-1/2}{2} x^2 + O(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x}{8} + O(x^3) \end{aligned}$$

Das gilt für  $|x| < 1$ !

Somit ist für  $|\beta| < 1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-\beta)^n = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + O(\beta^6)$$

Also:

$$E(v) = \underbrace{m_0 c^2}_{\text{dies ist die Ruhenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{nicht relativistische Kinetische Energie}} + \underbrace{\frac{3}{8} m_0 v^2 \frac{v^2}{c^2}}_{\text{erste relativistische Korrekturterm!}} + m_0 v^2 O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

P13.3 (a) Für jede Lipschitz-stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert eine Folge von Polynomen, die glm. gegen  $f$  konvergiert.

Man verarbeitet mit einem Metrik  
 (i)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$       (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$   
 (iii)  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Lip-stetigkeit:  $M, N$  metrische Räume,  $f: M \rightarrow N$  heißt Lip-stetig, falls gilt:

$$\exists L > 0 : \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$$

Glm. Konvergenz:  $f: \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  konvergiert glm. gegen „Grenzfkt“  $f$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel sei  $f(x) = \sin(x)$ , die Lip-stetig mit  $L = 1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| = 1$  ist. Wenn es eine Folge von Polynomen  $(P_n)_n$  gäbe, die glm. gegen  $f$  konvergierten, dann gäbe es für einen festen aber beliebigen  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n > n_0. \quad - (*)$$

Aus (\*) und (\*\*) folgt folgendes:  $(-1 \leq \sin(x) \leq 1)$  - (\*\*)

1) Aus gleichmäßiger Konvergenz von Polynomen  $(P_n)_n$  folgt, daß die Fehler „höchstens“  $\varepsilon$  ist, d.h.

$$-\varepsilon \leq \sin(x) - P_n(x) \leq \varepsilon$$

2) Nun mit (1), (\*\*) und (\*\*) haben wir insgesamt:

$$-1 - \varepsilon \leq -\sin(x) - \varepsilon \leq P_n(x) \leq \sin(x) + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ , d.h. daß  $P_n(x)$  eine konstante Fkt ist ( $\forall n > n_0$ ), denn sonst:

$$\infty = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P_n(x)| \leq 1 + \varepsilon$$

Was offensichtlich ein Widerspruch ist. Eine Fkt konst. kann nicht gegen  $\sin x$  konvergieren, also ist die Aussage falsch.

(b) Sei  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  glm. stetig. Dann existiert eine Folge von Polynomen, die glm. gegen  $f$  konvergiert.

Glm-Stetigkeit: Sei  $f: \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist  $f$  glm. stetig auf  $U$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x, y \in U: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Satz: (Weierstraß'sche Approximationssatz):

Sei  $f$  stetig auf einer abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ . Es existiert ein Polynom  $p(x)$   $\forall \varepsilon > 0$ :

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Um das obige Satz zu anwenden, brauchen wir noch, dass Funktion auf einem abg. Intervall zu erweitern!

Sei dazu  $(x_n)_n \subseteq (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  eine Folge. Aus Stetigkeit von  $f$  folgt, daß  $f(x_n)$  eine Cauchy-Folge ist, da:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x_m, x_n \in (0, 1) : |x_m - x_n| < \delta \Rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$

Cauchy-Folge

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

d.h. daß  $f(x_n)$  konvergiert zu einem Punkt  $a$ .

Wir setzen  $f(0) := a$  und wiederholen das Spiel für  $x = 1$ .

Damit ist der Funktion auf  $[0, 1]$  stetig und der Behauptung folgt aus Weierstraß'sche Approximationssatz.