



# P14.1: Fourierkoeffizienten.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig und  $2\pi$ -periodisch mit F.K's  $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$

(a) Z.Z.:  $\forall y \in \mathbb{R}: \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

Bem.: Sei  $g(y) := \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x) dx$  und sei  $F$  eine Stammfkt. von  $f$ .

Es gilt:  $\frac{d}{dy} g(y) = \frac{d}{dy} \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x) dx = \frac{d}{dy} [F(y+\pi) - F(y-\pi)]$

$$= f(y+\pi) - f(y-\pi) \xrightarrow{\text{f, } 2\pi \text{ periodisch}} 0$$

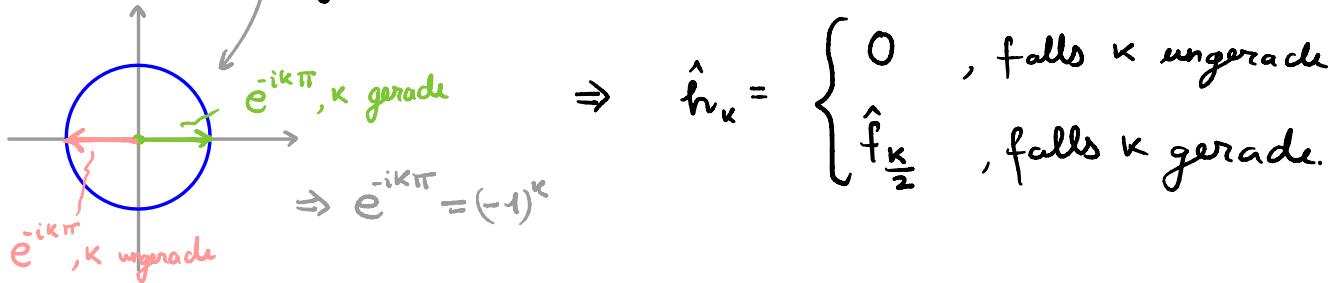
(b) F.K's von  $g(x) = f(x-y)$

$$\begin{aligned} \hat{g}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{-ikx} dx \quad ; \text{ Substitution: } \xi = x-y, d\xi = dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(\xi) e^{-ik(\xi+y)} d\xi \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-iky} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi}_{\equiv \hat{f}_k} \end{aligned}$$

(c) F.K's von  $h(x) = f(2x)$   $h$  ist nur  $\pi$ -periodisch!

$$\begin{aligned} \hat{h}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(2x) \cdot e^{-ikx} dx \quad ; \text{ Substitution: } \xi = 2x \rightarrow d\xi = 2dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(\xi) \cdot e^{-\frac{ik\xi}{2}} d\xi = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_{-2\pi}^0 f(\xi) e^{-\frac{ik\xi}{2}} d\xi + \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{-\frac{ik\xi}{2}} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} f(\xi+2\pi) e^{-\frac{ik}{2}(\xi+2\pi)} d(\xi+2\pi) + \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{-\frac{ik}{2}\xi} d\xi \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[ e^{-ik\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{-i\frac{k}{2}\xi} d\xi + \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{-i\frac{k}{2}\xi} d\xi \right]$$



P14.2: Fourierkoeffizienten von  $|\cos(\frac{x}{2})|$

$$(a) \hat{f}_k^{\cos} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

Wieso nicht Sinus Koeff?

Sinus ist ungerade!, d.h.  $f(-x) = -f(x)$ , i.e. bei einem symmetrischen Intervall wie  $[-\pi, \pi]$  heben die positive und negative Beiträge genau auf. Bew:  $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin x dx = 0$

Da  $f(x)$  gerade ist, ist  $f(x) \cdot \sin(x)$  ungerade, d.h.

$$\hat{f}_k^{\sin} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0 \quad \forall k$$

Weiter mit der Aufgabe: Part Int:  $\int u dv = uv - \int v du$

$$\begin{aligned} \pi \cdot \hat{f}_k^{\cos} &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \frac{x}{2}) \cos(kx) dx = 2 \left[ \sin \frac{x}{2} \cdot \cos(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin \frac{x}{2} dx \right] \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kx)}_v d \underbrace{\sin(\frac{x}{2})}_u \\ &= 2 \left[ \sin \left( \frac{x}{2} \right) \cdot \cos(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + 2k \left( -\sin(kx) \cdot \cos \left( \frac{x}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - k \int_{-\pi}^{\pi} k \cos(kx) \cos \left( \frac{x}{2} \right) dx \right) \right] \\ &= 4 \cdot (-1)^k - 0 + 4k^2 \pi \hat{f}_k^{\cos} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \pi \hat{f}_k^{\cos} = 4(-1)^k + 4k^2\pi \hat{f}_k^{\cos}$$

$$\hat{f}_k^{\cos} = \frac{4(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}$$

$$(b) \hat{f}_k^{\cos} = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k}, k \in \mathbb{N}_0$$

$$k \in \mathbb{N}_0 : \cos(y) = \frac{e^{-iy} + e^{iy}}{2} \quad \text{und} \quad e^{\pm ik\pi} = (-1)^k$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \cos\left(\frac{ix}{2}\right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \left(\frac{e^{-ix/2} + e^{ix/2}}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-i(k+\frac{1}{2})x} + e^{-i(k-\frac{1}{2})x}\right) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{e^{-i(k-\frac{1}{2})x}}{-i(k-\frac{1}{2})} + \frac{e^{-i(k+\frac{1}{2})x}}{-i(k+\frac{1}{2})} \right]_{-\pi}^{\pi}\end{aligned}$$

weg I:  $\sin \lambda y = \frac{e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda y}}{2i} \Rightarrow 2i \sin(\lambda y) = e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda y}$

$$\begin{aligned}&\cancel{-2i \sin((k-\frac{1}{2})\pi)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{e^{-i(k-\frac{1}{2})\pi} - e^{+i(k-\frac{1}{2})\pi}}{-i(k-\frac{1}{2})} + \frac{e^{-i(k+\frac{1}{2})\pi} - e^{+i(k+\frac{1}{2})\pi}}{-i(k+\frac{1}{2})} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{-2i \sin((k-\frac{1}{2})\pi)}{-i(k-\frac{1}{2})} + \frac{-2i \sin((k+\frac{1}{2})\pi)}{-i(k+\frac{1}{2})} \right]\end{aligned}$$

oder

$$e^{-i(k-\frac{1}{2})\pi} - e^{i(k-\frac{1}{2})\pi} = e^{-ik\pi} \cdot i - e^{ik\pi} \cdot (-i) = 2i(-1)^k$$

$$e^{-i(k+\frac{1}{2})\pi} - e^{i(k+\frac{1}{2})\pi} = e^{-ik\pi} \cdot (-i) - e^{ik\pi} \cdot i = -2i(-1)^k$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2i(-1)^k}{-i(k-1/2)} + \frac{-2(-1)^k}{-i(k+1/2)} \right]$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi} \left[ \frac{1}{k+1/2} - \frac{1}{k-1/2} \right] = \frac{(-1)^k}{2\pi} \cdot \frac{-1}{k^2 - 1/4}$$

$$= \frac{2(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}$$

(c) Sei  $L := \frac{1}{2}$ , dann gilt wegen  $|\sin(\frac{x}{2})| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , daß  $\cos(\frac{x}{2})$  Lipschitz stetig ist. Es gilt nach dem Satz über die Punktweise Konvergenz von Fourierreihen, daß die  $\forall x \in \mathbb{R}$  punktweise konvergiert. Also:

$$\forall x \in \mathbb{R}: |\cos(\frac{x}{2})| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k \cos(kx)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi} \cos(x) - \frac{4}{15\pi} \cos(2x) + \dots$$

Sogar glm. konvergent, da  $f$  stetig und die F.K. absolut summierbar sind, also:

$$\sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^n \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \leq \frac{4}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

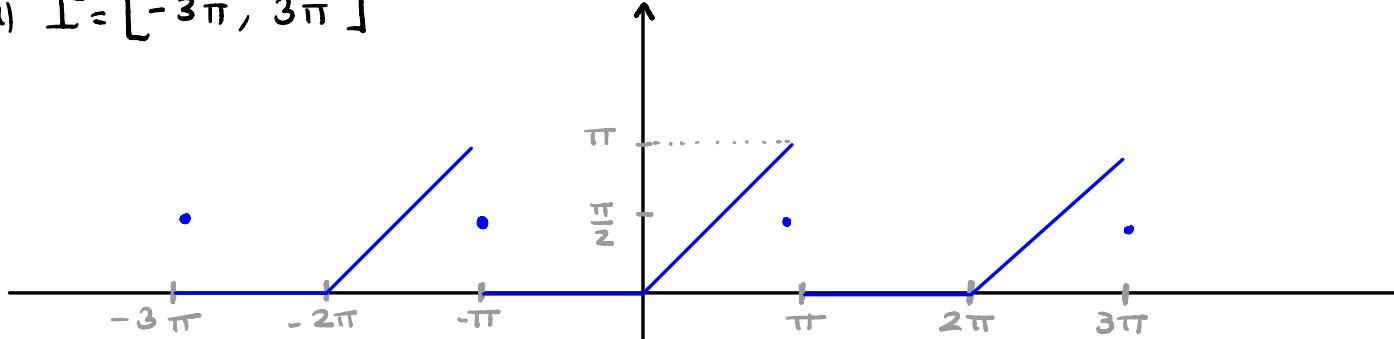
(4k<sup>2</sup>-1) ≥ 3k<sup>2</sup>      Basel Problem! < ∞

P14.3: Fourierreihen. 



Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0) \\ \frac{x}{\pi/2}, & x \in [0, \pi) \\ x = \pi \end{cases}$   $2\pi$ -Periodisch!

(a)  $I = [-3\pi, 3\pi]$



$$\begin{aligned}
 (b) \quad \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{-ik} \left( x e^{-ikx} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^{-ikx} dx \right) \right) \\
 &= \frac{-1}{2\pi ik} \left( \pi \cdot e^{-ik\pi} - 0 - \left. \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_0^\pi \right) \\
 &= \frac{-1}{2\pi ik} \left( \pi \cdot e^{-ik\pi} + \frac{e^{-ik\pi}}{ik} - \frac{1}{ik} \right) \\
 &= \frac{i}{2\pi k} \left( \pi \cdot (-1)^k + \frac{(-1)^k - 1}{ik} \right) \\
 &= \frac{i(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2}
 \end{aligned}$$

und  $\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{4}$

(c)  $f$  ist stückweise stetig, diff. bzw., d.h. also konv. die Fourierreihe bei den stetigen Intervallen gegen  $f$  und bei unstetigkeiten ( $x \in (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$ ) gegen den Mittelwert vom rechts- und linkseitigen Grenzwerte, somit konvergiert die F.R. pktweise gegen  $f$ .

Da die Grenzfkt. aber unstetig ist, ist dies nicht gleichmäßig konvergent!