TUTORIUM-6

STETIGKEIT

Def: $f: M \longrightarrow N$

(LOKAL)

- f stetig in $x_0 \in M$ gdw, $(x_n) \subset M$ $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad - (*)$$

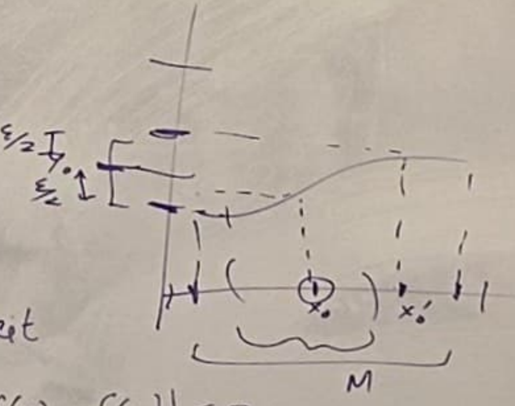
- f ist stetig in $\mathcal{U} \subset M$ gdw f ist stetig $\forall x_0 \in \mathcal{U}$

Satz: Äquivalente Formulierungen von Stetigkeit

$$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M: \ \overbrace{|x - x_0|}^{d(x,x_0)} < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

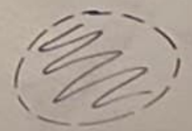
$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ f\left(\mathcal{U}_\delta(x_0) \cap M\right) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$$



$(1,1)$

$[1,1]$



$f(\lim \quad) \neq f$

Def: Glm. Stetigkeit: GLOBALE (**)

$f: M \longrightarrow N$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in M : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

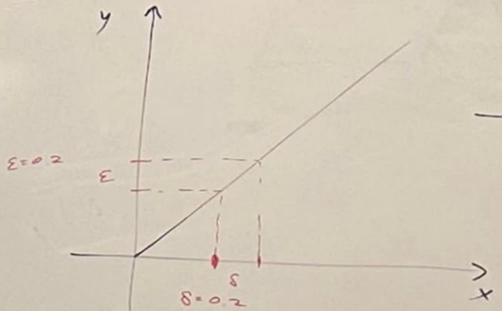
δ-hängt nur von gewählte ε ab.

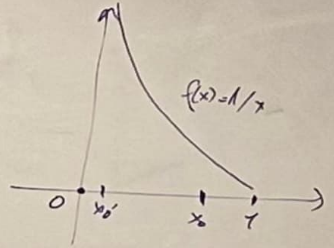
Def: LIPSCHITZ-STETIGKEIT: (***)

$\exists L > 0 : \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) \leq L \, d(x, y)$

6.2(b)

(***) $\Rightarrow$ (**) $\Rightarrow$ (*)





$\lim \boxed{\frac{f(x) - f(y)}{x - y}}$

TUTORIUM - ϵ

Bolzano-Weierstraß:
Jede beschränkte folge in $\mathbb{C}$ hat eine Konvergente Teilfolge
$(x_{g(n)})$

P6.3: Widerspruchsbeweis

Ann: f ist nicht beschränkt ← stetig

$\forall \xi > 0 \quad \exists x \in [a,b] : |f(x)| \geq \xi$

d.h. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \subseteq [a,b] : |f(x_n)| \geq n$

Bolzano-W. $\exists (x_{g(n)}) \subseteq [a,b] \quad \lim_{n\to\infty} x_{g(n)} = x_*$

$f(x_{g(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_*)$
$\Updownarrow$
$\lim_{n\to\infty} f(x_{g(n)}) \overset{=}{_{st}} f(x_*)$

↳ Monoton und beschränkt
$\Downarrow$
f ist doch besch
↯

$\square$

P6.2 (a) Lip st. ⇒ st. $\quad f: M \to N$

Sei $L > 0$ Lip. konstante für f in M, $x_* \in M$
Sei (x_n) eine bel. folge in M mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$

ZZ: $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

Beweis: $|f(x_n) - f(x_*)| \leq L \cdot |x_n - x_*| \quad \forall x \in M, \; y = x_*$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} |x_n - x_*| = a = 0}$

$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_*)| \leq L \cdot a \leq 0$

$0 \leq \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_*)| \leq 0 = 0 \qquad (-1)^n$

Def: Glm. Stetigkeit: GLOBALE (**)

$f: M \longrightarrow N$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in M: d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

δ-hängt nur von gewählte ε ab.

Def: LIPSCHITZ-STETIGKEIT: (***)

$\exists L > 0 : \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) \le L \, d(x, y)$

6.2(b)

(***) ⇒ (**) ⇒ (*)

6.2(a)

P6.2(b) Sei $L > 0$ L.K. für f in M. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

W.R.:

(Sei $\delta > 0$)

$\forall x, y \in M: \overbrace{|x-y| < \delta}^{(*)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x-y| \overset{(*)}{<} L \cdot \delta$

Sei $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$

$\forall x, y \in M: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le L \cdot |x-y| < L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L}$

$< \varepsilon$

□