Lehrstuhl für Mathematische Physik
Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

E0131
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1)

Klausur: MA9202 / Klausur **Datum:** Freitag, 4. März 2022
Prüfer: Prof. Robert König **Uhrzeit:** 11:30 – 13:00

	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8
I								

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **12 Seiten** mit insgesamt **8 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Klausur beträgt 40 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Es wird **nur dieses Prüfungsheft** eingesammelt, weitere Seiten werden nicht akzeptiert.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - 1 einseitig beschriftetes DIN A4 Blatt (handgeschrieben)
- **Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist.** Alle Ergebnisse sind **grundsätzlich zu begründen**.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.

Hörsaal verlassen von ___________ bis ___________ / Vorzeitige Abgabe um ___________

☐ Klausur leer

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie (mit Begründung!):

0
1
a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ konvergiert.

0
1
b) Es existiert eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$, die nicht konvergiert.

0
1
2
c) Es existiert eine Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, die surjektiv und differenzierbar ist.

Extra Platz

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Sei $a_1 \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_{n+1} := \frac{1+a_n^2}{2}$ für $n \geq 1$.

a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

0 1

b) Zeigen Sie: Falls $a_1 \in [-1, 1]$, gilt dass $a_n \in [-1, 1]\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

0 1

c) Zeigen Sie: die Folge konvergiert für $a_1 \in [-1, 1]$.

0 1

d) Bestimmen Sie den Grenzwert abhängig von $a_1 \in [-1, 1]$.

0 1

e) Zeigen Sie, dass die Folge für $a_1 \geq 2$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

0 1

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1+x)^n$ eine Potenzreihe mit $\frac{1}{4} \leq |a_n| \leq 2^n \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$ und die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

0
1

a) Zeigen Sie $\frac{1}{2} \leq R \leq 1$ (R Konvergenzradius von $P(x)$).

0
1
2

b) Entscheiden Sie jeweils ob die Reihe für die folgenden drei Punkte konvergiert:

$$x_1 = -\frac{3}{4}, x_2 = 2, x_3 = 0 \ .$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Achten Sie auf eine nachvollziehbare Darstellung Ihres Lösungswegs.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

0
1

b) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan(x)^2}{\cos(x)^2} \mathrm{d}x$ (Tip: Substitution mit $z = \tan(x)$)

0
1
2

Seite leer

0
1
2

c) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{x^2+2} \mathrm{d}x$

Extra Platz

Aufgabe 5 **(9 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktionen $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Definitionsbereiche auf denen f_n monoton ist.

0 1 2

b) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ Lage und Art aller lokalen und globalen Extrema von f_n.

0 1 2 3 4

c) Berechnen Sie $\int\limits_1^2 f_2(x)\mathrm{d}x$.

0 1 2 3

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für $q^{(4)} = 2q^{(3)} - 3q^{(2)} + 4q^{(1)} - 2q$. Schreiben Sie die DGL als eine lineare DGL erster Ordnung.

0
1
2
3
4

Aufgabe 7 (2 Punkte)

0
1

a) Bestimmen Sie das größte abgeschlossene Intervall $[a, b] \subseteq [0, 2\pi]$ sodass $\sin : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex ist.

0
1

b) Finden Sie (mit Begründung) die korrekte Relation ($\boldsymbol{?} \in \{\leq, \geq, =\}$) für den Ausdruck

$$\sin\left(\frac{67}{50}\pi\right) \quad \boldsymbol{?} \quad \frac{1}{5}\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \frac{4}{5}\sin\left(\frac{11\pi}{8}\right) \ .$$

Aufgabe 8 **(7 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades bei $x_0 = \sqrt{3}$. Welche der folgenden oberen Schranken für die Genauigkeit der Approximation von f durch dieses Polynom auf dem Intervall $[\sqrt{3}, 3]$ gelten mit Sicherheit? Begründen Sie Ihre Antwort!

☐ 0 ☐ .25 ☐ .5 ☐ 1 ☐ 5

0 1 2 3 4 5 6 7

☐ Seite leer

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.