V. Stetigkeit

Def: Seien M, N metrische Räume. $f: M \longrightarrow N$ heißt

- stetig in $x_0 \in M$, falls $\forall \{a_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, $a_n \in M^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).$$

- stetig, falls f stetig in x_0 $\forall x_0 \in M$.

Korollar: Seien $M, N \in \mathbb{C}$ und $f, g: M \longrightarrow N$ stetig in $x_0 \in M$, dann gilt, dasselbe auch für $h(x)$, $\tilde{h}(x)$, $\tilde{\tilde{h}}(x)$.

$\rightarrow h: M \longrightarrow N$, $x \longmapsto h(x) := f(x) + g(x)$

$\rightarrow \tilde{h}: M \longrightarrow N$, $x \longmapsto \tilde{h}(x) := f(x) \cdot g(x)$

$\rightarrow \tilde{\tilde{h}}: M \setminus S \longrightarrow N$, $x \longmapsto \tilde{\tilde{h}}(x) := f(x) / g(x)$

wobei $S := \{x \in M \mid g(x) = 0\}$

Satz: Ist $g: M \longrightarrow N$ stetig in $x_0 \in M$ und $f: N \longrightarrow K$ stetig in $y_0 := g(x_0) \in N$, dann ist $f \circ g: M \longrightarrow K$ stetig in $x_0 \in M$.

Satz: Äquivalente Formulierungen von Stetigkeit.

$f: M \longrightarrow N$ stetig in $x_0 \in M$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f\left(\mathcal{U}_\delta(x_0) \cap M\right) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon\left(f(x_0)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M : d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Def: Gleichmäßige Stetigkeit.

Seien M, N metrische Räume, $f: M \longrightarrow N$ heißt glm. stetig, falls gilt:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x,y\in M: d(x,y)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon$

$\Rightarrow$ Eine δ (der von ε abhängig ist) fürs ganze funktion. Bei Stetigkeit könnte man für jede $x_0\in M$ eine neue δ wählen. Da war das δ von ε UND x_0 abhängig.

Def: Lipschitz-Stetigkeit.

Seien M,N metrische Räume, $f: M\longrightarrow N$ heißt Lip. stetig, falls gilt:

$$\exists L>0 \ \forall x,y\in M: \ d(f(x),f(y)) \leq L\, d(x,y)$$

Satz: $f: M\longrightarrow N$, M, N metrische Räume, es gilt

f Lipschitz-Stetig $\Rightarrow f$ glm. stetig $\Rightarrow f$ stetig (auf M)

Bem: Falls M abgeschlossene Menge, dann stetig $\Rightarrow$ glm. stetig.

Bem:* Eine sehr wichtige unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit ist, dass Stetigkeit eine lokale Eigenschaft einer Funktion ist - d.h. dass eine Funktion ist stetig (oder auch nicht) an einem bestimm--ten Punkt des Definitionsbereichs ($x_0\in M$) - und dies kann bestimmt werden, indem nur die Werte der Funktion in einer (beliebig kleinen) Nachbarschaft dieses Punktes angesehen werden.

Falls wir davon sprechen, dass eine Funktion auf einem Intervall stetig ist, dann meinen wir, dass die Funktion LOKAL an jedem punkt des Intervalls stetig ist.

Im gegensatz dazu ist gleichmäßige Stetigkeit eine GLOBALE Eigenschaft von f, in dem Sinne, dass sich die obige definition von glm. stetigkeit auf jeden punkt in M bezieht.