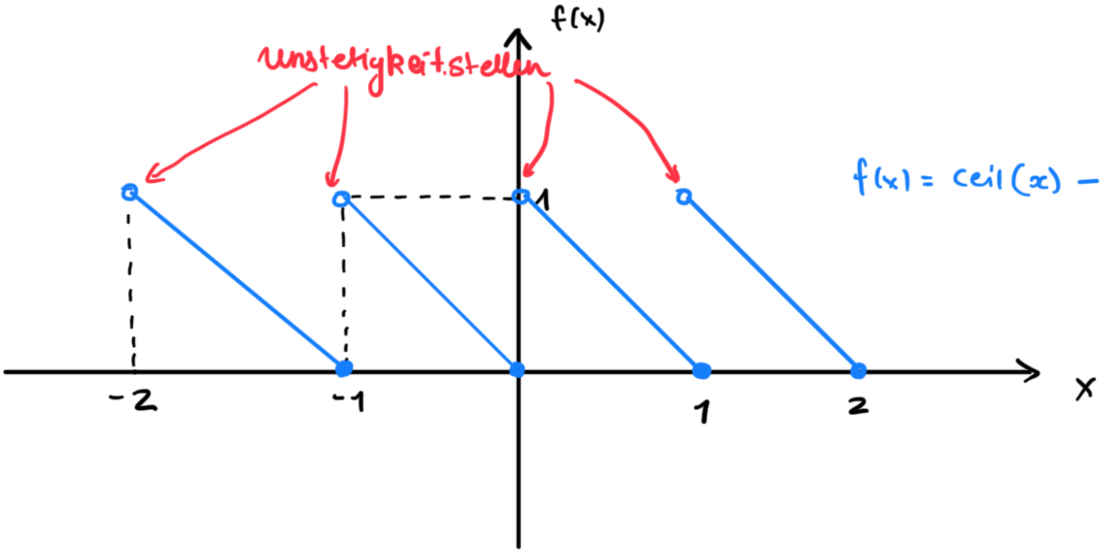
Blatt 6

P6.1: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{ceil}(x) - x$, mit

$$\text{ceil}(x) = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$$

(a) z.B.: $\text{ceil}(2.2) = 3$ $\quad$ $\text{ceil}(-0.1) = 0$

$\text{ceil}(0.1) = 1$ $\quad$ $\text{ceil}(-2,2) = -2$



(b) $\forall u \in \mathbb{Z}$, Sei $u = k$, $k \in \mathbb{Z}$

Beweis: Wir konstruieren eine Folge $u_n = u + \frac{1}{n}$

damit gilt $\lim_{n\to\infty} u_n = u$

Nun ist z.Z, daß $f(x_n)$ gegen $f(u)$ konvergiert.

Also daß

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) \overset{?}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} (\text{ceil}(u_n) - u_n) \overset{?}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left((u+1) - \left(u + \frac{1}{n}\right)\right) \overset{?}{=} \text{ceil}(u) - u$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) \overset{?}{=} 0 \qquad (\text{da } u \in \mathbb{Z})$$

$$1 \neq 0 \quad ↯$$

$\square$

(c) $g(0)$ ist offensichtlich (obige Beweis)

$g(-1)$ auch, da dort kein Wert von g existiert.

Nun muß man $g(1)$ näher betrachten.

Sei x_n eine beliebige Folge, die gegen 1 konvergiert.

z.Z: $f(x_n) \longrightarrow f(1)$

Es gilt $x_n \leq 1$ (da def. bereich von g)

Weiter gilt: $\exists n \quad n \geq N : x_n > 0$, dann gilt

$f(x_n) = 1 - x_n$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(1)$

- Es gilt $g\left([-1,1]\right) = [0,1)$

$g(0) = 0 \Rightarrow \inf\limits_{x\in[-1,1]} g(x) = \min\limits_{x\in[-1,1]} g(x) = 0$

$g\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 1 \Rightarrow \sup\limits_{x\in[-1,1]} g(x) = 1$, $\max\limits_{x\in[-1,1]} g(x)$ existiert nicht.

P6.2: Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-Stetig

(a) Sei $L > 0$ die Lipschitzkonstante für f in M, $x_* \in M$ und $(x_n) \subset M$ eine Folge in M mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$

z.Z: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_*)$

Beweis: Wir wissen: $|f(x_n) - f(x_*)| \overset{\text{Lip-Stetig}}{\leq} L\,|x_n - x_*|$ — (1)

daß $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$ heißt:

(Erinnerung) $\forall \varepsilon>0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \ |x_n - x_*| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - x_*| = 0 \qquad -(2)$$

zurück zu (1)

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_*)| \leq \lim_{n\to\infty} L\,|x_n - x_*|$$

$$'' \qquad \overset{(2)}{\leq} 0 \qquad -(+)$$

Es gilt aber $|\cdot| \geq 0 \qquad -(++)$

$$\overset{(+)\wedge(++)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_*)$$

$\square$

(b) Sei wieder $L>0$ für f in M, $\varepsilon>0$ beliebig.

Neben Rechnung: Sei $\delta>0$,

$\forall x,y \in M: \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L\cdot|x-y|$
$\leq L\cdot\delta =: \varepsilon$

nun einfach umgekehrt hinschreiben :)

Sei $\varepsilon>0$ beliebig, wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$

$\forall x,y \in M: \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L\cdot|x-y|$
$\leq L\cdot\delta$
$= \varepsilon$

$\square$

P6.3: Sei $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

Widerspruchsbeweis:

Ann: f nicht beschränkt, d.h.

$\forall \xi > 0 \quad \exists x \in [a,b] : |f(x)| \geq \xi$

d.h. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \subseteq [a,b]$ mit $|f(x_n)| \geq n$

Bolzano-Weierstraß besagt aber, dass

$$\exists x_{g(x)} : \lim_{n \to \infty} x_{g(x)} = x_* \in [a,b]$$

Teilfolge

en: subsequence

$\Rightarrow$ Es folgt aus Stetigkeit von f, daß:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{g(n)}) \overset{\text{stetig}}{=} f\left(\lim_{n \to \infty} x_{g(n)}\right) = f(x_*)$$

Insbesondere ist $f(x_{g(n)})$ beschränkt (+ monoton),

was $|f(x_{g(n)})| \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ widerspricht.

$\lightning$

$\square$