L'Hôspital'sche Regel:

TUTORIUM 08 - Gruppe 1 (Do, 12-14)

(I) • $f, g: (0, b) \to \mathbb{R}$ diff.bar mit $g'(x) \neq 0 \;\forall x \in (0, b)$

$$\left[\left(\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0\right) \vee \left(\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \infty\right)\right] \wedge$$

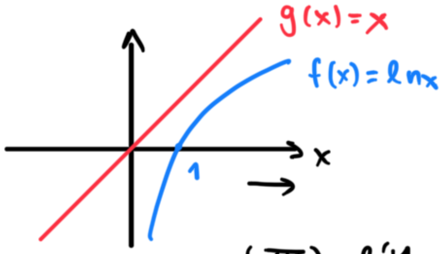
$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(II) • $f, g: (a, \infty) \to \mathbb{R}$ diff.bar mit $g'(x) \neq 0 \;\forall x \in (a, \infty)$

$$\left[\left(\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = 0\right) \vee \left(\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = \infty\right)\right] \wedge$$

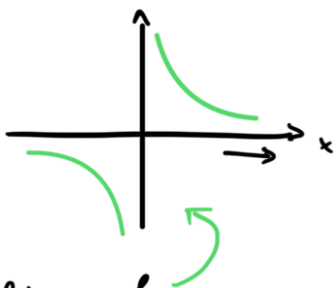
$\lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. $\Rightarrow \lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

P 8.1: (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$



$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} x = \infty$



$$\overset{\text{(II) - l'H}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(c) $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x$

Zur Erinnerung: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{a}} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Wir wissen bereits, daß: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim_{x\to 0} \ln x = (-\infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0} -\ln(x) = \infty$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} x \ln x \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} - \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = \boxed{0}$$

(b) $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to\infty} x\underbrace{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}_{\to 1} \overset{\text{l'H}}{=} \boxed{\infty}$

(d) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right) \overset{(*)}{=} \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\right) \overset{(a)}{=} \boxed{1}$

$*$: Stetigkeit vom exponentialfkt. $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$

z.E: erlaubt vertauschen von limes- und Abbildungsvorschrift.

(e) $\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

- $\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(1) = 0$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\cancel{\frac{-1}{x^2}}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x} = \boxed{1}.$$

(f) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\exp\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

$\overset{(e)}{=} \boxed{e}$.

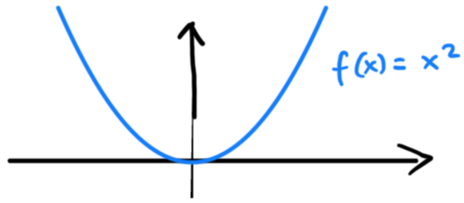
P 8.2.:

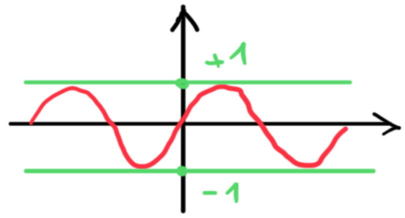
$\boxed{\text{RECAP}}$: • $f: \mathbb{R}\supseteq I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt

$$\Updownarrow$$

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I: \quad m \leq f(x) \leq M$$

z.B:





- **SUPREMUMSEIGENSCHAFT**

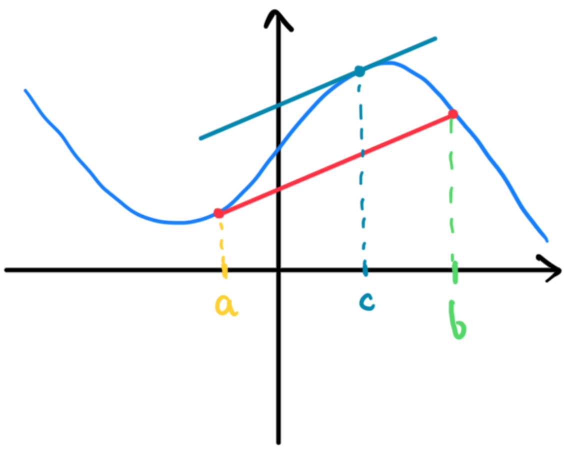
  Jede nach oben beschränkte, nicht leere Teilmenge der Relle Zahlen besitzt ein supremum in $\mathbb{R}$. Analog für Infimum.

- **MITTELWERTSATZ DER DIFFERENTIALRECHNUNG:**

  Sei $f: \mathbb{R} \supseteq [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $a < b$ stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf (a,b) dann gilt:

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Das ist eine Verallgemeinerung der Satz von Rolle $\left(f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists c \in (a,b): f'(c) = 0 \right)$



Geometrisch heißt es, daß die Tangente an der Kurve f an einer Stelle c parallel zur Sekante zwischen a und b ist.

Nun zur aufgabe:

Gegeben: $f: \mathbb{R} \supseteq I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diff.bar auf I.

$f': I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt z.Z: f ist Lip-stetig.

Also $\exists L > 0$: $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$

Beweis: Der Menge $\{f'(x) : x \in I\}$ ist also beschränkt.

Man setze $L := \sup\{|f'(x)| : x \in I\} \in [0, \infty)$

Fall I: $L = 0$ $\rightsquigarrow$ f konstant. $\square_I$

Fall II: $L > 0$

f ist sowohl stetig als auch diffbar in I.

Seien $\alpha, \beta \in I$: $\alpha < \beta$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, daß es eine $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq I$ gibt so daß

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad - (*)$$

$$f'(\xi) \in \{|f'(x)| : x \in I\} \Rightarrow f'(\xi) \leq L. \quad (+)$$

Aus $(*)$ und $(+)$ folgt die Behauptung! $\square_{II}$

$\square$

P 8.3: KURVENDISKUSSION:

Sei $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x e^{-x}$

a) Stetigkeit und Diffbarkeit:

f ist als Kombination (Verkettung, Produkt usw.) stetiger funktionen stetig. Dasselbe gilt für Diffbarkeit!

b) Monotonie- und Konvexitätsbereiche.

<u>Beh</u>: $f^{(n)}(x) = \left((-1)^n \cdot (x-n)\right) \cdot e^{-x}$

<u>I.A.</u>: $f'(x) = (1-x)\, e^{-x} = e^{-x}$

<u>I.S.</u>: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left[\left((-1)^n (x-n)\right) e^{-x}\right]'$

$= (-1)^n \cdot e^{-x} - (-1)^n (x-n)\, e^{-x}$

$= (-1)^n (1-x+n)\, e^{-x} = (-1)^{n+1}(x-(n+1))\, e^{-x}$ $\square$

Dies impliziert insbesondere daß: $f \in C^\infty([0,\infty),\mathbb{R})$

- $f'(x) = (1-x)\, e^{-x}$

Nullstelle: $x = 1$

Vorzeichentabelle:

	0		1	
$1-x$		+	0	−
e^{-x}		+		+
$f'(x)$		+		−

„Nullstelle"

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} >0, & x \in [0,1) \\ =0, & x = 1 \\ <0, & x \in (1,\infty) \end{cases}$$

(Monotoniekriterium) – Wolf Skript Pg. 57

$\Rightarrow$ f ist streng monoton steigend auf $[0,1)]$ und streng monoton fallend auf $[(1,\infty)$

[geht auch.

- $f''(x) = (x-2)\, e^{-x}$

Nullstelle bei $x = 2$

V.Z. tabelle:

	0		2	
$x-2$		−	0	+
e^{-x}		+		+
$f''(x)$		−		+

$$f''(x) = \begin{cases} < 0, & x \in [0,2) \\ = 0, & x = 2 \\ > 0, & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

Daher ist f strikt konkav auf [0, 2] und strikt konvex auf [2, ∞).

(c) $f'(x) = 0$ ist eine Notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für ein Extremum einer Funktion.

⇒ Kandidaten für Lokale Extrema:

- $x = 1$ (da $f'(1) = 0$)
- $x = 0$ (Rand von def bereich)

Nun eingesetzt in $f''(x) \Rightarrow f''(1) < 0$

Das heißt also, dass $x = 1$ ein Lokales Maximum ist. Weiter folgt aus strenge Monotonie links und rechts von $x = 1$ ist dies sogar ein globales Maximum. Wegen des Monotonie-verhaltens liegt bei $x = 0$ also ein lokales Minimum. Weiter ist $f(0) = 0$. Daraus kann man folgern, daß, da $f(x) > 0 \ \forall x \in [0, \infty)$ gilt, ist $x = 0$ ein globales Minimum.

$f(0) = 0$ und

$f(1) = 1/e \simeq \frac{1}{2.7} = 0.36$.

WENDEPUNKT:

$f''(x) \overset{!}{=} 0 \overset{(b)}{\Rightarrow} x = 2$ $\qquad f(2) = \frac{2}{e^2} \simeq \frac{2}{7{,}5} \simeq 0{,}27$

Insgesamt haben wir:

→ EXTREMA
- → globales Max. bei $x=1$ mit $f(1)=\frac{1}{e}$
- → globales Min bei $x=0$ mit $f(0)=0$

→ WENDEPUNKT → bei $x=2$ mit $f(2)=\frac{2}{e^2}$

(d) (1) Grenzverhalten:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \Big| \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\nearrow\infty}{x}}{\underset{\nearrow\infty}{e^x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(2) Extrema + Wendepunkte

(3) Konvexität / Konkavität