

## Лабораторная работа №4

### СРАВНЕНИЕ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СМО С РАЗЛИЧНЫМИ ВХОДНЫМИ ПОТОКАМИ И ПОТОКАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

**Цель работы** – изучение влияния типов входных потоков и потоков обслуживания на характеристики одноканальных СМО

#### 1. Теоретическая часть

##### *1.1. Одноканальные СМО*

Во многих случаях входящие потоки заявок и потоки обслуживания реальных систем хорошо описываются простейшими потоками. Однако для многих систем потоки могут отличаться от простейших. Системы с потоками, отличными от простейших, могут быть исследованы специальными математическими методами или методом имитационного моделирования.

В работе рассматривается одноканальная система с очередью неограниченной длины, имеющая различные типы входного потока заявок и потока обслуживания. Несмотря на простоту данной модели, ей хорошо описываются многие реальные технические и организационные системы, в том числе и в вычислительной технике. Примерами таких систем являются компьютерная сеть с топологией “общая шина” и прямое соединение двух компьютеров каналом связи.

В зависимости от стохастических характеристик потока он может обладать той или иной степенью последствия, т.е. степенью влияния состояний системы в прошлом на состояния системы в будущем. В некотором смысле двумя крайними случаями здесь являются регулярный и простейший потоки. Регулярный поток характеризуется максимальным последствием, т.к. момент возникновения очередного события в потоке полностью определяется моментом возникновения предыдущего события. Простейший поток характеризуется отсутствием последствия, и момент возникновения очередного события в потоке не зависит от моментов возникновения предыдущих событий. Можно показать, что для некоторых характеристик одноканальных СМО (например, средней длины очереди и среднего времени ожидания) характеристики системы с регулярным потоком обслуживания имеют значения вдвое меньше, чем для системы с простейшим потоком обслуживания. Значения характеристик систем с другими потоками обслуживания будут лежать между соответствующими значениями характеристик СМО с регулярным и простейшим потоками обслуживания.

### 1.2. Расчет характеристик системы “M/M/1”

Если поток обслуживаний и входящий поток в одноканальной СМО являются простейшими, то такая система обозначается “M/M/1” (рис. 1).

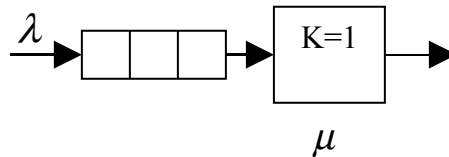


Рис. 1. Система “M/M/1”

Характеристики данной системы легко находятся аналитически. Она описывается Марковским процессом с бесконечным числом дискретных состояний и непрерывным временем, граф состояний которого приведен на рис. 2.

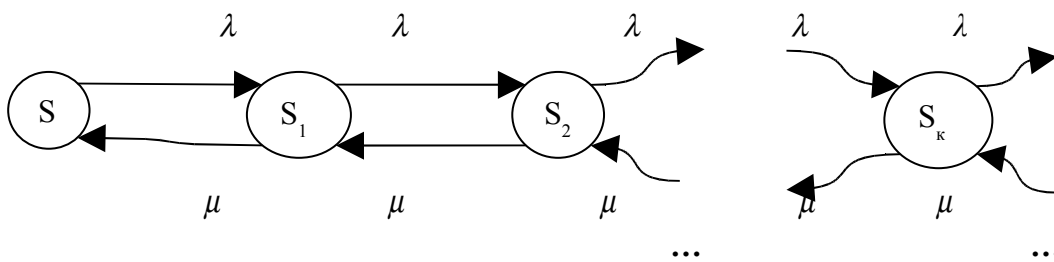


Рис. 2. Граф состояний для системы “M/M/1”

Здесь  $\lambda$  – интенсивность входного потока заявок,  $\mu$  – интенсивность потока обслуживаний. Состояния системы пронумерованы по числу заявок, находящихся в системе:

- $S_0$  – канал обслуживания свободен, очередь пуста,
- $S_1$  – канал обслуживания занят, очередь пуста,
- $S_2$  – канал обслуживания занят, в очереди одна заявка,
- ...
- $S_k$  – канал обслуживания занят, в очереди  $k - 1$  заявка,
- ...

По графу состояний можно составить следующую систему уравнений Колмогорова для установившегося режима:

$$\begin{aligned}
S_0 : \lambda P_0 &= \mu P_1, \\
S_1 : (\lambda + \mu) P_1 &= \lambda P_0 + \mu P_2, \\
S_2 : (\lambda + \mu) P_2 &= \lambda P_1 + \mu P_3, \\
&\dots \\
S_k : (\lambda + \mu) P_k &= \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Здесь  $P_i$  – вероятности пребывания системы в состоянии  $S_i$ . Обозначим  $\rho = \lambda/\mu$ . Тогда все  $P_i$  можно выразить через  $P_0$ :

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0, \\
P_2 &= \left( \frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) P_1 - \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho^2 P_0 + \rho P_0 - \rho P_0 = \rho^2 P_0, \\
&\dots \\
P_K &= \rho^K P_0, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$ , можно найти  $P_0$ :

$$P_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1 - P_0 (\rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots} = 1 - \rho.$$

Ряд в последней формуле сходится при  $\rho < 1$ . Зная вероятности состояний, можно найти такие характеристики СМО, как средняя длина очереди  $V$ , среднее время ожидания  $t_{ож}$ , среднее время пребывания заявки в системе  $t_{np}$  и среднее число заявок в системе  $m$ :

$$\begin{aligned}
m &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k k = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots = (1 - \rho)(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \dots) = \frac{\rho(1 - \rho)}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho} \\
V &= \sum_{k=2}^{\infty} P_k (k - 1) = P_2 + 2P_3 + \dots = \rho(1 - \rho)(\rho + 2\rho^2 + \dots) = \frac{\rho^2(1 - \rho)}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Два оставшихся параметра можно найти по формулам Литтла:

$$\begin{aligned}
t_{ож} &= \frac{V}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)}, \\
t_{np} &= \frac{m}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}
\end{aligned} \tag{2}$$

### 1.3. Имитационное моделирование СМО

Язык GPSS содержит широкие средства для моделирования стандартных СМО. Блоки для генерации потоков заявок, моделирования очередей и устройств уже были рассмотрены ранее. В GPSS World включен набор подпрограмм для генерации случайных чисел, распределенных в соответствии с типовыми распределениями (табл. 1). В каждой из этих подпрограмм первым параметром является номер потока случайных чисел  $RN_j$ , представляющий собой целое положительное число. Это номер потока равномерно распределенных от 0 до 1 случайных чисел, на основе которых генерируются случайные числа с другими распределениями. Рекомендуется для каждого потока событий (входящего потока заявок или потока обслуживаний) использовать свой собственный поток случайных чисел.

Например, для генерации простейшего потока с интенсивностью  $\lambda$  с использованием первого потока случайных чисел нужно использовать следующий блок:

GENERATE      (Exponential(1, 0, 1/lambda))

## 2. Порядок выполнения работы

1. Изучите теоретический материал.
2. Выполните расчет одноканальной СМО с очередью при простейшем входном потоке и простейшем потоке обслуживания. Интенсивность потока обслуживания выберите согласно таблице:

Номер варианта	Интенсивность обслуживания, $\mu$
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	3,5
10	5,5

Табл. 1. Функции GPSS для генерации случайных чисел с типовыми распределениями

№ п/п	Тип распределения	Плотность вероятности, математическое ожидание, дисперсия	Функция GPSS
1	Равномерное	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases},$ $M = \frac{a+b}{2}, D = \frac{(b-a)^2}{12}$	UNIFORM(RNj, a,b) где a – левая граница интервала, b – правая граница интервала
3	Показательное (Экспоненциальное)	$f(x) = \frac{1}{s} e^{-(x-m)/s}, x \geq m,$ $M = m + s, D = s^2$	EXPONENTIAL(RNj, m, s) где m – смещение распределения, s – масштабный параметр.
4	Нормальное (Гауссово)	$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2s^2},$ $M = m, D = s^2$	NORMAL(RNj, m, s) где m и s – параметры распределения
5	Дискретное равномерное	$p(x) = \frac{1}{max - min + 1}, x \in \{min, min + 1, \dots, max\},$ $M = \frac{min + max}{2}, D = \frac{(max - min - 1)^2}{12}$	DUNIFORM(RNj, min, max) где min и max – соответственно минимальное и максимальное значение

Постройте графики зависимости времени ожидания в очереди, среднего времени пребывания заявки в системе, средней длины очереди и среднего числа заявок в системе от интенсивности входного потока  $\lambda$ . Диапазон изменения  $\lambda$  примите от 0 до  $\mu$ .

3. Разработайте программы на языке GPSS для следующих вариантов СМО (5 программ):

Номер варианта СМО	Распределение интервала времени между двумя поступившими на вход заявками	Распределение времени обслуживания заявки
1	Экспоненциальное	Постоянная задержка
2	Экспоненциальное	Экспоненциальное
3	Экспоненциальное	Равномерное
4	Экспоненциальное	Эрланга 2 порядка
5	Экспоненциальное	Эрланга 3 порядка

При разработке программ выберите постоянную задержку для времени обслуживания равной  $1/\mu$ , а интенсивность экспоненциального распределения для времени обслуживания равной  $\mu$  согласно п. 3. Равномерное распределение времени обслуживания выберите равным  $1/\mu \pm 25\%$ . Случайная величина с распределением Эрланга порядка  $k$  получается сложением  $k$  экспоненциально распределенных величин с интенсивностью  $k\mu$ .

Параметры распределения интервала между заявками во входном потоке выбираются аналогично с учетом того, что средняя величина задержки будет варьироваться от 0 до  $1/\mu$ .

4. Постройте графики зависимости средней длины очереди от среднего значения величины коэффициента загрузки  $\rho$  в одних и тех же координатах для всех пяти графиков. При построении каждого графика определите значения средней длины очереди для  $\rho$ , равного 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9. Для каждой точки выполните три прогона моделирования, а в качестве конечного результата возьмите среднее значение по трем прогонам. Сравните полученные графики.
5. Сформулируйте выводы по работе и ответьте на контрольные вопросы.

### 3. Содержание отчета

1. Название работы.
2. Цель работы.

3. Основные теоретические сведения.
4. Расчет СМО для случая простейших потоков.
5. Текст типовой модели СМО на языке GPSS.
6. Графики времени ожидания в очереди и длины очереди от средней интенсивности входящего потока для различных СМО.
7. Выводы по работе.

#### **4. Контрольные вопросы**

1. Как можно оценить значения характеристик СМО с произвольным потоком обслуживания?
2. Система “M\M\1”. Расчет характеристик.
3. Основные блоки GPSS, предназначенные для моделирования СМО.
4. Функции GPSS для моделирования случайных чисел, распределенных в соответствии с типовыми распределениями.
5. Как тип входного потока влияет на характеристики СМО?
6. Как тип потока обслуживаний влияет на характеристики СМО?

#### **Библиографический список**

1. Томашевский В., Жданова Е. Имитационное моделирование в среде GPSS. – М.: Бестселлер, 2003. – 416 с.