Einführung in die Theoretische Informatik
Zusammenfassung

Efe Kamasoglu

June 16, 2023

1 Grundbegriffe und Grammatiken

1.1 Grundbegriffe

- Alpabet Σ, endliche Menge
- Wort/String w über Σ, endliche Menge von Zeichen aus Σ
- $|w|$, Länge des Wortes w
- ϵ, das leere Wort mit der Länge 0
- Wörter u und v, uv ist ihre Konkatenation
- Wort w, w^n definiert durch:
  - $w^0 = \epsilon$
  - $w^{n+1} = ww^n$
  - *Beispiel:* $(ab)^3 = ababab$
- Σ^*, Menge aller Wörter über Σ
- Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$, formale Sprache
  - *Beispiel:* $\emptyset$, $\{\epsilon\}$, $L_1 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, ...\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

1.2 Operationen auf Sprachen

Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$

- **Konkatenation:** $AB = \{uw \mid u \in A \ \wedge \ w \in B\}$
  - *Beispiel:* $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  - $A^n = \{w_1...w_n \mid w_1, ..., w_n \in A\} = \underbrace{A...A}_{\text{n}}$
  - $A^0 = \{\epsilon\}, \ A^{n+1} = AA^n$
  - $A^* = \{w_1...w_n \mid n \geq 0 \ \wedge \ w_1, ..., w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
    - A^* enthält ϵ immer
  - $A^+ = AA^* = \bigcup_{n \geq 1} A^n$
    - $\epsilon \in A \ gdw. \ \epsilon \in A^+$
- **Kartesisches Produkt:** $A \times B$
  - *Beispiel:* $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- **Rechenregeln über Sprachen:**
  - Für alle A: $\epsilon \in A^*$
  - $\epsilon \notin \emptyset$

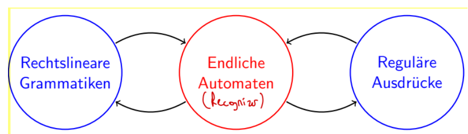
- $\emptyset^* = \{\epsilon\} = \emptyset^0$
- $A\{\epsilon\} = \{\epsilon\}A = A$
- $A\emptyset = \emptyset A = \emptyset$
- $A \times \emptyset = \emptyset$
- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$
- $A(B \cap C) = AB \cap AC$ gilt i.A. **nicht**
- $A(B \setminus C) = AB \setminus AC$ gilt i.A. **nicht**
- $A^*A^* = (A^*)^* = A^*$

1.3 Grammatiken

- Grammatik, 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$
  - V, endliche Menge von **Nichtterminalen**
  - Σ, endliche Menge von **Terminalen**, disjunkt von V
  - $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$, Menge von **Produktionen**
  - $S \in V$, **Startsymbol**
- Eine Grammatik G induziert eine **Ableitungsrelation** $\rightarrow_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:
  - $\alpha \rightarrow \alpha'$ gdw. es eine Regel $\beta \rightarrow \beta'$ in P und Wörter α_1, α_2 gibt, so dass $\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2 \ \wedge \ \alpha' = \alpha_1 \beta' \alpha_2$
- Eine **Sequenz** $\alpha_1 \rightarrow_G \alpha_2 \rightarrow_G ... \rightarrow_G \alpha_n$ ist eine **Ableitung** von α_n aus α_1.
- Wenn $\alpha_1 = S$ und $\alpha_n \in \Sigma^*$, dann **erzeugt** G das Wort α_n. Erzeugte Wörter bestehen nur aus **Terminalzeichen**.
- Die Sprache von G ist die Menge aller Wörter (Σ^*), die von G erzeugt werden: $L(G)$
- **Chomsky Hierarchie:** Eine Grammatik G ist vom
  - **Typ 0** immer
  - **Typ 1** falls für jede Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ ausser $S \rightarrow \epsilon$ gilt $|\alpha| \leq |\beta|$
  - **Typ 2** falls G vom Typ 1 ist und für jede Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ gilt $\alpha \in V$
  - **Typ 3** falls G vom Typ 2 ist und für jede Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ ausser $S \rightarrow \epsilon$ gilt $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$
  - Typ 3 $\subset$ Typ 2 $\subset$ Typ 1 $\subset$ Typ 0
  - L(Typ 3) $\subset$ L(Typ 2) $\subset$ L(Typ 1) $\subset$ L(Typ 0)

- **Grammatiken und Sprachklassen:**
  - **Typ 3, Rechtslineare Grammatik, Reguläre Sprachen**
  - **Typ 2, Kontextfreie Grammatik, Kontextfreie Sprachen**
  - Typ 1, Kontextsensitive Grammatik, Kontextsensitive Sprachen
  - Typ 0, Phrasenstrukturgrammatik, Rekursiv aufzählbare Sprachen

2 Reguläre Sprachen



2.1 Rechtslineare Grammatik

$X, Y \in V$, Produktionen folgender Gestalt:

- $X \rightarrow aY$
- $X \rightarrow a$
- $X \rightarrow Y$
- $X \rightarrow \epsilon$, nur dann wenn X Startsymbol ist

2.2 Deterministische endliche Automaten (DFA)

- DFA, 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - Q, endliche Menge von **Zuständen**
  - Σ, endliches **Eingabealphabet**
  - $\delta: \ Q \times \Sigma \rightarrow Q$, totale **Übergangsfunktion**
  - $q_0 \in Q$, ein **Startzustand**
  - $F \subseteq Q$, endliche Menge von **Endzuständen**
- Die von DFA M **akzeptierte** Sprache ist $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$, wobei $\hat{\delta}: \ Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ induktiv definiert durch:
  - $\delta(q, a)$, Zustand, den man aus q mit einem **Zeichen** a erreicht
  - $\hat{\delta}(q, w)$, Zustand, den man aus q mit einem **Wort** w erreicht
  - $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$
  - $\hat{\delta}(q, aw) = \hat{\delta}(\delta(q, a), w)$ für $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$

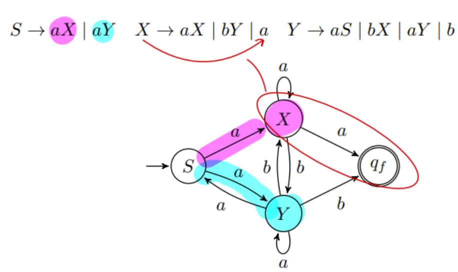
2.3 Nicht-Deterministische endliche Automaten (NFA)

- NFA, 5-Tupel $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - $Q, \Sigma, q0$ und F wie beim DFA
  - $\delta : \ Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$, wobei $\mathcal{P}(Q)$ Menge aller Teilmengen von Q
- Die von NFA N **akzeptierte** Sprache ist $L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\overline{\delta}}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset\}$, wobei
  - $\overline{\delta}(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$, Menge aller Zustände, die man von einem Zustand in S aus mit einem **Zeichen** a erreicht
  - $\hat{\overline{\delta}}(S, w)$, Menge aller Zustände, die man von einem Zustand in S aus mit einem **Wort** w erreicht
  - $\overline{\delta} : \ \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
  - $\hat{\overline{\delta}} : \ \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$

2.4 Rechtslineare Grammatik $\to$ NFA

1. Füge einen Zustand für jedes Nichtterminal, Startsymbol wird zum Startzustand
2. Füge einen Endzustand für jedes Terminal, falls es $S \to \epsilon$ gibt, dann Startzustand ist auch ein Endzustand
3. Für jede Kombination $Y \to aX$ füge eine Kante von Y nach X mit dem Zeichen a
4. Für jede Kombination $Y \to a$ füge eine Kante von Y nach dem Endzustand mit dem Zeichen a

Beispiel:

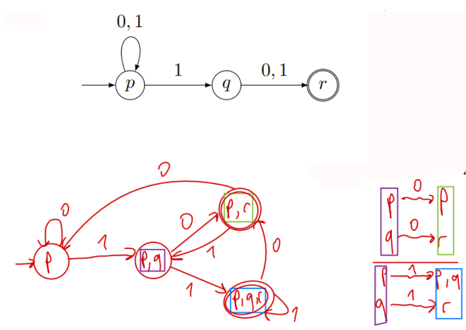


2.5 NFA $\to$ DFA, Potenzmengenkonstruktion

Für jede NFA mit n Zuständen kann der DFA max bis zu 2^n Zustände haben.

1. Für alle Zustände wiederhole (beginnend mit Startzustand q_0):
   (a) Bestimme wohin man mit welcher Kante geht
   (b) Erzeuge neue Zustände durch Vereinigung der auf der rechten Seite stehenden Zuständen mit der selben Kanten, verbinde diese
   (c) **Mindestens einer von den Zuständen**, die in dem neuen Zustand sind, ist ein **Endzustand** $\to$ der neue Zustand wird ein Endzustand

Beispiel:

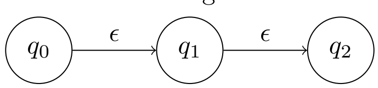


2.6 ϵ-NFA

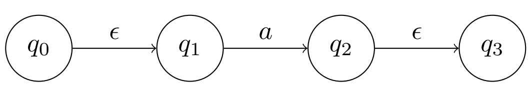
- Ein NFA mit **ϵ-Übergängen** ist ein NFA mit $\epsilon \notin \Sigma$ und $\delta : \; Q \times (\Sigma \; \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

2.7 ϵ-NFA $\to$ NFA

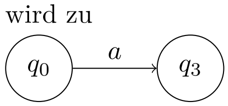
1. Lösche überflüssige Zustände:



2. Verbinde die Zustände in der Form mit einer einzigen Kante:



wird zu



3. Lösche nicht erreichbare Zustände

4. Falls ϵ in der Sprache ist, dann mache den Startzustand Endzustand

2.8 Reguläre Ausdrücke (REs)

- Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert:
  - $\emptyset$
  - ϵ
  - Für jedes $a \in \Sigma$
  - Wenn α, β RE, auch:
    - $\alpha\beta$
    - $\alpha \mid \beta = \alpha + \beta$
    - α^*
- $*$, Kleene'sche Iteration
- Für RE γ ist die Sprache induktiv definiert:
  - $L(\emptyset) = \emptyset$
  - $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
  - $L(a) = \{a\}$
  - $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
  - $L(\alpha \mid \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
  - $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$
- $\alpha \equiv \beta$ gdw. $L(\alpha) = L(\beta)$
- **Rechenregeln über REs:**
  - **Null und Eins Lemma:**
    - $\emptyset \mid \alpha \equiv \alpha \mid \emptyset \equiv \alpha$
    - $\emptyset\alpha \equiv \alpha\emptyset \equiv \emptyset$
    - $\epsilon\alpha \equiv \alpha\epsilon \equiv \alpha$
    - $\emptyset^* \equiv \epsilon$
    - $\epsilon^* \equiv \epsilon$
  - **Assoziativität:**
    - $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma)$
    - $\alpha(\beta\gamma) \equiv (\alpha\beta)\gamma$
  - **Kommutativität:**
    - $\alpha \mid \beta \equiv \beta \mid \alpha$
  - **Distributivität:**
    - $\alpha(\beta \mid \gamma) \equiv \alpha\beta \mid \alpha\gamma$
    - $(\beta \mid \gamma)\alpha \equiv \beta\alpha \mid \gamma\alpha$

  - **Idempotenz:**
    - $\alpha \mid \alpha \equiv \alpha$

- **Stern Lemma:**
  - $\epsilon \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
  - $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
  - $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

2.9 Strukturelle Induktion für REs

Um zu beweisen, dass eine Eigenschaft $P(r)$ für alle regulären Ausdrücke gilt:

1. Zeige $P(\emptyset)$
2. Zeige $P(\epsilon)$
3. Zeige $P(a)$ für alle $a \in \Sigma$
4. Unter der Annahme $P(\alpha)$ und $P(\beta)$ (I.H.), zeige $P(\alpha\beta)$
   $\rightarrow$ verwende $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
5. Unter der Annahme $P(\alpha)$ und $P(\beta)$ (I.H.), zeige $P(\alpha \mid \beta)$
   $\rightarrow$ verwende $L(\alpha \mid \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
6. Unter der Annahme $P(\alpha)$ (I.H.), zeige $P(\alpha^*)$
   $\rightarrow$ verwende $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$

Beispiel: $empty(r)$ entscheidet, ob $L(r) = \emptyset$. Zeige die Korrektheit der Konstruktion:

(a) **Konstruktion**

- $\mathsf{empty}(\emptyset) = \mathsf{true}$
- $\mathsf{empty}(\mathsf{a}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{empty}(\epsilon) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{empty}(\alpha\beta) = \mathsf{empty}(\alpha) \vee \mathsf{empty}(\beta)$
- $\mathsf{empty}(\alpha \mid \beta) = \mathsf{empty}(\alpha) \wedge \mathsf{empty}(\beta)$
- $\mathsf{empty}(\alpha^*) = \mathsf{false}$

Korrektheit Wir zeigen $L(r) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(r)$ mittels struktureller Induktion.

Fall $r = \emptyset$, $r = \mathsf{a}$, $r = \epsilon$. Trivial.

Fall $r = \alpha^*$.
Wir haben $\epsilon \in L(\alpha^*) \neq \emptyset \iff \neg\mathsf{empty}(\alpha^*)$. Die Aussage gilt per Definition von empty.

Fall $r = \alpha\beta$.
Als Induktionshypothesen erhalten wir $L(\alpha) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(\alpha)$ und $L(\beta) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(\beta)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} L(\alpha\beta) = \emptyset &\iff L(\alpha)L(\beta) = \emptyset \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \vee L(\beta) = \emptyset \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{empty}(\alpha) \vee \mathsf{empty}(\beta) = \mathsf{empty}(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Fall $r = \alpha \mid \beta$.
Es gelten dieselben Induktionshypothesen wie im vorherigen Fall.

Wir haben

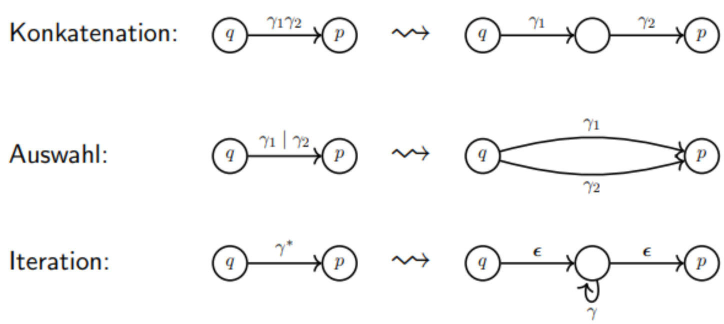
$$\begin{aligned} L(\alpha \mid \beta) = \emptyset &\iff L(\alpha) \cup L(\beta) = \emptyset \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \wedge L(\beta) = \emptyset \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{empty}(\alpha) \wedge \mathsf{empty}(\beta) = \mathsf{empty}(\alpha \mid \beta). \end{aligned}$$

2.10 RE → ϵ-NFA

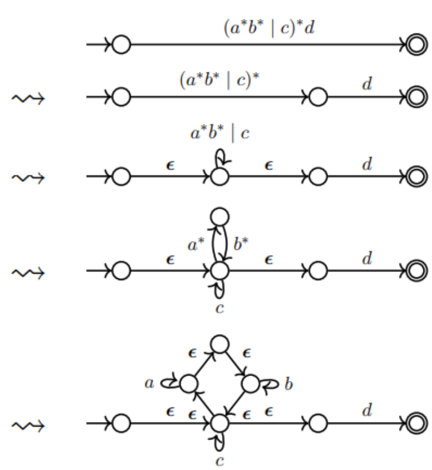
1. Wende folgende Ersetzungsregeln an

$$\gamma\,\emptyset \rightsquigarrow \emptyset \qquad \gamma \mid \emptyset \rightsquigarrow \gamma \qquad \emptyset^* \rightsquigarrow \epsilon$$
$$\emptyset\,\gamma \rightsquigarrow \emptyset \qquad \emptyset \mid \gamma \rightsquigarrow \gamma$$

2. Wende folgende Transformationsregeln an

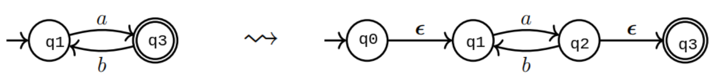


Beispiel:

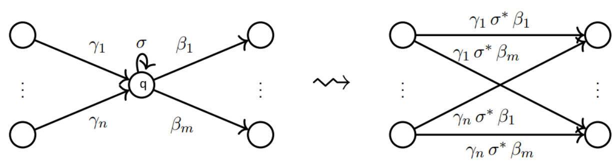


2.11 ϵ-NFA $\to$ RE

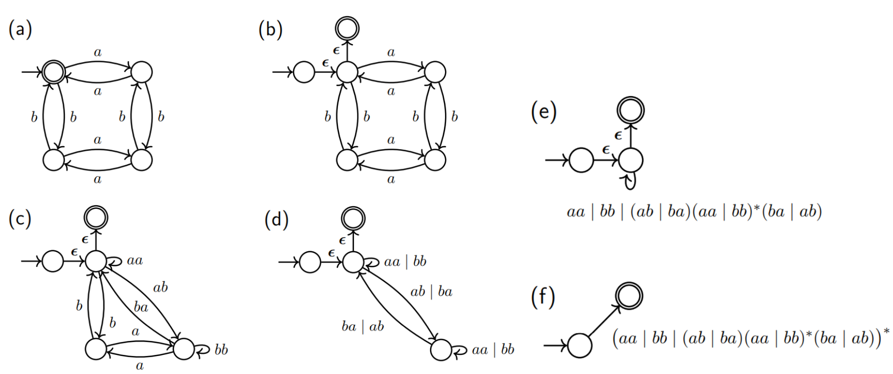
1. Hat Startzustand q_1 eingehende Übergänge, füge einen neuen Startzustand q_0 mit einem ϵ-Übergang nach q_1
2. Füge einen neuen Endzustand q_3 und ϵ-Übergänge nach q_3 von allen Endzuständen (q_2 in diesem Beispiel)



3. Wähle ein Zustand q, der weder Start- noch Endzustand ist
4. Eliminiere q, wende dabei folgende Regeln:



Beispiel:



2.12 Ardens Lemma

- Sind A, B, X Sprachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt:

$$\boxed{X = AX \cup B \Longrightarrow X = A^*B}$$

- Sind α, β, X REs mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt:

$$\boxed{X \equiv \alpha X \mid \beta \Longrightarrow X \equiv \alpha^*\beta}$$

- **Bemerkungen:**
  - $X \equiv X\alpha \mid \beta \Longrightarrow X \equiv \beta\alpha^*$
  - $X \equiv \alpha X \mid \beta$ für $\epsilon \in L(\alpha)$
    - hat **keine eindeutige Lösung**: jede Sprache $B \subseteq X$ ist Lösung
    - *Beispiel:* für $\alpha = \epsilon$ und $\beta = b$ kann $X = b$ oder $X = a \mid b$ oder $X = aba \mid b$
  - $X \equiv X \mid aX$
    - hat **keine eindeutige Lösung:** $X = \emptyset$ oder $X = \Sigma^*$ oder $X = a^*$
  - $X \equiv \alpha X$ für $\epsilon \notin L(\alpha)$
    - hat **eine eindeutige Lösung:** $X = \emptyset$
  - $X \equiv \alpha X$ für $\epsilon \in L(\alpha)$
    - hat **keine eindeutige Lösung:** $X = \Sigma^*$ oder $X = ab^*a$
  - $X \equiv aXb \mid \epsilon$
    - hat **keine reguläre Lösung:** $X = L$ für $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$
  - $X \equiv abX \mid \epsilon$
    - hat **eine eindeutige Lösung:** $X = (ab)^*\epsilon = (ab)^*$

2.13 FA → RE mittels Ardens Lemma

1. FA als Gleichungssystem schreiben
   - für jeden Endzustand X_f füge $X_f \equiv \epsilon$ ein
   - für jeden Zustand X mit

     $$X \xrightarrow{a} X_1$$

     mache $X \equiv aX_1$
2. Gleichungen einsetzen und damit eliminieren
3. Rechenregeln über REs und Ardens Lemma verwenden

2.14 Konversionen bezüglich regulärer Sprachen

$$\begin{tikzcd}
\text{DFA} \arrow[dr] & \text{NFA} \arrow[l] \arrow[d] & \epsilon\text{-NFA} \arrow[l] \\
 & \text{RE} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

RE → ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände
ϵ-NFA → NFA:	$Q \rightsquigarrow Q$
NFA → DFA:	n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände
NFA → RE:	n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(3^n)$

2.15 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen, dann sind auch

- $L_1 L_2$
- $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \setminus L_2$
- $\overline{L}$ bzw. $\Sigma^* \setminus L$
- L^*
- L^R (Spiegelung von L)

2.16 Komplementierung $\overline{L}$ bezüglich FAs

- **Für DFAs:** Vertauschen von Endzuständen und Nicht-Endzuständen
- **Für NFAs:** funktioniert das Vertauschen **nicht**

2.17 Schnitt zweier DFAs, Produktkonstruktion

- Sind M_1 und M_2 DFAs. Dann ist der **Produkt-Automat M** mit $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.
- **Produktkonstruktion für M_1 und M_2:**
  1. Erzeuge einen neuen Startzustand aus den Startzuständen der M_1 und M_2
  2. Bestimme wohin man mit welcher Kante geht
  3. Erzeuge neue Zustände durch Vereinigung der auf der rechten Seite stehenden Zuständen mit der selben Kanten, verbinde diese
  4. **Alle Zustände**, die in dem neuen Zustand sind, sind **Endzustände** $\rightarrow$ der neue Zustand wird ein Endzustand

2.18 Vereinigung zweier DFAs

- Sind M_1 und M_2 DFAs. Dann ist M mit $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.
- **Konstruktion für M_1 und M_2:** Gleich wie die Produktkonstruktion bis auf 4.
  4. **Mindestens einer von den Zuständen**, die in dem neuen Zustand sind, ist ein **Endzustand** $\rightarrow$ der neue Zustand wird ein Endzustand

2.19 Pumping Lemma für reguläre Sprachen

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass
  1. $v \neq \epsilon$
  2. $|uv| \leq n$
  3. $\forall i \geq 0.\ uv^iw \in L$
- Um zu zeigen, dass eine Sprache **nicht regulär** ist $\rightarrow$ **Regulärität** mit Pumping Lemma zu zeigen **nicht möglich**
- Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt
  $\rightarrow$ regulär $\subset$ Pumping Lemma gilt $\subset$ alle Sprachen
- *Beispiel:* $L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$

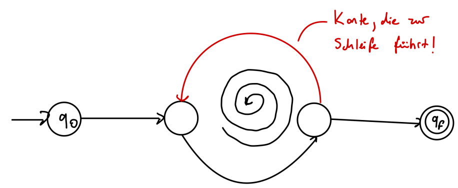
  Angenommen L sei regulär.
  Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
  Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Sei uvw eine Zerlegung von z mit $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$.
  Zeige, dass $uv^iw \notin L$ für den Fall $i = 2$ gilt:
  $n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
  Da es keine Quadratzahl zwischen n^2 und $(n+1)^2$ geben kann, ist $uv^2w \notin L$, damit ist L nicht regulär.

2.20 Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

- **Wortproblem:** Gegeben w und D, gilt $w \in L(D)$?
  - für DFA M, in $O(|w| + |M|^1)$ entscheidbar
  - für NFA N, in $O(|Q|^2|w| + |N|)$ entscheidbar
- **Leerheitsproblem:** Gegeben D, gilt $L(D) = \emptyset$?
  - für DFA M, in $O(|Q||\Sigma|)$ entscheidbar
  - für NFA N, in $O(|Q|^2|\Sigma|)$ entscheidbar

[1] Konstante für die Entscheidung, ob der Zustand den wir am Ende erreichen, ein Endzustand ist

- **Endlichkeitsproblem:** Gegeben D, ist $L(D)$ endlich?
  - für DFA und NFA entscheidbar
  - $L(M) = \infty$ gdw. vom Startzustand aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist



- **Äquivalenzproblem:** Gegeben D_1 und D_2, gilt $L(D_1) = L(D_2)$?
  - schaue, ob $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)} = \emptyset$ und $\overline{L(M_1)} \cap L(M_2) = \emptyset$ gelten
  - für DFAs, in $O(|Q_1||Q_2||\Sigma|)$ entscheidbar
  - für NFA N, in $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ entscheidbar (bei fixem Σ)

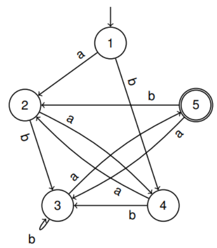
2.21 Minimierung von FAs

- Zustände p und q sind **unterscheidbar**, wenn $\exists w \in \Sigma^*$ mit $\hat{\delta}(p, w) \in F$ und $\hat{\delta}(q, w) \notin F$ oder umgekehrt
- Zustände p und q sind **äquivalent**, wenn $\forall w \in \Sigma^*$ mit $\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F$
- Gilt $p \in F$ und $q \notin F$, dann sind p und q unterscheidbar
- Sind $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidbar, dann auch p und q

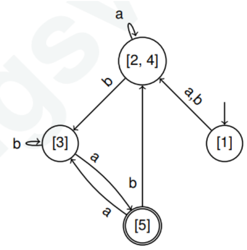
2.22 Minimierungsalgortihmus für DFAs

1. Konstruiere die Treppe $\forall q \in Q$
2. Markiere Endzustände und Nichtendzustände mit einem ϵ
3. Für alle unmarkierten Paare (q, p): Falls $(\delta(q, a), \delta(p, a))$ markiert, markiere das Paar (q, p) mit a
   (a) Falls es b im Kästchen von $(\delta(q, a), \delta(p, a))$ gibt, dann markiere das Paar (q, p) mit ab
4. Für alle unmarkierten Paare (q, p): Schmelze q und p zusammen, evtl. markiere das Paar mit $=$

Beispiel:



1				
ba	2			
a	*a*	3		
ba	=	*a*	4	
ε	ε	ε	ε	5



2.23 Äquivalenz von Zuständen eines DFAs

- **Äquivalenzklasse:** $[p]_{\equiv_M} = \{q \mid p \equiv_M q\}$, Menge der Zustände, die mit p äquivalent sind
- **Quotientenmenge:** $Q/\equiv_M = \{[p]_{\equiv_M} \mid p \in Q\}$, Menge der Äquivalenzklassen
- $p \equiv_M q \Leftrightarrow L_M(p) = L_M(q)$
  - $L_M(q) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q,w) \in F\}$, Sprache vom Zustand q
  - Zwei Zustände sind äquivalent wenn sie die gleiche Sprache erkennen
  - **Fakt:** $|Q/\equiv_M|$ = Anzahl der Sprachen, die von Zuständen von M erkannt werden
- **Quotientenautomat:** $M/\equiv = (Q/\equiv, \Sigma, \delta', [q_0]_\equiv, F/\equiv)$ mit $\delta'([p]_\equiv, a) = [\delta(p,a)]_\equiv$
- Quotientenautomat $M/\equiv$ ist ein **minimaler DFA** für $L(M)$
- $L(M/\equiv) = L(M)$

2.24 Residualsprache, Äquivalenz von Wörtern

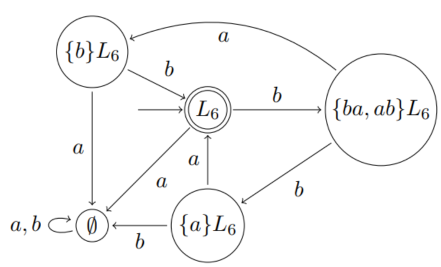
- $L^w = \{z \in \Sigma^* \mid wz \in L\}$, Residualsprache von L bzgl. $w \in \Sigma^*$
- $u \equiv_L v \Leftrightarrow L^u = L^v$
  - Zwei Wörter sind äquivalent wenn sie die gleiche Residualsprache haben
  - **Fakt:** $|\Sigma^*/\equiv_L|$ = Anzahl der Residualsprachen von L
- **Fakt:** $|Q/\equiv_M| = |\Sigma^*/\equiv_L|$, **Anzahl der Residualsprachen entspricht der Anzahl der Zustände im minimalen Automat**

2.25 Myhill-Nerode Relation

- Eine Sprache L ist **regulär** gdw. Anzahl der Residualsprachen von L **endlich**
- **Beweis mittels Myhill-Nerode Relation:** $L = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
  1. Bestimmen einer unendliche Menge von Wörtern mit unterschiedlichen Residualsprachen: $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
  2. Sei $i, j \in \mathbb{N}$ verschieden. Dann $a^i b^i c^i \in L$, aber $a^j b^j c^i \notin L$. Daher $L^{a^i b^i} \neq L^{a^j b^j}$.
  3. Somit sind alle Residualsprachen unterschiedlich und L **keine reguläre** Sprache

2.26 Kanonischer Minimalautomat

- $M_L = \{R_L, \Sigma, \delta_L, L, F_L\}$ mit $\delta_L(R, a) = R^a$ und $F_L = \{R \in R_L \mid \epsilon \in R\}$, kanonischer Minimalautomat M_L mit $L(M_L) = L$
- R_L, Menge der Residualsprachen von L
- **Durch Umbenennung von Zuständen** von jedem minimalen DFA bekommt man den **kanonischen Minimalautomat**
- Kanonischer Minimalautomat M_L ist **gleich gross** wie Quotientenautomat und damit ein **minimaler DFA** für $L(M)$
- *Beispiel:* $L = L((bba \mid bab)^*)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$



2.27 Regulärität der Sprachen

Eine Sprache ist **regulär**

- gdw. sie von einer **DFA, NFA, ϵ-NFA, RE, rechtslinearen Grammatik akzeptiert wird**
- gdw. sie durch **Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen** entsteht
- gdw. sie **endliche Anzahl von Residualsprachen hat**

Eine Sprache ist **nicht regulär**

- gdw. für sie **Pumping-Lemma nicht gilt**
- gdw. sie **unendliche Anzahl von Residualsprachen hat (Myhill-Nerode)**

3 Kontextfreie Sprachen (CFL)

3.1 Kontextfreie Grammatik (CFG)

- Kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$
- Produktionen folgender Gestalt:
  - $X \to \alpha$, mit $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$
- $\alpha_1 \to_G \alpha_2 \to_G \ldots \to_G \alpha_n$ nennt man eine **Linksableitung** gdw. in jedem Schritt **das linkeste Nichtterminal** in α_i ersetzt wird
- **Rechtsableitung** analog zu Linksableitung

3.2 Induktive Definition einer Sprache mittels Grammatik

- Sei G eine Grammatik: $S \to \epsilon \mid +S-S \mid +S \mid \epsilon$
- Um zu zeigen, dass G die Menge aller *nicht überziehenden* Wörter erzeugt, betrachten wir die Grammatik als **induktive Definition einer Sprache** $L(G)$
- Wort w ist überziehend gdw. $\exists i$, sodass $\Delta(w_1 \ldots w_i) < 0$ mit $\Delta(w) = |w|_+ - |w|_-$
- **nicht überziehend:** $\epsilon, ++-+-$
- **überziehend:** $-+, +-+--++$
- **Induktive Definition von $L(G)$:**
  - $\epsilon \in L(G)$
  - $u \in L(G) \Longrightarrow +u \in L(G)$
  - $u \in L(G) \land v \in L(G) \Longrightarrow +u-v \in L(G)$
- Produktionen ($\to$) erzeugen Wörter **top-down**: Nichtterminal $\to$ Wort
- Induktive Definition ($\Longrightarrow$) erzeugt Wörter **buttom-up**: kleinere Wörter $\Longrightarrow$ grössere Wörter
- Induktive Definition betrachtet nur Wörter aus Σ^*

3.3 (Strukturelle) Induktion über die Erzeugung eines Wortes

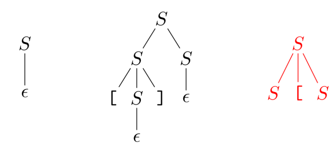
- $w \in L(G) \Longrightarrow$ beweist man mit **Induktion über Erzeugung von** w
- Um zu zeigen, dass für alle $u \in L(G)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt, zeige:
  - $P(\epsilon)$
  - $P(u) \Longrightarrow P(+u)$
  - $P(u) \wedge P(v) \Longrightarrow P(uv)$
- *Beispiel:* Grammatik $S \to \epsilon \mid +S-S \mid +S \mid \epsilon$ erzeugt die Wörter, die nicht überziehend sind.
  - Induktionsbasis: $\epsilon \in L(G)$ ist nicht überziehend
  - Induktionsschritt: Seien u, v nicht überziehende Wörter. Es gibt 2 Fälle:
    1. $w = +u$: Für beliebiges i gilt $\Delta(w_1 \dots w_i) = 1 + \Delta(u_1 \dots u_{i-1})$. Da u nicht überziehend ist, folgt $\Delta(u_1 \dots u_{i-1}) \geq 0$ und somit $\Delta(w_1 \dots w_i) \geq 1 \geq 0$. Also ist w auch nicht überziehend.
    2. $w = +u-v$: Für $i \in \{1, \dots, |u|+2\}$ wissen wir bereits $\Delta(w_1 \dots w_i) \geq 0$, analog zum ersten Fall. Für $i > |u|+2$ gilt nun $\Delta(w_1 \dots w_i) = \Delta(+u-v_1 \dots v_j)$, mit $j = i-|u|-2$. Es folgt $\Delta(+u-v_1 \dots v_j) = \Delta(u)+\Delta(v_1 \dots v_j) \geq 0$, da sowohl u als auch v nicht überziehend ist.

3.4 Induktion über die Länge des Wortes

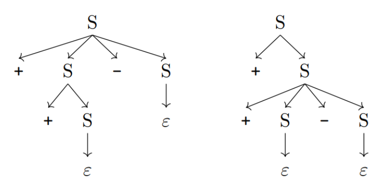
- $P(w) \Longrightarrow w \in L(G)$ beweist man mit **Induktion über** $|w|$
- *Beispiel:* Die nicht überziehenden Wörter werden durch die Grammatik $S \to \epsilon \mid +S-S \mid +S \mid \epsilon$ erzeugt.
  - Induktionsannahme: Für nicht überziehendes w gilt $w \in L(G)$
  - Induktionsbasis: Für $|w| = 0$ gilt $w = \epsilon \in L(G)$
  - Induktionsschritt:
    1. Falls $w = +u$ für ein u nicht überziehend, dann wissen wir nach Induktionsannahme, dass $u \in L(G)$. Daraus folgt $S \to +S-S \to^* +u = w$ und somit $w \in L(G)$.
    2. Falls $w = +u-v$ für u, v nicht überziehend: Nach Induktionsannahme gilt $u, v \in L(G)$, also erhalten wir $S \to +S-S \to^* +u-S \to^* +u-v = w$ und somit $w \in L(G)$.

3.5 Syntaxbaum, Mehrdeutigkeit

- Für eine CFG und ein $w \in \Sigma^*$ sind folgende Bedingungen äquivalent:
  - $A \rightarrow_G^* w$
  - $w \in L_G(A)$ (induktive Definition)
  - Es gibt einen Syntaxbaum mit Wurzel A, dessen Rand (Blätter von links nach rechts gelesen) das Wort w ist
- Syntaxbaum für eine Ableitung mit Grammatik $S \rightarrow \epsilon \mid [S] \mid SS$: $w = \epsilon$, $w = []$, kein gültiges Baum



- CFG G **mehrdeutig** gdw. es gibt $w \in L(G)$, das **zwei verschiedene Syntaxbäume** hat
- CFL L **inhärent mehrdeutig** gdw. **jede CFG** G mit $L(G) = L$ **mehrdeutig**
- *Beispiel:* $S \rightarrow \epsilon \mid +S-S \mid +S \mid \epsilon$ und $w = ++- \Leftrightarrow L_G(S)$ ist mehrdeutig



3.6 Chomsky-Normalform (CNF)

- Eine CFG G ist in Chomsky-Normalform gdw. alle Produktionen eine der Formen haben: $A \rightarrow a$ oder $A \rightarrow BC$
- ϵ-Produktion: $A \rightarrow \epsilon$
- Kettenproduktion: $A \rightarrow B$
- Zu jeder CFG G kann man eine CFG G' in Chomsky-Normalform konstruieren, die **keine** ϵ-Produktionen und Kettenproduktionen enthält, so dass gilt $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$

- **Konstruktion:**

  1. Füge für jedes $a \in \Sigma$ mit der Länge ≥ 2 ein neues Nichtterminal X_a und eine neue Produktion $X_a \to a$ hinzu:
     - $A \to aBC$ wird zu $A \to X_a BC$
$X_a \to a$
  2. Ersetze jede Produktion der Form $A \to B_1 B_2 \dots B_k$ mit der Länge $k \geq 3$:
     - $A \to BCD$ wird zu $A \to BX_{CD}$
$X_{CD} \to CD$
  3. Eliminiere alle ϵ-Produktionen, indem wir zuerst ϵ in Produktionen einsetzen und dann eliminieren:
     - $A \to XY$ wird zu $A \to X\epsilon$ wird zu $A \to X$
$Y \to \epsilon$ $Y \to \epsilon$
  4. Eliminiere alle Kettenproduktionen, indem wir zuerst Nichtterminale in Produktionen einsetzen und dann eliminieren
     - $A \to X \mid YZ$ wird zu $A \to YZ \mid x \mid DL \mid B$
$X \to x \mid DL \mid B$ $B \to b$
$B \to b$
     - wird zu $A \to YZ \mid x \mid DL \mid b$

3.7 Greibach-Normalform

- Eine CFG ist in Greibach-Normalform gdw. alle Produktionen die Form $A \to aA_1 \dots A_n$ haben
- Zu jeder CFG G gibt es eine CFG G' in Greibach-Normalform mit $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$

3.8 Pumping Lemma für CFLs

- Für jede CFL L gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in $z = uvwxy$, dass

  1. $vx \neq \epsilon$ bzw. $|vx| \geq 1$
  2. $|vwx| \leq n$
  3. $\forall i \geq 0.\ uv^i wx^i y \in L$

- *Beispiel:* $L = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

  Angenommen L sei kontextfrei.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^n b^n c^n \in L$. Sei $uvwxy$ eine Zerlegung von z mit $vx \neq \epsilon$ und $|vwx| \leq n$. Wir betrachten nun 2 Fälle:

1. uwx enthält nur as oder bs oder cs: Für $i = 2$ erhalten wir $uv^2wx^2y = a^{i+2|v|+2|x|}b^ic^i$. Da $|vx| \geq 1$, gilt $uv^2wx^2y \notin L$.
2. uwx enthält nur as und bs oder bs und cs: Hier muss vx mindestens ein a und ein b enthalten. Damit gilt aber $|uv^2wx^2y|_a > |uv^2wx^2y|_c$. Also $uv^2wx^2y \notin L$.

3.9 Abschlusseigenschaften der CFLs

Seien L, L_1, $L_2 \subseteq \Sigma^*$ kontextfreie Sprachen, dann sind auch

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 L_2$
- L^*
- L^R

3.10 Erzeugend, Erreichbar, Nützlich

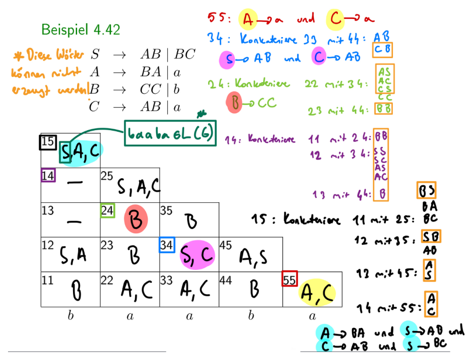
- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ CFG. Ein Symbol $X \in V \cup \Sigma$ ist
  - **erzeugend** gdw. es eine Ableitung $X \rightarrow_G^* w \in \Sigma^*$ gibt
  - **erreichbar** gdw. es eine Ableitung $S \rightarrow_G^* \alpha X \beta$ gibt
  - **nützlich** gdw. erzeugend und erreichbar
- Bekommt man eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$, die nur **nützliche Symbole** enthält, durch:
  1. Elimination der **nicht erzeugenden** Symbole
  2. Elimination der **nicht erreichbaren** Symbole
- Menge der erzeugenden Symbole einer CFG ist berechenbar
- Menge der erreichbaren Symbole einer CFG ist berechenbar

3.11 Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus (CYK)

- **Wortproblem** ist für eine CFG G mittels CYK-Algorithmus in Zeit $O(|w|^3)$ entscheidbar
- **Algorithmus:** $w \in L(G)$?
  1. Konstruiere die Treppe (Breite = Höhe = $|w|$) und beschrifte jede Spalte von unten nach oben: Für 1. Spalte $1,1 - 1,2 - \ldots - 1,|w|$; für 3. Spalte $3,3 - 3,4 - \ldots - 3,|w|$
  2. Fülle die erste Reihe mit Nichtterminalen ein, die die einzelnen Buchstaben des Wortes erzeugen

3. Fülle die anderen Kästchen mit Nichtterminalen nach Beschriftungen ein: Für $1,2$ konkateniere $1,1$ $2,2$; für $1,4$ konkateniere $1,1$ $2,4$ und $1,2$ $3,4$ und $1,3$ $4,4$
4. Wenn es im Kästchen $1,|w|$ das Startsymbol gibt, dann gilt $w \in L(G)$, wenn nicht $w \notin L(G)$

- <u>*Beispiel:*</u> *baaba* $\in L(G)$?



3.12 Nicht Entscheidbare Probleme für CFGs

- **Äquivalenz:** $L(G_1) = L(G_2)$
- **Schnittproblem:** $L(G_1) \cap L(G_2)$
- **Regularität:** $L(G)$ regulär?
- **Mehrdeutigkeit:** Ist G mehrdeutig?

3.13 Kellerautomat (PDA)

- Ein (nichtdeterministischer) Kellerautomat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ besteht aus
  - Q, endliche Menge von **Zuständen**
  - Σ, endliches **Eingabealphabet**
  - Γ, endliches **Kelleralphabet**
  - q_0, **Startzustand**
  - Z_0, **unterstes Kellerzeichen**
  - $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$, **Übergangsfunktion**
  - $F \subseteq Q$, Menge von **Endzuständen**
- **Bedeutung von** $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$**:** Wenn sich M in Zustand q befindet, das Eingabezeichen a liest und Z das oberste Kellerzeichen ist, so kann M im nächsten Schritt in q' übergehen und Z durch α ersetzen.

- **POP-Operation:** $\alpha = \epsilon$, das oberste Kellerzeichen Z wird entfernt
- **PUSH-Operation:** $\alpha = Z'Z$, Z' wird als neues oberstes Kellerzeichen gepusht
- **ϵ-Übergang:** $a = \epsilon$, ohne Lesen eines Eingabezeichens

- Eine **Konfiguration** eines Kellerautomaten M ist ein Tripel (q, w, α) mit $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ und $\alpha \in \Gamma^*$
  - q, der **momentane Zustand**
  - w, **noch zu lesende Teil der Eingabe**
  - α, der **aktuelle Inhalt des Kellers**
- **Anfangskonfiguration** von M für die Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist (q_0, w, Z_0)
- Auf der Menge aller Konfigurationen definieren wir binäre Relation $\to_M$:

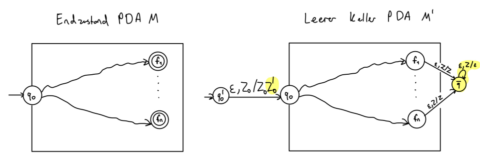
$$(q, aw, Z\alpha) \to_M \begin{cases} (q', w, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, a, Z) \\ (q', aw, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, \epsilon, Z) \end{cases}$$

- **Bedeutung von** $(q, w, \alpha) \to_M (q', w', \alpha')$**:** Wenn M sich in der Konfiguration (q, w, α) befindet, dann kann er in einen Schritt in die Nachfolgerkonfiguration (q', w', α') übergehen.
- Eine Konfiguration kann **mehrere Nachfolgerkonfigurationen** haben $\to$ **Nichtdeterminismus**
- PDA M **akzeptiert** $w \in \Sigma^*$ **mit Endzustand** gdw. $(q_0, w, Z_0) \to_M^* (f, \epsilon, \gamma)$ für $f \in F$, $\gamma \in \Gamma^*$
- PDA M **akzeptiert** $w \in \Sigma^*$ **mit leeren Keller** gdw. $(q_0, w, Z_0) \to_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$ für $q \in F$
- Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller **gleich mächtig**

3.14 Endzustand PDA M $\to$ Leerer Keller PDA M'

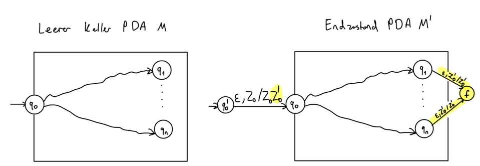
- **Idee:**
  1. Sobald M einen Endzustand erreicht, darf er den Keller leeren $\to$ M' **geht in den neuen Nicht-Endzustand** $\overline{q}$ und **leert dort den Keller**, es gibt **keine Endzustände mehr**
  2. Verhindern, dass der Keller von M leer wird, ohne dass M in einem Endzustand ist $\to$ M' hat ein **neues Symbol** Z' **ganz unten im Keller**
- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$
- $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0', Z_0', \delta')$ mit $Q' = Q \uplus \{q_0', \overline{q}\}$, $\Gamma' = \Gamma \uplus \{Z_0'\}$ und

- $\delta'(q_0', \epsilon, Z_0') = \{(q_0, Z_0 Z_0')\} \rightarrow$ **Übergang von q_0' zu q_0**
- $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ für $q \in Q \setminus F,\ a \in \Sigma \cup \{\epsilon\},\ Z \in \Gamma \rightarrow$ **Alle Übergänge zwischen qs**
- $\delta'(f, a, Z) = \delta(f, a, Z)$ für $f \in F,\ a \in \Sigma,\ Z \in \Gamma \rightarrow$ **Alle Übergänge von Endzuständen zu qs**
- $\delta'(f, \epsilon, Z) = \delta(f, \epsilon, Z)\ \cup\ \{(\overline{q}, Z)\}$ für $Z \in \Gamma \rightarrow$ **Alle ϵ-Übergänge von Endzuständen zu qs und $\overline{q}$**
- $\delta'(\overline{q}, \epsilon, Z) = \{(\overline{q}, \epsilon)\}$ für $Z \in \Gamma' \rightarrow$ **Übergang von $\overline{q}$ zu $\overline{q}$ zum Leeren des Kellers**



3.15 Leerer Keller PDA M → Endzustand PDA M'

- **Idee:**
  1. Es wird am Anfang Z_0' auf Keller geschrieben, damit der Keller nicht geleert wird
  2. Sobald M auf dem Keller Z_0' findet, muss er in den Endzustand gehen, somit ist der Keller am Ende nicht leer → M' **geht in den neuen Endzustand f**
- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$
- $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0', Z_0', \delta', F')$ mit $Q' = Q \uplus \{q_0', f\}$, $\Gamma' = \Gamma \uplus \{Z_0'\}$, $F' = \{f\}$ und
  - $\delta'(q_0', \epsilon, Z_0') = \{(q_0, Z_0 Z_0')\} \rightarrow$ **Übergang von q_0' zu q_0**
  - $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ für $q \in Q,\ a \in \Sigma \cup \{\epsilon\},\ Z \in \Gamma \rightarrow$ **Alle Übergänge zwischen qs**
  - $\delta'(q, \epsilon, Z_0') = \{(f, Z_0')\}$ für $q \in Q,\ f \in F' \rightarrow$ **Übergang von q zu f beim Sehen von Z_0'**

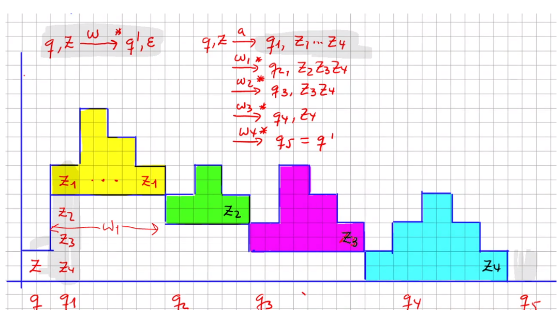


3.16 Erweiterungslemma

- $(q, u, \alpha) \rightarrow_M^n (q', u', \alpha') \Longrightarrow (q, uv, \alpha\beta) \rightarrow_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$
  - $q' \in Q$ ist der neue Zustand, den wir in n Schritten erreichen
  - $u' \in \Sigma^*$ ist der noch zu lesende Teil von der Eingabe u
  - $\alpha' \in \Gamma^*$ ist der veränderte Kellerinhalt durch das Lesen eines Teils vom Wort u, der ganz oben im Keller steht
  - $v \in \Sigma^*$ ist eine neue Eingabe, die mit u konkateniert wird
  - $\beta \in \Gamma^*$ ist der neue Kellerzeichenkette, die ganz unten im Keller steht und während der ganzen Berechnungen unverändert erhalten bleibt
- **Erweiterungslemma** sagt, dass man **den Kellerinhalt sowie die Eingabe erweitern** kann, indem man ganz unten im Keller oder ganz hinten in der Eingabe etwas hinzufügt, ohne die Eigenschaft zu zerstören, dass man **wieder in n gleichen Schritten die gleiche Konfiguration (plus das extra unberührtes Kellerinhalt und die Eingabe) erreichen** kann.

3.17 Zerlegungssatz

- **Zerlegungssatz** sagt, dass die Berechnung von einem Wort $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ mit $w = u_1 \dots u_k$, $Z_i \in \Gamma^*$ **sich in k Teile zerlegen lässt**, indem man bei jeder Zerlegung **nur ein Teil** von w liest und zum Lesen **beliebig viele** PUSH- und POP-Operationen macht **ohne den Kellerteil von der folgenden Zerlegung zu berühren (Erweiterungslemma)**.



-