Skript: Einführung in die Theoretische Informatik

Efe Kamasoglu

July 13, 2023

1 Grundbegriffe und Grammatiken

1.1 Grundbegriffe

- Alpabet Σ, endliche Menge
- Wort/String w über Σ, endliche Menge von Zeichen aus Σ
- $|w|$, Länge des Wortes w
- ϵ, das leere Wort mit der Länge 0
- Wörter u und v, uv ist ihre Konkatenation
- Wort w, w^n definiert durch:
  - $w^0 = \epsilon$
  - $w^{n+1} = ww^n$
  - *Beispiel:* $(ab)^3 = ababab$
- Σ^*, Menge aller Wörter über Σ
- Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$, formale Sprache
  - *Beispiel:* $\emptyset,\ \{\epsilon\},\ L_1 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, ...\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

1.2 Operationen auf Sprachen

Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$

- **Konkatenation:** $AB = \{uw \mid u \in A \ \wedge \ w \in B\}$
  - *Beispiel:* $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  - $A^n = \{w_1...w_n \mid w_1, ..., w_n \in A\} = \underbrace{A...A}_{\text{n}}$
  - $A^0 = \{\epsilon\},\ A^{n+1} = AA^n$
  - $A^* = \{w_1...w_n \mid n \geq 0 \ \wedge \ w_1, ..., w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
    - A^* enthält ϵ immer
  - $A^+ = AA^* = \bigcup_{n \geq 1} A^n$
    - $\epsilon \in A \ gdw. \ \epsilon \in A^+$
- **Kartesisches Produkt:** $A \times B$
  - *Beispiel:* $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- **Rechenregeln über Sprachen:**
  - Für alle A: $\epsilon \in A^*$
  - $\epsilon \notin \emptyset$

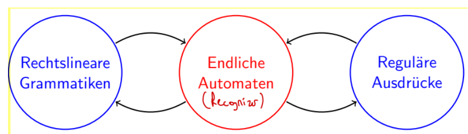
- $\emptyset^* = \{\epsilon\} = \emptyset^0$
- $A\{\epsilon\} = \{\epsilon\}A = A$
- $A\emptyset = \emptyset A = \emptyset$
- $A \times \emptyset = \emptyset$
- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$
- $A(B \cap C) = AB \cap AC$ gilt i.A. **nicht**
- $A(B \setminus C) = AB \setminus AC$ gilt i.A. **nicht**
- $A^*A^* = (A^*)^* = A^*$

1.3 Grammatiken

- Grammatik, 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$
  - V, endliche Menge von **Nichtterminalen**
  - Σ, endliche Menge von **Terminalen**, disjunkt von V
  - $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$, Menge von **Produktionen**
  - $S \in V$, **Startsymbol**
- Eine Grammatik G induziert eine **Ableitungsrelation** $\rightarrow_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:
  - $\alpha \rightarrow \alpha'$ gdw. es eine Regel $\beta \rightarrow \beta'$ in P und Wörter α_1, α_2 gibt, so dass $\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2 \; \wedge \; \alpha' = \alpha_1 \beta' \alpha_2$
- Eine **Sequenz** $\alpha_1 \rightarrow_G \alpha_2 \rightarrow_G ... \rightarrow_G \alpha_n$ ist eine **Ableitung** von α_n aus α_1.
- Wenn $\alpha_1 = S$ und $\alpha_n \in \Sigma^*$, dann **erzeugt** G das Wort α_n. Erzeugte Wörter bestehen nur aus **Terminalzeichen**.
- Die Sprache von G ist die Menge aller Wörter (Σ^*), die von G erzeugt werden: $L(G)$
- **Chomsky Hierarchie:** Eine Grammatik G ist vom
  - **Typ 0** immer
  - **Typ 1** falls für jede Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ ausser $S \rightarrow \epsilon$ gilt $|\alpha| \leq |\beta|$
  - **Typ 2** falls G vom Typ 1 ist und für jede Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ gilt $\alpha \in V$
  - **Typ 3** falls G vom Typ 2 ist und für jede Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ ausser $S \rightarrow \epsilon$ gilt $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$
  - Typ 3 $\subset$ Typ 2 $\subset$ Typ 1 $\subset$ Typ 0
  - L(Typ 3) $\subset$ L(Typ 2) $\subset$ L(Typ 1) $\subset$ L(Typ 0)

- **Grammatiken und Sprachklassen:**
  - **Typ 3, Rechtslineare Grammatik, Reguläre Sprachen**
  - **Typ 2, Kontextfreie Grammatik, Kontextfreie Sprachen**
  - Typ 1, Kontextsensitive Grammatik, Kontextsensitive Sprachen
  - Typ 0, Phrasenstrukturgrammatik, Rekursiv aufzählbare Sprachen

2 Reguläre Sprachen



2.1 Rechtslineare Grammatik

$X, Y \in V$, Produktionen folgender Gestalt:

- $X \to aY$
- $X \to a$
- $X \to Y$
- $X \to \epsilon$, nur dann wenn X Startsymbol ist

2.2 Deterministische endliche Automaten (DFA)

- DFA, 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - Q, endliche Menge von **Zuständen**
  - Σ, endliches **Eingabealphabet**
  - $\delta : \ Q \times \Sigma \to Q$, totale **Übergangsfunktion**
  - $q_0 \in Q$, ein **Startzustand**
  - $F \subseteq Q$, endliche Menge von **Endzuständen**
- Die von DFA M **akzeptierte** Sprache ist $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$, wobei $\hat{\delta} : \ Q \times \Sigma^* \to Q$ induktiv definiert durch:
  - $\delta(q, a)$, Zustand, den man aus q mit einem **Zeichen** a erreicht
  - $\hat{\delta}(q, w)$, Zustand, den man aus q mit einem **Wort** w erreicht
  - $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$
  - $\hat{\delta}(q, aw) = \hat{\delta}(\delta(q, a), w)$ für $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$

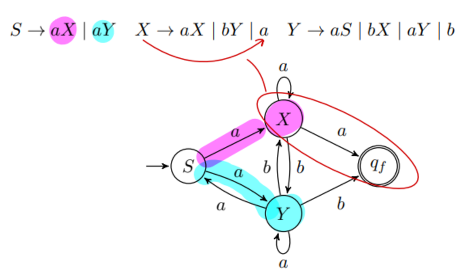
2.3 Nicht-Deterministische endliche Automaten (NFA)

- NFA, 5-Tupel $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - $Q, \Sigma, q0$ und F wie beim DFA
  - $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$, wobei $\mathcal{P}(Q)$ Menge aller Teilmengen von Q
- Die von NFA N **akzeptierte** Sprache ist $L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\overline{\delta}}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset\}$, wobei
  - $\overline{\delta}(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$, Menge aller Zustände, die man von einem Zustand in S aus mit einem **Zeichen** a erreicht
  - $\hat{\overline{\delta}}(S, w)$, Menge aller Zustände, die man von einem Zustand in S aus mit einem **Wort** w erreicht
  - $\overline{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
  - $\hat{\overline{\delta}} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$

2.4 Rechtslineare Grammatik → NFA

1. Füge einen Zustand für jedes Nichtterminal, Startsymbol wird zum Startzustand
2. Füge einen Endzustand für jedes Terminal, falls es $S \to \epsilon$ gibt, dann Startzustand ist auch ein Endzustand
3. Für jede Kombination $Y \to aX$ füge eine Kante von Y nach X mit dem Zeichen a
4. Für jede Kombination $Y \to a$ füge eine Kante von Y nach dem Endzustand mit dem Zeichen a

Beispiel:

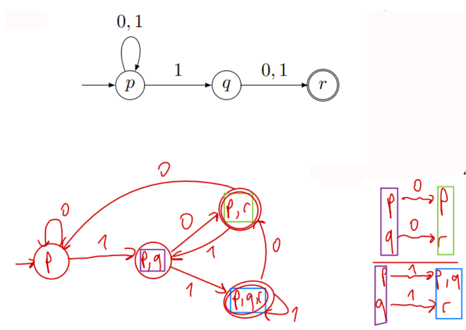


2.5 NFA $\rightarrow$ DFA, Potenzmengenkonstruktion

Für jede NFA mit n Zuständen kann der DFA max bis zu 2^n Zustände haben.

1. Für alle Zustände wiederhole (beginnend mit Startzustand q_0):
   (a) Bestimme wohin man mit welcher Kante geht
   (b) Erzeuge neue Zustände durch Vereinigung der auf der rechten Seite stehenden Zuständen mit der selben Kanten, verbinde diese
   (c) **Mindestens einer von den Zuständen**, die in dem neuen Zustand sind, ist ein **Endzustand** $\rightarrow$ der neue Zustand wird ein Endzustand

<u>*Beispiel:*</u>

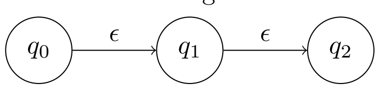


2.6 ϵ-NFA

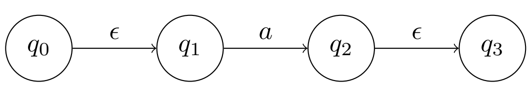
- Ein NFA mit **ϵ-Übergängen** ist ein NFA mit $\epsilon \notin \Sigma$ und $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

2.7 ϵ-NFA $\rightarrow$ NFA

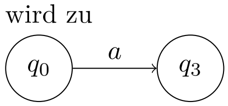
1. Lösche überflüssige Zustände:



2. Verbinde die Zustände in der Form mit einer einzigen Kante:



wird zu



3. Lösche nicht erreichbare Zustände

4. Falls ϵ in der Sprache ist, dann mache den Startzustand Endzustand

2.8 Reguläre Ausdrücke (REs)

- Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert:
  - $\emptyset$
  - ϵ
  - Für jedes $a \in \Sigma$
  - Wenn α, β RE, auch:
    - $\alpha\beta$
    - $\alpha \mid \beta = \alpha + \beta$
    - α^*
- $*$, Kleene'sche Iteration
- Für RE γ ist die Sprache induktiv definiert:
  - $L(\emptyset) = \emptyset$
  - $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
  - $L(a) = \{a\}$
  - $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
  - $L(\alpha \mid \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
  - $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$
- $\alpha \equiv \beta$ gdw. $L(\alpha) = L(\beta)$
- **Rechenregeln über REs:**
  - **Null und Eins Lemma:**
    - $\emptyset \mid \alpha \equiv \alpha \mid \emptyset \equiv \alpha$
    - $\emptyset\alpha \equiv \alpha\emptyset \equiv \emptyset$
    - $\epsilon\alpha \equiv \alpha\epsilon \equiv \alpha$
    - $\emptyset^* \equiv \epsilon$
    - $\epsilon^* \equiv \epsilon$
  - **Assoziativität:**
    - $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma)$
    - $\alpha(\beta\gamma) \equiv (\alpha\beta)\gamma$
  - **Kommutativität:**
    - $\alpha \mid \beta \equiv \beta \mid \alpha$
  - **Distributivität:**
    - $\alpha(\beta \mid \gamma) \equiv \alpha\beta \mid \alpha\gamma$
    - $(\beta \mid \gamma)\alpha \equiv \beta\alpha \mid \gamma\alpha$

- **Idempotenz:**
    - $\alpha \mid \alpha \equiv \alpha$

- **Stern Lemma:**
    - $\epsilon \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
    - $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
    - $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

2.9 Strukturelle Induktion für REs

Um zu beweisen, dass eine Eigenschaft $P(r)$ für alle regulären Ausdrücke gilt:

1. Zeige $P(\emptyset)$
2. Zeige $P(\epsilon)$
3. Zeige $P(a)$ für alle $a \in \Sigma$
4. Unter der Annahme $P(\alpha)$ und $P(\beta)$ (I.H.), zeige $P(\alpha\beta)$
   $\rightarrow$ verwende $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
5. Unter der Annahme $P(\alpha)$ und $P(\beta)$ (I.H.), zeige $P(\alpha \mid \beta)$
   $\rightarrow$ verwende $L(\alpha \mid \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
6. Unter der Annahme $P(\alpha)$ (I.H.), zeige $P(\alpha^*)$
   $\rightarrow$ verwende $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$

Beispiel: *empty*(r) entscheidet, ob $L(r) = \emptyset$. Zeige die Korrektheit der Konstruktion:

(a) **Konstruktion**

- $\mathsf{empty}(\boldsymbol{\emptyset}) = \mathsf{true}$
- $\mathsf{empty}(\mathsf{a}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{empty}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{empty}(\alpha\beta) = \mathsf{empty}(\alpha) \vee \mathsf{empty}(\beta)$
- $\mathsf{empty}(\alpha \mid \beta) = \mathsf{empty}(\alpha) \wedge \mathsf{empty}(\beta)$
- $\mathsf{empty}(\alpha^*) = \mathsf{false}$

Korrektheit Wir zeigen $L(r) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(r)$ mittels struktureller Induktion.

Fall $r = \boldsymbol{\emptyset}$, $r = \mathsf{a}$, $r = \boldsymbol{\epsilon}$. Trivial.

Fall $r = \alpha^*$.
Wir haben $\epsilon \in L(\alpha^*) \neq \emptyset \iff \neg\mathsf{empty}(\alpha^*)$. Die Aussage gilt per Definition von empty.

Fall $r = \alpha\beta$.
Als Induktionshypothesen erhalten wir $L(\alpha) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(\alpha)$ und $L(\beta) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(\beta)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} L(\alpha\beta) = \emptyset &\iff L(\alpha)L(\beta) = \emptyset \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \vee L(\beta) = \emptyset \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{empty}(\alpha) \vee \mathsf{empty}(\beta) = \mathsf{empty}(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Fall $r = \alpha \mid \beta$.
Es gelten dieselben Induktionshypothesen wie im vorherigen Fall.

Wir haben

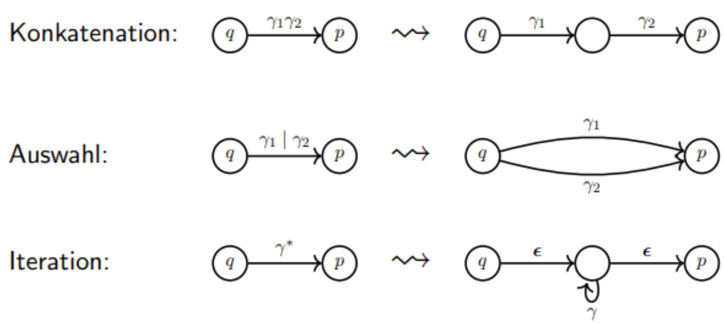
$$\begin{aligned} L(\alpha \mid \beta) = \emptyset &\iff L(\alpha) \cup L(\beta) = \emptyset \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \wedge L(\beta) = \emptyset \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{empty}(\alpha) \wedge \mathsf{empty}(\beta) = \mathsf{empty}(\alpha \mid \beta). \end{aligned}$$

2.10 RE → ϵ-NFA

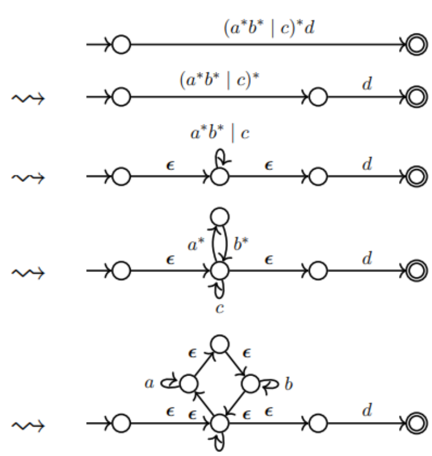
1. Wende folgende Ersetzungsregeln an

$$\gamma\,\emptyset \rightsquigarrow \emptyset \qquad \gamma \mid \emptyset \rightsquigarrow \gamma \qquad \emptyset^* \rightsquigarrow \epsilon$$
$$\emptyset\,\gamma \rightsquigarrow \emptyset \qquad \emptyset \mid \gamma \rightsquigarrow \gamma$$

2. Wende folgende Transformationsregeln an

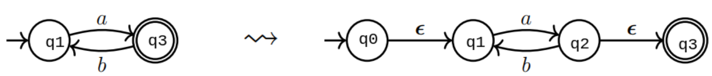


Beispiel:

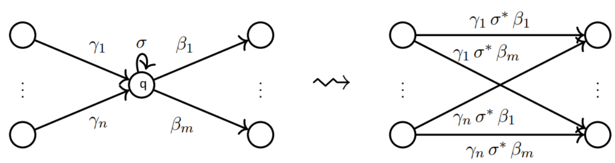


2.11 ϵ-NFA $\rightarrow$ RE

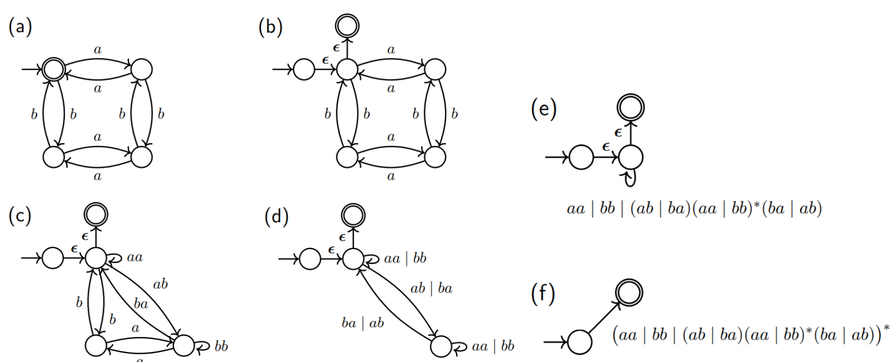
1. Hat Startzustand q_1 eingehende Übergänge, füge einen neuen Startzustand q_0 mit einem ϵ-Übergang nach q_1
2. Füge einen neuen Endzustand q_3 und ϵ-Übergänge nach q_3 von allen Endzuständen (q_2 in diesem Beispiel)



3. Wähle ein Zustand q, der weder Start- noch Endzustand ist
4. Eliminiere q, wende dabei folgende Regeln:



<u>*Beispiel:*</u>



2.12 Ardens Lemma

- Sind A, B, X Sprachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt:

$$\boxed{X = AX \cup B \Longrightarrow X = A^*B}$$

- Sind α, β, X REs mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt:

$$\boxed{X \equiv \alpha X \mid \beta \Longrightarrow X \equiv \alpha^*\beta}$$

- **Bemerkungen:**
  - $X \equiv X\alpha \mid \beta \Longrightarrow X \equiv \beta\alpha^*$
  - $X \equiv \alpha X \mid \beta$ für $\epsilon \in L(\alpha)$
    - hat **keine eindeutige Lösung**: jede Sprache $B \subseteq X$ ist Lösung
    - *Beispiel:* für $\alpha = \epsilon$ und $\beta = b$ kann $X = b$ oder $X = a \mid b$ oder $X = aba \mid b$
  - $X \equiv X \mid aX$
    - hat **keine eindeutige Lösung:** $X = \emptyset$ oder $X = \Sigma^*$ oder $X = a^*$
  - $X \equiv \alpha X$ für $\epsilon \notin L(\alpha)$
    - hat **eine eindeutige Lösung:** $X = \emptyset$
  - $X \equiv \alpha X$ für $\epsilon \in L(\alpha)$
    - hat **keine eindeutige Lösung:** $X = \Sigma^*$ oder $X = ab^*a$
  - $X \equiv aXb \mid \epsilon$
    - hat **keine reguläre Lösung:** $X = L$ für $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$
  - $X \equiv abX \mid \epsilon$
    - hat **eine eindeutige Lösung:** $X = (ab)^*\epsilon = (ab)^*$

2.13 FA → RE mittels Ardens Lemma

1. FA als Gleichungssystem schreiben
   - für jeden Endzustand X_f füge $X_f \equiv \epsilon$ ein
   - für jeden Zustand X mit

     $$X \xrightarrow{a} X_1$$

     mache $X \equiv aX_1$
2. Gleichungen einsetzen und damit eliminieren
3. Rechenregeln über REs und Ardens Lemma verwenden

2.14 Konversionen bezüglich regulärer Sprachen

$$\begin{tikzcd}
\text{DFA} \arrow[dr] & \text{NFA} \arrow[l] \arrow[d] & \epsilon\text{-NFA} \arrow[l] \\
 & \text{RE} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

RE → ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände
ϵ-NFA → NFA:	$Q \rightsquigarrow Q$
NFA → DFA:	n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände
NFA → RE:	n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(3^n)$

2.15 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen, dann sind auch

- $L_1 L_2$
- $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \setminus L_2$
- $\overline{L}$ bzw. $\Sigma^* \setminus L$
- L^*
- L^R (Spiegelung von L)
- $L_1 \times L_2$

2.16 Komplementierung $\overline{L}$ bezüglich FAs

- **Für DFAs:** Vertauschen von Endzuständen und Nicht-Endzuständen (**inkl. Fangzustand!**)
- **Für NFAs:** funktioniert das Vertauschen **nicht**

2.17 Schnitt zweier DFAs, Produktkonstruktion

- Sind M_1 und M_2 DFAs. Dann ist der **Produkt-Automat M** mit $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.
- **Produktkonstruktion für M_1 und M_2:**
  1. Erzeuge einen neuen Startzustand aus den Startzuständen der M_1 und M_2
  2. Bestimme wohin man mit welcher Kante geht
  3. Erzeuge neue Zustände durch Vereinigung der auf der rechten Seite stehenden Zuständen mit der selben Kanten, verbinde diese
  4. **Alle Zustände**, die in dem neuen Zustand sind, sind **Endzustände** $\rightarrow$ der neue Zustand wird ein Endzustand

2.18 Vereinigung zweier DFAs

- Sind M_1 und M_2 DFAs. Dann ist M mit $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.
- **Konstruktion für M_1 und M_2:** Gleich wie die Produktkonstruktion bis auf 4.
  4. **Mindestens einer von den Zuständen**, die in dem neuen Zustand sind, ist ein **Endzustand** $\rightarrow$ der neue Zustand wird ein Endzustand

2.19 Pumping Lemma für reguläre Sprachen

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass

  1. $v \neq \epsilon$
  2. $|uv| \leq n$
  3. $\forall i \geq 0.\ uv^i w \in L$

- Um zu zeigen, dass eine Sprache **nicht regulär** ist $\rightarrow$ **Regulärität** mit Pumping Lemma zu zeigen **nicht möglich**

- Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt
  $\rightarrow$ regulär $\subset$ Pumping Lemma gilt $\subset$ alle Sprachen

- *Beispiel:* $L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$

  Angenommen L sei regulär.
  Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
  Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Sei uvw eine Zerlegung von z mit $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$.
  Zeige, dass $uv^i w \notin L$ für den Fall $i = 2$ gilt:
  $n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2 w| \leq n^2 + n \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
  Da es keine Quadratzahl zwischen n^2 und $(n+1)^2$ geben kann, ist $uv^2 w \notin L$, damit ist L nicht regulär.

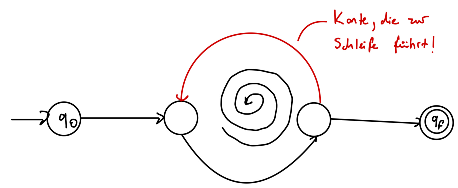
2.20 Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

- **Wortproblem:** Gegeben w und D, gilt $w \in L(D)$?
  - für DFA M, in $O(|w| + |M|^1)$ entscheidbar
  - für NFA N, in $O(|Q|^2|w| + |N|)$ entscheidbar

- **Leerheitsproblem:** Gegeben D, gilt $L(D) = \emptyset$?
  - für DFA M, in $O(|Q||\Sigma|)$ entscheidbar
  - für NFA N, in $O(|Q|^2|\Sigma|)$ entscheidbar

[1] Konstante für die Entscheidung, ob der Zustand den wir am Ende erreichen, ein Endzustand ist

- **Endlichkeitsproblem:** Gegeben D, ist $L(D)$ endlich?
  - für DFA und NFA entscheidbar
  - $L(M) = \infty$ gdw. vom Startzustand aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist



- **Äquivalenzproblem:** Gegeben D_1 und D_2, gilt $L(D_1) = L(D_2)$?
  - schaue, ob $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)} = \emptyset$ und $\overline{L(M_1)} \cap L(M_2) = \emptyset$ gelten
  - für DFAs, in $O(|Q_1||Q_2||\Sigma|)$ entscheidbar
  - für NFA N, in $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ entscheidbar (bei fixem Σ)

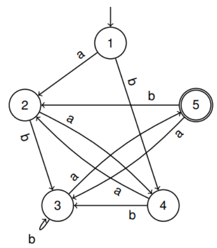
2.21 Minimierung von FAs

- Zustände p und q sind **unterscheidbar**, wenn $\exists w \in \Sigma^*$ mit $\hat{\delta}(p, w) \in F$ und $\hat{\delta}(q, w) \notin F$ oder umgekehrt
- Zustände p und q sind **äquivalent**, wenn $\forall w \in \Sigma^*$ mit $\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F$
- Gilt $p \in F$ und $q \notin F$, dann sind p und q unterscheidbar
- Sind $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidbar, dann auch p und q

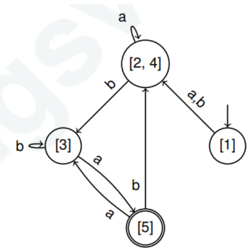
2.22 Minimierungsalgortihmus für DFAs

1. Konstruiere die Treppe $\forall q \in Q$
2. Markiere Endzustände und Nichtendzustände mit einem ϵ
3. Für alle unmarkierten Paare (q, p): Falls $(\delta(q, a), \delta(p, a))$ markiert, markiere das Paar (q, p) mit a
   (a) Falls es b im Kästchen von $(\delta(q, a), \delta(p, a))$ gibt, dann markiere das Paar (q, p) mit ab
4. Für alle unmarkierten Paare (q, p): Schmelze q und p zusammen, evtl. markiere das Paar mit $=$

Beispiel:



	1	2	3	4
2	*ba*			
3	*a*	*a*		
4	*ba*	=	*a*	
5	ε	ε	ε	ε



2.23 Äquivalenz von Zuständen eines DFAs

- **Äquivalenzklasse:** $[p]_{\equiv_M} = \{q \mid p \equiv_M q\}$, Menge der Zustände, die mit p äquivalent sind
- **Quotientenmenge:** $Q/\equiv_M = \{[p]_{\equiv_M} \mid p \in Q\}$, Menge der Äquivalenzklassen
- $p \equiv_M q \Leftrightarrow L_M(p) = L_M(q)$
  - $L_M(q) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q, w) \in F\}$, Sprache vom Zustand q
  - Zwei Zustände sind äquivalent wenn sie die gleiche Sprache erkennen
  - **Fakt:** $|Q/\equiv_M|$ = Anzahl der Sprachen, die von Zuständen von M erkannt werden
- **Quotientenautomat:** $M/\equiv = (Q/\equiv, \Sigma, \delta', [q_0]_\equiv, F/\equiv)$ mit $\delta'([p]_\equiv, a) = [\delta(p, a)]_\equiv$
- Quotientenautomat $M/\equiv$ ist ein **minimaler DFA** für $L(M)$
- $L(M/\equiv) = L(M)$

2.24 Residualsprache, Äquivalenz von Wörtern

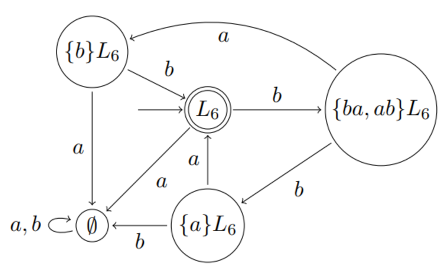
- $L^w = \{z \in \Sigma^* \mid wz \in L\}$, Residualsprache von L bzgl. $w \in \Sigma^*$
- $u \equiv_L v \Leftrightarrow L^u = L^v$
  - Zwei Wörter sind äquivalent wenn sie die gleiche Residualsprache haben
  - **Fakt:** $|\Sigma^*/\equiv_L|$ = Anzahl der Residualsprachen von L
- **Fakt:** $|Q/\equiv_M| = |\Sigma^*/\equiv_L|$, **Anzahl der Residualsprachen entspricht der Anzahl der Zustände im minimalen Automat**

2.25 Myhill-Nerode Relation

- Eine Sprache L ist **regulär** gdw. Anzahl der Residualsprachen von L **endlich**
- **Beweis mittels Myhill-Nerode Relation:** $L = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
  1. Bestimmen einer unendliche Menge von Wörtern mit unterschiedlichen Residualsprachen: $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
  2. Sei $i, j \in \mathbb{N}$ verschieden. Dann $a^i b^i c^i \in L$, aber $a^j b^j c^i \notin L$. Daher $L^{a^i b^i} \neq L^{a^j b^j}$.
  3. Somit sind alle Residualsprachen unterschiedlich und L **keine reguläre** Sprache

2.26 Kanonischer Minimalautomat

- $M_L = \{R_L, \Sigma, \delta_L, L, F_L\}$ mit $\delta_L(R, a) = R^a$ und $F_L = \{R \in R_L \mid \epsilon \in R\}$, kanonischer Minimalautomat M_L mit $L(M_L) = L$
- R_L, Menge der Residualsprachen von L
- **Durch Umbenennung von Zuständen** von jedem minimalen DFA bekommt man den **kanonischen Minimalautomat**
- Kanonischer Minimalautomat M_L ist **gleich gross** wie Quotientenautomat und damit ein **minimaler DFA** für $L(M)$
- *Beispiel:* $L = L((bba \mid bab)^*)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$



2.27 Regulärität der Sprachen

Eine Sprache ist **regulär**

- gdw. sie von einer **DFA, NFA, ϵ-NFA, RE, rechtslinearen Grammatik akzeptiert wird**
- gdw. sie durch **Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen** entsteht
- gdw. sie **endliche Anzahl von Residualsprachen hat**

Eine Sprache ist **nicht regulär**

- gdw. für sie **Pumping-Lemma nicht gilt**
- gdw. sie **unendliche Anzahl von Residualsprachen hat (Myhill-Nerode)**

3 Kontextfreie Sprachen (CFL)

3.1 Kontextfreie Grammatik (CFG)

- Kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$
- Produktionen folgender Gestalt:
  - $X \to \alpha$, mit $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$
- $\alpha_1 \to_G \alpha_2 \to_G \ldots \to_G \alpha_n$ nennt man eine **Linksableitung** gdw. in jedem Schritt **das linkeste Nichtterminal** in α_i ersetzt wird
- **Rechtsableitung** analog zu Linksableitung

3.2 Induktive Definition einer Sprache mittels Grammatik

- Sei G eine Grammatik: $S \to \epsilon \mid +S-S \mid +S \mid \epsilon$
- Um zu zeigen, dass G die Menge aller *nicht überziehenden* Wörter erzeugt, betrachten wir die Grammatik als **induktive Definition einer Sprache** $L(G)$
- Wort w ist überziehend gdw. $\exists i$, sodass $\Delta(w_1 \ldots w_i) < 0$ mit $\Delta(w) = |w|_+ - |w|_-$
- **nicht überziehend:** $\epsilon, ++-+-$
- **überziehend:** $-+, +-+--++$
- **Induktive Definition von $L(G)$:**
  - $\epsilon \in L(G)$
  - $u \in L(G) \Longrightarrow +u \in L(G)$
  - $u \in L(G) \wedge v \in L(G) \Longrightarrow +u-v \in L(G)$
- Produktionen ($\to$) erzeugen Wörter **top-down**: Nichtterminal $\to$ Wort
- Induktive Definition ($\Longrightarrow$) erzeugt Wörter **buttom-up**: kleinere Wörter $\Longrightarrow$ grössere Wörter
- Induktive Definition betrachtet nur Wörter aus Σ^*

3.3 (Strukturelle) Induktion über die Erzeugung eines Wortes

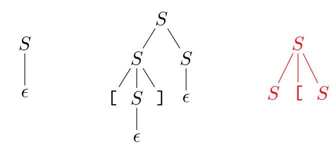
- $w \in L(G) \Longrightarrow P(w)$ beweist man mit **Induktion über Erzeugung von** w
- Um zu zeigen, dass für alle $u \in L(G)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt, zeige:
  - $P(\epsilon)$
  - $P(u) \Longrightarrow P(+u)$
  - $P(u) \land P(v) \Longrightarrow P(uv)$
- *Beispiel:* Grammatik $S \to \epsilon \mid +S-S \mid +S \mid \epsilon$ erzeugt die Wörter, die nicht überziehend sind.
  - Induktionsbasis: $\epsilon \in L(G)$ ist nicht überziehend
  - Induktionsschritt: Seien u, v nicht überziehende Wörter. Es gibt 2 Fälle:
    1. $w = +u$: Für beliebiges i gilt $\Delta(w_1 \dots w_i) = 1 + \Delta(u_1 \dots u_{i-1})$. Da u nicht überziehend ist, folgt $\Delta(u_1 \dots u_{i-1}) \geq 0$ und somit $\Delta(w_1 \dots w_i) \geq 1 \geq 0$. Also ist w auch nicht überziehend.
    2. $w = +u-v$: Für $i \in \{1, \dots, |u|+2\}$ wissen wir bereits $\Delta(w_1 \dots w_i) \geq 0$, analog zum ersten Fall. Für $i > |u|+2$ gilt nun $\Delta(w_1 \dots w_i) = \Delta(+u-v_1 \dots v_j)$, mit $j = i-|u|-2$. Es folgt $\Delta(+u-v_1 \dots v_j) = \Delta(u)+\Delta(v_1 \dots v_j) \geq 0$, da sowohl u als auch v nicht überziehend ist.

3.4 Induktion über die Länge des Wortes

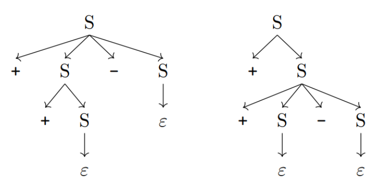
- $P(w) \Longrightarrow w \in L(G)$ beweist man mit **Induktion über** $|w|$
- *Beispiel:* Die nicht überziehenden Wörter werden durch die Grammatik $S \to \epsilon \mid +S-S \mid +S \mid \epsilon$ erzeugt.
  - Induktionsannahme: Für nicht überziehendes w gilt $w \in L(G)$
  - Induktionsbasis: Für $|w| = 0$ gilt $w = \epsilon \in L(G)$
  - Induktionsschritt:
    1. Falls $w = +u$ für ein u nicht überziehend, dann wissen wir nach Induktionsannahme, dass $u \in L(G)$. Daraus folgt $S \to +S-S \to^* +u = w$ und somit $w \in L(G)$.
    2. Falls $w = +u-v$ für u, v nicht überziehend: Nach Induktionsannahme gilt $u, v \in L(G)$, also erhalten wir $S \to +S-S \to^* +u-S \to^* +u-v = w$ und somit $w \in L(G)$.

3.5 Syntaxbaum, Mehrdeutigkeit

- Für eine CFG und ein $w \in \Sigma^*$ sind folgende Bedingungen äquivalent:
  - $A \rightarrow^*_G w$
  - $w \in L_G(A)$ (induktive Definition)
  - Es gibt einen Syntaxbaum mit Wurzel A, dessen Rand (Blätter von links nach rechts gelesen) das Wort w ist
- Syntaxbaum für eine Ableitung mit Grammatik $S \rightarrow \epsilon \mid [S] \mid SS$: $w = \epsilon$, $w = []$, kein gültiges Baum



- CFG G **mehrdeutig** gdw. es gibt $w \in L(G)$, das **zwei verschiedene Syntaxbäume** hat
- CFL L **inhärent mehrdeutig** gdw. **jede CFG** G mit $L(G) = L$ **mehrdeutig**
- *Beispiel:* $S \rightarrow \epsilon \mid +S-S \mid +S \mid \epsilon$ und $w = ++- \Leftrightarrow L_G(S)$ ist mehrdeutig



3.6 Chomsky-Normalform (CNF)

- Eine CFG G ist in Chomsky-Normalform gdw. alle Produktionen eine der Formen haben: $A \rightarrow a$ oder $A \rightarrow BC$
- ϵ-Produktion: $A \rightarrow \epsilon$
- Kettenproduktion: $A \rightarrow B$
- Zu jeder CFG G kann man eine CFG G' in Chomsky-Normalform konstruieren, die **keine** ϵ-Produktionen und Kettenproduktionen enthält, so dass gilt $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$

- **Konstruktion:**
  1. Füge für jedes $a \in \Sigma$ mit der Länge ≥ 2 ein neues Nichtterminal X_a und eine neue Produktion $X_a \to a$ hinzu:
     - $A \to aBC$ wird zu $A \to X_a BC$
       $X_a \to a$
  2. Ersetze jede Produktion der Form $A \to B_1 B_2 \dots B_k$ mit der Länge $k \geq 3$:
     - $A \to BCD$ wird zu $A \to BX_{CD}$
       $X_{CD} \to CD$
  3. Eliminiere alle ϵ-Produktionen, indem wir zuerst ϵ in Produktionen einsetzen und dann eliminieren:
     - $A \to XY$ wird zu $A \to X\epsilon$ wird zu $A \to X$
       $Y \to \epsilon$ $Y \to \epsilon$
  4. Eliminiere alle Kettenproduktionen, indem wir zuerst Nichtterminale in Produktionen einsetzen und dann eliminieren
     - $A \to X \mid YZ$ wird zu $A \to YZ \mid x \mid DL \mid B$
       $X \to x \mid DL \mid B$ $B \to b$
       $B \to b$
     - wird zu $A \to YZ \mid x \mid DL \mid b$

3.7 Greibach-Normalform

- Eine CFG ist in Greibach-Normalform gdw. alle Produktionen die Form $A \to aA_1 \dots A_n$ haben
- Zu jeder CFG G gibt es eine CFG G' in Greibach-Normalform mit $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$

3.8 Pumping Lemma für CFLs

- Für jede CFL L gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in $z = uvwxy$, dass
  1. $vx \neq \epsilon$ bzw. $|vx| \geq 1$
  2. $|vwx| \leq n$
  3. $\forall i \geq 0.\ uv^i wx^i y \in L$
- *Beispiel:* $L = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

  Angenommen L sei kontextfrei.
  Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
  Wähle $z = a^n b^n c^n \in L$. Sei $uvwxy$ eine Zerlegung von z mit $vx \neq \epsilon$ und $|vwx| \leq n$. Wir betrachten nun 2 Fälle:

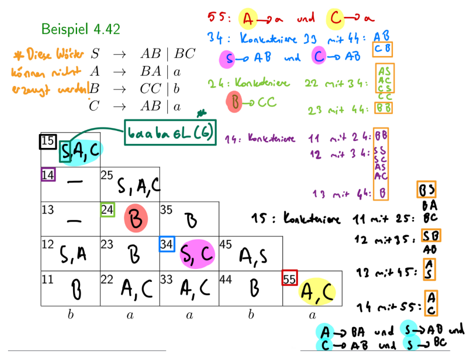
1. uwx enthält nur as oder bs oder cs: Für $i = 2$ erhalten wir $uv^2wx^2y = a^{i+2|v|+2|x|}b^ic^i$. Da $|vx| \geq 1$, gilt $uv^2wx^2y \notin L$.
2. uwx enthält nur as und bs oder bs und cs: Hier muss vx mindestens ein a und ein b enthalten. Damit gilt aber $|uv^2wx^2y|_a > |uv^2wx^2y|_c$. Also $uv^2wx^2y \notin L$.

3.9 Erzeugend, Erreichbar, Nützlich

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ CFG. Ein Symbol $X \in V \cup \Sigma$ ist
  - **erzeugend** gdw. es eine Ableitung $X \rightarrow_G^* w \in \Sigma^*$ gibt
  - **erreichbar** gdw. es eine Ableitung $S \rightarrow_G^* \alpha X \beta$ gibt
  - **nützlich** gdw. erzeugend und erreichbar
- Bekommt man eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$, die nur **nützliche Symbole** enthält, durch:
  1. Elimination der **nicht erzeugenden** Symbole
  2. Elimination der **nicht erreichbaren** Symbole
- Menge der erzeugenden Symbole einer CFG ist berechenbar
- Menge der erreichbaren Symbole einer CFG ist berechenbar

3.10 Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus (CYK)

- **Wortproblem** ist für eine CFG G mittels CYK-Algorithmus in Zeit $O(|w|^3)$ entscheidbar
- **Algorithmus:** $w \in L(G)$?
  1. Konstruiere die Treppe (Breite = Höhe = $|w|$) und beschrifte jede Spalte von unten nach oben: Für 1. Spalte $1,1 - 1,2 - \ldots - 1,|w|$; für 3. Spalte $3,3 - 3,4 - \ldots - 3,|w|$
  2. Fülle die erste Reihe mit Nichtterminalen ein, die die einzelnen Buchstaben des Wortes erzeugen
  3. Fülle die anderen Kästchen mit Nichtterminalen nach Beschriftungen ein: Für $1,2$ konkateniere $1,1$ $2,2$; für $1,4$ konkateniere $1,1$ $2,4$ und $1,2$ $3,4$ und $1,3$ $4,4$
  4. Wenn es im Kästchen $1,|w|$ das Startsymbol gibt, dann gilt $w \in L(G)$, wenn nicht $w \notin L(G)$
- <u>*Beispiel:*</u> *baaba* $\in L(G)$?



3.11 Nicht Entscheidbare Probleme für CFGs

- **Äquivalenz:** $L(G_1) = L(G_2)$?
- **Schnittproblem:** $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?
- **Regularität:** $L(G)$ regulär?
- **Mehrdeutigkeit:** Ist G mehrdeutig?

3.12 Nicht Deterministischer Kellerautomat (NPDA)

- Ein (nichtdeterministischer) Kellerautomat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ besteht aus
  - Q, endliche Menge von **Zuständen**
  - Σ, endliches **Eingabealphabet**
  - Γ, endliches **Kelleralphabet**
  - q_0, **Startzustand**
  - Z_0, **unterstes Kellerzeichen**
  - $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$, **Übergangsfunktion**
  - $F \subseteq Q$, Menge von **Endzuständen**
- **Bedeutung von $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$:** Wenn sich M in Zustand q befindet, das Eingabezeichen a liest und Z das oberste Kellerzeichen ist, so kann M im nächsten Schritt in q' übergehen und Z durch α ersetzen.
  - **POP-Operation:** $\alpha = \epsilon$, das oberste Kellerzeichen Z wird entfernt
  - **PUSH-Operation:** $\alpha = Z'Z$, Z' wird als neues oberstes Kellerzeichen gepusht
  - **ϵ-Übergang:** $a = \epsilon$, ohne Lesen eines Eingabezeichens
- Eine **Konfiguration** eines Kellerautomaten M ist ein Tripel (q, w, α) mit $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ und $\alpha \in \Gamma^*$

  - q, der **momentane Zustand**
  - w, **noch zu lesende Teil der Eingabe**
  - α, der **aktuelle Inhalt des Kellers**

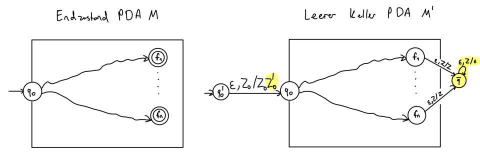
- **Anfangskonfiguration** von M für die Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist (q_0, w, Z_0)
- Auf der Menge aller Konfigurationen definieren wir binäre Relation $\rightarrow_M$:

$$(q, aw, Z\alpha) \rightarrow_M \begin{cases} (q', w, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, a, Z) \\ (q', aw, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, \epsilon, Z) \end{cases}$$

- **Bedeutung von** $(q, w, \alpha) \rightarrow_M (q', w', \alpha')$**:** Wenn M sich in der Konfiguration (q, w, α) befindet, dann kann er in einen Schritt in die Nachfolgerkonfiguration (q', w', α') übergehen.
- Eine Konfiguration kann **mehrere Nachfolgerkonfigurationen** haben $\rightarrow$ **Nichtdeterminismus**
- PDA M **akzeptiert** $w \in \Sigma^*$ **mit Endzustand** gdw. $(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma)$ für $f \in F$, $\gamma \in \Gamma^*$
- PDA M **akzeptiert** $w \in \Sigma^*$ **mit leeren Keller** gdw. $(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$ für $q \in F$
- Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller **gleich mächtig**

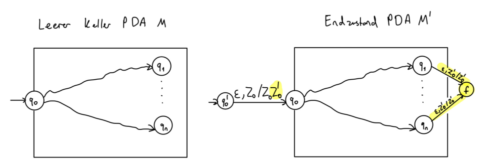
3.13 Endzustand PDA M $\rightarrow$ Leerer Keller PDA M'

- **Idee:**
  1. Sobald M einen Endzustand erreicht, darf er den Keller leeren $\rightarrow$ M' **geht in den neuen Nicht-Endzustand** $\overline{q}$ und **leert dort den Keller**, es gibt **keine Endzustände mehr**
  2. Verhindern, dass der Keller von M leer wird, ohne dass M in einem Endzustand ist $\rightarrow$ M' hat ein **neues Symbol** Z' **ganz unten im Keller**
- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$
- $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0', Z_0', \delta')$ mit $Q' = Q \uplus \{q_0', \overline{q}\}$, $\Gamma' = \Gamma \uplus \{Z_0'\}$ und
  - $\delta'(q_0', \epsilon, Z_0') = \{(q_0, Z_0 Z_0')\}$ $\rightarrow$ **Übergang von** q_0' **zu** q_0
  - $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ für $q \in Q \setminus F$, $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $Z \in \Gamma$ $\rightarrow$ **Alle Übergänge zwischen** q**s**
  - $\delta'(f, a, Z) = \delta(f, a, Z)$ für $f \in F$, $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma$ $\rightarrow$ **Alle Übergänge von Endzuständen zu** q**s**
  - $\delta'(f, \epsilon, Z) = \delta(f, \epsilon, Z) \cup \{(\overline{q}, Z)\}$ für $Z \in \Gamma$ $\rightarrow$ **Alle** ϵ**-Übergänge von Endzuständen zu** q**s und** $\overline{q}$
  - $\delta'(\overline{q}, \epsilon, Z) = \{(\overline{q}, \epsilon)\}$ für $Z \in \Gamma'$ $\rightarrow$ **Übergang von** $\overline{q}$ **zu** $\overline{q}$ **zum Leeren des Kellers**



3.14 Leerer Keller PDA M $\rightarrow$ Endzustand PDA M'

- **Idee:**
  1. Es wird am Anfang Z_0' auf Keller geschrieben, damit der Keller nicht geleert wird
  2. Sobald M auf dem Keller Z_0' findet, muss er in den Endzustand gehen, somit ist der Keller am Ende nicht leer $\rightarrow$ M' **geht in den neuen Endzustand** f
- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$
- $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0', Z_0', \delta', F')$ mit $Q' = Q \uplus \{q_0', f\}$, $\Gamma' = \Gamma \uplus \{Z_0'\}$, $F' = \{f\}$ und
  - $\delta'(q_0', \epsilon, Z_0') = \{(q_0, Z_0 Z_0')\}$ $\rightarrow$ **Übergang von** q_0' **zu** q_0
  - $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ für $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $Z \in \Gamma$ $\rightarrow$ **Alle Übergänge zwischen** q**s**
  - $\delta'(q, \epsilon, Z_0') = \{(f, Z_0')\}$ für $q \in Q$, $f \in F'$ $\rightarrow$ **Übergang von** q **zu** f **beim Sehen von** Z_0'



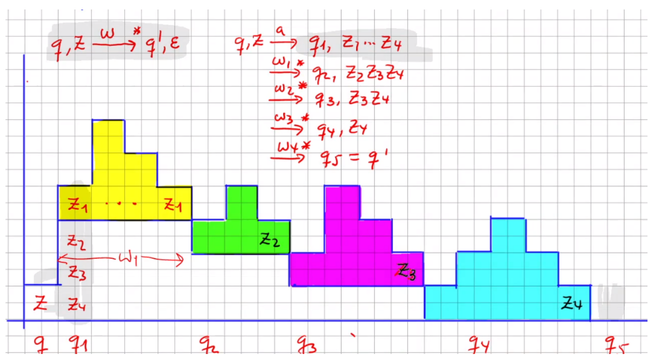
3.15 Erweiterungslemma

- $(q, u, \alpha) \rightarrow_M^n (q', u', \alpha') \Longrightarrow (q, uv, \alpha\beta) \rightarrow_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$
  - $q' \in Q$ ist der neue Zustand, den wir in n Schritten erreichen
  - $u' \in \Sigma^*$ ist der noch zu lesende Teil von der Eingabe u
  - $\alpha' \in \Gamma^*$ ist der veränderte Kellerinhalt durch das Lesen eines Teils vom Wort u, der ganz oben im Keller steht
  - $v \in \Sigma^*$ ist eine neue Eingabe, die mit u konkateniert wird
  - $\beta \in \Gamma^*$ ist der neue Kellerzeichenkette, die ganz unten im Keller steht und während der ganzen Berechnungen unverändert erhalten bleibt

- **Erweiterungslemma** sagt, dass man **den Kellerinhalt sowie die Eingabe erweitern** kann, indem man ganz unten im Keller oder ganz hinten in der Eingabe etwas hinzufügt, ohne die Eigenschaft zu zerstören, dass man **wieder in n gleichen Schritten die gleiche Konfiguration (plus das extra unberührtes Kellerinhalt und die Eingabe) erreichen** kann.

3.16 Zerlegungssatz

- **Zerlegungssatz** sagt, dass die Berechnung von einem Wort $(q, w, Z_{1\ldots k}) \to_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ mit $w = u_1 \ldots u_k$, $Z_i \in \Gamma^*$ **sich in k Teile zerlegen lässt**, indem man bei jeder Zerlegung **nur ein Teil** von w liest und zum Lesen **beliebig viele** PUSH- und POP-Operationen macht **ohne den Kellerteil von den folgenden Zerlegungen zu berühren (Erweiterungslemma)**.



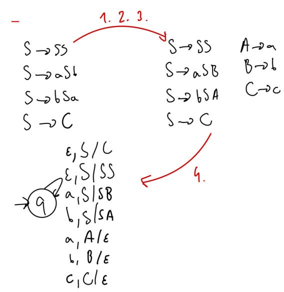
- Z_1 hat die Höhe 4, d.h. die Kellerzeichen Z_2, Z_3, Z_4 unten werden nicht berührt.

3.17 CFG → PDA

- Zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren, der mit leerem Keller akzeptiert, so dass $L_\epsilon(M) = L(G)$
- **Konstruktion:** Bringe alle Produktionen in die Form: $A \to bB_1 \ldots B_k$ mit $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$
  1. Füge für jedes Terminal $a \in \Sigma$ ein neues Nichtterminal X_a hinzu
  2. Ersetze alle as ausser dem ersten Terminalzeichen durch X_a in den Produktionen auf der rechten Seite
  3. Füge eine neue Produktion $X_a \to a$ hinzu
  4. Übersetze die Produktionen in Transitionen von PDA, die Schleifen über einen einzigen Zustand sind:
     - $S \to G$ zu $\epsilon, S/G$

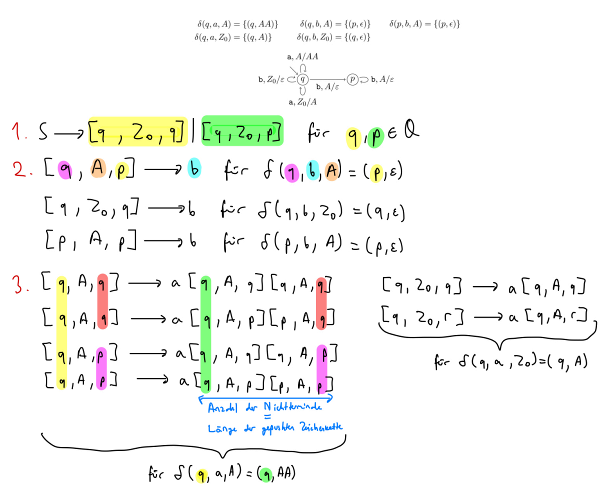
  - $B \to bSS$ zu $b, B/SS$
  - $A \to a$ zu $a, A/\epsilon$

- *Beispiel:*



3.18 PDA $\to$ CFG

- Zu jedem PDA M, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$
- **Konstruktion:**
  1. Für alle $q \in Q$ füge die Produktion $S \to [q_0, Z_0, q]$
  2. Für alle POP-Operationen $\delta(q, a, Z) = (q', \epsilon)$ füge die Produktion $[q, Z, q'] \to a$
  3. Für alle PUSH-Operationen $\delta(q, a, Z) = (r_0, Z_1 \dots Z_k)$ und für alle $r_1 \dots r_k$ füge die Produktion $[q, Z, r_k] \to a[r_0, Z_1, r_1][r_1, Z_2, r_2] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$
- *Beispiel:*



3.19 Deterministisches Kellerautomat (DPDA)

- Ein PDA ist **deterministisch** gdw. für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$ gilt $|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1$
- **NPDA** ist **mächtiger** als **DPDA**
- CFL ist **deterministisch** (DCFL) gdw. sie **von einem DPDA akzeptiert** wird
- Jede **reguläre Sprache** ist eine **CFL**
- Die vom leeren Keller akzeptierten DCFLs sind die Sprachen, die **vom Endzustand akzeptiert** werden und **präfixfrei** sind: Kein Wort in der Sprache ist die Präfix eines anderen Wortes in der Sprache
- Jede DCFL ist **nicht inhärent mehrdeutig**, d.h. sie wird von einer **nicht-mehrdeutigen Grammatik** erzeugt

3.20 Abschlusseigenschaften der CFLs

Seien L, L_1, $L_2 \subseteq \Sigma^*$ kontextfreie Sprachen, dann sind auch

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 L_2$
- L^*
- L^R
- $L_1 \times L_2$

3.21 Abschlusseigenschaften der DCFLs

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine deterministische kontextfreie Sprache, dann ist auch

- $\overline{L}$

4 Abschlusseigenschaften und Entscheidbarkeit

4.1 Abschlusseigenschaften

	$L_1 \cap L_2$	$L_1 \cup L_2$	$\overline{L}$	$L_1 \times L_2$	L^*	$L_1 L_2$	L^R
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja
CFL	nein	ja	nein	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein

4.2 Entscheidbarkeit

	Wort	**Leerheit**	**Äquivalenz**	**Schnitt**	**Endlichkeit**
DFA	ja	ja	ja	ja	ja
NFA	ja	ja	ja	ja	ja
CFG	ja	ja	ja	nein	ja
DPDA	ja	ja	nein	nein	ja

	Regularität	**Mehrdeutigkeit**
CFG	nein	nein
DPDA	ja	ja

5 Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit

5.1 Grundbegriffe der Berechenbarkeit

- **Intuitiver Begriff:** Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist **berechenbar**, wenn es **einen Algorithmus gibt**, der bei Eingabe $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$
  - **nach endlich vielen Schritten** mit Ergebnis $f(n_1, \ldots, n_k)$ **hält**, falls $f(n_1, \ldots, n_k)$ **definiert** ist
  - **nicht terminiert**, falls $f(n_1, \ldots, n_k)$ **nicht definiert** ist
- Funktion $f : A \to B$ ist
  - **total** gdw. $f(a)$ für alle $a \in A$ definiert ist
  - **partiell** gdw. $f(a)$ für beliebige oder keine $a \in A$ definiert ist
  - **echt partiell** gdw. sie nicht total ist
- **Jeder Algorithmus** berechnet eine **partielle Funktion**
  - *Beispiel 1:* Algorithmus *input*(n); *while true do*; berechnet die überall undefinierte partielle Funktion, d.h. $\emptyset \subset \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- *Beispiel 2:* $f(n) \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ als Ziffernfolge Anfangsstück} \\ & \text{der Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

  f ist berechenbar ($f(314) = 1$, $f(315) = 0$), denn es Algorithmen gibt, die π iterativ auf beliebig viele Dezimalstellen genau berechnet werden.
- *Beispiel 3:* $f(n) \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ als Ziffernfolge irgendwo in} \\ & \text{der Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

  Es ist unbekannt, ob f berechenbar ist. Wie stellt man fest, dass n nicht vorkommt, wenn der Dezimalbruchentwicklung nie terminiert?

- *Beispiel 4:* $f(n) \begin{cases} 1 & \text{falls 10 mal hintereinander Nullen in der Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

  f ist berechenbar, denn f ist entweder die konstante Funktion, die 1 für alle $n \geq 0$ zurückgibt, oder die Funktion, die 0 für alle $n \geq 0$ zurückgibt. Beide sind berechenbar.

  Das ist ein **nicht-konstruktiver Beweis:** Wir wissen, es gibt einen Algorithmus, der f berechnet, aber **wissen nicht, welcher**.

- Es gibt **nicht berechenbare** Funktionen $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$
  - Es gibt **abzählbar** viele Algorithmen, aber **überabzählbar** viele Funktionen in $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$
  - Menge M ist **abzählbar** falls es eine injektive Funktion $M \to \mathbb{N}$ gibt, Äquivalente Definitionen:
    * Entweder gibt es ein Bijektion $M \to \{0, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, oder eine Bijektion $M \to \mathbb{N}$
    * Es gibt eine Nummerierung der Elemente von M
  - Menge M ist **überabzählbar** wenn sie nicht abzählbar ist
  - **Zeige: Es gibt abzählbar viele Algorithmen**
    * Da Σ^* (falls Σ endlich) durch Nummerierung **abzählbar** ist und die **Algorithmen** nur **Wörter** sind, ist die **Menge der Algorithmen abzählbar**
  - **Zeige: Es gibt überabzählbar viele Funktionen** $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$
    * Wir nehmen an, dass die Menge der Funktionen abzählbar ist.
    * **Diagonalargument:**

	0	1	2	3	...
f_0	0	1	1	0	...
f_1	1	0	0	0	...
f_2	0	0	1	0	...
f_3	0	0	1	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

} Eingabewerte über $\mathbb{N}$

Ausgabewerte der Funktionen über $\{0,1\}$

Eine Funktion f, die nicht in der Tabelle ist: ¬Diagonale!

f	1	1	0	0	...

→ Diese Funktion vergisst man immer beim Zählen!

Widerspruch!

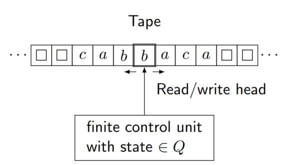
Formal: Sei $f(i) := 1 - f_i(i)$. Dann $f \neq f_i$ für alle i, da $f(i) \neq f_i(i)$. □

- Es gibt verschiedene Formalisierungen des Begriffs der Berechenbarkeit, wie Turing-Maschinen, λ-Kalkül, while-/goto-Programme usw. Sie sind alle **gleichmächtig**.

- **Church-Turing These:** Der formale Begriff der Berechenbarkeit mit Turing-Maschinen stimmt mit dem intuitiven Begriff der Berechenbarkeit überein.

5.2 Turingmaschine

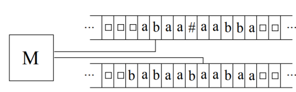
- Eine **Turingmaschine (TM)** ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \Box, F)$ so dass
  - Q, endliche Menge von **Zuständen**
  - Σ, endliches **Eingabealphabet**
  - Γ, endliches **Bandalphabet**, mit $\Sigma \subset \Gamma$
  - $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$, **(partielle) Übergangsfunktion**
  - $q_0 \in Q$, **Startzustand**
  - $\Box \in \Gamma \setminus \Sigma$, **Leerzeichen**
  - $F \subseteq Q$, Menge der **akzeptierenden** oder **Endzustände**
- **Annahme:** $\delta(q, a)$ ist **nicht definiert** für alle $q \in F$ und $a \in \Gamma$
- Eine **nichtdeterministische Turingmaschine** hat eine Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, N\})$, e.g. $\delta(q, first(\beta)) \ni (q', c, D))$
- **Bedeutung von $\delta(q, a) = (q', b, D)$:** Wenn sich M im Zustand q befindet und auf dem Band a liest, so geht M im nächsten Schritt in den Zustand q' über, überschreibt a mit b und bewegt danach den Schreib-/Lesekopf nach **rechts** (falls $D = R$), nach **links** (falls $D = L$), oder **nicht** (falls $D = N$).



- Eine **Konfiguration** einer Turingmaschine ist ein Tripel $(\alpha, q, \beta) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$, dies modelliert
  - **Bandinhalt:** $\ldots\Box\alpha\beta\Box\ldots$
  - **Zustand:** q
  - **Kopf auf dem ersten Zeichen von** $\beta\Box$
- **Startkonfiguration** der Turingmaschine bei Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist (ϵ, q_0, w)
- Die **Berechnung der TM** M wird als Relation $\to_M$ auf Konfigurationen formalisiert. Falls $\delta(q, first(\beta)) = (q', c, D)$:

$$(\alpha, q, \beta) \to_M \begin{cases} (\alpha, q', c\ rest(\beta)) & \text{falls } D = N \\ (\alpha c, q', rest(\beta)) & \text{falls } D = R \\ (butlast(\alpha), q', last(\alpha)\ c\ rest(\beta)) & \text{falls } D = L \end{cases}$$

- Eine Turingmaschine M **akzeptiert die Sprache** $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F, \alpha, \beta \in \Gamma^*.\ (\epsilon, q_0, w) \rightarrow_M^* (\alpha, q, \beta)\}$
- Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heisst **Turing-berechenbar** gdw. es eine Turingmaschine M gibt, so dass für alle $n_1, \ldots, n_k, m \in \mathbb{N}$ gilt
  - $f(n_1, \ldots, n_k) = m \Leftrightarrow \exists r \in F.\ (\epsilon, q_0, bin(n_1)\#bin(n_2)\# \ldots \#bin(n_k)) \rightarrow_M^* (\Box \ldots \Box, r, bin(m)\Box \ldots \Box)$
  - $bin(n)$ ist die Binärdarstellung der Zahl n
- Eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ heisst **Turing-berechenbar** gdw. es eine Turingmaschine M gibt, so dass für alle $u, v\Sigma^*$ gilt
  - $f(u) = v \Leftrightarrow \exists r \in F.\ (\epsilon, q_0, u) \rightarrow_M^* (\Box \ldots \Box, r, v\Box \ldots \Box)$
- **Halten/Terminieren von TM:**
  - Eine TM **hält** wenn sie eine Konfiguration $(\alpha, q, a\beta)$ erreicht und $\delta(q, a)$ nicht definiert oder (bei nichtdeterministischer TM) $\delta(q, a) = \emptyset$
  - Nach Annahme **hält eine TM immer, wenn sie einen Endzustand erreicht**.
  - Eine TM kann aber auch halten, **bevor sie einen Endzustand erreicht**.
- Zu jeder nichtdeterministischen TM N gibt es eine deterministische TM M mit $L(N) = L(M)$
- Die von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen sind genau die Typ-0-Sprachen der Chomsky Hierarchie.
- **k-Band-Turingmaschine:**



Die k Köpfe sind völlig unabhängig voneinander:

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$$

- Jede k-Band-TM kann effektiv durch eine 1-Band-TM simuliert werden $\Leftrightarrow$ n Schritte von M lassen sicht durch $O(n^2)$ Schritte von M' simulieren
- Seien $M_i = (Q_i, \Sigma, \Gamma, \delta_i, q_i, \Box, F_i),\ i = 1, 2$
  - **Sequentielle Komposition:**
    - $M := \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow$
    - $M = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \delta, q_1, \Box, F_2)$ mit $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset)$

  - * $\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(f_1, a) \mapsto (q_2, a, N) \mid f_1 \in F_1, a \in \Gamma_1\} \to$ Wenn man im Zustand f_1 ist und a liest dann kommt man zum Anfangszustand von M_2 und macht weiter wie M_2
- **Fallunterscheidung:** Sind f_1 und f_2 Endzustände von M
  - * $M \xrightarrow{f_1} M_1 \to$
    $\downarrow f_2$
    M_2
    $\downarrow$
  - * M macht eine Fallunterscheidung, indem sie entweder von f_1 zu M_1 oder von f_2 zu M_2 übergeht
  - * "Band $i = 0?$"-TM: ja und $nein$ sind Endzustände
    - · $\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$
    - · $\delta(q_0, \Box) = (ja, \Box, L)$
    - · $\delta(q_0, a) = (nein, a, N)$ für $a \neq 0, \Box$
- **Schleife:** Analog zur Fallunterscheidung
  - * Band $i = 0?$ $\xrightarrow{ja}$
    $\uparrow\downarrow$ $nein$
    M
  - * Diese TM verhält sich wie *while* Band $i \neq 0$ *do* M

5.3 WHILE-Programme

- Strukturierte Programme mit *while*-Schleifen
- **Syntax von WHILE-Programmen:**
  - $x_i = x_j + n$
  - $x_i = x_j - n$
  - $x_i = x_j$
  - $x_i = n$
  - $x_i = x_j + x_k$ mit $i \neq k$
  - $x_i = x_j * x_k$ mit $i \neq j, k$
  - DIV, MOD
  - $IF\ x = n\ THEN\ ELSE\ END$
  - $WHILE\ x_k \neq 0\ DO\ END$
- Eine **totale Funktion** $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist **WHILE-berechenbar** gdw. es ein **WHILE-Programm** P gibt, so dass für alle $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$:

  P, gestartet mit $n_1, \ldots, n_k$ in $x_1, \ldots, x_k$ terminiert mit $f(n_1, \ldots, n_k)$ in x_0 (Endergebnis)

- Eine **partielle Funktion** $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist **WHILE-berechenbar** gdw. es ein **WHILE-Programm** P gibt, so dass für alle $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$:

  P, gestartet mit $n_1, \ldots, n_k$ in $x_1, \ldots, x_k$:

  - **terminiert** mit $f(n_1, \ldots, n_k)$ in x_0, falls $f(n_1, \ldots, n_k)$ **definiert** ist
  - **terminiert nicht**, falls $f(n_1, \ldots, n_k)$ **undefiniert** ist
- Jede WHILE-berechenbare Funktion ist auch Turing-berechenbar $\Leftrightarrow$ Jede Programmvariable wird auf einem eigenen Band gespeichert, diese mehrband-TM wird dann von 1-Band-TM simuliert werden
- Jedes WHILE-Programm ist zu einem WHILE-Programm mit genau einer WHILE-Schleife äquivalent
- *Beispiel:*

```
while x1 ≠ 0 do
    x2 := x1 MOD 2
    x1 := x1 DIV 2
    if x1 = 0 then
        x0 := 1
    else
        if x2 = 0 then
            x0 = x0 ^2
        else
            x0 := 0
            x1 := 0
        end
    end
end
```

5.4 GOTO-Programme

- Assembler
- Eine Sequenz von markierten Anweisungen: $M_1 : A_1, \ldots, M_k : A_k$
- **Syntax (Anweisungen) von GOTO-Programmen:**
  - $x_i = x_j + n$
  - $x_i = x_j - n$
  - $GOTO\ M_i$
  - $IF\ x_i = n\ GOTO\ M_j$
  - $HALT$
- Jedes WHILE-Programm kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden
- Jedes GOTO-Programm kann durch ein WHILE-Programm simuliert werden

- WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit sind äquivalent
- Jede TM kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden
- *Beispiel:*

$$
\begin{array}{rl}
M_1: & x_0 := x_0 + 1 \\
M_2: & \textbf{if } x_1 = 1 \textbf{ goto } M_{16} \\
M_3: & x_2 := x_1 \\
M_4: & x_3 := 0 \\
M_5: & x_4 := 4 \\
M_6: & \textbf{if } x_2 = 1 \textbf{ goto } M_{12} \\
M_7: & \textbf{if } x_2 = 0 \textbf{ goto } M_{14} \\
M_8: & x_2 := x_2 - 2 \\
M_9: & x_3 := x_3 + 1 \\
M_{10}: & x_4 := x_4 + 6 \\
M_{11}: & \textbf{goto } M_6 \\
M_{12}: & x_1 := x_4 \\
M_{13}: & \textbf{goto } M_1 \\
M_{14}: & x_1 := x_3 \\
M_{15}: & \textbf{goto } M_1 \\
M_{16}: & \texttt{HALT}
\end{array}
$$

5.5 Unterscheidbarkeit des Halteproblems

- **Ziel:** Es ist unentscheidbar ob ein Programm terminiert
- Menge A ($\subseteq \mathbb{N}$ oder Σ^*) ist **entscheidbar** gdw. ihre **charakteristische Funktion**

  $$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

  berechenbar ist
- Ein **Prädikat (Eigenschaft)** $P(x)$ ist **entscheidbar** gdw. die **Sprache** $L = \{x \mid P(x)\}$ **entscheidbar** ist
- Entscheidbare Mengen sind **abgeschlossen unter Komplement** $\rightarrow$ A entscheidbar, dann auch $\overline{A}$
- Die zu einem Wort $w \in \{0,1\}^*$ gehörige TM M_w ist

  $$M_w = \begin{cases} M & \text{falls } w \text{ eine Kodierung von } M \text{ ist} \\ \hat{M} & \text{sonst (eine beliebige feste TM)} \end{cases}$$

- $M[w]$, TM M mit Eingabe w
- $M[w]\downarrow$, M **hält/terminiert** mit der Eingabe w

5.5.1 Spezielles Halteproblem

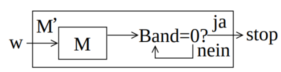
- **Gegeben:** Ein Wort $w \in \{0,1\}^*$
- **Problem:** Hält M_w bei Eingabe w?

- Als Menge: $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[w]\downarrow\}$
- **Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar**
- **Beweis durch Widerspruch:**

  Annahme: K ist entscheidbar, d.h. χ_K ist berechenbar. $\Leftrightarrow$ Es gibt eine TM M, die für die TM M_w mit der Eingabe w entscheidet, ob M_w hält.
  Dann ist auch folgende Funktion f berechenbar:

  $$f(w) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \chi_K(w) = 0 \text{ (a)} \\ \perp & \text{falls } \chi_K(w) = 1 \text{ (b)} \end{cases}$$

  Dann berechnet TM M die Funktion χ_K, so berechnet die folgende TM M' die Funktion f:

  Dann gibt es eine TM $M' = M_{w'}$ mit w', die so funktioniert:

  1. M' ruft M auf und gibt ihr die Eingabe w.
  2. Sagt M, dass M_w mit der Eingabe w **nicht hält**, dann **hält** M' und gibt 0 zurück. (a)
  3. Sagt M, dass M_w mit der Eingabe w **hält**, dann tritt M' in eine endlose Schleife ein, also **hält nicht**. (b)

  $$\begin{aligned} f(w') = \perp &\Leftrightarrow \chi_K(w') = 1 && \text{(Def. von } f) \\ &\Leftrightarrow w' \in K && \text{(Def. von } \chi_K) \\ &\Leftrightarrow M_{w'}[w']\downarrow && \text{(Def. von } K) \\ &\Leftrightarrow M'[w']\downarrow && (M_{w'} = M') \\ &\Leftrightarrow f(w') \neq \perp && (M' \text{ berechnet } f) \end{aligned}$$

  Falls M sagt, dass M' mit der Eingabe w' nicht hält, dann betrachten wir so eine Situation (2.): M' gibt M die Eingabe w'. M entscheidet, dass M' nicht hält. Somit hält M' und gibt 0 zurück.

  Widerspruch: $f(w') = \perp \Leftrightarrow f(w') \neq \perp$, die Annahme ist damit falsch.

  In anderen Worten: Nach M, hält M' mit der Eingabe w' nicht, obwohl M' nach ihrer Konstruktion hält.

5.5.2 Allgemeines Halteproblem

- **Gegeben:** Wörter $w, x \in \{0,1\}^*$
- **Problem:** Hält M_w bei (irgendeiner) Eingabe x?

- Als Menge: $H = \{w\#x \mid M_w[x]\downarrow\}$
- **Das allgemeine Halteproblem ist nicht entscheidbar**
- **Beweis:** Wäre das allgemeine Halteproblem H entscheidbar, dann trivialerweise auch das spezielle Halteproblem K:

  $\chi_K(w) = \chi_H(w, w) \Leftrightarrow$ Da es für M_w mit der Eingabe w keine TM M gibt, die entscheidet, ob M_w hält; kann es auch die TM M nicht geben, die für irgendeine M_w bei irgendeiner Eingabe x entscheidet

5.6 Entscheidbarkeitsreduktion

- Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ ist **reduzierbar** auf eine Menge $B \subseteq \Gamma^*$ gdw. es eine **totale**, **korrekte** und **berechenbare** Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt mit

  $\forall w \in \Sigma^*.\ w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$

  Wir schreiben $A \leq B$.
- **Intuition:**
  - B ist mindestens so schwer zu lösen wie A
  - Ist A unlösbar, dann auch B
  - Ist B lösbar, dann erst recht A
- Falls $A \leq B$ und B ist entscheidbar, so ist A entscheidbar