

Einführung in die Theoretische Informatik

Zusammenfassung

Efe Kamasoglu

June 16, 2023

1 Grundbegriffe und Grammatiken

1.1 Grundbegriffe

- Alphabet Σ , endliche Menge
- Wort/String w über Σ , endliche Menge von Zeichen aus Σ
- $|w|$, Länge des Wortes w
- ϵ , das leere Wort mit der Länge 0
- Wörter u und v , uv ist ihre Konkatenation
- Wort w , w^n definiert durch:
 - $w^0 = \epsilon$
 - $w^{n+1} = ww^n$
 - Beispiel: $(ab)^3 = ababab$
- Σ^* , Menge aller Wörter über Σ
- Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$, formale Sprache
 - Beispiel: $\emptyset, \{\epsilon\}, L_1 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

1.2 Operationen auf Sprachen

Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$

- **Konkatenation:** $AB = \{uw \mid u \in A \wedge w \in B\}$
 - Beispiel: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
 - $A^n = \{w_1 \dots w_n \mid w_1, \dots, w_n \in A\} = \underbrace{A \dots A}_n$
 - $A^0 = \{\epsilon\}, A^{n+1} = AA^n$
 - $A^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0 \wedge w_1, \dots, w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
 - * A^* enthält ϵ immer
 - $A^+ = AA^* = \bigcup_{n \geq 1} A^n$
 - * $\epsilon \in A$ gdw. $\epsilon \in A^+$
- **Kartesisches Produkt:** $A \times B$
 - Beispiel: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- **Rechenregeln über Sprachen:**
 - Für alle A : $\epsilon \in A^*$
 - $\epsilon \notin \emptyset$

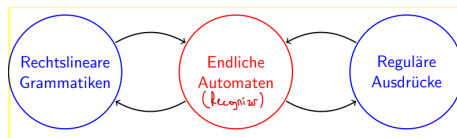
- $\emptyset^* = \{\epsilon\} = \emptyset^0$
- $A\{\epsilon\} = \{\epsilon\}A = A$
- $A\emptyset = \emptyset A = \emptyset$
- $A \times \emptyset = \emptyset$
- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$
- $A(B \cap C) = AB \cap AC$ gilt i.A. **nicht**
- $A(B \setminus C) = AB \setminus AC$ gilt i.A. **nicht**
- $A^*A^* = (A^*)^* = A^*$

1.3 Grammatiken

- Grammatik, 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$
 - V , endliche Menge von **Nichtterminalen**
 - Σ , endliche Menge von **Terminalen**, disjunkt von V
 - $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$, Menge von **Produktionen**
 - $S \in V$, **Startsymbol**
- Eine Grammatik G induziert eine **Ableitungsrelation** \rightarrow_G auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:
 - $\alpha \rightarrow \alpha'$ gdw. es eine Regel $\beta \rightarrow \beta'$ in P und Wörter α_1, α_2 gibt, so dass $\alpha = \alpha_1\beta\alpha_2 \wedge \alpha' = \alpha_1\beta'\alpha_2$
- Eine **Sequenz** $\alpha_1 \rightarrow_G \alpha_2 \rightarrow_G \dots \rightarrow_G \alpha_n$ ist eine **Ableitung** von α_n aus α_1 .
- Wenn $\alpha_1 = S$ und $\alpha_n \in \Sigma^*$, dann **erzeugt** G das Wort α_n . Erzeugte Wörter bestehen nur aus **Terminalzeichen**.
- Die Sprache von G ist die Menge aller Wörter (Σ^*), die von G erzeugt werden: $L(G)$
- **Chomsky Hierarchie:** Eine Grammatik G ist vom
 - **Typ 0** immer
 - **Typ 1** falls für jede Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ ausser $S \rightarrow \epsilon$ gilt $|\alpha| \leq |\beta|$
 - **Typ 2** falls G vom Typ 1 ist und für jede Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ gilt $\alpha \in V$
 - **Typ 3** falls G vom Typ 2 ist und für jede Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ ausser $S \rightarrow \epsilon$ gilt $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$
 - Typ 3 \subset Typ 2 \subset Typ 1 \subset Typ 0
 - $L(\text{Typ 3}) \subset L(\text{Typ 2}) \subset L(\text{Typ 1}) \subset L(\text{Typ 0})$

- **Grammatiken und Sprachklassen:**
 - **Typ 3, Rechtslineare Grammatik, Reguläre Sprachen**
 - **Typ 2, Kontextfreie Grammatik, Kontextfreie Sprachen**
 - Typ 1, Kontextsensitive Grammatik, Kontextsensitive Sprachen
 - Typ 0, Phrasenstrukturgrammatik, Rekursiv aufzählbare Sprachen

2 Reguläre Sprachen



2.1 Rechtslineare Grammatik

$X, Y \in V$, Produktionen folgender Gestalt:

- $X \rightarrow aY$
- $X \rightarrow a$
- $X \rightarrow Y$
- $X \rightarrow \epsilon$, nur dann wenn X Startsymbol ist

2.2 Deterministische endliche Automaten (DFA)

- DFA, 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
 - Q , endliche Menge von **Zuständen**
 - Σ , endliches **Eingabealphabet**
 - $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$, totale **Übergangsfunktion**
 - $q_0 \in Q$, ein **Startzustand**
 - $F \subseteq Q$, endliche Menge von **Endzuständen**
- Die von DFA M **akzeptierte** Sprache ist $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$, wobei $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ induktiv definiert durch:
 - $\delta(q, a)$, Zustand, den man aus q mit einem **Zeichen** a erreicht
 - $\hat{\delta}(q, w)$, Zustand, den man aus q mit einem **Wort** w erreicht
 - $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$
 - $\hat{\delta}(q, aw) = \hat{\delta}(\delta(q, a), w)$ für $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$

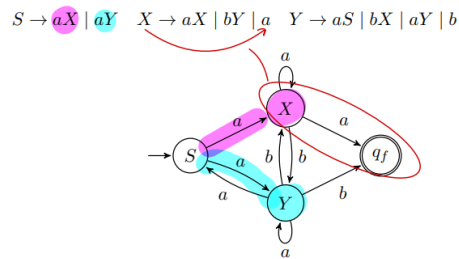
2.3 Nicht-Deterministische endliche Automaten (NFA)

- NFA, 5-Tupel $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
 - Q, Σ, q_0 und F wie beim DFA
 - $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$, wobei $\mathcal{P}(Q)$ Menge aller Teilmengen von Q
- Die von NFA N **akzeptierte** Sprache ist $L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset\}$, wobei
 - $\bar{\delta}(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$, Menge aller Zustände, die man von einem Zustand in S aus mit einem **Zeichen** a erreicht
 - $\hat{\delta}(S, w)$, Menge aller Zustände, die man von einem Zustand in S aus mit einem **Wort** w erreicht
 - $\bar{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$
 - $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

2.4 Rechtslineare Grammatik \rightarrow NFA

1. Füge einen Zustand für jedes Nichtterminal, Startsymbol wird zum Startzustand
2. Füge einen Endzustand für jedes Terminal, falls es $S \rightarrow \epsilon$ gibt, dann Startzustand ist auch ein Endzustand
3. Für jede Kombination $Y \rightarrow aX$ füge eine Kante von Y nach X mit dem Zeichen a
4. Für jede Kombination $Y \rightarrow a$ füge eine Kante von Y nach dem Endzustand mit dem Zeichen a

Beispiel:

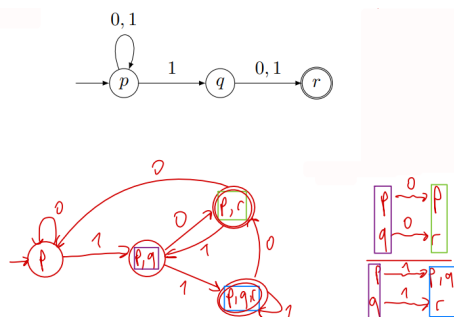


2.5 NFA \rightarrow DFA, Potenzmengenkonstruktion

Für jede NFA mit n Zuständen kann der DFA max bis zu 2^n Zustände haben.

1. Für alle Zustände wiederhole (beginnend mit Startzustand q_0):
 - (a) Bestimme wohin man mit welcher Kante geht
 - (b) Erzeuge neue Zustände durch Vereinigung der auf der rechten Seite stehenden Zuständen mit der selben Kanten, verbinde diese
 - (c) **Mindestens einer von den Zuständen**, die in dem neuen Zustand sind, ist ein **Endzustand** \rightarrow der neue Zustand wird ein Endzustand

Beispiel:

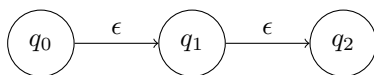


2.6 ϵ -NFA

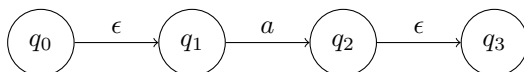
- Ein NFA mit ϵ -Übergängen ist ein NFA mit $\epsilon \notin \Sigma$ und $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

2.7 ϵ -NFA \rightarrow NFA

1. Lösche überflüssige Zustände:



2. Verbinde die Zustände in der Form mit einer einzigen Kante:



wird zu



3. Lösche nicht erreichbare Zustände
4. Falls ϵ in der Sprache ist, dann mache den Startzustand Endzustand

2.8 Reguläre Ausdrücke (REs)

- Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert:
 - \emptyset
 - ϵ
 - Für jedes $a \in \Sigma$
 - Wenn α, β RE, auch:
 - $\alpha\beta$
 - $\alpha \mid \beta = \alpha + \beta$
 - α^*
- $*$, Kleene'sche Iteration
- Für RE γ ist die Sprache induktiv definiert:
 - $L(\emptyset) = \emptyset$
 - $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
 - $L(a) = \{a\}$
 - $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
 - $L(\alpha \mid \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
 - $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$
- $\alpha \equiv \beta$ gdw. $L(\alpha) = L(\beta)$
- **Rechenregeln über REs:**
 - **Null und Eins Lemma:**
 - $\emptyset \mid \alpha \equiv \alpha \mid \emptyset \equiv \alpha$
 - $\emptyset\alpha \equiv \alpha\emptyset \equiv \emptyset$
 - $\epsilon\alpha \equiv \alpha\epsilon \equiv \alpha$
 - $\emptyset^* \equiv \epsilon$
 - $\epsilon^* \equiv \epsilon$
 - **Assoziativität:**
 - $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma)$
 - $\alpha(\beta\gamma) \equiv (\alpha\beta)\gamma$
 - **Kommutativität:**
 - $\alpha \mid \beta \equiv \beta \mid \alpha$
 - **Distributivität:**
 - $\alpha(\beta \mid \gamma) \equiv \alpha\beta \mid \alpha\gamma$
 - $(\beta \mid \gamma)\alpha \equiv \beta\alpha \mid \gamma\alpha$

– **Idempotenz:**

$$- \alpha \mid \alpha \equiv \alpha$$

• **Stern Lemma:**

$$- \epsilon \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$$

$$- \alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$$

$$- (\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$$

2.9 Strukturelle Induktion für REs

Um zu beweisen, dass eine Eigenschaft $P(r)$ für alle regulären Ausdrücke gilt:

1. Zeige $P(\emptyset)$
2. Zeige $P(\epsilon)$
3. Zeige $P(a)$ für alle $a \in \Sigma$
4. Unter der Annahme $P(\alpha)$ und $P(\beta)$ (I.H.), zeige $P(\alpha\beta)$
→ verwende $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
5. Unter der Annahme $P(\alpha)$ und $P(\beta)$ (I.H.), zeige $P(\alpha \mid \beta)$
→ verwende $L(\alpha \mid \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
6. Unter der Annahme $P(\alpha)$ (I.H.), zeige $P(\alpha^*)$
→ verwende $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$

Beispiel: $\text{empty}(r)$ entscheidet, ob $L(r) = \emptyset$. Zeige die Korrektheit der Konstruktion:

(a) **Konstruktion**

- $\text{empty}(\emptyset) = \text{true}$
- $\text{empty}(a) = \text{false}$
- $\text{empty}(\epsilon) = \text{false}$
- $\text{empty}(\alpha\beta) = \text{empty}(\alpha) \vee \text{empty}(\beta)$
- $\text{empty}(\alpha \mid \beta) = \text{empty}(\alpha) \wedge \text{empty}(\beta)$
- $\text{empty}(\alpha^*) = \text{false}$

Korrektheit Wir zeigen $L(r) = \emptyset \iff \text{empty}(r)$ mittels struktureller Induktion.

Fall $r = \emptyset, r = a, r = \epsilon$. Trivial.

Fall $r = \alpha^*$.

Wir haben $\epsilon \in L(\alpha^*) \neq \emptyset \iff \neg \text{empty}(\alpha^*)$. Die Aussage gilt per Definition von empty .

Fall $r = \alpha\beta$.

Als Induktionshypothesen erhalten wir $L(\alpha) = \emptyset \iff \text{empty}(\alpha)$ und $L(\beta) = \emptyset \iff \text{empty}(\beta)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} L(\alpha\beta) = \emptyset &\iff L(\alpha)L(\beta) = \emptyset \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \vee L(\beta) = \emptyset \\ &\stackrel{\text{I.H.}}{\iff} \text{empty}(\alpha) \vee \text{empty}(\beta) = \text{empty}(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Fall $r = \alpha \mid \beta$.

Es gelten dieselben Induktionshypothesen wie im vorherigen Fall.

Wir haben

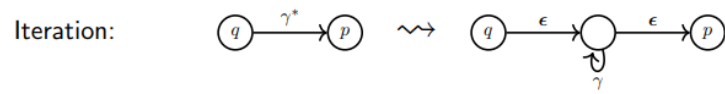
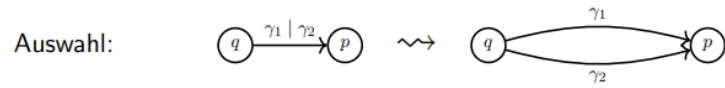
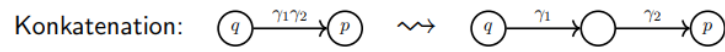
$$\begin{aligned} L(\alpha \mid \beta) = \emptyset &\iff L(\alpha) \cup L(\beta) = \emptyset \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \wedge L(\beta) = \emptyset \\ &\stackrel{\text{I.H.}}{\iff} \text{empty}(\alpha) \wedge \text{empty}(\beta) = \text{empty}(\alpha \mid \beta). \end{aligned}$$

2.10 RE \rightarrow ϵ -NFA

1. Wende folgende Ersetzungsregeln an

$$\begin{array}{lll} \gamma \emptyset \rightsquigarrow \emptyset & \gamma \mid \emptyset \rightsquigarrow \gamma & \emptyset^* \rightsquigarrow \epsilon \\ \emptyset \gamma \rightsquigarrow \emptyset & \emptyset \mid \gamma \rightsquigarrow \gamma & \end{array}$$

2. Wende folgende Transformationsregeln an



Beispiel:

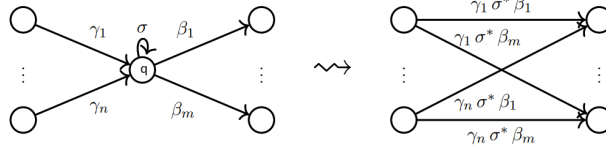


2.11 ϵ -NFA \rightarrow RE

1. Hat Startzustand q_1 eingehende Übergänge, füge einen neuen Startzustand q_0 mit einem ϵ -Übergang nach q_1
2. Füge einen neuen Endzustand q_3 und ϵ -Übergänge nach q_3 von allen Endzuständen (q_2 in diesem Beispiel)



3. Wähle ein Zustand q , der weder Start- noch Endzustand ist
4. Eliminiere q , wende dabei folgende Regeln:



Beispiel:



2.12 Ardens Lemma

- Sind A, B, X Sprachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt:

$$X = AX \cup B \implies X = A^*B$$

- Sind α, β, X REs mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt:

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \implies X \equiv \alpha^* \beta$$

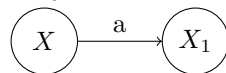
• **Bemerkungen:**

- $X \equiv X\alpha \mid \beta \implies X \equiv \beta\alpha^*$
- $X \equiv \alpha X \mid \beta$ für $\epsilon \in L(\alpha)$
 - * hat **keine eindeutige Lösung**: jede Sprache $B \subseteq X$ ist Lösung
 - * *Beispiel*: für $\alpha = \epsilon$ und $\beta = b$ kann $X = b$ oder $X = a \mid b$ oder $X = aba \mid b$
- $X \equiv X \mid aX$
 - * hat **keine eindeutige Lösung**: $X = \emptyset$ oder $X = \Sigma^*$ oder $X = a^*$
- $X \equiv \alpha X$ für $\epsilon \notin L(\alpha)$
 - * hat **eine eindeutige Lösung**: $X = \emptyset$
- $X \equiv \alpha X$ für $\epsilon \in L(\alpha)$
 - * hat **keine eindeutige Lösung**: $X = \Sigma^*$ oder $X = ab^*a$
- $X \equiv aXb \mid \epsilon$
 - * hat **keine reguläre Lösung**: $X = L$ für $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$
- $X \equiv abX \mid \epsilon$
 - * hat **eine eindeutige Lösung**: $X = (ab)^* \epsilon = (ab)^*$

2.13 FA \rightarrow RE mittels Ardens Lemma

1. FA als Gleichungssystem schreiben

- für jeden Endzustand X_f füge $X_f \equiv \epsilon$ ein
- für jeden Zustand X mit



machte $X \equiv aX_1$

2. Gleichungen einsetzen und damit eliminieren

3. Rechenregeln über REs und Ardens Lemma verwenden

2.14 Konversionen bezüglich regulärer Sprachen



RE \rightarrow ϵ -NFA: RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände

ϵ -NFA \rightarrow NFA: $Q \rightsquigarrow Q$

NFA \rightarrow DFA: n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände

NFA \rightarrow RE: n Zustände \rightsquigarrow RE der Länge $O(3^n)$

2.15 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen, dann sind auch

- $L_1 L_2$
- $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1 \setminus L_2$
- \bar{L} bzw. $\Sigma^* \setminus L$
- L^*
- L^R (Spiegelung von L)

2.16 Komplementierung \bar{L} bezüglich FAs

- **Für DFAs:** Vertauschen von Endzuständen und Nicht-Endzuständen
- **Für NFAs:** funktioniert das Vertauschen **nicht**

2.17 Schnitt zweier DFAs, Produktkonstruktion

- Sind M_1 und M_2 DFAs. Dann ist der **Produkt-Automat** M mit $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.
- **Produktkonstruktion für M_1 und M_2 :**
 1. Erzeuge einen neuen Startzustand aus den Startzuständen der M_1 und M_2
 2. Bestimme wohin man mit welcher Kante geht
 3. Erzeuge neue Zustände durch Vereinigung der auf der rechten Seite stehenden Zuständen mit der selben Kanten, verbinde diese
 4. **Alle Zustände**, die in dem neuen Zustand sind, sind **Endzustände** \rightarrow der neue Zustand wird ein Endzustand

2.18 Vereinigung zweier DFAs

- Sind M_1 und M_2 DFAs. Dann ist M mit $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.
- **Konstruktion für M_1 und M_2 :** Gleich wie die Produktkonstruktion bis auf 4.
 4. **Mindestens einer von den Zuständen**, die in dem neuen Zustand sind, ist ein **Endzustand** \rightarrow der neue Zustand wird ein Endzustand

2.19 Pumping Lemma für reguläre Sprachen

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass
 1. $v \neq \epsilon$
 2. $|uv| \leq n$
 3. $\forall i \geq 0. uv^i w \in L$
- Um zu zeigen, dass eine Sprache **nicht regulär** ist \rightarrow **Regulärität** mit Pumping Lemma zu zeigen **nicht möglich**
- Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt
 \rightarrow regulär \subset Pumping Lemma gilt \subset alle Sprachen
- Beispiel: $L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$

Angenommen L sei regulär.

Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L .

Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Sei uvw eine Zerlegung von z mit $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$.

Zeige, dass $uv^i w \notin L$ für den Fall $i = 2$ gilt:

$$n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Da es keine Quadratzahl zwischen n^2 und $(n+1)^2$ geben kann, ist $uv^2w \notin L$, damit ist L nicht regulär.

2.20 Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

- **Wortproblem:** Gegeben w und D , gilt $w \in L(D)$?
 - für DFA M , in $O(|w| + |M|^1)$ entscheidbar
 - für NFA N , in $O(|Q|^2|w| + |N|)$ entscheidbar
- **Leerheitsproblem:** Gegeben D , gilt $L(D) = \emptyset$?
 - für DFA M , in $O(|Q||\Sigma|)$ entscheidbar
 - für NFA N , in $O(|Q|^2|\Sigma|)$ entscheidbar

¹Konstante für die Entscheidung, ob der Zustand den wir am Ende erreichen, ein Endzustand ist

- **Endlichkeitsproblem:** Gegeben D , ist $L(D)$ endlich?
 - für DFA und NFA entscheidbar
 - $L(M) = \infty$ gdw. vom Startzustand aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist



- **Äquivalenzproblem:** Gegeben D_1 und D_2 , gilt $L(D_1) = L(D_2)$?
 - schaue, ob $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)} = \emptyset$ und $\overline{L(M_1)} \cap L(M_2) = \emptyset$ gelten
 - für DFAs, in $O(|Q_1||Q_2||\Sigma|)$ entscheidbar
 - für NFA N , in $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ entscheidbar (bei fixem Σ)

2.21 Minimierung von FAs

- Zustände p und q sind **unterscheidbar**, wenn $\exists w \in \Sigma^*$ mit $\hat{\delta}(p, w) \in F$ und $\hat{\delta}(q, w) \notin F$ oder umgekehrt
- Zustände p und q sind **äquivalent**, wenn $\forall w \in \Sigma^*$ mit $\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F$
- Gilt $p \in F$ und $q \notin F$, dann sind p und q unterscheidbar
- Sind $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidbar, dann auch p und q

2.22 Minimierungsalgorithmus für DFAs

1. Konstruiere die Treppe $\forall q \in Q$
2. Markiere Endzustände und Nichtendzustände mit einem ϵ
3. Für alle unmarkierten Paare (q, p) : Falls $(\delta(q, a), \delta(p, a))$ markiert, markiere das Paar (q, p) mit a
 - (a) Falls es b im Kästchen von $(\delta(q, a), \delta(p, a))$ gibt, dann markiere das Paar (q, p) mit ab
4. Für alle unmarkierten Paare (q, p) : Schmelze q und p zusammen, evtl. markiere das Paar mit $=$

Beispiel:



2.23 Äquivalenz von Zuständen eines DFAs

- **Äquivalenzklasse:** $[p]_{\equiv_M} = \{q \mid p \equiv_M q\}$, Menge der Zustände, die mit p äquivalent sind
- **Quotientenmenge:** $Q/\equiv_M = \{[p]_{\equiv_M} \mid p \in Q\}$, Menge der Äquivalenzklassen
- $p \equiv_M q \Leftrightarrow L_M(p) = L_M(q)$
 - $L_M(q) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q, w) \in F\}$, Sprache vom Zustand q
 - Zwei Zustände sind äquivalent wenn sie die gleiche Sprache erkennen
 - **Fakt:** $|Q/\equiv_M| = \text{Anzahl der Sprachen, die von Zuständen von } M \text{ erkannt werden}$
- **Quotientenautomat:** $M/\equiv = (Q/\equiv, \Sigma, \delta', [q_0]_{\equiv}, F/\equiv)$ mit $\delta'([p]_{\equiv}, a) = [\delta(p, a)]_{\equiv}$
- Quotientenautomat M/\equiv ist ein **minimaler DFA** für $L(M)$
- $L(M/\equiv) = L(M)$

2.24 Residualsprache, Äquivalenz von Wörtern

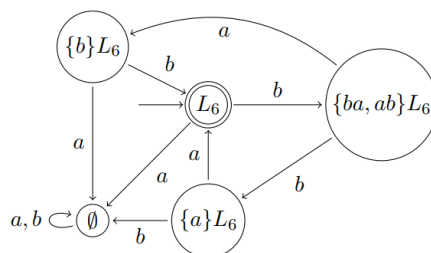
- $L^w = \{z \in \Sigma^* \mid wz \in L\}$, Residualsprache von L bzgl. $w \in \Sigma^*$
- $u \equiv_L v \Leftrightarrow L^u = L^v$
 - Zwei Wörter sind äquivalent wenn sie die gleiche Residualsprache haben
 - **Fakt:** $|\Sigma^*/\equiv_L| = \text{Anzahl der Residualsprachen von } L$
- **Fakt:** $|Q/\equiv_M| = |\Sigma^*/\equiv_L|$, Anzahl der Residualsprachen entspricht der Anzahl der Zustände im minimalen Automaten

2.25 Myhill-Nerode Relation

- Eine Sprache L ist **regulär** gdw. Anzahl der Residualsprachen von L **endlich**
- **Beweis mittels Myhill-Nerode Relation:** $L = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
 1. Bestimmen einer unendlichen Menge von Wörtern mit unterschiedlichen Residualsprachen: $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
 2. Sei $i, j \in \mathbb{N}$ verschieden. Dann $a^i b^i c^i \in L$, aber $a^j b^j c^i \notin L$. Daher $L^{a^i b^i} \neq L^{a^j b^j}$.
 3. Somit sind alle Residualsprachen unterschiedlich und L **keine reguläre Sprache**

2.26 Kanonischer Minimalautomat

- $M_L = \{R_L, \Sigma, \delta_L, L, F_L\}$ mit $\delta_L(R, a) = R^a$ und $F_L = \{R \in R_L \mid \epsilon \in R\}$, kanonischer Minimalautomat M_L mit $L(M_L) = L$
- R_L , Menge der Residualsprachen von L
- **Durch Umbenennung von Zuständen** von jedem minimalen DFA bekommt man den **kanonischen Minimalautomat**
- Kanonischer Minimalautomat M_L ist **gleich gross** wie Quotientenautomat und damit ein **minimaler DFA** für $L(M)$
- Beispiel: $L = L((bba \mid bab)^*)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$



2.27 Regulärkeit der Sprachen

Eine Sprache ist **regulär**

- gdw. sie von einer **DFA, NFA, ϵ -NFA, RE, rechtslinearen Grammatik akzeptiert wird**
- gdw. sie durch **Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen** entsteht
- gdw. sie **endliche Anzahl von Residualsprachen hat**

Eine Sprache ist **nicht regulär**

- gdw. für sie **Pumping-Lemma nicht gilt**
- gdw. sie **unendliche Anzahl von Residualsprachen hat** (Myhill-Nerode)

3 Kontextfreie Sprachen (CFL)

3.1 Kontextfreie Grammatik (CFG)

- Kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$
- Produktionen folgender Gestalt:
 - $X \rightarrow \alpha$, mit $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$
- $\alpha_1 \rightarrow_G \alpha_2 \rightarrow_G \dots \rightarrow_G \alpha_n$ nennt man eine **Linksableitung** gdw. in jedem Schritt **das linkeste Nichtterminal** in α_i ersetzt wird
- **Rechtsableitung** analog zu Linksableitung

3.2 Induktive Definition einer Sprache mittels Grammatik

- Sei G eine Grammatik: $S \rightarrow \epsilon \mid +S - S \mid +S \mid \epsilon$
- Um zu zeigen, dass G die Menge aller *nicht überziehenden* Wörter erzeugt, betrachten wir die Grammatik als **induktive Definition einer Sprache** $L(G)$
- Wort w ist überziehend gdw. $\exists i$, sodass $\Delta(w_1 \dots w_i) < 0$ mit $\Delta(w) = |w|_+ - |w|_-$
- **nicht überziehend:** $\epsilon, ++--+-$
- **überziehend:** $-+, +-+- -++$
- **Induktive Definition von $L(G)$:**
 - $\epsilon \in L(G)$
 - $u \in L(G) \implies +u \in L(G)$
 - $u \in L(G) \wedge v \in L(G) \implies +u - v \in L(G)$
- Produktionen (\rightarrow) erzeugen Wörter **top-down**: Nichtterminal \rightarrow Wort
- Induktive Definition (\implies) erzeugt Wörter **bottom-up**: kleinere Wörter \implies grössere Wörter
- Induktive Definition betrachtet nur Wörter aus Σ^*

3.3 (Strukturelle) Induktion über die Erzeugung eines Wortes

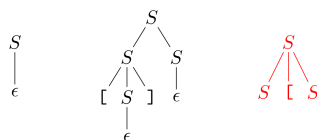
- $w \in L(G) \implies$ beweist man mit **Induktion über Erzeugung von w**
- Um zu zeigen, dass für alle $u \in L(G)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt, zeige:
 - $P(\epsilon)$
 - $P(u) \implies P(+u)$
 - $P(u) \wedge P(v) \implies P(uv)$
- Beispiel: Grammatik $S \rightarrow \epsilon \mid +S - S \mid +S \mid \epsilon$ erzeugt die Wörter, die nicht überziehend sind.
 - Induktionsbasis: $\epsilon \in L(G)$ ist nicht überziehend
 - Induktionsschritt: Seien u, v nicht überziehende Wörter. Es gibt 2 Fälle:
 1. $w = +u$: Für beliebiges i gilt $\Delta(w_1 \dots w_i) = 1 + \Delta(u_1 \dots u_{i-1})$. Da u nicht überziehend ist, folgt $\Delta(u_1 \dots u_{i-1}) \geq 0$ und somit $\Delta(w_1 \dots w_i) \geq 1 \geq 0$. Also ist w auch nicht überziehend.
 2. $w = +u - v$: Für $i \in \{1, \dots, |u|+2\}$ wissen wir bereits $\Delta(w_1 \dots w_i) \geq 0$, analog zum ersten Fall. Für $i > |u|+2$ gilt nun $\Delta(w_1 \dots w_i) = \Delta(+u - v_1 \dots v_j)$, mit $j = i - |u| - 2$. Es folgt $\Delta(+u - v_1 \dots v_j) = \Delta(u) + \Delta(v_1 \dots v_j) \geq 0$, da sowohl u als auch v nicht überziehend ist.

3.4 Induktion über die Länge des Wortes

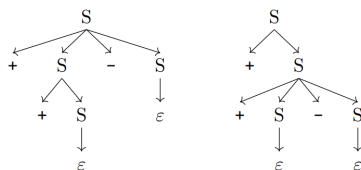
- $P(w) \implies w \in L(G)$ beweist man mit **Induktion über $|w|$**
- Beispiel: Die nicht überziehenden Wörter werden durch die Grammatik $S \rightarrow \epsilon \mid +S - S \mid +S \mid \epsilon$ erzeugt.
 - Induktionsannahme: Für nicht überziehendes w gilt $w \in L(G)$
 - Induktionsbasis: Für $|w| = 0$ gilt $w = \epsilon \in L(G)$
 - Induktionsschritt:
 1. Falls $w = +u$ für ein u nicht überziehend, dann wissen wir nach Induktionsannahme, dass $u \in L(G)$. Daraus folgt $S \rightarrow +S - S \rightarrow^* +u = w$ und somit $w \in L(G)$.
 2. Falls $w = +u - v$ für u, v nicht überziehend: Nach Induktionsannahme gilt $u, v \in L(G)$, also erhalten wir $S \rightarrow +S - S \rightarrow^* +u - S \rightarrow^* +u - v = w$ und somit $w \in L(G)$.

3.5 Syntaxbaum, Mehrdeutigkeit

- Für eine CFG und ein $w \in \Sigma^*$ sind folgende Bedingungen äquivalent:
 - $A \rightarrow_G^* w$
 - $w \in L_G(A)$ (induktive Definition)
 - Es gibt einen Syntaxbaum mit Wurzel A , dessen Rand (Blätter von links nach rechts gelesen) das Wort w ist
- Syntaxbaum für eine Ableitung mit Grammatik $S \rightarrow \epsilon \mid [S] \mid SS$: $w = \epsilon$, $w = []$, kein gültiges Baum



- CFG G **mehrdeutig** gdw. es gibt $w \in L(G)$, das **zwei verschiedene Syntaxbäume** hat
- CFL L **inhärent mehrdeutig** gdw. **jede** CFG G mit $L(G) = L$ **mehrdeutig**
- Beispiel: $S \rightarrow \epsilon \mid +S - S \mid +S \mid \epsilon$ und $w = +- - \Leftrightarrow L_G(S)$ ist mehrdeutig



3.6 Chomsky-Normalform (CNF)

- Eine CFG G ist in Chomsky-Normalform gdw. alle Produktionen eine der Formen haben: $A \rightarrow a$ oder $A \rightarrow BC$
- ϵ -Produktion: $A \rightarrow \epsilon$
- Kettenproduktion: $A \rightarrow B$
- Zu jeder CFG G kann man eine CFG G' in Chomsky-Normalform konstruieren, die **keine** ϵ -Produktionen und Kettenproduktionen enthält, so dass gilt $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$

- **Konstruktion:**

1. Füge für jedes $a \in \Sigma$ mit der Länge ≥ 2 ein neues Nichtterminal X_a und eine neue Produktion $X_a \rightarrow a$ hinzu:
 - $A \rightarrow aBC$ wird zu $A \rightarrow X_aBC$
 $X_a \rightarrow a$
2. Ersetze jede Produktion der Form $A \rightarrow B_1B_2 \dots B_k$ mit der Länge $k \geq 3$:
 - $A \rightarrow BCD$ wird zu $A \rightarrow BX_{CD}$
 $X_{CD} \rightarrow CD$
3. Eliminiere alle ϵ -Produktionen, indem wir zuerst ϵ in Produktionen einsetzen und dann eliminieren:
 - $A \rightarrow XY$ wird zu $A \rightarrow X\epsilon$ wird zu $A \rightarrow X$
 $Y \rightarrow \epsilon$ $Y \rightarrow \epsilon$
4. Eliminiere alle Kettenproduktionen, indem wir zuerst Nichtterminale in Produktionen einsetzen und dann eliminieren
 - $A \rightarrow X \mid YZ$ wird zu $A \rightarrow YZ \mid x \mid DL \mid B$
 $X \rightarrow x \mid DL \mid B$ $B \rightarrow b$
 $B \rightarrow b$
 - wird zu $A \rightarrow YZ \mid x \mid DL \mid b$

3.7 Greibach-Normalform

- Eine CFG ist in Greibach-Normalform gdw. alle Produktionen die Form $A \rightarrow aA_1 \dots A_n$ haben
- Zu jeder CFG G gibt es eine CFG G' in Greibach-Normalform mit $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$

3.8 Pumping Lemma für CFLs

- Für jede CFL L gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in $z = uvwxy$, dass
 1. $vx \neq \epsilon$ bzw. $|vx| \geq 1$
 2. $|vwx| \leq n$
 3. $\forall i \geq 0. uv^iwx^iy \in L$
- Beispiel: $L = \{a^ib^ic^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Angenommen L sei kontextfrei.

Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L .

Wähle $z = a^n b^n c^n \in L$. Sei $uvwxy$ eine Zerlegung von z mit $vx \neq \epsilon$ und $|vwx| \leq n$. Wir betrachten nun 2 Fälle:

1. uvw enthält nur as oder bs oder cs : Für $i = 2$ erhalten wir $uv^2wx^2y = a^{i+2|v|+2|x|}b^ic^i$. Da $|vx| \geq 1$, gilt $uv^2wx^2y \notin L$.
2. uvw enthält nur as und bs oder bs und cs : Hier muss vx mindestens ein a und ein b enthalten. Damit gilt aber $|uv^2wx^2y|_a > |uv^2wx^2y|_c$. Also $uv^2wx^2y \notin L$.

3.9 Abschlusseigenschaften der CFLs

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ kontextfreie Sprachen, dann sind auch

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 L_2$
- L^*
- L^R

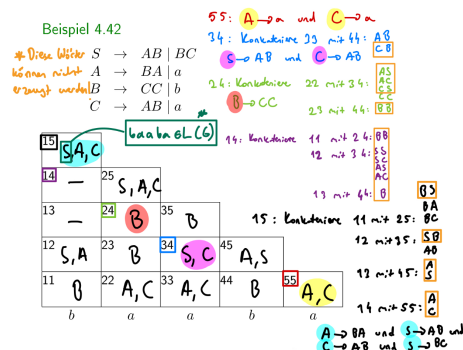
3.10 Erzeugend, Erreichbar, Nützlich

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ CFG. Ein Symbol $X \in V \cup \Sigma$ ist
 - **erzeugend** gdw. es eine Ableitung $X \rightarrow_G^* w \in \Sigma^*$ gibt
 - **erreichbar** gdw. es eine Ableitung $S \rightarrow_G^* \alpha X \beta$ gibt
 - **nützlich** gdw. erzeugend und erreichbar
- Bekommt man eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$, die nur **nützliche Symbole** enthält, durch:
 1. Elimination der **nicht erzeugenden** Symbole
 2. Elimination der **nicht erreichbaren** Symbole
- Menge der erzeugenden Symbole einer CFG ist berechenbar
- Menge der erreichbaren Symbole einer CFG ist berechenbar

3.11 Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus (CYK)

- **Wortproblem** ist für eine CFG G mittels CYK-Algorithmus in Zeit $O(|w|^3)$ entscheidbar
- **Algorithmus:** $w \in L(G)$?
 1. Konstruiere die Treppe (Breite = Höhe = $|w|$) und beschrifte jede Spalte von unten nach oben: Für 1. Spalte $1, 1 - 1, 2 - \dots - 1, |w|$; für 3. Spalte $3, 3 - 3, 4 - \dots - 3, |w|$
 2. Fülle die erste Reihe mit Nichtterminalen ein, die die einzelnen Buchstaben des Wortes erzeugen

3. Fülle die anderen Kästchen mit Nichtterminalen nach Beschriftungen ein: Für 1, 2 konkateniere 1, 1 2, 2; für 1, 4 konkateniere 1, 1 2, 4 und 1, 2 3, 4 und 1, 3 4, 4
 4. Wenn es im Kästchen 1, $|w|$ das Startsymbol gibt, dann gilt $w \in L(G)$, wenn nicht $w \notin L(G)$
- Beispiel: $baaba \in L(G)$?



3.12 Nicht Entscheidbare Probleme für CFGs

- **Äquivalenz:** $L(G_1) = L(G_2)$
- **Schnittproblem:** $L(G_1) \cap L(G_2)$
- **Regularität:** $L(G)$ regulär?
- **Mehrdeutigkeit:** Ist G mehrdeutig?

3.13 Kellerautomat (PDA)

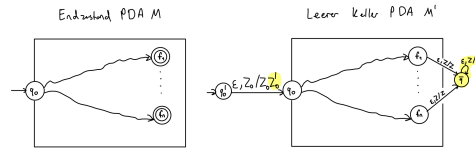
- Ein (nichtdeterministischer) Kellerautomat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ besteht aus
 - Q , endliche Menge von **Zuständen**
 - Σ , endliches **Eingabealphabet**
 - Γ , endliches **Kelleralphabet**
 - q_0 , **Startzustand**
 - Z_0 , **unterstes Kellerzeichen**
 - $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$, **Übergangsfunktion**
 - $F \subseteq Q$, Menge von **Endzuständen**
- **Bedeutung von $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$:** Wenn sich M in Zustand q befindet, das Eingabezeichen a liest und Z das oberste Kellerzeichen ist, so kann M im nächsten Schritt in q' übergehen und Z durch α ersetzen.

- **POP-Operation:** $\alpha = \epsilon$, das oberste Kellerzeichen Z wird entfernt
- **PUSH-Operation:** $\alpha = Z'Z$, Z' wird als neues oberstes Kellerzeichen gepusht
- **ϵ -Übergang:** $a = \epsilon$, ohne Lesen eines Eingabezeichens
- Eine **Konfiguration** eines Kellerautomaten M ist ein Tripel (q, w, α) mit $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ und $\alpha \in \Gamma^*$
 - q , der **momentane Zustand**
 - w , **noch zu lesende Teil der Eingabe**
 - α , der **aktuelle Inhalt des Kellers**
- **Anfangskonfiguration** von M für die Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist (q_0, w, Z_0)
- Auf der Menge aller Konfigurationen definieren wir binäre Relation \rightarrow_M :
$$(q, aw, Z\alpha) \rightarrow_M \begin{cases} (q', w, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, a, Z) \\ (q', aw, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, \epsilon, Z) \end{cases}$$
- **Bedeutung von $(q, w, \alpha) \rightarrow_M (q', w', \alpha')$:** Wenn M sich in der Konfiguration (q, w, α) befindet, dann kann er in einen Schritt in die Nachfolgerkonfiguration (q', w', α') übergehen.
- Eine Konfiguration kann **mehrere Nachfolgerkonfigurationen** haben \rightarrow **Nichtdeterminismus**
- PDA M **akzeptiert** $w \in \Sigma^*$ **mit Endzustand** gdw. $(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma)$ für $f \in F$, $\gamma \in \Gamma^*$
- PDA M **akzeptiert** $w \in \Sigma^*$ **mit leeren Keller** gdw. $(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$ für $q \in F$
- Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller **gleich mächtig**

3.14 Endzustand PDA $M \rightarrow$ Leerer Keller PDA M'

- **Idee:**
 1. Sobald M einen Endzustand erreicht, darf er den Keller leeren $\rightarrow M'$ **geht in den neuen Nicht-Endzustand \bar{q} und leert dort den Keller**, es gibt **keine Endzustände mehr**
 2. Verhindern, dass der Keller von M leer wird, ohne dass M in einem Endzustand ist $\rightarrow M'$ hat ein **neues Symbol Z' ganz unten im Keller**
- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$
- $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta')$ mit $Q' = Q \uplus \{q'_0, \bar{q}\}$, $\Gamma' = \Gamma \uplus \{Z'_0\}$ und

- $\delta'(q'_0, \epsilon, Z'_0) = \{(q_0, Z_0 Z'_0)\} \rightarrow$ **Übergang von q'_0 zu q_0**
- $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ für $q \in Q \setminus F$, $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $Z \in \Gamma \rightarrow$ **Alle Übergänge zwischen qs**
- $\delta'(f, a, Z) = \delta(f, a, Z)$ für $f \in F$, $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma \rightarrow$ **Alle Übergänge von Endzuständen zu qs**
- $\delta'(f, \epsilon, Z) = \delta(f, \epsilon, Z) \cup \{(\bar{q}, Z)\}$ für $Z \in \Gamma \rightarrow$ **Alle ϵ -Übergänge von Endzuständen zu qs und \bar{q}**
- $\delta'(\bar{q}, \epsilon, Z) = \{(\bar{q}, \epsilon)\}$ für $Z \in \Gamma' \rightarrow$ **Übergang von \bar{q} zu \bar{q} zum Leeren des Kellers**

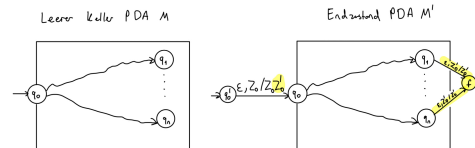


3.15 Leerer Keller PDA $M \rightarrow$ Endzustand PDA M'

- **Idee:**

1. Es wird am Anfang Z'_0 auf Keller geschrieben, damit der Keller nicht geleert wird
2. Sobald M auf dem Keller Z'_0 findet, muss er in den Endzustand gehen, somit ist der Keller am Ende nicht leer $\rightarrow M'$ **geht in den neuen Endzustand f**

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$
- $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta', F')$ mit $Q' = Q \uplus \{q'_0, f\}$, $\Gamma' = \Gamma \uplus \{Z'_0\}$, $F' = \{f\}$ und
 - $\delta'(q'_0, \epsilon, Z'_0) = \{(q_0, Z_0 Z'_0)\} \rightarrow$ **Übergang von q'_0 zu q_0**
 - $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ für $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $Z \in \Gamma \rightarrow$ **Alle Übergänge zwischen qs**
 - $\delta'(q, \epsilon, Z'_0) = \{(f, Z'_0)\}$ für $q \in Q$, $f \in F' \rightarrow$ **Übergang von q zu f beim Sehen von Z'_0**



3.16 Erweiterungslemma