Einführung in die Theoretische Informatik
Aufgabenhandbuch

Efe Kamasoglu

May 8, 2023

1 Tutorium 1

1.1 Beweistechniken für Sprachen

- **A $\Longrightarrow$ B:**
  1. Annahme: A ist wahr
  2. Zeige B unter der Annahme
- **A gdw. B / A $\iff$ B:**
  1. Zeige $A \Longleftarrow B$
  2. Zeige $A \Longrightarrow B$
- **Beweis per Kontraposition für A $\Longrightarrow$ B:**
  1. Zeige $\neg B \Longrightarrow \neg A$
- **Beweis per Induktion für A $\Longrightarrow$ $\mathbf{A^n}$:**
  1. Annahme: A
  2. Induktionsanfang: Zeige, dass A^n für $n = 0$ gilt
  3. Induktionshypothese: A^n gilt unter der Annahme für eine feste aber beliebige $n \in \mathbb{N}$
  4. Induktionsschritt: Zeige, dass A^{n+1} unter der Annahme und der Hypothese gilt
- **Beweis durch Widerspruch für A:**
  1. Nehme an, dass $\neg A$ wahr ist
  2. Leite logische Konsequenzen aus dieser Annahme her
  3. Zeige, dass die Konsequenzen zum Widerspruch führen
- **Widerlegen mithilfe eines Gegenbeispiels**

2 Tutorium 2

2.1 Strukturelle Induktion

Um zu beweisen, dass eine Eigenschaft $P(r)$ für alle regulären Ausdrücke gilt.

1. Zeige $P(\emptyset)$
2. Zeige $P(\epsilon)$
3. Zeige $P(a)$ für alle $a \in \Sigma$
4. Unter der Annahme $P(\alpha)$ und $P(\beta)$ (I.H.), zeige $P(\alpha\beta)$
   $\rightarrow$ verwende $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$

5. Unter der Annahme $P(\alpha)$ und $P(\beta)$ (I.H.), zeige $P(\alpha \mid \beta)$
   $\rightarrow$ verwende $L(\alpha \mid \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$

6. Unter der Annahme $P(\alpha)$ (I.H.), zeige $P(\alpha^*)$
   $\rightarrow$ verwende $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$

Beispiel: *empty*(r) entscheidet, ob $L(r) = \emptyset$. Zeige die Korrektheit der Konstruktion:

(a) **Konstruktion**

- $\mathsf{empty}(\boldsymbol{\emptyset}) = \mathsf{true}$
- $\mathsf{empty}(\mathsf{a}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{empty}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{empty}(\alpha\beta) = \mathsf{empty}(\alpha) \vee \mathsf{empty}(\beta)$
- $\mathsf{empty}(\alpha \mid \beta) = \mathsf{empty}(\alpha) \wedge \mathsf{empty}(\beta)$
- $\mathsf{empty}(\alpha^*) = \mathsf{false}$

Korrektheit Wir zeigen $L(r) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(r)$ mittels struktureller Induktion.

Fall $r = \boldsymbol{\emptyset}$, $r = \mathsf{a}$, $r = \boldsymbol{\epsilon}$. Trivial.

Fall $r = \alpha^*$.
Wir haben $\epsilon \in L(\alpha^*) \neq \emptyset \iff \neg\mathsf{empty}(\alpha^*)$. Die Aussage gilt per Definition von empty.

Fall $r = \alpha\beta$.
Als Induktionshypothesen erhalten wir $L(\alpha) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(\alpha)$ und $L(\beta) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(\beta)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} L(\alpha\beta) = \emptyset &\iff L(\alpha)L(\beta) = \emptyset \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \vee L(\beta) = \emptyset \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{empty}(\alpha) \vee \mathsf{empty}(\beta) = \mathsf{empty}(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Fall $r = \alpha \mid \beta$.
Es gelten dieselben Induktionshypothesen wie im vorherigen Fall.

Wir haben

$$\begin{aligned} L(\alpha \mid \beta) = \emptyset &\iff L(\alpha) \cup L(\beta) = \emptyset \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \wedge L(\beta) = \emptyset \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{empty}(\alpha) \wedge \mathsf{empty}(\beta) = \mathsf{empty}(\alpha \mid \beta). \end{aligned}$$